RÉPUBLIQUE ISLAMIQUE DE MAURITANIE

Honneur - Fraternité - Justice

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE
ET DE LA REFORME DU SYSTEME EDUCATIF
INSTITUT PEDAGOGIQUE NATIONAL

Mathématique

4ème AS

Manuel de l'élève

Préface

Collègues Professeurs,

Chers élèves,

Dans le cadre des efforts visant à améliorer la qualité du système éducatif national et en accompagnement de la révision des programmes de l'Enseignement Secondaire opérée en 2016 et des innovations nationales et internationales, l'Institut Pédagogique National cherche à concrétiser cette tendance en élaborant et publiant un manuel scolaire de qualité occupant une place de choix dans l'amélioration des pratiques pédagogiques.

Dans ce contexte, Nous sommes heureux de mettre entre les mains des élèves de la 4ème AS du Secondaire, le manuel de Mathématique dans sa version expérimentale.

Nous espérons que ce manuel constituera une aide précieuse pour améliorer l'efficacité de construction des savoirs chez les élèves.

Tout en souhaitant recevoir de la part des collègues Professeurs, toute observation, suggestion ou proposition de nature à améliorer la version finale de cet ouvrage, nous ne pouvons qu'adresser nos vifs remerciements aux concepteurs :

Les auteurs :

Mohameden O/ Bah
Inspecteur de l'Enseignement Secondaire

Mohamed Cheikh o/ Lebchir
Professeur de l'Enseignement Secondaire

Sidi Mohamed o/ Arafa
Professeur de l'Enseignement Secondaire

Mohamed Yahya O/ Med Abdallahi
Inspecteur de l'Enseignement Secondaire

Ahmed Mahmoud o/ Yacoub
Professeur de l'Enseignement Secondaire

Yesleck O/ Bamba O/ Tiyib
Professeur de l'Enseignement Secondaire

Directeur Général
Cheikh Ahmedou

AVANT-PROPOS

Chers collègues Professeurs,

Chers élèves,

C'est dans le cadre des énormes efforts que fournit l'Institut Pédagogique National pour mettre à votre disposition, dans les meilleurs délais, un outil pouvant vous aider à accomplir respectivement votre tâche que s'inscrit l'élaboration de ce manuel intitulé : ***Mathématiques 4ème AS*** *pour la quatrième année du collège.*

Celui-ci est conçu conformément aux nouveaux programmes en vigueur. Il vise à offrir aussi bien au professeur qu'à l'élève une source d'information et de connaissances (Activités, Savoirs ; Savoir-faire,….) pour aider le premier à préparer son cours et le second à mieux assimiler le contenu son programme de l'année et même à élargir son horizon. Il importe cependant qu'il ne peut en aucun cas être le seul support, ni pour l'un, ni pour l'autre et doit être renforcé et enrichi à travers la recherche d'autres sources d'informations.

Le contenu de ce manuel est réparti en dix huit chapitres dont les intitulés sont mentionnés dans le tableau de matière et qui recouvrent les quatre domaines du programme à savoir : ***Nombres et calculs***, ***Géométrie plane***, ***Organisation et gestion de données*** *et* ***Géométrie dans l'espace****.*

Chaque chapitre renferme tous les savoirs et savoir-faire énoncés dans le programme dégagés à partir d'activités de découverte choisies pour leur adaptation à nos réalités et d'exercices d'application pour faciliter leur appropriation par les élèves.

Chaque chapitre est sanctionné par une ***série d'exercices*** *dont le niveau de difficulté est progressif pour mettre à l'épreuve les capacités de l'élève afin d'évaluer le degré d'assimilation des notions fondamentales abordées.*

Nous attendons vos précieuses remarques et suggestions en vue d'améliorer ce manuel dans ces prochaines éditions.

Les auteurs:

Mohameden O/ Bah
Inspecteur de l'Enseignement Secondaire

Mohamed Yahya O/ Mohamed Abdallahi
Inspecteur de l'Enseignement Secondaire

Mohamed Cheikh o/ Lebchir
Professeur de l'Enseignement Secondaire

Ahmed Mahmoud o/ Yacoub
Professeur de l'Enseignement Secondaire

Sidi Mohamed o/ Arafa
Professeur de l'Enseignement Secondaire

Yesleck O/ Bamba O/ Tiyib
Professeur de l'Enseignement Secondaire

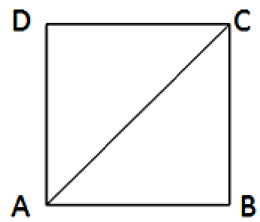
Table des matières

Chapitre 1 : Nombres réels et opérations

I. Activités préparatoires :

Activité 1 :

1. *Trouve la longueur de la diagonale [AC] d'un carré ABCD de coté 1 cm.*
2. *Construis un triangle IJK rectangle en I, dont les côtés de l'angle droit mesurent respectivement 1cm et 2 cm ; puis calcule la longueur du côté [JK].*



Remarque 1 :

La longueur de la diagonale du carré ABCD est $\sqrt{2}$. *Ce nombre est irrationnel, c'est un nombre réel*

Activité 2 :

Reproduis l'axe suivant puis place, avec la plus grande précision possible, les points d'abscisses respectives $\sqrt{2}$ *,* $\sqrt{5}$ *et* π.

Activité 3 :

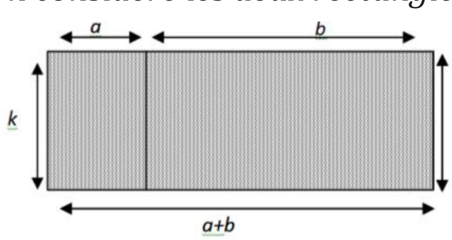
Partie 1 :

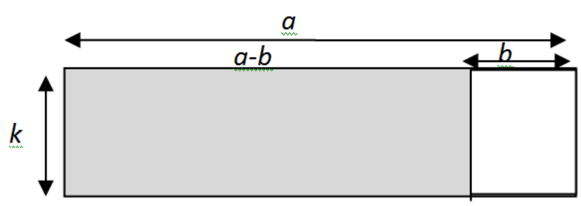
Recopie et complète le tableau ci-dessous. Qu'observe-t-on ?

a	b	k	$a+b$	$a-b$	ka	kb	$k(a+b)$	$ka+kb$	$k(a-b)$	$ka-kb$
6	4	3								
-3	5	4								
$2x$	$-5x$	6								

Partie 2 :

On considère les deux rectangles de côtés respectifs $a + betketa - betk$.





Dans chaque figure, calcule les aires grises par deux méthodes différentes.
Que peut –on déduire ?

Activité 4 : ***Somme de deux réels en écriture fractionnaire***

1. Calcule : $\frac{\sqrt{5}}{11} + \frac{\sqrt{5}}{11}$; $\frac{\pi}{5} + \frac{7}{12}$.

2. Écris sous forme de fraction et simplifie lorsque c'est possible :

$\frac{1,25}{13} + \frac{0,05}{13}$; $\frac{-4}{5} + \frac{-12}{17}$; $\frac{5\sqrt{7}}{16} + \frac{2\sqrt{7}}{3}$; $\frac{2\pi}{7} + \frac{13\pi}{5}$; $\frac{5\pi}{12} - \frac{\pi}{16}$. *(Soustraire un réel c'est ajouter son opposé)*

Activité 5 : ***produit de deux réels en écriture fractionnaire***

1. Effectue les produits : $\frac{3}{2\pi} \times \frac{17}{12}$; $4 \times \frac{\sqrt{2}}{12}$.

2. Écris sous forme de fraction et simplifie lorsque c'est possible :

$\frac{1,5}{3} \times \frac{0,19}{0,5}$; $\frac{36}{-6} \times \frac{1,8}{12}$; $\frac{2}{0,5} \times \frac{3}{0,5}$; $\frac{2\pi}{3} \times \frac{3}{4\pi}$.

Activité 6 : ***Quotient de deux réels en écriture fractionnaire***

Calcule et compare :

$\frac{12}{5} \div 13$ *et* $\frac{12}{5} \times \frac{1}{13}$; $2 \div \frac{3}{5}$ *et* $2 \times \frac{5}{3}$; $\frac{4}{5} \div \frac{2}{17}$ *et* $\frac{4}{5} \times \frac{17}{2}$; $\frac{2}{\pi} \div \frac{3}{\pi}$ *et* $\frac{2}{\pi} \times \frac{\pi}{3}$;

$2 \div \frac{3}{5}$ *et* $2 \times \frac{5}{3}$; $\frac{4}{15} \div \frac{2}{7}$ *et* $\frac{4}{15} \times \frac{7}{2}$; $\frac{2}{5\pi} \div \frac{3}{\pi}$ *et* $\frac{2}{5\pi} \times \frac{\pi}{3}$.

Activité 7 :

Complète puis calcule :

$(-3) \times (-3) \times (-3) = (-3)^{\cdots}$; $(4,5) \times (4,5) \times (4,5) = (4,5)^{\cdots}$; $-\frac{1}{2} (\times -\frac{1}{2}) \times (-\frac{1}{2}) \times (-\frac{1}{2}) = (-\frac{1}{2})^{\cdots}$;

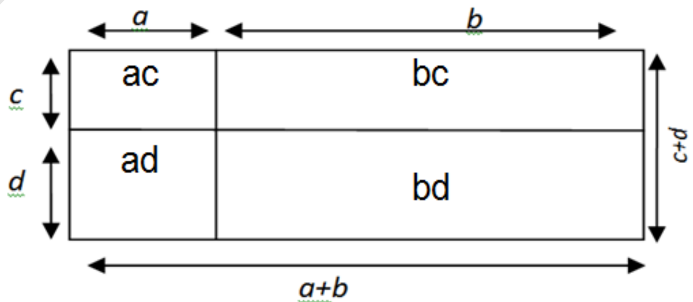
$\sqrt{5} \times \sqrt{5} \times \sqrt{5} \times \sqrt{5} \times \sqrt{5} \times \sqrt{5} = (\sqrt{5})^{\cdots}$; $\sqrt{3} \times \sqrt{3} \times \sqrt{3} \times \sqrt{3} \times \sqrt{3} = (\sqrt{3})^{\cdots}$.

Activité 8 :

On considère la figure ci-contre :

1. Calcule de deux façons la Surface de la figure ci-contre.

2. En déduis les autres formules de la distributivité double.



II. Je retiens :

1. Nombres réels et axe gradué :

1.1. Notion des nombres réels :

Définition 1 et notation :

- *Les rationnels et les nombres tels que* $\sqrt{2}, \pi$, …. *constituent un nouvel ensemble, appelé ensemble des nombres réels ; on le note* $\mathbb{R}$..
- *L'ensemble des réels positifs est noté* $\mathbb{R}_+$.
- *L'ensemble des réels négatifs est noté* $\mathbb{R}_-$.

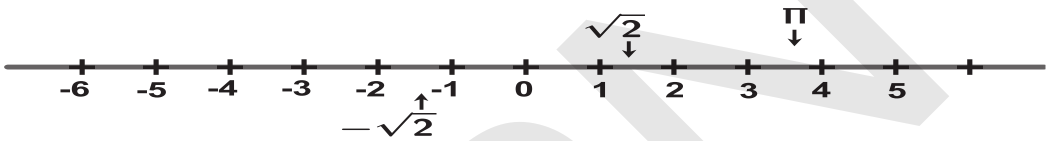
Remarque 2 :

- *L'ensemble des réels positifs privé de zéro est noté* $\mathbb{R}^*$. *On écrit :* $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$ *et on lit* $\mathbb{R}$ *privé de zéro.*
- $\mathbb{R} = \mathbb{R}_+ \cup \mathbb{R}_-$.

1.2. Axe gradué :

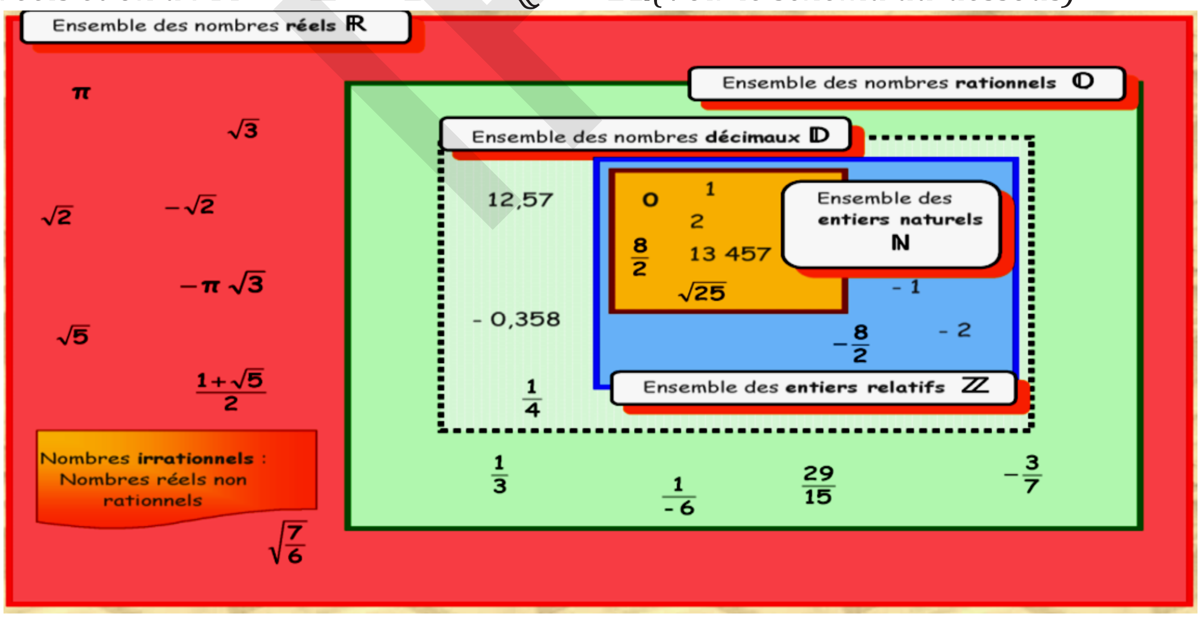
Règle 1 :

L'ensemble des réels nous permet de repérer tout point sur une droite graduée.



Remarque 3 :

Tous les nombres qui apparaissent dans le schéma suivant sont des nombres réels et on a : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.*(Voir le schéma au-dessous)*



2. *Opérations sur les nombres réels :*

2.1. *Addition des réels :*

En se basant sur l'addition dans $\mathbb{Q}$ et ses propriétés. On définit aussi une addition dans $\mathbb{R}$, qui prolonge celle de $\mathbb{Q}$.

Règle 2 :

- *La somme de deux réels de même signe est un réel :*
  - *de même signe*
  - *qui a pour distance à zéro la somme des distances des deux termes de la somme.*
- *La somme de deux réels des signes contraire est un réel :*
  - *dont le signe est celui qui a la plus grande distance à zéro ;*
  - *qui a pour distance à O, la différence des distances des deux termes de la somme.*

Propriété 1 :

- *L'addition dans $\mathbb{R}$ est commutative et associative ;*
- *Le réel 0 est l'élément neutre pour l'addition ;*
- *Tout réel x a un opposé noté $opp(x)$(ou également$-x$) et on a: $x + opp(x) = 0$;*
- *Pour tous réels a, b et c ; on a : $a = b$ équivaut à $a + c = b + c$.*

Remarque 4 :

Soustraire un réel c'est ajouter son opposé. les règles usuelles de suppression des parenthèses déjà vues dans $\mathbb{Q}$ restent les mêmes dans $\mathbb{R}$ et également les formules :

$opp\left(opp(a)\right) = a$, $opp(a+b) = opp(a) + opp(b)$ et $opp(a-b) = opp(a) - opp(b)$.

2.2. *Multiplication des réels :*

Tu connais aussi la multiplication dans $\mathbb{Q}$ et ses propriétés. Il existe aussi une multiplication dans $\mathbb{R}$, qui étend celle de $\mathbb{Q}$.

Règle 3 :

Le produit de deux réels est un réel qui a :

- *Pour signe :*
  - $+$ *si les deux nombres ont le même signe.*
  - $-$ *si les deux nombres sont signes contraires.*
- *Pour distance au point O, le produit des distances des facteurs au point O.*

Voici quelques-unes de ses propriétés que tu admettras :

Propriété 2 :

- *La multiplication dans $\mathbb{R}$ est commutative et associative ;*
- *Le réel 1 est l'élément neutre pour la multiplication ;*
- *Tout réel non nul x a un inverse noté $inv(x)$ ou également $\frac{1}{x}$ et on a : $x \times \frac{1}{x} = 1$*
- *La multiplication est distributive par rapport à l'addition (et la soustraction)*
- *Pour tout réel x, $x \times 0 = 0$.*
- *Le produit de deux réels non nuls est un réel non nul.*

Remarque 6 :

- *Si a et b sont deux réels on a :* $a \times b = 0$ *équivaut à a = 0 ou b = 0 ;*
- *Diviser par un réel c'est multiplier par son inverse et on a les formules :* $inv(inv(a)) = a$, $inv(a \times b) = inv(a) \times inv(b)$.
- *Les règles de distributivité double déjà vues restent inchangées dans* $\mathbb{R}$*, elles seront développées dans le paragraphe suivant et réinvesties dans le chapitre intitulé Calcul littéral.*

Remarque 7 : Règle des signes pour la multiplication

- $(-a) \times b = -ab = -ba$
- $a \times (-b) = -ab = -ba$
- $(-a) \times (-b) = ab = ba$

2.3. Distributivité de la multiplication des nombres réels :

31.A. Distributivité simple :

Règle 4 :

Quels que soient les nombres réels a, b et k on a :

$k(a + b) = ka + kb$; $k(a - b) = ka - kb$.

On dit que la multiplication est distributive par rapport à l'addition.

$$k(a + b) = \xrightleftharpoons[\text{factoriser}]{\text{developper}} ka + kb$$

2.3.B.Distributivitédouble :

Règle 5 :

Quels que soient les nombres réels a, b, c, et d, on a :

$$(a + b)(c + d) = \xrightleftharpoons[\text{factoriser}]{\text{developper}} ac + ad + bc + bd.$$

$$(a + b)(c - d) = \xrightleftharpoons[\text{factoriser}]{\text{developper}} ac - ad + bc - bd.$$

$$(a - b)(c + d) = \xrightleftharpoons[\text{factoriser}]{\text{developper}} ac + ad - bc - bd.$$

$$(a - b)(c - d) = \xrightleftharpoons[\text{factoriser}]{\text{developper}} ac - ad - bc + bd.$$

Remarque 8 :

Dans les formules précédentes, si $a = c$ *et* $b = d$*, on obtient les formules suivantes dites les identités (ou égalités) remarquables :*

$$(a + b)(a + b) = (a + b)^2 = \xrightleftharpoons[\text{factoriser}]{\text{developper}} a^2 + 2ab + b^2.$$

$$(a - b)(a - b) = (a - b)^2 = \xrightleftharpoons[\text{factoriser}]{\text{developper}} a^2 - 2ab + b^2.$$

$$(a + b)(a - b) = \xrightleftharpoons[\text{factoriser}]{\text{developper}} a^2 - b^2.$$

Math AS.indd 11 15/07/2024 15:30:37

3. Ecritures fractionnaires de nombres réels et opérations :

Règle 6 :

Pour tous réels a, b, c et d avec c et d non nuls :

1. $\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}$.	2. $\frac{a}{c}+\frac{b}{d}=\frac{a\times d+b\times c}{c\times d}$

Règle 7 :

Pour tous réels a, b, c et d: (b et d non nuls)

1. $c\times\frac{a}{b}=\frac{c\times a}{b}$.   2. $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{a\times c}{b\times d}$

Remarque 9 :

a étant un réel non nul : $a\times\frac{1}{a}=\frac{a\times 1}{a}=1$; l'inverse de a est noté $\frac{1}{a}$.

4. Puissances d'un réel :

Définition 1 :

Étant donné, a un réel non nul et n un entier naturel $n>1$:

$a^n=a\times a\times a\times\ldots\times a$, a^n se lit : a exposant n ou également a puissance n.

Convention : $a^0=1$(a non nul) ; $a^1=a$.

Définition 2 :

Soit a un réel non nul, n un entier naturel : $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$, a^{-n} est l'inverse de a^n.

Remarque 10 :

a est un réel non nul, n un entier : $a^n\times a^{-n}=a^{n-n}=a^0=1$.

5. Priorité des opérations :

Règle 6 :

En l'absence de parenthèses, on effectue les opérations dans l'ordre suivant :

- *Les puissances ;*
- *Les multiplications et les divisions ;*
- *Les additions et les soustractions.*

Règle 7 :

Pour tous réels a, b, c et d non nuls, on a :

$$\frac{a}{\frac{b}{c}}=a\times\frac{c}{b}\ ;\qquad \frac{\frac{a}{b}}{c}=\frac{a}{b}\times\frac{1}{c};\qquad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}.$$

Propriété 3 :

a et b sont des réels non nuls n, m et p sont des entiers :

1. $a^n\times a^p=a^{n+p}$; 2. $(a^n)^p=a^{n\times p}$; 3. $\left(\frac{a}{b}\right)^p=\frac{a^p}{b^p}$; 4. $\frac{a^n}{a^p}=a^{n-p}$

III. Je sais faire :

Enoncés des exercices d'application :

Exercice d'application 1 :

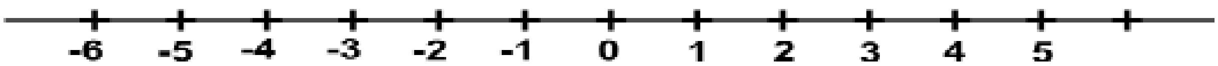
1. Complète en utilisant les symboles $\in, \subset, \notin$ *ou* $\not\subset$ *:*

$-1{,}5 \ldots \mathbb{Q}$; $\frac{6}{2} \ldots \mathbb{N}$; $2\sqrt{2} \ldots \mathbb{Q}$; $2 \ldots \mathbb{Z}$; $4\sqrt{5} \ldots \mathbb{R}$;

$0{,}5 \ldots \mathbb{D}$; $\mathbb{Q} \ldots \mathbb{R}$; $\mathbb{Z} \ldots \mathbb{N}$; $\mathbb{Z} \ldots \mathbb{Q}$.

2. Place sur l'axe ci-dessous les points :

$A(1{,}5)$; $B(-0{,}1)$; $C(0{,}2)$; $D(-0{,}5)$; $E(2)$; $F(-2)$.



Exercice d'application 2 :

Complète le tableau suivant en utilisant $\in$ *ou* $\notin$.

Equation	*Solution*	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{D}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$
$x+3=0$						
$6x=7$						
$4x-11=0$						
$x+\sqrt{3}=0$						
$x-2\pi=8$						
$5x-\sqrt{2}=0$						

Exercice d'application 3 :

1. Ecris plus simplement l'expression : $a = -\sqrt{5} - \sqrt{2} + opp(\sqrt{5} - 3\sqrt{2})$;

2. Ecris plus simplement l'expression b suivante après avoir supprimé les parenthèses : $b = -2\sqrt{5} - (2\sqrt{3} - 4) + ((\sqrt{5} - \sqrt{3}) + 1)$.

Exercice d'application 4 :

Calcule puis simplifie, si c'est possible, l'écriture de chacune des expressions

$\frac{1}{2} \times (-\sqrt{12})$; $\frac{4}{\sqrt{6}} \times \left(1 + \sqrt{6}\right)$; $inv\left(-\sqrt{5} \times \frac{3}{2\sqrt{15}}\right)$; $inv(\sqrt{5} + \sqrt{7}) \times inv(\sqrt{7} - \sqrt{5})$.

Exercice d'application 5 :

1. *Donne le signe puis calcule les produits suivants :*

   a) 7×3 ; *b)* $(-2) \times 3$; *c)* $0{,}4 \times (-6)$; *d)* $(-0{,}7) \times (-10)$.

2. *Sans chercher à calculer les produits, détermine leurs signes*

   $A = (-2{,}6) \times (-0{,}5) \times (-6) \times (-3{,}7) \times 7$.

   $B = 6 \times (-8) \times 3 \times (-7) \times (-9) \times (-0{,}1)$.

   $C = 6{,}5 \times (-4) \times (-3) \times (-8{,}2) \times 6 \times 5{,}4 \times 3{,}16$.

Exercice d'application 5 :

Effectue les opérations :

$$\frac{-7\pi}{31}+\frac{8\pi}{31}\,; \quad \frac{-\sqrt{15}}{4}+\frac{3\sqrt{15}}{13}\,; \quad \frac{\sqrt{17}}{-16}+\frac{5\sqrt{17}}{-16}\,; \quad \frac{21}{2\sqrt{11}}-\frac{13}{4\sqrt{11}}.$$

$$\frac{1,5}{3}\times\frac{0,19}{0,5}\,;\ \frac{36}{-6}\times\frac{1,8}{12}\,;\ \frac{2}{0,5}\times\frac{3}{0,5}\,;\ \frac{2\pi}{3}\times\frac{3}{4\pi}.$$

Exercice d'application 6 :

Écris le plus simplement possible les quotients suivants :

$$\frac{\frac{\pi}{2}}{13}\,;\ \frac{\pi}{\frac{2}{13}}\,;\ \frac{\pi+1}{\frac{11}{12}}\,;\ \frac{0,5}{\frac{11}{12}}\,;\ \frac{\frac{\pi}{2}}{\frac{1}{2}}\,;\ \frac{1}{12}\div\frac{-3\sqrt{2}}{5}\,;\ \frac{24}{5\sqrt{3}}\div\left(12+\frac{1}{2}\right).$$

Exercice d'application 7 :

Calcule :

$$4^3;\ (0,2)^4\,;\ (-\sqrt{5})^2\,;\ (-2\sqrt{3})^5\,;\ (\sqrt{10})^1\,;\ (\frac{2}{7})^3\,;\ (\sqrt{20})^0\,;\ 10^6\,;\ \pi^3.$$

Exercice d'application 8 :

Donne l'inverse de : $5^2;\ 3^3\,;\ (1,5)^4\,;\ 2^{-5}\,;\ 4^{-2}\,;\ \pi^{-2}\,;\ \pi^2.$

Exercice d'application 9 :

Calcule $A=\frac{20}{3}\times\left(\frac{2}{3}-\frac{5}{2}+\frac{3}{2}\right)^2\div 10-3,$

Solutions des exercices d'application :

Exercice d'application1 :

1. Complète en utilisant les symboles $\in, \subset, \notin$ *ou* $\not\subset$ *:*

$-1,5\ \in\mathbb{Q}$; $\ \frac{6}{2}\in\mathbb{N}$; $\ 2\sqrt{2}\ \notin\mathbb{Q}$; $\ 2\in\mathbb{Z}$; $\ 4\sqrt{5}\in\mathbb{R}$

$0,5\ \in\mathbb{D}$; $\ \mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$; $\ \mathbb{Z}\not\subset\mathbb{N}$; $\ \mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}$.

2. Je place les points $A(1,5)$; $B(-0,1)$; $C(0,2)$; $D(-0,5)$; $E(2)$; $F(-2)$.

sur l'axe gradué :

Exercice d'application 2 :

Complète le tableau suivant en utilisant ∈ ou ∉ à l'ensemble indiqué.

Equation	*Solution*	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{D}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$
$x + 3 = 0$	-3	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$
$6x = 7$	$\frac{7}{6}$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$
$4x - 11 = 0$	$\frac{11}{4}$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$
$x + \sqrt{3} = 0$	$-\sqrt{3}$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$
$x - 2\pi = 8$	$8 + 2\pi$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$
$5x - \sqrt{2} = 0$	$\frac{\sqrt{2}}{5}$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$

Exercice d'application 3 :

1. Ecriture simple de l'expression a

$a = -\sqrt{5} - \sqrt{2} + opp(\sqrt{5} - 3\sqrt{2}) = -\sqrt{5} - \sqrt{2} - (\sqrt{5} - 3\sqrt{2})$

$a = -\sqrt{5} - \sqrt{2} - \sqrt{5} + 3\sqrt{2} = -2\sqrt{5} + 2\sqrt{2}$

2. Ecriture simple de l'expression b :

$b = -2\sqrt{5} - (2\sqrt{3} - 4) + ((\sqrt{5} - \sqrt{3}) + 1)$

$= -2\sqrt{5} - 2\sqrt{3} + 4 + \sqrt{5} - \sqrt{3} + 1 = -\sqrt{5} - 3\sqrt{3} + 5$

Exercice d'application 4 :

Calcul et simplification :

$\frac{1}{2} \times \left(-\sqrt{12}\right) = -\frac{\sqrt{12}}{2} = -\frac{2\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3}$;

$\frac{4}{\sqrt{6}} \times \left(1 + \sqrt{6}\right) = \frac{4}{\sqrt{6}} \times 1 + \frac{4}{\sqrt{6}} \times \sqrt{6} = \frac{4}{\sqrt{6}} + 4$

$inv\left(-\sqrt{5} \times \frac{3}{2\sqrt{15}}\right) = inv\left(-\frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{3} \times \sqrt{5}}\right) = inv\left(-\frac{\sqrt{3} \times \sqrt{3}}{2\sqrt{3}}\right) = inv\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{2}{\sqrt{3}}$

$inv(\sqrt{5} + \sqrt{7}) \times inv(\sqrt{7} - \sqrt{5}) = inv\left((\sqrt{5} + \sqrt{7}) \times (\sqrt{7} - \sqrt{5})\right)$

$= inv(5 - 7) = -\frac{1}{2}$

Exercice d'application 5 :

1. *Les signes et les valeurs des produits :*

a) 7×3 *est positif (produit de deux réels de même signe) et vaut 21*

b)$(-2) \times 3$ *est négatif (produit de deux réels de signes contraires) vaut* -6

c) $0{,}4 \times (-6)$ *est négatif (produit de deux réels de signes contraires) vaut*$-2{,}4$

d)$(-0{,}7) \times (-10)$ *est positif (produit de deux réels de même signe) et vaut 7*

2. Les signes des produits (sans calcul) :

$A = (-2{,}6) \times (-0{,}5) \times (-6) \times (-3{,}7) \times 7$

Le nombre de facteurs négatifs dans ce produit est pair (4) donc A est positif.

$B = 6 \times (-8) \times 3 \times (-7) \times (-9) \times (-0{,}1)$

Le nombre de facteurs négatifs dans ce produit est pair (4) donc B est positif.

$C = 6{,}5 \times (-4) \times (-3) \times (-8{,}2) \times 6 \times 5{,}4 \times 3{,}16$

Le nombre de facteurs négatifs dans ce produit est impair (3) donc C est négatif.

Exercice d'application 5 :

J'effectue les opérations :

$$\frac{-7\pi}{31} + \frac{8\pi}{31} = \frac{-7\pi+8\pi}{31} = \frac{\pi}{31}$$

$$\frac{-\sqrt{15}}{4} + \frac{3\sqrt{15}}{13} = \frac{13\times(-\sqrt{15})}{13\times4} + \frac{4\times3\sqrt{15}}{13\times4} = \frac{-13\sqrt{15}+12\sqrt{15}}{52} = \frac{-\sqrt{15}}{52};$$

$$\frac{\sqrt{17}}{-16} + \frac{5\sqrt{17}}{-16} = \frac{6\sqrt{17}}{-16} = -\frac{3\sqrt{17}}{8};$$

$$\frac{21}{2\sqrt{11}} - \frac{13}{4\sqrt{11}} = \frac{2\times21}{4\sqrt{11}} - \frac{13}{4\sqrt{11}} = \frac{29}{4\sqrt{11}}.$$

$$\frac{1{,}5}{3} \times \frac{0{,}19}{0{,}5} = \frac{1{,}5}{3} \times \frac{1{,}5\times0{,}19}{0{,}5\times3} = \frac{0{,}5\times3\times0{,}19}{0{,}5\times3} = 0{,}19$$

$$\frac{36}{-6} \times \frac{1{,}8}{12} = \frac{12\times3}{-6} \times \frac{6\times0{,}3}{12} = -\frac{9}{10} = -0{,}9$$

$$\frac{2\pi}{3} \times \frac{3}{4\pi} = \frac{6\pi}{12\pi} = \frac{1}{2}.$$

Exercice d'application 6 :

Écris le plus simplement possible les quotients suivants :

$$\frac{\frac{\pi}{2}}{13} = \frac{\pi}{2} \times \frac{1}{13} = \frac{\pi}{26}$$

$$\frac{\pi+1}{\frac{11}{12}} = (\pi+1) \times \frac{12}{11} = \frac{12(\pi+1)}{11};$$

$$\frac{0{,}5}{\frac{11}{12}} = 0{,}5 \times \frac{12}{11} = \frac{6}{11};$$

$$\frac{\frac{\pi}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{2} \times \frac{2}{1} = \pi;$$

$$\frac{1}{12} \div \frac{-3\sqrt{2}}{5} = \frac{1}{12} \times \frac{5}{-3\sqrt{2}} = -\frac{5}{36\sqrt{2}}$$

$$\frac{24}{5\sqrt{3}} \div \left(12 + \frac{1}{2}\right) = \frac{24}{5\sqrt{3}} \div \left(\frac{25}{2}\right) = \frac{24}{5\sqrt{3}} \times \frac{2}{25} = \frac{48}{125\sqrt{3}}$$

Exercice d'application 7 :

Calcule, si c'est possible :

$4^3 = 4 \times 4 \times 4 = 64;$

$(0{,}2)^4 = (2 \times 10^{-1})^4 = 2^4 \times 10^{-4} = 16 \times 10^{-4} = 1{,}6 \times 10^{-3} = 0{,}0016$

$(-\sqrt{5})^2 = (-\sqrt{5}) \times (-\sqrt{5}) = 5$

$(-2\sqrt{3})^5 = (-2\sqrt{3})^4 \times (-2\sqrt{3})^1 = \left((-2)^2 \times \sqrt{3}^2\right)^2 \times (-2\sqrt{3})^1$

$= (4 \times 3)^2 \times (-2\sqrt{3}) = 12^2 \times (-2\sqrt{3}) = 144 \times (-2\sqrt{3}) = -288\sqrt{3}$

$(\sqrt{10})^1 = \sqrt{10}$; $\left(\frac{2}{7}\right)^3 = \frac{2^3}{7^3} = \frac{8}{343}$; $(\sqrt{20})^0 = 1$

$10^6 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 1000000$

π^3 *est la seule écriture exacte de ce nombre.*

Exercice d'application 8 :

Donne l'inverse de : 5^2 ; 3^3 ; $(1{,}5)^4$; 2^{-5} ; 4^{-2} ; π^2.

L'inverse de 5^2 *est* $\frac{1}{5^2} = 5^{-2}$

L'inverse de 3^3 *est* $\frac{1}{3^3} = 3^{-3}$

L'inverse de $1{,}5^4$ *est* $\frac{1}{1{,}5^4} = 1{,}5^{-4}$

L'inverse de 4^{-2} *est* $\frac{1}{4^{-2}} = 4^2$

L'inverse de π^{-2} ; *est* $\frac{1}{\pi^{-2}} = \pi^2$;

L'inverse de π^{-2} ; *est* $\frac{1}{\pi^{-2}} = \pi^2$;

Exercice d'application 9 :

Calcul de l'expression :

$A = \frac{20}{3} \times \left(\frac{2}{3} - \frac{5}{2} + \frac{3}{2}\right)^2 \div 10-3 = \frac{20}{3} \times \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{2}\right)^2 \div 10-3$

$= \frac{20}{3} \times \left(-\frac{1}{3}\right)^2 \div 10-3 = \frac{20}{3} \times \frac{1}{9} \div 10-3$

$= \frac{20}{27} \div 10-3 = \frac{20}{27} \times \frac{1}{10} - 3$

$= \frac{2}{27} - 3 = -\frac{79}{27}$

IV. Je m'exerce :

Exercice 1 :

a. On donne les nombres : π ; $\frac{10}{3}$; $\frac{12}{14}$; $\frac{22}{7}$; $\sqrt{3}$; 4 ; $-\pi$; $\frac{-5}{2}$; $\frac{-8}{4}$; 0 ; -4.

- *Quels sont ceux qui sont des entiers naturels, des entiers relatifs, des décimaux, des rationnels, des réels.*
- *Range-les dans l'ordre croissant*

b. Range dans l'ordre décroissant les nombres : π ; $\frac{10}{3}$; $\frac{22}{7}$; $\frac{13}{4}$; $1-\pi$; $\frac{-5}{2}$; $\frac{-7}{3}$.

Exercice 2 :

Vérifie que les écritures suivantes représentent le même réel :

$\frac{12}{28}$; $\frac{3}{7}$; $\frac{-6}{-14}$; $\frac{3\sqrt{7}}{7\sqrt{7}}$; $\frac{0,9}{2,1}$.

Exercice 3 :

Ecris chacun des réels suivants sous forme de fraction irréductible :

$\frac{27}{12}$; $\frac{-48}{144}$; $\frac{14,3}{-6,6}$; $\frac{648}{-432}$; $\frac{281}{2147}$; $\frac{75,6}{21,81}$.

Exercice 4 :

a. Sans calcul, donne le signe de :

$\frac{4}{6}\times\frac{6}{13}$; $\frac{-3}{4}\times\left(\frac{4}{-5}\right)\times\left(-\frac{1}{6}\right)$; $\frac{-3}{7}\times\frac{-2}{11}$; $\frac{-8}{9}\times(-52)$.

b. Donne une écriture plus simple :

$\frac{13}{17}-\frac{20}{17}$; $\frac{3}{4}+\frac{4}{10}$; $-\frac{2}{10}-\frac{-6}{14}$; $\frac{3}{2}-\frac{11}{2}$;

$5-\frac{4}{3}-\frac{(-2)}{7}+3$; $\frac{1}{3}+\frac{7}{6}+\frac{1}{12}$; $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{10}$.

Exercice 5 :

Parmi les écritures suivantes, lesquelles désignent les mêmes réels ?

$(a^3)^4$; a^6 ; $a^4\times a^2$; $a^9\times a^6$; $a^3\times a^3$; $(a\times b)^5$; $5ab$; a^5b^5 ; $2b^2$; $(2b)^2$; $(2b)^3$; $4b^2$; $(2b)^3$; $2b^3$; $8b^3$.

Exercice 6 :

Calcule les expressions suivantes :

$A=\frac{17}{15}\times\left(\frac{2}{7}-\frac{7}{5}+\frac{3}{2}\right)^2\div 10-3$; $B=\left(\frac{\sqrt{2}}{5}\right)^3\times\left(\frac{\sqrt{2}}{7}-\frac{1}{4}\right)^2+5$;

$C=3+\frac{(2\sqrt{3})^4}{11}-\frac{2}{7\sqrt{3}}\times\left(\frac{5}{3}\right)^2-\frac{9}{4}$.

Exercice 7 :

a. Développe les expressions suivantes :

- $6(2+6a-7a^2)$;
- $(3a^2+0{,}25a-1)4a$.

b. Développe et réduis les expressions :

- $6(a-3)-1{,}5(a+4)$;
- $-0{,}4(a-2)-6(0{,}5-a)$;
- $3(a^2+3a-5)-7(-3a^2+2a-1)$;
- $4a^2(3a-2)-3a^2(2+3a^2)$.

Exercice 8 :

Simplifie les écritures suivantes :

a. $(x^3)^2=$ ...   a. $x\,.\,2x=$ ...   c. $4a^2.(-a^5)=$ ...

d. $(5ac)^2=$ ...   e. $(-b^4)^3=$ ...   f. $3x^3y\,.\,2xy^2=$ ...

g. $(3a^2b)^4=$ ...   h. $(-a^3)^2=$ ...   i. $(-2a^3)^2.(-3a^2)^3=$ ...

j. $(-2a^2b)^3.(5a^6b)^2=$ ...   k. $6xy^2.(3x^2y)^2=$ ...   l. $(x^4)^2.(-x^5)^2=$ ...

Exercice 9 :

Simplifie les écritures suivantes :

$\left(\frac{a}{b}\right)^2=\ldots$; $\left(\frac{2a}{b}\right)^3=\ldots$; $\left(-\frac{5a}{c}\right)^3=\cdots$;

$\left(\frac{a^5}{3}\right)^2=\ldots$; $\left(-\frac{5a}{c}\right)^3=\cdots$; $\left(\frac{2a}{3b}\right)^2=\ldots$;

$\left(-\frac{4a}{3}\right)^2=\ldots$; $\left(\frac{x^2}{y^3}\right)^3=\ldots$ $\left(\frac{2x^3}{3y}\right)^2=\ldots.$

Exercice 10 :

Calcule :

$3^{-2}=\ldots$; $7^{-1}=\ldots$; $(-2)^{-5}=\ldots$; $\left(\frac{5}{3}\right)^{-3}=\ldots$; $\left(-\frac{1}{10}\right)^{-7}=\ldots$

Exercice 11 :

Calcule et compare :

$\frac{12}{5}\div 13$ *et* $\frac{12}{5}\times\frac{1}{13}$; $2\div\frac{3}{5}$ *et* $2\times\frac{5}{3}$; $\frac{4}{5}\div\frac{2}{17}$ *et* $\frac{4}{5}\times\frac{17}{2}$;

$\frac{2}{\pi}\div\frac{3}{\pi}$ *et* $\frac{2}{\pi}\times\frac{\pi}{3}$; $\frac{4}{15}\div\frac{2}{7}$ *et* $\frac{4}{15}\times\frac{7}{2}$; $\frac{2}{5\pi}\div\frac{3}{\pi}$ *et* $\frac{2}{5\pi}\times\frac{\pi}{3}$

Exercice 12 :

Écris les expressions suivantes avec des exposants positifs :

$a^{-5}=\ldots$; $a^3.b^{-7}=\ldots$; $a^{-5}.b^{-2}=\ldots$; $a.\,b^2.c^{-3}=\ldots$; $2a^3b^{-5}=\ldots$;

$-2a^{-3}b^2=\ldots$; $3a^{-2}b^{-3}=\ldots$; $-5a^{-1}b^{-1}=\ldots$; $\frac{1}{b^{-3}}=\ldots$; $\frac{1}{a^{-8}}=\ldots$; $\frac{a^3}{b^{-2}}=\ldots$;

$\frac{a^{-5}}{b^{-4}}=\ldots$; $\frac{3a^4b^{-1}}{6c^{-2}}=\ldots$; $\frac{8a^{-2}b^{-3}}{c^{-3}}=\ldots$; $\frac{4c^{-1}}{6a^{-1}}=\ldots$ $\frac{-8a^{-1}}{-5b^2c^{-3}}=\ldots$

Exercice 13 :

1. *Effectue les produits :* $\frac{3}{2\pi} \times \frac{17}{12}$; $4 \times \frac{\sqrt{2}}{12}$.
2. *Écris sous forme de fraction et simplifie lorsque c'est possible :*
   $\frac{1{,}5}{3} \times \frac{0{,}19}{0{,}5}$; $\frac{36}{-6} \times \frac{1{,}8}{12}$; $\frac{2}{0{,}5} \times \frac{3}{0{,}5}$; $\frac{2\pi}{3} \times \frac{3}{4\pi}$.

Exercice 14 :

1. *Calcule :* $\frac{\sqrt{5}}{11} + \frac{\sqrt{5}}{11}$; $\frac{\pi}{5} + \frac{7}{12}$.
2. *Écris sous forme de fraction et simplifie lorsque c'est possible :*

$\frac{1{,}25}{13} + \frac{0{,}05}{13}$; $\frac{-4}{5} + \frac{-12}{17}$; $\frac{5\sqrt{7}}{16} + \frac{2\sqrt{7}}{3}$; $\frac{2\pi}{7} + \frac{13\pi}{5}$; $\frac{5\pi}{12} - \frac{\pi}{16}$

Exercice 15 :

Réduis les expressions suivantes :

$(5a^3b^{-1})^{-2} = \dots$

$-3a^5 . a^{-2} = \dots$

$(-5a^{-2})^{-3} = \dots$

$\frac{3ab^5}{b^{-4}} = \dots$

$a^4b^{-5} . a^{-2}b^3 = \dots$

$(-2a^{-2})^{-3} = \dots$

$\left(\frac{a}{b^{-1}}\right)^{-4} = \dots$

$\frac{3abc^4}{2a^2b^{-1}c^5} = \dots$

Exercice 16 :

Réduis les expressions suivantes :

$(a^2b^{-3})^{-2} = \dots$ $\quad (-a^3b^{-2})^{-1} = \dots$

$(a^{-1}b^2)^{-2} = \dots$ $\quad (-5a)^2 . (3a)^{-2} = \dots$

$(a^3b^{-3})^{-1} = \dots$ $\quad \left(\frac{a}{b^{-1}}\right)^{-3} . \left(\frac{b}{a^{-2}}\right)^{-1} = \dots$

$\frac{5a^{-1}b^{-3}c^5}{2a^{-2}b^4c^3} = \dots \left(\frac{a}{b}\right)^{-2} . \left(\frac{b}{a}\right)^2 = \dots$

Exercice 17 :

Réduis les expressions ci-dessous en n'utilisant que des exposants positifs.

$a^2 . a^{-5} = \dots$; $(a^{-4})^{-2} = \dots$; $a^7 . a^{-2} = \dots$; $(ab)^{-2} = \dots$; $\frac{a^7}{a^2} = \dots$; $(2a)^{-5} = \dots$;

$\frac{a^{-5}}{a^{-3}} = \dots$; $(5a^{-3})^{-2} = \dots$; $\frac{a^{-3}}{a^{-3}} = \dots$; $(-2ab^{-1})^{-3} = \dots.$

Math AS.indd 20 15/07/2024 15:30:39

Chapitre 2 : Ordre, Intervalles et Valeur absolue

I. Activités préparatoires :

Activité 1 :

Partie 1 :

En utilisant des méthodes différentes, compare :

$-2{,}75$ *et* $-2{,}8$; π *et* $3{,}15$; $\frac{4}{7}$ *et* $\frac{2}{3}$; $\sqrt{5}$ *et* $2{,}5$.

Partie 2 : **Comparaison et signe d'une différence**

Recopie ces étiquettes et associe celles qui ont la même signification

$a < b$	*a est égal à b*	$a - b < 0$
$a = b$	*a superieur à b*	$a - b > 0$
$a > b$	*a est inférieur à b*	$a - b = 0$

Activité 2 :

Partie 1 :

Complète en utilisant les symboles : $<$, $\leq$, $>$, $\geq$

$6 \ldots 5$; $6+7 \ldots 5+7$; $6-6 \ldots 5-6$; $8 \ldots .5$; $8 \times 3 \ldots 5 \times 3$;

$8 \times (-4) \ldots 5 \times (-4)$; $10 \ldots 20$; $\frac{10}{4} \ldots \frac{20}{4}$; $\frac{10}{-2} \ldots \frac{20}{-2}$.

Partie 2 :

L'âge d'Ahmed est 15 ans et son petit frère a 10 ans actuellement.

1. *Apres 5 ans, quel sera l'âge de chacun ?*
2. *Avant 5 ans quel était l'âge de deux frères ? Quel est le plus grand ?*
3. *Complète en utilisant le symbole* $<$*:*

   Actuellement : $10 \ldots \ldots 15$

   Apres 5ans : $10 + \cdots \ldots\ 15 + \cdots$

   Avant 5ans : $10 - \cdots \ldots\ 15 - \cdots$

Activité 3 :

1. *Donne la valeur décimale de la fraction* $\frac{7}{5}$.
2. *Peux-tu trouver les valeurs exactes des nombres :* $\sqrt{2}$ *et* $\frac{1}{3}$*? Si non, donne un encadrement de chacun des deux nombres par des entiers consécutifs.*

Activité 4 :

On donne les encadrements suivants de deux réels x et y **:**

$4 \leq x \leq 5$ *et* $-2{,}5 \leq y \leq 3$.

Donne les encadrements de $x+y$, $x-y$, xy *et* $\frac{x}{y}$*.Explique ta démarche.*

Activité 5 :

Partie 1 :

Sur un axe colorie les points d'abscisses x comprises entre −3 et 2 c'est–à–dire telles que : $-3 \leq x$ *et* $x \leq 2$, *ou encore* $-3 \leq x \leq 2$.

Tu représentes ainsi l'intervalle fermé $[-3;\ 2]$.

Partie 2 :

Reprends la question de la partie 1 pour les points d'abscisses x strictement comprises entre −3 et 2.

Tu représentes ainsi l'intervalle ouvert $]-3;\ 2[$.

Activité 6 :

1. *Colorie sur un axe les points d'abscisses* x *telles que* $x \geq 2$. *Qu'obtiens- tu ?*
Tu représentes ainsi l'intervalle fermé à gauche ouvert de côté $+\infty$ $[2;\ +\infty[$.
2. *Colorie sur un axe les points d'abscisses* x *telles que* $x < 2$. *Qu'obtiens- tu ?*
Tu représentes ainsi l'intervalle ouvert$]2;\ +\infty[$.
3. *Recommence avec les points d'abscisses x telles que* $x \leq 2$ *puis avec les Points d'abscisses x telles que* $x \leq 2$. *Quel intervalle représentes-tu ?*

Activité 7 :

Sur un axe gradué, place les points A et B d'abscisses respectives −3 et 2.

1. *Que représente le segment* $[AB]$?
2. *Place le point J, milieu de* $[AB]$. *Quelle est son abscisse ? Que représente cette valeur pour l'intervalle* $[-3;\ 2]$ *?*
La valeur obtenue est appelée centre de l'intervalle $[-3;\ 2]$.
3. *Un curseur se déplace de A au point B. Quelle est la longueur du déplacement ? Comment a-t-on calculé cette longueur ? Que représente cette valeur pour l'intervalle* $[-3;\ 2]$ *?La valeur obtenue est appelée longueur de l'intervalle* $[-3;\ 2]$.

Activité 8 :

Les élèves ont l'aptitude à utiliser des valeurs approximatives obtenues par la calculatrice ; ainsi en appuyant sur une touche elle affiche :$\pi \simeq 3{,}141592654$

Donne les encadrements à l'unité ou d'ordre 0, à une décimale ou d'ordre 1 et à deux décimales ou d'ordre 2

Activité 9 :

Le professeur écrit au tableau $\frac{355}{113}$ *et* $\pi \cong 3{,}141592654$.

Il demande à ses élèves de les comparer.

- *Sidi répond : ces deux nombres sont égaux et apporte une justification*
- *Fatma dit : la fraction est supérieure à* π *et donne une justification.*

Peux-tu imaginer les justifications données par ces deux élèves ?

Activité 10 :

a. Donne un encadrement de $\frac{4}{7}$ et de $\sqrt{2}$; au dixième près, au centième près et au millième près.

b. Comment appelle-t-on la valeur située à gauche de l'encadrement et celle située à droite de l'encadrement ?

c. Fais dans chacun des cas la différence entre les valeurs trouvées en a.

d. Parmi les valeurs trouvées, laquelle est la plus proche de $\frac{4}{7}$.

Activité 11 :

1. Donne les encadrements de $\frac{22}{7}$ à l'ordre $0, 1{,}2$ et 3.

2. Pour chaque encadrement, quelle est la borne la plus proche de $\frac{22}{7}$?
   Cette valeur est appelée arrondi de cette fraction.

Activité12 :

Sur un axe $(O; I)$, on donne les points A, B, C, D et E d'abscisses respectives les nombres réels suivants : $3{,}15$; $-\frac{1}{3}$; $\frac{\pi}{2}$;$\sqrt{7}$ et $-\sqrt{5}$.

Détermine les distances OA, OB, OC, OD et OE ; puis compare ces distances aux abscisses de ces nombres.

Activité 13 :

1. Calcule puis compare les résultats de chacun des cas suivants :
   a. $|2| \times |-3|$ et $|2 \times (-3)|$·
   b. $\frac{|8|}{|-5|}$ et $\left|\frac{8}{-5}\right|$.
   c. $|-5 + 2|$ et$|-5| + |2|$·
   d. $|-5 - 2|$ et$|-5| - |2|$.
2. Peux-tu trouver x dans les cas suivants ?
   a. $|x| = 2$; b. $|x| = -4$; c. $|x| \leq -2$; d. $|x| \geq 4$.

II. Je retiens :

1. Ordre dans $\mathbb{R}$:

1.1. Notion d'ordre dans $\mathbb{R}$:

Règle 1 :

On peut ordonner deux nombres réels soit :

- *En les repérant sur une droite graduée et en comparant leurs positions sur cette droite.*
- *En prenant les valeurs décimales exactes ou approchées et en comparant, de gauche à droite, les chiffres correspondants aux mêmes unités dans les parties entières puis décimales.*

Propriété1 :

Soient a, b deux nombres réels, on a :

$a = b$ *revient à dire que* $a - b = 0$

$a < b$ *revient à dire que* $a - b < 0$

$a > b$ *revient à dire que* $a - b > 0$

1.2. Opérations et ordre $\mathbb{R}$:

Propriété 2 : L'ordre et l'addition et la soustraction

Soient a, b, c *, detx des réels*

1. $a < b$, *alors* $a + x < b + x$ *et* $a - x < b - x$.
2. *Si* $a < b$ *et* $c < d$, *alors* $a + c < b + d$.
3. *Si* $a < b$ *et* $c < d$, *alors* $a - d < b - c$.

Propriété 3 : L'ordre et la multiplication

Soient a, b, c, d et x des réels.

1. Si $a < b$ et $x > 0$, alors $ax < bx$
2. Si $a < b$ et $x < 0$, alors $bx < ax$ **(l'ordre est inversé si on multiplie par un nombre négatif).**

   En particulier si $a < b$, *alors* $(-1) \times b < (-1) \times a$ *ou encore* $-b < -a$.
3. *Si* $0 < a < b$ *et* $0 < c < d$, *alors* $a \times c < b \times d$

Propriété 4 : L'ordre et la division

Soient a, b, c et x des réels.

1. *Si* $x > 0$, *alors* $\frac{1}{x} > 0$ *et si* $x < 0$, *alors* $\frac{1}{x} < 0$.
2. Si $a < b$ et si $c \neq 0$, alors : $\begin{cases} \frac{a}{c} < \frac{b}{c} \ ; \ si\ c > 0 \\ \quad et \\ \frac{a}{c} > \frac{b}{c} \ ; \ si\ c < 0 \end{cases}$
3. *Si* $0 < a < b$, *alors* $0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$.
4. Si $a < b < 0$, *alors* $\frac{1}{b} < \frac{1}{a} < 0$.

2. Encadrements :

2.1. Encadrement d'un nombre réel :

Définition1 :

Un encadrement d'un nombre réel x par deux réels a et b tels que $a < b$ signifie que $a < x < b$ (on pourra également utiliser le symbole $\leq$)

Remarque 1 :

- *Les deux bornes de l'encadrement s'appellent bornes par défaut et par excès.*
- *Si la valeur décimale d'un réel n'est pas exacte, on l'appelle valeur approchée (soit plus grande ou plus petite).*

Exemple 1 :

Soit $x = \frac{22}{7}$ *(si on effectue la division de 22 par 7, les chiffres après la virgule reviennent régulièrement dans le même ordre ; on dit que ce nombre a pour développement décimal* $3,1\widehat{42857}$ *et on écrit* $x = \frac{22}{7} = 3,1\widehat{42857}$*)*

On peut ainsi donner plusieurs encadrements de x :

- *Par deux entiers consécutifs :* $3 < x < 4$, *cet encadrement à unité ou d'ordre 0.*
- *Par des décimaux à un chiffre après la virgule ou au dixième :* $3,1 < x < 3,2$.
- *Cet encadrement est dit d'ordre 1 ou à* 10^{-1}*prés,* (*dixième*) *il est appelé également* ***encadrement d'amplitude*** $\mathbf{10^{-1}}$.
- *Par des décimaux à deux chiffres après la virgule ou au centième :*

$3,14 < x < 3,15$. *Cet encadrement est dit d'ordre 2 ou à* 10^{-2} *prés, il est appelé également* ***encadrement d'amplitude*** $\mathbf{10^{-2}}$.

- *On peut donner un encadrement d'ordre 3 ou au millième ou à* 10^{-3} *prés* $3,142 < x < 3,143$ *(3 chiffres après la virgule) et de manière générale d'ordre n ou à* 10^{-n}*prés(n chiffres après la virgule).*

Remarque 2 :

Tout rationnel admet un développement décimal périodique ou périodique à partir d'un certain rang.

Remarque 3 :

Les deux bornes de l'encadrement s'appellent aussi borne inférieure et borne supérieure.

2.2. Encadrements et opérations :

Règle 2 :

Soient a, a', b, b', x, y et k des réels.

- **Encadrement et addition :**

Si $\begin{cases} a \le x \le b \\ a' \le y \le b' \end{cases}$. Alors $a + a' \le x + y \le b + b'$.

- **Encadrement et soustraction :**

Si $\begin{cases} a \le x \le b \\ a' \le y \le b' \end{cases}$ Alors $a - b' \le x - y \le b - a'$.

- **Encadrement et multiplication :**

Soient a, b , a' et b' sont des réels positifs.

Si $\begin{cases} a \le x \le b \\ a' \le y \le b' \end{cases}$, alors $a \times a' \le x \times y \le b \times b'$

- **Encadrement et division :**

Soient a, b , a' et b' sont des réels strictement positifs.

Si $\begin{cases} 0 < a \le x \le b \\ 0 < a' \le y \le b' \end{cases}$, alors $0 < \frac{a}{b'} \le \frac{x}{y} \le \frac{b}{a'}$.

3. Intervalles dans ℝ :

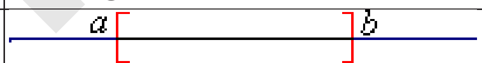
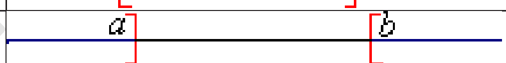
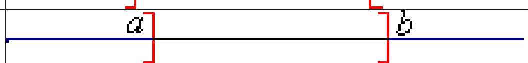
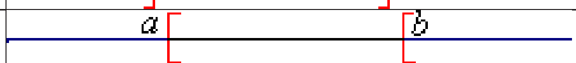
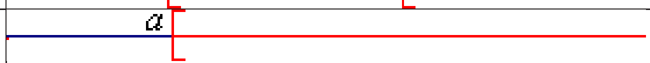
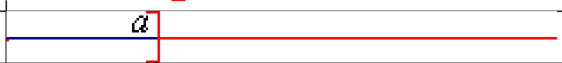
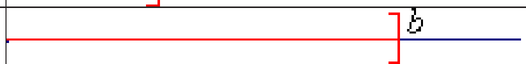
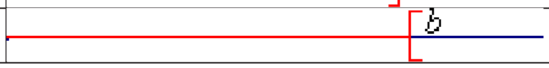
3.1. Notions d'intervalles :

Définition 2 :

On appelle intervalle un sous-ensemble (une partie) de ℝ caractérisé par une ou des inégalités ; il est noté avec des crochets.

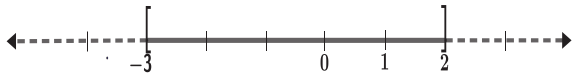
Le tableau ci-dessous résume les différents types d'intervalles.

Soient a et b deux réels tels que a < b ;

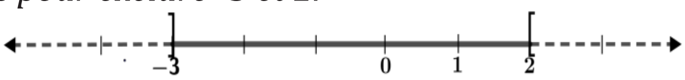
L'intervalle noté	est l'ensemble des réels x tels que	Représentation de cet intervalle sur une droite graduée
$[a ; b]$	$a \le x \le b$	
$]a ; b[$	$a < x < b$	
$]a ; b]$	$a < x \le b$	
$[a ; b[$	$a \le x < b$	
$[a ; +\infty[$	$a \le x$	
$]a ; +\infty[$	$a < x$	
$]-\infty ; b]$	$x \le b$	
$]-\infty ; b[$	$x < b$	

Exemple 2 :

- *L'intervalle fermé* $[-3;\ 2]$ *est l'ensemble des réels x tels que :* $-3 \leq x \leq 2$*,* *sa représentation sur un axe est un segment.*



- *L'intervalle ouvert* $]-3;\ 2[$ *est l'ensemble des réels x tels que* $-3 < x < 2$*, sa représentation sur un axe est un segment dont les extrémités sont marquées par des petits ronds pour exclure -3 et 2.*



- *L'intervalle fermé à gauche* $[2;\ +\infty[$ *est l'ensemble des réels x tels que* $2 \leq x$ *; sa représentation graphique est une demi-droite.*
- *L'intervalle fermé à droite* $]-\infty;\ 2]$ *est l'ensemble des réels x tels que* $x \leq 2$ *; sa représentation graphique sur un axe est une demi-droite.*

Attention : *Regarde bien comment alors sont les crochets !*

Remarque 4 :

- *Les intervalles* $[a;\ b],]a;\ b[,]a\ b]$ *et* $[a;\ b[$ *ont pour* ***extrémités*** *a et b* $(a < b)$.
- *Les symboles* $-\infty$ *(moins l'infini) et* $+\infty$ *(plus l'infini) ne sont pas des nombres.* *Du côté de* $-\infty$ *et de* $+\infty$*, le crochet est toujours ouvert, par convention.*
- *L'ensemble des réels* $\mathbb{R}$ *est noté aussi* $]-\infty;+\infty[$*. De plus, on a :* $[a;a] = \{a\}$ *et* $]a;a[= \emptyset$ *(ensemble vide)*

Réunion et intersection d'intervalles :

✓ *La réunion des deux ensembles I et J est l'ensemble des éléments qui sont soit dans I, soit dans J.*

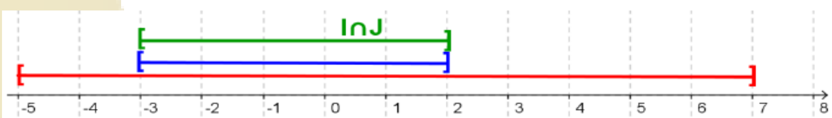
✓ *L'intersection des deux ensembles I et J est l'ensemble des éléments qui sont communs à I et J.*

Le graphique nous permet de voir clairement la solution.

Exemple 3 :

[-5 ; 7] ∪[-3 ; 2]

Réponse :

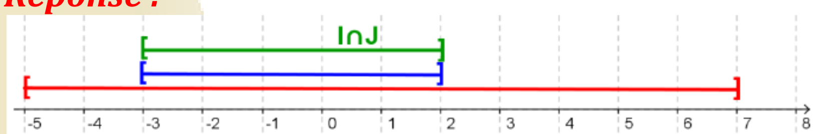


La solution est donc : [-5 ; 7]∪ [-3 ; 2] = [-5 ; 7]

Exemple 4 :

[-5 ; 7] ∩[-3 ; 2]

Réponse :



La solution est donc : [-5 ; 7] ∩[-3 ; 2] = [-3 ; 2]

Exemple 5 :

1. *Représente graphiquement :* [-5 ; 4[∪]4 ; 7] et [-5 ; 2] ∪ [3 ; 5]
2. *Complète avec le symbole* $\in$ *ou* $\notin$ *:*

$-3 \ldots [-5;4]$, $\frac{1}{2} \ldots]-5\,;2[$, $2 \ldots [3;5]$ *et* $-2 \ldots]-\infty\,,-3[$.

3.2. Eléments d'un intervalle borné, amplitude, rayon et centre :

Définition 3 :

Soient a et b deux réels tels que $a < b$.

- *On appelle amplitude ou longueur de l'intervalle* $[a,b]$ *le nombre positif* $b-a$, *on la note* ℓ *et on écrit :* $l = b-a$.
- *On appelle rayon de l'intervalle le nombre positif* $\frac{b-a}{2}$ *, on le note r et on écrit :* $r = \frac{b-a}{2} = \frac{\ell}{2}$.
- *On appelle centre de l'intervalle le nombre* $\frac{b+a}{2}$*, on le note c et on écrit :* $c = \frac{b+a}{2}$.

On a alors : $a = r - c\,; b = r + c$ *et on peut écrire l'intervalle :* $[a\,;\ b] = [r-c\,; r+c]$.

Remarque 7 :

Les intervalles du type $[a;\ +\infty[(resp.\ ]a;\ +\infty[)]-\infty;\ a]\ ou (resp.]-\infty;\ a[)$ *n'ont pas de centres* et *par conséquence on ne pourra pas calculer les éléments de ces intervalles, par contre l'intervalle* $]-\infty;+\infty[$ *est centré en zéro* (0).

4. Valeur approchée, Troncature et Arrondi :

4.1. Valeur approchée :

Définition 4 :

Une valeur approchée d'un nombre est un nombre proche de celui qu'il peut remplacer et souvent attribuer pour simplifier un résultat.

Remarque 8 :

- *Lorsqu'on dit « proche », le sens dépend du contexte. Ainsi une valeur approchée d'un nombre réel* x *à la précision p ou à p près (p strictement positif)est un réel* a *tel que :* $a - p < x < a + p$.
- *Les encadrements permettent de trouver des approximations décimales et ainsi des valeurs approchées.*

Exemple 6 :

$3{,}14$ *et* $3{,}15$ *sont deux valeurs approchées de* π *d'ordre 2.*

$\pi \cong 3{,}14$ *par défaut et* $\pi \cong 3{,}15$ *par excès. (Le symbole* $\cong$ *se lit presque égal)*

4.2. Troncature :

Définition 5 :

La troncature à l'ordre n (ou 10^{-n} *prés) d'un nombre est obtenue en supprimant tous les chiffres situés après le* n^ième^ *chiffre après la virgule.*

Exemple 7 :

$\frac{22}{7} = 3,\widehat{142857}$ et $\pi = 3{,}1415926$. *Les troncatures à l'ordre 0, 1 et 2 de* $\frac{22}{7}$ *et* π *nous permettent d'écrire donc :* $\pi \approx \frac{22}{7}$.*Par contre la troncature au millième de* $\frac{22}{7}$ *est* $3{,}142$ *et celle de* π *est* $3{,}141$, *donc* $\pi \neq \frac{22}{7}$ *à partir de l'ordre 3.*

Remarque 9 :

La troncature à l'unité ou d'ordre 0 d'un nombre réel donné par développement décimal est sa partie entière.

Exemple 8 :

La troncature à l'unité de $\frac{22}{7}$ *est* 3.

4.2. Arrondi d'un réel:

Définition 5 :

L'arrondi d'un nombre est la valeur approchée la plus proche de ce nombre à une précision donnée.

Remarque 10 :

On l'obtient l'arrondi d'un nombre à l'ordre n en appliquant la règle suivante :

- *Si le chiffre suit le* $n^{ième}$ *décimal est strictement inférieur à 5, l'arrondi est égal à la troncature.*
- *Si le chiffre qui suit le* $n^{ième}$ *chiffre décimal est supérieur ou égal à 5, on augmente d'une unité le chiffre de droite de la troncature.*

Exemple 9 :

- $\pi = 3{,}141592654...$, *l'arrondi au centième de* π *est 3,14 car le* $3^{ième}$*chiffreest 1, inférieur à 5 on prend la troncature au centième.*
- $\sqrt{47} = 6{,}85565460$ ...., *l'arrondi au centième de*$\sqrt{47}$ *est 6,86 car le* $3^{ième}$*chiffre est 5, égal à 5 donc on augmente le chiffre au centième de la troncature.*

VI. Valeur Absolue :

VI.1. Notion de valeur Absolue :

Définition 6 :

La valeur absolue d'un réel a est le plus grand des deux nombres a et $-a$,

c'est-à-dire : $\begin{cases} a\ , si\ \mathrm{a} > 0. \\ \quad \text{et} \\ -a\ , si\ \mathrm{a} < 0. \end{cases}$ *. On la note $|\mathrm{a}|$ et on lit : valeur absolue de a.*

Exemple 10 :

$|2| = 2\ ; car\ 2 > 0, |-2| = -(-2); car -2 < 0.$

$|2x - 1| = 2x - 1\ ; si\ \ 2x - 1 > 0 \ \ \Rightarrow x \geq \frac{1}{2}.$

$|2x - 1| = -(2x - 1\ ) = -2x + 1\ ; si\ \ 2x - 1 \leq 0 \ \ \Rightarrow x \leq \frac{1}{2}$

Conséquence :

Soit a un nombre réel : $\begin{cases} |\mathrm{a}| = 0 \iff \mathrm{a} = 0. \\ |\mathrm{a}| \geq 0. \\ |\mathrm{a}| = |-\mathrm{a}|. \end{cases}$

Exemple 11 :

- $|2\mathrm{x} - 1| = 0 \ \Rightarrow 2\mathrm{x} - 1 = 0 \Rightarrow 2\mathrm{x} = 1 \Rightarrow \mathrm{x} = \frac{1}{2}.$
- $|4\mathrm{x} + 3| = 0 \ \Rightarrow 4\mathrm{x} + 3 = 0 \Rightarrow 4\mathrm{x} = \ -3 \Rightarrow \mathrm{x} = -\frac{3}{4}.$

VI.2. Propriétés de la valeur Absolue :

Propriété 4 :

Soient a et b deux nombres réels :

- $|\mathrm{a}| \times |\mathrm{b}| = |\mathrm{a} \times \mathrm{b}|$
- $|\mathrm{a} + \mathrm{b}| \leq |\mathrm{a}| + |\mathrm{b}|$
- $|\mathrm{a} - \mathrm{b}| \geq |\mathrm{a}| - |\mathrm{b}|$
- $\frac{|\mathrm{a}|}{|\mathrm{b}|} = \left|\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}\right|, \ \ \mathrm{b} \neq 0$
- $|\mathrm{x}| = \mathrm{m}$ équivaut à : $\begin{cases} \text{si m } \geq 0, \text{alors les solutions ''}: \mathrm{x} = \mathrm{m} \text{ ou } \mathrm{x} = -\mathrm{m} \\ \text{si m } < 0, \text{cette équation n'a pas de solution.} \end{cases}$
- $|\mathrm{a}| = |\mathrm{b}|$ équivaut à : $\mathrm{a} = \mathrm{b}$ ou $\mathrm{a} = -\mathrm{b}$.
- $|\mathrm{x}| \leq \mathrm{m}$ équivaut à : $\begin{cases} \text{si m } \geq 0, \text{alors x appartient à } l'\text{intervalle}[-\mathrm{m}; \mathrm{m}]. \\ \text{si m } < 0, \text{alors aucun réel x vérifie cette inégalité.} \end{cases}$
- $|\mathrm{x}| \geq \mathrm{m}$ équivaut à :

$$\begin{cases} \text{si m} > 0\ , alors\ x\ appartient\ \text{à}\ [m;\ +\infty[\ ou\ bien\ \ \text{à}\ ]-\infty;\ m] \\ si\ m \leq 0\ , alors\ x\ appartient\ \text{à}\ l'ensemble\ \mathbb{R}\ autrement\ dit\ \mathrm{x}\ d\acute{e}crit\ \mathbb{R}. \end{cases}$$

Remarque 11 :

On pourra traiter éventuellement, les cas $|a| \leq |b|$ et $|a| \geq |b|$ sur des exemples ou dans les exercices.

III. Je sais faire :

Enoncés des exercices d'application :

Exercice d'application 1 :

a. Complète (en donnant toutes les possibilités) :
x est un entier naturel et $x < 6$, alors $x =$

b. Complète avec un nombre décimal qui convient :
4 < ... <5 ; 3,1< ... < 3,2 ; 3,9 < ... <4 ; 4,8 < ... < 4,9.

c. Cite deux nombres compris entre π et $\frac{22}{7}$.

d. Si $4 < x < 5$, alors x peut être égal à : 5,3 ; 4 ,88 ; 3 ,95 et $\frac{16}{3}$?
Peux-tu vérifier : $\frac{2}{3} < \frac{1}{x} < \frac{4}{3}$ ou $\frac{4}{3} < \frac{1}{x} < \frac{3}{2}$ ou $\frac{2}{3} < \frac{1}{x} < \frac{3}{4}$?

e. Soit x un réel tel que $2 \leq x \leq 5$, alors :
$8 \leq 2x - 3 \leq 10$ ou $1 \leq 2x - 3 \leq 2$ ou $1 \leq 2x - 3 \leq 7$.

Exercice d'application 2 :

Si x et y deux réels tels que : $2{,}3 \leq x \leq 2{,}4$ et $0{,}5 \leq y \leq 1{,}2$.
Donne un encadrement de $2x$, $-3y$ $2x - 3y$, $\frac{-2}{x}$; $\frac{1}{y}$ et xy.

Exercice d'application 3 :

1. Traduis par une inégalité chacune des affirmations suivantes :
$x \in [-1; 3]$; $x \in]-\infty ; 0]$; $x \in [2 ; +\infty[$ Et $x \in]-4 ; 4[$
2. Ecris sous forme d'intervalle les inégalités dans chacun des cas suivants
$x \geq -4$; $3{,}14 < x < 3{,}15$; $-5 \leq x$ et $x > -4$.

Exercice d'application 4:

Complète le tableau suivant en utilisant la calculatrice :

Nombre	Valeur approchée par défaut à 10^{-2} prés	Valeur approchée par excès à 10^{-2} prés	L'arrondi à 10^{-3} prés	Troncature au centième
2 ,3561				
0 ,675				
$\frac{1}{3}$				
$\frac{2}{7}$				
$\frac{\pi}{2}$				

Exercice d'application 5 :

Résoudre :

$|x| = 2$; $|2x - 1| = 5$; $|2x| = |x + 6|$

$|x| \leq 2$ $|3x - 1| \leq 11$

Exercice d'application 6 :

Donne l'intervalle qui correspond à chaque inégalité :

Inégalité	Intervalle	Inégalité	Intervalle
a. $3 \leq x \leq 5$	$\Leftrightarrow x \in$	**b.** $1 \leq x$	$\Leftrightarrow x \in$
c. $-2 < x < 2$	$\Leftrightarrow x \in$	**d.** $x \leq 5$	$\Leftrightarrow x \in$
e. $3 \leq x < 5$	$\Leftrightarrow x \in$	**f.** $3 < x \leq 5$	$\Leftrightarrow x \in$
g. $2 \leq x$	$\Leftrightarrow x \in$	**h.** $-5 \leq x$	$\Leftrightarrow x \in$
i. $x < 0$	$\Leftrightarrow x \in$	**j.** $-1 < x$	$\Leftrightarrow x \in$

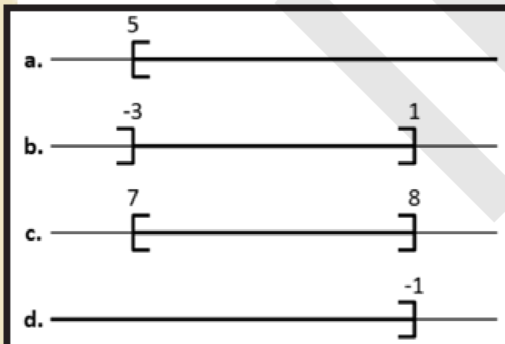
Exercice d'application 7 :

Donne l'inégalité qui correspond à chaque intervalle :

Intervalle	Inégalité	Intervalle	Inégalité
a. $x \in [5\,;9]$ $\Leftrightarrow$		**b.** $x \in [-1;+\infty[$ $\Leftrightarrow$	
c. $x \in [3\,;+\infty[$ $\Leftrightarrow$		**d.** $x \in [5\,;7[$ $\Leftrightarrow$	
e. $x \in]-\infty\,;2]$ $\Leftrightarrow$		**f.** $x \in]-2\,;-1]$ $\Leftrightarrow$	
g. $x \in]-3\,;-2[$ $\Leftrightarrow$		**h.** $x \in]0\,;+\infty[$ $\Leftrightarrow$	
i. $x \in]-\infty\,;1]$ $\Leftrightarrow$		**j.** $x \in]-7\,;-5]$ $\Leftrightarrow$	

Exercice d'application 8 :

Donner l'inégalité et l'intervalle qui correspondent à la zone définie sur l'axe gradué :



a. $\Leftrightarrow$ x vérifie l'inégalité .... $\Leftrightarrow x \in$ ....

b. $\Leftrightarrow$ x vérifie l'inégalité .... $\Leftrightarrow x \in$ ....

c. $\Leftrightarrow$ x vérifie l'inégalité .... $\Leftrightarrow x \in$ ....

d. $\Leftrightarrow$ x vérifie l'inégalité .... $\Leftrightarrow x \in$ ....

Solutions des exercices d'application :

Exercice d'application 1 :

a. Si x est un entier naturel et $x < 6$, alors $x = 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5$.

b. Je complète avec un nombre décimal qui convient :

$4 < 4{,}93 < 5$; $3{,}1 < 3{,}19 < 3{,}2$; $3{,}9 < 3{,}97 < 4$; $4{,}8 < 4{,}85 < 4{,}9$.

c. Je cite deux nombres compris entre π et $\frac{22}{7}$.

$\pi < 3{,}143 < \frac{22}{7}$, $\pi < 3{,}1428 < \frac{22}{7}$.

d. Si $4 < x < 5$, alors x peut être égal à : $5{,}3$; $4{,}88$; $3{,}95$ et $\frac{16}{3}$?

e. Parmi les nombres proposés 4,88 est le seul qui vérifie l'inégalité $4 < x < 5$

Peut-il vérifier : $\frac{2}{3} < \frac{1}{x} < \frac{4}{3}$ ou $\frac{4}{3} < \frac{1}{x} < \frac{3}{2}$ ou $\frac{2}{3} < \frac{1}{x} < \frac{3}{4}$? Ne vérifie aucune des propositions

Si $2 \leq x \leq 5$ alors $1 \leq 2x - 3 \leq 7$.

Exercice d'application 2 :

Encadrement de $2x$

$2{,}3 \leq x \leq 2{,}4$; donc $2 \times 2{,}3 \leq 2x \leq 2 \times 2{,}4$; d'où : $4{,}6 \leq 2x \leq 4{,}8$.

Encadrement de $-3y$

$0{,}5 \leq y \leq 1{,}2$; donc $-3 \times 1{,}2 \leq -3y \leq -3 \times 0{,}5$; d'où : $-3{,}6 \leq -3y \leq -1{,}5$.

Encadrement de $2x - 3y$

$4{,}6 \leq 2x \leq 4{,}8$ et $-3{,}6 \leq -3y \leq -1{,}5$; donc $4{,}6 - 3{,}6 \leq 2x - 3y \leq 4{,}8 - 1{,}5$;
d'où : $1 \leq 2x - 3y \leq 3{,}3$.

Encadrement de $\frac{-2}{x}$ et de $\frac{1}{y}$

$2{,}3 \leq x \leq 2{,}4$; donc $\frac{2}{2{,}4} \leq \frac{2}{x} \leq \frac{2}{2{,}3}$; d'où $\frac{-2}{2{,}3} \leq \frac{2}{x} \leq \frac{-2}{2{,}4}$ soit $-0{,}86 \leq \frac{2}{x} \leq -0{,}83$

$0{,}5 \leq y \leq 1{,}2$; donc $\frac{1}{1.2} \leq \frac{1}{y} \leq \frac{1}{0{,}5}$ d'où $0{,}83 \leq \frac{1}{y} \leq 2$

Encadrement de xy

$2{,}3 \leq x \leq 2{,}4$ et $0{,}5 \leq y \leq 1{,}2$ donc $2{,}3 \times 0{,}5 \leq xy \leq 2{,}4 \times 1{,}2$ d'où :
$1{,}15 \leq xy \leq 2{,}88$

Exercice d'application 3 :

1. Ecriture sous forme d'inégalité(s):

$x \in [-1; 3] \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 3$; $x \in]-\infty ; 0] \Leftrightarrow x \leq 0$;
$x \in [2 ; +\infty[\Leftrightarrow x \geq 2$; $x \in]-4 ; 4[\Leftrightarrow -4 \leq x \leq 4$

2. Ecriture sous forme d'intervalles

$x \geq -4 \Leftrightarrow x \in [-4 ; +\infty[$; $3{,}14 < x < 3{,}15 \Leftrightarrow x \in [3{,}14 ; 3{,}15]$;

$-5 \leq x \Leftrightarrow x \in [-5 ; +\infty[$ $x > -4 \Leftrightarrow x \in]-4 ; +\infty[$.

Exercice d'application 4 :

Je complète le tableau suivant en utilisant la calculatrice :

Nombre	Valeur approchée par défaut à 10^{-2} prés	Valeur approchée par excès à 10^{-2} prés	L'arrondi à 10^{-3} prés	Troncature au centième
2,3561	2,35	2,36	2,356	2,35
0,675	0,67	0,68	0,675	0,67
$\frac{1}{3} \approx 0{,}33333$	0,33	0,34	0,333	0,33
$\frac{2}{7} \approx 0{,}28571$	0,28	0,29	0,286	0,28
$\frac{\pi}{2} \approx 1{,}5707$	1,57	1,58	1,570	1,57

Exercice d'application 5 :

- $|x| = 2$ *équivaut à :* $x = 2$ *ou* $x = -2$ *car* $|2| = |-2| = 2.$
- $|2x-1| = 5$ *équivaut à :* $2x - 1 = 5$ *ou* $2x - 1 = -5$
  équivaut à : $2x = 5 + 1$ *ou* $2x = -5 + 1$
  équivaut à : $2x = 6$ *ou* $2x = -4$
  équivaut à : $x = 3$ *ou* $x = -2.$
- $|2x| = |x+6|$ *équivaut à :* $2x = x + 6$ *ou* $2x = -x - 6$
  donc : $2x - x = 6$ *ou* $2x + x = -6$
  ou encore : $x = 6$ *ou* $3x = -6,$
  d'où: $x = 6$ *ou* $x = \frac{-6}{3} = -2.$
- $|x| \leq 2$ *équivaut à :* $-2 \leq x \leq 2$ *ou encore* $x \in [-2; 2]$
- $|3x-1| \leq 11$ *équivaut à :* $-11 \leq 3x - 1 \leq 11$
  alors: $-11 + 1 \leq 3x \leq 11 + 1$
  ou encore : $-10 \leq 3x \leq 12$
  ce qui entraine : $\frac{-10}{3} \leq x \leq \frac{12}{3}$
  $c'est-à-dire: \frac{-10}{3} \leq x \leq 4, d'ou\ x \in \left[\frac{-10}{3}; 4\right].$

Exercice d'application 6 :

Je donne l'intervalle qui correspond à chaque inégalité :

Inégalité		Intervalle	Inégalité		Intervalle
a. $3 \leq x \leq 5$	$\Leftrightarrow$	$x \in [3; 5]$	b. $1 \leq x$	$\Leftrightarrow$	$x \in [1; +\infty[$
c. $-2 < x < 2$	$\Leftrightarrow$	$x \in]-2; 2[$	d. $x \leq 5$	$\Leftrightarrow$	$x \in]-\infty; 5]$
e. $3 \leq x < 5$	$\Leftrightarrow$	$x \in [3; 5[$	f. $3 < x \leq 5$	$\Leftrightarrow$	$x \in]3; 5]$
g. $2 \leq x$	$\Leftrightarrow$	$x \in [2; +\infty[$	h. $-5 \leq x$	$\Leftrightarrow$	$x \in [-5; +\infty[$
i. $x < 0$	$\Leftrightarrow$	$x \in]-\infty; 0[$	j. $-1 < x$	$\Leftrightarrow$	$x \in]-1; +\infty[$

Exercice d'application 7 :

Je donne l'inégalité qui correspond à chaque intervalle :

INTERVALLE		INEGALITE	INTERVALLE		INEGALITE
a. $x \in [5 ; 9]$	$\Leftrightarrow$	$5 \leq x \leq 9$	b. $x \in [-1; +\infty[$	$\Leftrightarrow$	$x \geq -1$
c. $x \in [3 ; +\infty[$	$\Leftrightarrow$	$3 \leq x$	d. $x \in [5 ; 7[$	$\Leftrightarrow$	$5 \leq x < 7$
e. $x \in]-\infty ; 2]$	$\Leftrightarrow$	$x \leq -2$	f. $x \in]-2 ; -1]$	$\Leftrightarrow$	$-2 < x \leq -1$
g. $x \in]-3 ; -2[$	$\Leftrightarrow$	$-3 < x < -2$	h. $x \in]0 ; +\infty[$	$\Leftrightarrow$	$x > 0$
i. $x \in]-\infty ; 1]$	$\Leftrightarrow$	$x \leq 1$	j. $x \in]-7 ; -5]$	$\Leftrightarrow$	$-7 < x \leq 5$

Exercice d'application 8 :

Je donne l'inégalité et l'intervalle qui correspond à la zone définie sur l'axe gradué :

Représentation	Inégalité
	$x \geq 5$
	$-3 < x \leq 1$
	$7 \leq x \leq 8$
	$x \leq -1$

IV. Je m'exerce :

Exercice 1 :

Réponds par vrai ou faux aux affirmations suivantes en justifiant si possible.

a. $\frac{-3}{11} = -0,27$; **b.** 0,27 est une valeur approchée par défaut de $\frac{3}{2}$;

c. 0,27 est l'arrondi d'ordre 2 de $\frac{3}{11}$; **d.** 0,272 est l'arrondi d'ordre 3 de $\frac{3}{11}$;

e. 0,273 est une valeur approchée par excès de $\frac{3}{11}$; **f.** $\pi = \frac{22}{7}$;

g. $]-\infty\,;\,7[$ est l'ensemble des réels strictement inférieurs à 7.

Exercice 2 :

a. Compare au nombre $\frac{7}{16}$ chacun des nombres ci- dessous :

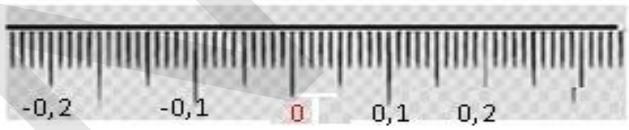
$1\,;\ \frac{7}{12};\ \frac{17}{32};\ \frac{3}{8};\ \frac{1}{2};\ \frac{7}{17}.$

b. Donne l'amplitude dans chacun des intervalles :

$[-3\,;\,-2];\ [-31{,}75\,;\,-30{,}92];\ [2{,}05\,;\,2{,}5[\,;\,]-\frac{2}{3}\,;2[\,;\ ]0{,}2\,;\,0{,}21].$

Exercice 3 :

a. Trace la droite graduée ci-contre dans ton cahier.



b. Place les points suivants :

$A(0{,}07);\ B(-0{,}18);\ C(0{,}13);\ D(-0{,}05);\ E(0{,}165)$ et $F(-0{,}035)$.

Exercice 4 :

a. Cite deux nombres compris entre π et $\frac{22}{7}$.

b. Cite deux nombres compris entre $\frac{-13}{3}$ et $\frac{-108}{25}$.

c. Cite deux nombres compris entre 1 et 2.

Exercice 5 :

a. Trace une droite d graduée en cm. Hachure les intervalles : $[-2\,;\,1]$; $[5\,;+\infty[$ et $]-\infty\,;-3]$.

b. Sur une droite graduée, hachure ce qui n'est pas l'intervalle $]-\infty;3]$ et ce qui n'est pas $[-2\,;+\infty\,[$.

Quel intervalle représente la partie non hachurée de la droite réelle ?

c. Donne l'ensemble des nombres réels qui vérifient en même temps :

$$x \in [-4\,;\,+\infty[\,;\ x\ \in]-\infty;\ 3\,[\,;\ x \in\ [2\,;\,5].$$

Donne la solution sous forme d'intervalle puis d'encadrement.

Exercice 6 :

Donne l'arrondi d'ordre 2 de $\frac{17}{9}$ *; d'ordre 4 de* $\frac{11}{3}$ *; d'ordre 1 de* $\frac{10}{3}$.

Donne la valeur approchée de $\frac{13}{21}$ *par excès au* 10^{-2} *près.*

Donne la valeur approchée de $\frac{13}{7}$ *par défaut à* 10^{-3} *près.*

Exercice 7 : Encadrement

On donne $1{,}4142 < x < 1{,}4143$

1. *Trouve un encadrement de* $y = \frac{6+5x}{4}$ *d'amplitude une puissance de 10, c'est-à-dire un encadrement de la forme :*
   $a < x < b$ *; avec* $a - b = 10^n$ $(n \in \mathbb{Z})$
2. *Encadre la somme et la différence :* $\sqrt{80} + \sqrt{30}$; $\sqrt{80} - \sqrt{30}$

Exercice 8 :

On donne $A =]-\infty\,;\,-1]$ *et* $B =]0\,;\,+\infty[$.

Ecris deux intervalles dont aucun élément n'appartient ni à A ni à B.

Un élève a trouvé l'intervalle $]-1\,;\,0]$ *est-ce exact ?*

Exercice 9 :

Représente sur une droite graduée les intervalles suivants :

$]-3\,;\,1[$; $[-2{,}5\,;\,4[$; $[5\,;\,+\infty[$; $]-\infty;\,-2[$; $[-4\,;\,-1[$.

Exercice 10 :

Ecris sous forme d'intervalle chacun des ensembles de nombres définis ci-dessous :

$x \leq -2$; $x > 3{,}5$; $-4 < x < 6$; $-2 < x < 2$; $5{,}1 \leq x$.

$x > 1$; $x < \frac{1}{2}$ *et* $x \geq -2$; $x < -1$; $-7 < x \leq 5$.

Exercice 11 :

Traduis à l'aide d'inégalités :

$x \in]0\,;\,+\infty[$; $x \in]-4\,;\,5[$; $x \in]-3{,}5\,;+\infty[$; $x \in [-10\,;\,10]$; $x \in]-2\,;\,4[$;
$x \in]3{,}4\,;\,7]$; $x \in]-\infty\,;\,-9]$; $x \in]-\infty\,;\,4{,}1]$; $x \in]80\,;\,+\infty[$.

Exercice 12 :

Donne six nombres de chacun des intervalles :

$]-1\,;2[$; $]4{,}28\,;\,4{,}3]$; $]-5{,}1\,;-5[$; $]-0{,}5\,;\,0{,}5[$.

Exercice 13 :

a. *Donne cinq nombres réels de chacun des intervalles :*

$[-2;\,2]$; $[1{,}7\,;-1{,}2]$; $-3{,}13\,;\,3{,}17[$; $]-2{,}134\,;\,-2{,}128[$.

b. *Donne cinq nombres réels de chacun des intervalles :*

$[-2;\,2]$; $[1{,}7\,;\,-1{,}2]$; $-3{,}13\,;\,3{,}17[$; $]-2{,}134\,;\,-2{,}128[$.

Exercice 14 :

Encadre $\sqrt{143}$ *par deux nombres entiers consécutifs.*

Exercice 15 :

Donne un encadrement par deux décimaux de $\frac{-21}{13}$ *d'amplitude* 10^{-2} ; 10^{-1} ; 10^{-3}.

Exercice 16 :
On donne $\pi \approx 3{,}141$ *et* $R = 1{,}237$.
a. Donne des encadrements de π *et* R *d'amplitude* 10^{-3}.
b. On rappelle que la longueur d'un cercle de rayon R *est* $L = 2\pi R$ *et que l'aire d'un disque de rayon* R *est* $A = \pi R^2$.
Trouve des encadrements de L et de A d'amplitude une puissance de 10.

Exercice 17 :
a. On donne $-1{,}42 < x < -1{,}41$ *et* $-3{,}17 < y < -3{,}16$.
Trouve un encadrement de : $2x - 5y$ *;* xy.
b. Même question que a. avec : $0{,}321 < x < 0{,}322$ *et* $-0{,}512 < y < -0{,}511$.

Exercice 18 :
Soient x *et* y *sont des réels tels que :* $0{,}2 < x < 1{,}3$ *et* $2{,}1 < y < 2{,}5$
Donne un encadrement des nombres suivants :
a. $x + y$ *; b.* $x - y$*; c.* xy *; d.* $\frac{x}{y}$ *e.* $3x - 2y$ *; f.* $2x + 3y$ *g.* $6xy$ *; h.* $\frac{2x}{3y}$.

Exercice 19 :
1. *Traduis sous forme d'une inégalité chacune des affirmations suivantes :*
   $x \in [-3; 1[$ *;* $x \in]-\infty; 2]$ *;* $x \in [-1; 0]$.
2. *Détermine l'intervalle auquel appartient y dans les cas suivants :*
$y < 2$ *;* $-3 + y \geq 1$*;* $2 \leq y \leq 13$ *;* $-1 < y < 1$ *;* $-3y + 1 \geq y - 11$*;* $2y - 2 < -6$.

Exercice 20 :
Complète le tableau suivant :

Intervalle	*Inégalité*	*Centre*	*Rayon*	*Amplitude*
$x \in [-1; 5]$				
$x \in]4; 10[$				
$x \in$...		-5	*1*	
$x \in$...			*10*	*10*
$x \in$...	$-2 \leq x \leq 10$			
$x \in$...	$-16 < x < \cdots$			*7*

Exercice 21 :
Sachant que : $0{,}6 \leq x \leq 2{,}1$ *, donne un encadrement des nombres suivants :*
$a = 6x$ *;* $b = -3x$ *;* $c = -2x + 1$ *;* $d = \frac{4}{x}$ *;* $e = \frac{-8}{x}$ *;* $f = \frac{2}{x-1}$ *;* $g = \frac{-3}{4-x}$ *;*
$a + b$ *;* $a - b$ *;* ax.

Exercice 22 :
Ecris sans valeur absolue les expressions :
a. $|5x - 2|$ *; b.* $|-3x + 7|$ *; c.* $|-2x - 5|$*; d.* $|7x + 3|$.

Exercice 23 :
Trouve, dans chaque cas, tous les nombres x *dans* $\mathbb{R}$ *vérifiant l'égalité :*
1. $|2x - 5| = 4$
2. $2|x| + 8 = 15$
3. $|x| + 4 = 2$

Math AS.indd 38 15/07/2024 15:30:43

Chapitre 3 : Racines carrées

I. Activités préparatoires :

Activité 1 :

1. Construis un triangle ABC rectangle en A tel que : AB =1cm et AC =2cm, puis le carré BCDE.
2. Calcule la longueur du côté [BC]

On admet que chaque nombre positif est le carré d'un seul nombre positif.

Activité 2 :

1. Complète : $3 = \frac{6}{2}$ équivaut à $...^2 = \left(\frac{6}{...}\right)^2$, car : $9 = \frac{...}{4}$.
2. Compare 3 et $\sqrt{6}$ en comparant d'abord leurs carrés.
3. En s'inspirant de la méthode utilisée dans les deux questions précédentes réponds à la question : les deux nombres sont-ils égaux dans les cas suivants ?
   a. $5 - \sqrt{7}$ et $31 - 10\sqrt{7}$; b. $6 - \sqrt{5}$ et $41 - 12\sqrt{5}$.

Activité 3 :

1. a. Calcule puis compare $\sqrt{9} \times \sqrt{4}$ et $\sqrt{9 \times 4}$. Que remarques-tu ?
   b. Soient x et y deux réels positifs.
   On pose $u_1 = \sqrt{x \times y}$ et $v_1 = \sqrt{x} \times \sqrt{y}$, calcule ${u_1}^2$ et ${v_1}^2$.
   Compare – les, puis u_1 et v_1. Conclus.
2. a. Calcule puis compare $\sqrt{\frac{100}{4}}$ et $\frac{\sqrt{100}}{\sqrt{4}}$. Que remarques-tu ?
   b. Soient x et y deux réels positifs.
   On pose $u_2 = \sqrt{\frac{x}{y}}$ et $v_2 = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$ (où $y \neq 0$),calcule ${u_2}^2$ et ${v_2}^2$.
   Compare – les, puis u_2 et v_2. Conclus.

Activité 4 :

1. a. Calcule puis compare $\sqrt{16 + 9}$ et $\sqrt{16} + \sqrt{9}$. Que remarques-tu ?
   b. Soient x et y deux réels strictement positifs.
   On pose $u_3 = \sqrt{x + y}$ et $v_3 = \sqrt{x} + \sqrt{y}$, calcule ${u_3}^2$ et ${v_3}^2$.
   Compare – les, puis u_3 et v_3. Conclus.
2. a. Calcule puis compare $\sqrt{16 - 9}$ et $\sqrt{16} - \sqrt{9}$. Que remarques-tu ?
   b. Soient x et y deux réels strictement positifs tels que : $x \geq y$.
   On pose $u_4 = \sqrt{x - y}$ et $v_4 = \sqrt{x} - \sqrt{y}$, calcule ${u_4}^2$ et ${v_4}^2$.
   Compare – les, puis u_4 et v_4.
   Conclus.

Activité 5 :

Ecris sous la forme $a\sqrt{b}$. $(a \text{ et } b > 0)$ $\sqrt{132}$, $\sqrt{275}$,$\sqrt{396}$.

Activité 6 :

Ecris plus simplement :

$\sqrt{15^2}$, $\sqrt{13^4}$,$\sqrt{5^{18}}$,$\sqrt{6^{13}}$,$\sqrt{3^{19}}$,$\sqrt{10^4}$, $\sqrt{7^{13}}$ *et* $\sqrt{3^{16}}$.

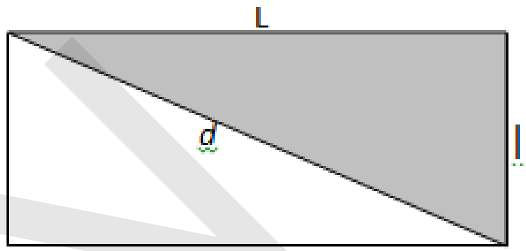
Activité 7 :

Écris chacun des quotients ci-dessous, sans radical au dénominateur :

$\frac{1}{\sqrt{13}}$, $\frac{2}{1+3\sqrt{5}}$, $\frac{1}{5\sqrt{2}-\sqrt{5}}$, $\frac{1}{4\sqrt{7}+2\sqrt{3}}$.

Activité 8 :

On veut connaître la mesure des diagonales de divers rectangles dont la largeur est notée l et la longueur L.



1. *Complète le tableau ci-dessous en utilisant le théorème de Pythagore.*

l	*3*	*5*	*7*	*0,9*	*3,3*	*1*
L	*4*	*12*	*24*	*4*	*5,6*	*2*
d^2						

2. *Le nombre d peut-il être négatif ? Pourquoi ?*
3. *Reprends la valeur de la dernière case : A-t-on le droit d'écrire $d = 2{,}236067977$?*

II. Je retiens :

1. Notion de racine carrée :

Définition 1 :

Soit a un nombre réel positif, il existe un unique réel positif dont le carré est a.
Ce nombre se note par $\sqrt{a}$ se lit " racine carrée de a" ou "radical de a".

Exemple 1:

$\sqrt{0}=0$; $\sqrt{1}=1$; $\sqrt{4}=2$; $\sqrt{9}=3$; $\sqrt{16}=4$; $\sqrt{25}=5$; $\sqrt{36}=6$;
$\sqrt{49}=7$; $\sqrt{64}=8$; $\sqrt{81}=9$; $\sqrt{100}=10$; $-\sqrt{121}=-11$ *et* $\sqrt{0{,}36}=0{,}6$.

Remarque 1 :

- $x=\sqrt{a}$ *signifie que :* $\begin{cases} x \text{ est positif} \\ x^2=a \end{cases}$
- $\sqrt{a}\times\sqrt{a}=(\sqrt{a})^2=a.\,(a>0)$
- $\sqrt{a}$ *n'a pas de sens lorsque* a *est un nombre strictement négatif.*
- $\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases} a, & si\ a\geq 0 \\ -a, & si\ a\leq 0 \end{cases}$

Exemple 2 :

- $x=\sqrt{11}$ *Signifie que :* $\begin{cases} x \text{ positif} \\ x^2=11 \end{cases}$
- $\sqrt{(-5)^2}=|-5|=5;$
- $\sqrt{(x-5)^2}=|x-5|=x-5\ ou\ -(x-5).=5-x$

Conséquence :

Précisons encore que dans $\mathbb{R}$, l'équation $\boldsymbol{x^2=a}$:

- *N'a aucune solution lorsque* $a<0$
- *Possède deux solutions lorsque* $a>0$
  L'une est positive $\sqrt{a}$ et l'autre négative $-\sqrt{a}$.
- *Si* $a=0 \iff x=0$

2. Comparaison de racines carrées :

Règle1 :

Soient a et b deux nombres réels.

- *Si a et b sont de même signe,* $a=b$ *équivaut à* $a^2=b^2$.
- *Si* $0\leq a<b$, *alors* $a^2<b^2$.
- *Si* $a<b\leq 0$, *alors* $a^2>b^2$.

Remarque 2 :

Les règles de comparaison déjà vues dans le chapitre intitulé les nombres réels peuvent être appliquées aux radicaux.

3.Propriétés des racines carrées :

Propriété :

Etant donnés deux réels x et y *positifs. On a :*

- $\sqrt{x \times y} = \sqrt{x} \times \sqrt{y}$
- $\sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$ (*où* $y \neq 0$)

Règle 2 :

Etant donnés deux réels x et y *strictement positifs tels que* $x \neq y$, *on a :*

- $\sqrt{x+y} \neq \sqrt{x} + \sqrt{y}$;
- $\sqrt{x-y} \neq \sqrt{x} - \sqrt{y}$. $(x > y)$

Remarque 3 :

- *Si* $x = y$, $x = 0$ *ou* $y = 0$, *il y a égalité :* $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$
- *Si* $x = y$ *ou* $y = 0$, *il y a égalité :* $\sqrt{x-y} = \sqrt{x} - \sqrt{y}$

4. Transformation d'écritures de racines carrées :

4.1. Écriture sous forme $a\sqrt{b}$:

Règle 3 :

Si a est un réel positif, qui n'a pas une racine carrée exacte, on simplifie, si c'est possible, $\sqrt{a}$ *comme suit : On écrit* $a = b^2c$.

$\sqrt{a} = \sqrt{b^2c} = \sqrt{b^2} \times \sqrt{c} = b \times \sqrt{c}$. *Donc on dit qu'on a écrit a sous forme* $b\sqrt{c}$.

Exemple 3 :

$\sqrt{75} = \sqrt{3 \times 25} = \sqrt{3} \times \sqrt{25} = 5\sqrt{3}$.

4.2. Puissances et racines carrées :

Règle 4 :

a étant un nombre réel positif et n un entier positif :

- $\sqrt{a^{2n}} = a^n$.
- $\sqrt{a^{2n+1}} = \sqrt{a^{2n}} \times \sqrt{a} = a^n\sqrt{a}$.

4.3. Écriture de quotient sans radical au dénominateur :

Règle 5 :

Pour éliminer le radical au dénominateur d'un quotient, on multiplie souvent le numérateur et le dénominateur par l'expression conjuguée du dénominateur.

Exemple 4 :

- $\frac{3}{5\sqrt{2}} = \frac{3\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times5\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{5\times\sqrt{2}^2} = \frac{3\sqrt{2}}{10}$.
- $\frac{1}{2\sqrt{7}-\sqrt{5}} = \frac{1\times(2\sqrt{7}+\sqrt{5})}{(2\sqrt{7}-\sqrt{5})(2\sqrt{7}+\sqrt{5})} = \frac{(2\sqrt{7}+\sqrt{5})}{2^2\times7-5} = \frac{2\sqrt{7}+\sqrt{5}}{28-5} = \frac{2\sqrt{7}+\sqrt{5}}{23}$.

III. Je sais faire :

Exercice d'application 1 :

Calcule mentalement :

$\sqrt{1600} = \ ...;\ \sqrt{400} = \ ...;\ \sqrt{10000} = \ ...;\ \sqrt{8100} = \cdots;\ \sqrt{0{,}09} = \cdots.$

Exercice d'application 2 :

Résous les équations :

$x^2 = 9,\ \ x^2 = 80\ \ et\ x^2 = -16.$

Exercice d'application 3 :

1. *Calcule :* $\sqrt{9\ \times 81};\ \sqrt{800} \times \sqrt{\frac{1}{2}}$
2. *Complète :* $\sqrt{\frac{7}{9}} = \frac{\sqrt{7}}{....};\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{...}{...}} = \cdots\ ;\frac{\sqrt{5}}{4} = \sqrt{\frac{...}{...}}$

Exercice d'application 4 :

Ecris sous forme $a\sqrt{b}.\ (a\ et\ b > 0)$

$\sqrt{1200}, \sqrt{584}, \sqrt{940}, \sqrt{864}, \sqrt{1036}\ et\ \sqrt{3006}.$

1. *Écris plus simplement :*

$2\sqrt{27} - 5\sqrt{48} + 3\sqrt{300}\ et\ \sqrt{50} + 3\sqrt{72} - 0{,}7\sqrt{800}$

Exercice d'application 5 :

Écris plus simplement :

$\sqrt{17^2}\ ,\sqrt{25^3}\ ,\sqrt{12^3 \times 25^3}\ ,\sqrt{12\,500}\ ,\sqrt{32 \times 10^{-12}}\ ,\sqrt{0{,}121}\ \ et\sqrt{0{,}000243}.$

Exercice d'application 6 :

Écris le plus simplement possible sans radical au dénominateur (on dit aussi rendre rationnel) :

$\frac{1}{3\sqrt{5}}\ ;\ \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}\ ;\ \frac{3}{\sqrt{2}-\sqrt{5}}\ ;\ \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}-\sqrt{5}}\ ;\ \frac{3\sqrt{5}}{4\sqrt{2}-3\sqrt{5}}.$

Solutions des exercices d'application :

Exercice d'application 1 :

Je calcule mentalement :

$\sqrt{1600} = 40$; $\sqrt{400} = 20$; $\sqrt{10000} = 100$;

$\sqrt{8100} = 90$; $\sqrt{0{,}09} = 0{,}3$.

Exercice d'application 2 :

Je résous les équations :

$x^2 = 9$ *ou encore* $x^2 - 3^2 = 0$, *donc* $(x-3)(x+3) = 0$ *soit* $x = 3$ *ou* $x = -3$

$x^2 = 80$ *ou bien* $x^2 - 80 = 0$, *donc* $(x - \sqrt{80})(x + \sqrt{80}) = 0$ *soit* $x = 4\sqrt{5}$ *ou*

$x = -4\sqrt{5}$

$x^2 = -16$. *n'a pas de solution*

Exercice d'application 3 :

1. *Je calcule :*

$$\sqrt{9 \times 81} = \sqrt{9} \times \sqrt{81} = 3 \times 9 = 27 ;$$

$$\sqrt{800} \times \sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{800 \times \frac{1}{2}} = \sqrt{400} = 20.$$

2. *Je complète :*

$$\sqrt{\frac{7}{9}} = \frac{\sqrt{7}}{3} ; \qquad \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{18}{2}} = 3 ; \qquad \frac{\sqrt{5}}{4} = \sqrt{\frac{5}{16}}.$$

Exercice d'application 4 :

J'écris sous forme $a\sqrt{b}$. $(a$ *et* $b > 0)$

$\sqrt{1200} = \sqrt{400 \times 3} = \sqrt{400} \times \sqrt{3} = 20\sqrt{3}$;

$\sqrt{584} = \sqrt{4 \times 146} = \sqrt{4} \times \sqrt{146} = 2\sqrt{146}$;

$\sqrt{940} = \sqrt{4 \times 235} = \sqrt{4} \times \sqrt{235} = 2\sqrt{235}$;

$\sqrt{864} = \sqrt{144 \times 6} = \sqrt{144} \times \sqrt{6} = 12\sqrt{6}$;

$\sqrt{1036} = \sqrt{4 \times 259} = \sqrt{4} \times \sqrt{259} = 2\sqrt{259}$;

$\sqrt{3006} = \sqrt{9 \times 334} = \sqrt{9} \times \sqrt{334} = 3\sqrt{334}$.

2. *J'écris plus simplement :*

$$\begin{aligned} 2\sqrt{27} - 5\sqrt{48} + 3\sqrt{300} &= 2\sqrt{9 \times 3} - 5\sqrt{16 \times 3} + 3\sqrt{100 \times 3} \\ &= 2 \times 3\sqrt{3} - 5 \times 4\sqrt{3} + 3 \times 10\sqrt{3} \\ &= (6 - 20 + 30)\sqrt{3} = 16\sqrt{3}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{50} + 3\sqrt{72} - 0{,}7\sqrt{800} &= \sqrt{25 \times 2} + 3\sqrt{36 \times 2} - 0{,}7\sqrt{400 \times 2} \\ &= 5\sqrt{2} + 3 \times 6\sqrt{2} - 0{,}7 \times 20\sqrt{2} \\ &= (5 + 18 - 14)\sqrt{2} = 9\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Math AS.indd 44 15/07/2024 15:30:47

Exercice d'application 5 :

J'écris plus simplement :

$\sqrt{17^2} = 17$,$\sqrt{25^3} = 5\sqrt{5}$;

$\sqrt{12^3 \times 25^3} = \sqrt{12^3} \times \sqrt{25^3} = 12\sqrt{12} \times 25\sqrt{25} = \left(12\sqrt{12}\right) \times (25 \times 5)$

$60\sqrt{60} = 120\sqrt{15}$;

$\sqrt{12500} = \sqrt{100} \times \sqrt{125} = 10\sqrt{5^3} = 10 \times 5\sqrt{5} = 50\sqrt{5}$;

$\sqrt{32 \times 10^{-12}} = \sqrt{32} \times \sqrt{10^{-12}} = \sqrt{16 \times 2} \times \sqrt{10^{(-6)\times 2}} = \left(4\sqrt{2}\right) \times 10^{-6}$

$= \frac{4\sqrt{2}}{10^6}$;

$\sqrt{0{,}121} = \sqrt{\frac{121}{1000}} = \frac{\sqrt{11^2}}{\sqrt{10^3}} = \frac{11}{10\sqrt{10}} = \frac{11\sqrt{10}}{100}$

$\sqrt{0{,}000243} = \sqrt{243 \times 10^{-6}} = \sqrt{243} \times \sqrt{10^{-6}} = \sqrt{81 \times 3} \times \sqrt{10^{(-3)\times 2}}$

$= \frac{9\sqrt{3}}{1000}$.

Exercice d'application 6 :

J'écris le plus simplement possible sans radical au dénominateur :

$\frac{1}{3\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{15}$; $\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}$;

$\frac{3}{\sqrt{2}-\sqrt{5}} = \frac{3(\sqrt{2}+\sqrt{5})}{(\sqrt{2}+\sqrt{5})(\sqrt{2}-\sqrt{5})} = \frac{3(\sqrt{2}-\sqrt{5})}{-3} = \sqrt{5} - \sqrt{2}$;

$\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}-\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{3}(2\sqrt{3}+\sqrt{5})}{(2\sqrt{3}-\sqrt{5})(2\sqrt{3}+\sqrt{5})} = \frac{6+\sqrt{15}}{7}$;

$\frac{3\sqrt{5}}{4\sqrt{2}-3\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}(4\sqrt{2}+3\sqrt{5})}{(4\sqrt{2}-3\sqrt{5})(4\sqrt{2}+3\sqrt{5})} = \frac{12\sqrt{10}+45}{-13} = -\frac{12\sqrt{10}+45}{13}$.

IV. Je m'exerce :

Exercice1 :

1. Quelle est la racine carrée des nombres suivants ?
   49 ; 64 ; 25 ; 9 ; 144 ; 100 ; 121 ; 81 ; 10 000; 10^{16}; 10^{22}; 10^{38} 10^{-20} ;10^{-14}.

2. Recopie et complète :

$4^2 = \cdots$ $\quad (-4)^2 = \cdots$ $\quad (2{,}3)^2 = \cdots$ $\quad (-2{,}3)^2 = \cdots$

$(0{,}5)^2 = \cdots$ $\quad (-0{,}5)^2 = \cdots$ $\quad 90^2 = \cdots$ $\quad (-90)^2 = \cdots$

$\sqrt{16} = \cdots$ $\quad \sqrt{5{,}29} = \cdots$ $\quad \sqrt{0{,}25} = \cdots$ $\quad \sqrt{8100} = \cdots$

3. Recopie et complète :

a. $12^2 = \cdots;\ \sqrt{\ldots} = 12$

b. $13^2 = \cdots;\ \sqrt{\ldots} = 13$

c. $(0{,}6)^2 = \cdots;\ \sqrt{\ldots} = 0{,}6$

d. $(1{,}3)^2 = \cdots;\ \sqrt{\ldots} = 1{,}3$

Exercice2 :

Range par ordre croissant les réels suivants, sans utiliser la calculatrice :
$3\sqrt{11}$; 10 ; $4\sqrt{6}$; $\sqrt{97}$; $7\sqrt{2}$; $6\sqrt{3}$; $3\sqrt{10}$ et $\sqrt{101}$

Exercice3 :

Réponds par vrai ou faux en justifiant :

a. $\sqrt{36}$ peut être égal à -6

b. $\sqrt{(-5)^2} = -5$

c. $\sqrt{(-5)^2} = 5$

d. $\sqrt{-4} \times \sqrt{-9} = 6$

e. La moitié de $\sqrt{18}$ est $\sqrt{9}$;

f. $\sqrt{(\pi - 4)^2} = \pi - 4$

g. Il existe un nombre réel a tel que $\sqrt{a} = a$;

h. $\sqrt{2006}$ est compris entre 44 et 45

i. Le triple de $\sqrt{5}$ est $\sqrt{15}$;

j. Le produit de 7 par $\sqrt{3}$ est $\sqrt{147}$;

k. La somme de $\sqrt{7}$ et de $\sqrt{9}$ est $\sqrt{16}$;

l. 5 est le carré de $(\sqrt{2} + \sqrt{3})$;

Exercice4 :

Quel est le périmètre du triangle de côtés a, b et c en cm lorsque :

1. $a = 4\sqrt{3}$; $b = 6\sqrt{3}$; $c = 7\sqrt{3}$ .2. $a = 9\sqrt{2}$; $b = 7\sqrt{2}$; $c = 6\sqrt{5}$.

3. $a = 11\sqrt{5}$; $b = 7\sqrt{5}$; $c = 6\sqrt{5}$.

Exercice5 :

Réduis les expressions numériques suivantes :

1. $7\sqrt{7} - 3\sqrt{7} - 5\sqrt{7}$;
2. $14\sqrt{11} - \sqrt{11} - 13$;
3. $9\sqrt{6} - \sqrt{6} + 7\sqrt{6}$;
4. $9\sqrt{7} + \sqrt{7} - 10$;
5. $15\sqrt{8} - 5\sqrt{8} - 102$;
6. $9\sqrt{19} + \sqrt{19} - 9$.

Exercice 6 :

Développe les expressions en écrivant le résultat le plus simplement possible.

$A = \frac{1}{3}(4{,}5 - 18\sqrt{3})$; $B = 2\sqrt{3}(5 - 3\sqrt{3})$.

Exercice 7 :

1. Simplifie les écritures suivantes :

$$\frac{7}{\sqrt{7}} ; \frac{22}{\sqrt{11}} ; \frac{(\sqrt{13})^3}{413} ; \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}} ; \frac{\sqrt{45}}{\sqrt{80}} ; \frac{4\sqrt{3}}{27} ; \frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{5}} ; \frac{11\sqrt{15}}{2\sqrt{20}} ; \frac{\left(\sqrt{45}\right)^3}{\sqrt{2}\sqrt{7}} ; \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{30}} ;$$

$$\sqrt{\frac{90}{49}} ; \sqrt{45}\sqrt{\frac{1}{5}} ; \sqrt{\frac{7}{2}}\sqrt{\frac{7}{8}}\sqrt{\frac{56}{75}}\sqrt{\frac{6}{7}} ; \sqrt{\frac{16}{50}} ; \sqrt{\frac{2^6}{3^8}}\sqrt{\frac{2^7}{3^4}} ; \sqrt{\frac{6}{12{,}1}}\sqrt{\frac{3}{20}}.$$

2. Ecris plus simplement :

a. $\sqrt{4 \times 64}$; $\sqrt{9 \times 16}$; $\sqrt{16 \times 49}$; $\sqrt{25 \times 121}$; $\sqrt{2} \times \sqrt{32}$; $\sqrt{2} \times \sqrt{72}$; $\sqrt{3} \times \sqrt{27}$; $\sqrt{23} \times \sqrt{23}$; $\sqrt{4} \times \sqrt{6{,}25}$.

b. $2\sqrt{7} \times 5\sqrt{28}$; $\sqrt{45} \times \sqrt{\frac{81}{7}}$; $\sqrt{80} \times \sqrt{20}$; $\sqrt{45} \times \sqrt{60} \times \sqrt{12}$.

Exercice 8 :

1. Donne l'écriture la plus simple possible des nombres suivants :

$A = 4\left(\sqrt{5}\right)^2 - 8$; $B = 1{,}5(\sqrt{2})^2 - 4\,(\sqrt{3}\,)^2 + 7$.

2. Mets les nombres suivants sous la forme $a\sqrt{2}$ où a est un nombre décimal.

$A = 3\sqrt{2} - 1{,}5\sqrt{2}$; $B = 0{,}7\sqrt{2} + 1{,}8\sqrt{2} - \sqrt{2}$;

$C = 8 \times 4{,}5\sqrt{2}$; $D = 7\sqrt{2} \times 1{,}2 - 4\sqrt{2}$.

3. Avec la calculatrice, trouve les arrondis millièmes des nombres A, B, C et D.

Exercice9 :

Ecris sous la forme $a\sqrt{b}$:

$A = -3\sqrt{72} + 2\sqrt{50}$; $B = 5\sqrt{12} - 2\sqrt{75} + \sqrt{300}$;

$C = -3\sqrt{147} + 12\sqrt{27} - \sqrt{48}$; $D = \sqrt{45} + \sqrt{5^3} - \sqrt{245}$.

Exercice10 :

Ecris sous la forme $a\sqrt{b}$:

$E = 7\sqrt{12} - 2\sqrt{3} + 4\sqrt{27}$; $F = \sqrt{396} - \sqrt{539} + \sqrt{704} - \sqrt{275}$;

$G = \sqrt{252} - \sqrt{175} + \sqrt{343} + \sqrt{63}$.

Exercice11 :

1. Ecris les nombres suivants sans le symbole $\sqrt{}$ au dénominateur :

$$\frac{1}{\sqrt{5}} ; \frac{1}{5+\sqrt{2}} ; \frac{-2}{-1-\sqrt{5}} ; \frac{3}{\sqrt{7}} ; \frac{1}{5-\sqrt{3}} ; \frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{7}} ; \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} ; \frac{-3}{\sqrt{2}-1} ; \frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2} ;$$

$$\frac{\sqrt{3}}{6\sqrt{2}-\sqrt{11}} ; \frac{\sqrt{2}-5}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}} ; \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}.$$

2. Rends rationnel le dénominateur des rapports suivants :

a. $\frac{1}{\sqrt{2}+1}$; $\frac{3}{\sqrt{3}-2}$; $\frac{1}{2\sqrt{5}-5\sqrt{2}}$; *b.* $\frac{3-\sqrt{3}}{\sqrt{5}-2\sqrt{3}}$; $\frac{7\sqrt{2}-3}{4-\sqrt{2}} + \frac{3-7\sqrt{2}}{4+\sqrt{2}}$.

Exercice12 :

Développe les expressions suivantes et écris les résultats sous la forme $a + b\sqrt{c}$, la plus simple possible.

a. $\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)$; $\sqrt{5}(2-\sqrt{5})$.

b. $2\sqrt{3}(\sqrt{3}-5)$; $3\sqrt{2}(\sqrt{2}+4)$.

c. $7\sqrt{5}(2\sqrt{5}+1)$;$\sqrt{3}\left(2\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)$.

Exercice13 : En géométrie

L'unité de longueur est le centimètre.

1. *Sur la perpendiculaire en O à l'axe $x'Ox$, on place un point A tel que $OA = 2$. Le cercle de centre A de rayon 3 coupe l'axe en deux points B et B'. Montre que les abscisses de B et B' sont les solutions de l'équation $x^2 = 5$.*
2. *Deux cercles concentriques ont pour rayons r = 1 et r' = 8. Calcule l'aire de la couronne formée par ces deux cercles. Mets le résultat sous la forme $a\sqrt{b} \times \pi n$; avec n, a et b entiers.*

Exercice14 :

Sans calculatrice, calcule : $\sqrt{43+\sqrt{31+\sqrt{21+\sqrt{13+\sqrt{7+\sqrt{3+\sqrt{1}}}}}}}$

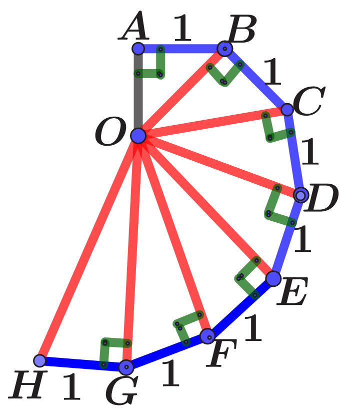
Exercice15 :

Reproduis la figure ci-contre à l'échelle 5.

a. Calcule les valeurs exactes de OB, OC, OD, OE, OF, OG et OH.

b. Mesure ces longueurs sur la figure et en déduis des valeurs approchées de $\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$; $\sqrt{5}$; $\sqrt{6}$; $\sqrt{7}$.

c. Compare les résultats du b. aux résultats fournis par une calculatrice.



Exercice16 :

1. *Montre que :* $\dfrac{6\sqrt{2}+\sqrt{48}}{\sqrt{12}+2\sqrt{2}} = \sqrt{6}$.
2. *Soit* $X = \sqrt{2+\sqrt{3}} + \sqrt{2-\sqrt{3}}$ *et* $Y = \sqrt{6}$, *montre que X=Y.*
3. *Montre que les nombres :*

$$a = \left(4+\sqrt{5}\right)^2 + \left(2-2\sqrt{5}\right)^2 \text{ et } b = \left(6+\sqrt{21}\right)\left(6-\sqrt{21}\right) \text{ sont des entiers.}$$

Chapitre 4 : Calcul Littéral

I. Activités préparatoires :

Activité 1 :

Dresse un tableau pour y mettre les expressions littérales et les expressions numériques. $\frac{1}{2} - a$; $3x - 2y$; $\frac{9}{2} - 5$, $3 \times 4 - 10^{-2}$; $\frac{5}{2} - \frac{2}{6} + \frac{5}{3}$; $2y$.

Activité 2 :

1. Ahmed a invité ses amis pour son anniversaire. Pour le goûter, il veut acheter trois bouteilles de lait et quatre jus aux fruits. Les prix des articles dans divers magasins sont donnés dans le tableau ci-dessous.

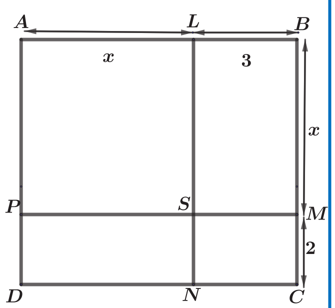
Magasins	Prix d'une bouteille	Prix d'un jus aux fruits
A	65	45
B	63	50
C	67	40

Calcule le prix de revient du goûter dans chaque magasin.

2. *On donne :* $P = 3x + 4y$.
   Recopie et complète :
   a. *Si* $x = 5$ *et* $y = 12{,}4$ *; alors* $P = \cdots$.
   b. *Si* $x = 6{,}5$ *et* $y = 28{,}4$ *; alors* $P = \cdots$.
   c. c. *Si* $x = 5{,}8$ *et* $y29$ *; alors* $P = \cdots$.

Recopie et complète en réutilisant $P = 3x + 4y$
a. *Si* $x = -5$ *et* $y = -7$ *; alors* $P = \cdots$.
b. *Si* $x = 8$ *et* $y = 15$ *;alors* $P = \cdots$.
c. *Si* $= -2$ *et* $y = 12$ *; alors* $P = \cdots$.

Activité 3 :



Un rectangle ABCD a pour dimensions en centimètres : $x + 2$ *et* $x + 3$.

1. *Quelle est l'aire du rectangle SMCN ?*
2. *Exprime l'aire des rectangles ALSP, LBMS et PSND en fonction de* x.
3. *Déduis des questions précédentes une expression de l'aire du rectangle ABCD en fonction de* x.
4. *En calculant d'une autre manière l'aire du rectangle ABCD, justifie l'égalité :* $(x + 2)(x + 3) = x^2 + 2x + 3x + 6$.
5. *Exprime l'aire des rectangles ABMP et PMCD en fonction de* x*, puis justifie l'égalité :* $(x + 2)(x + 3) = x(x + 3) + 2(x + 3)$.
6. *Le but de cette question est d'établir par le calcul les deux égalités précédentes. Recopie et complète l'égalité en utilisant la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition.*

   $(x + 2)(x + 3) = x \times (.. + ..) + 2 \times (... + ..)$, *puis effectue les produits.*

   Reprends le calcul en complétant :

   $(x + 2)(x + 3) = (.. + ..)\, x + (.. + ..) \times 3$, *puis effectue les produits.*

Activité 4 :

Réduis les expressions suivantes :

$A = 1 + 2a - 2b + 3a - ab - 5b - ab$; $B = x - 7 + x^2 + 3x - 4 + 3x^2$;

$C = 5xy + 3xz + 2xy + 3xz - 2yz - 2xy$;

$D = 2xy - 4yx^2 - y + 3xy + 7yx^2 - 3x + 4y$.

$E = 7x + (12 - 3x) + 8$;

$F = 5a^2 + 11a - 10 - (6a^2 - 3a) - 4$;

$G = 2\sqrt{3} + (2a + \sqrt{5}) - (a - 3\sqrt{3}) + 3\sqrt{5} + 3a$;

$H = (\sqrt{5} - x) + \left(2y - \sqrt{5}\right) - \left(\sqrt{5} + x\right) + x + y + 3\sqrt{5}$.

Activité 5 :

Développe et réduis $(a + b)^2$, $(a - b)^2$, $(a + b)(a - b)$

Activité 6 :

Factorise les expressions suivantes :

$18\,x + 9y$; $4x\sqrt{2} - 12y$; $7^2t^2 + 14t$; $(\sqrt{2} - 1)u + \dfrac{1}{(\sqrt{2}+1)}u^2$

Activité 7 :

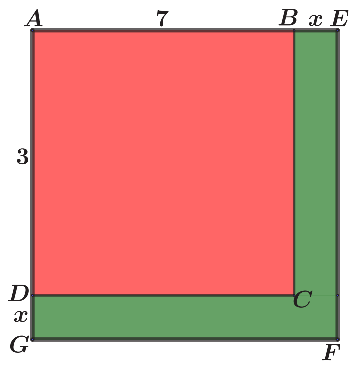
En utilisant les identités remarquables, factorise les expressions suivantes :

$x^2 + 8x + 16$; $9x^2 - 12x + 4$; $16 - 4x^2$; $x^2 - 10x + 25 + 4x\,(x - 5)$;

$4x^2 - 16 - (x - 1)(2x + 4)$.

Activité 8

Pour ajuster le salon de Mamadou de forme rectangulaire ABCD tel que $AB = 7m$ et $AD = 3m$, on augmente la longueur et la largeur de ce rectangle de x mètres, on obtient un nouveau salon AEFG comme le montre la figure ci-contre.



a. Exprime en fonction de x, le périmètre $\mathcal{P}$ et l'aire $\mathcal{A}$ de la surface augmentée

b. Calcule la valeur de x pour laquelle l'aire $\mathcal{A}$ est égale à 22m.

Calcule $\mathcal{A}$ pour cette valeur.

II. Je retiens :

1. Expression littérale :

1.1. Notion d'une expression littérale :

Définition 1 :

Une expression littérale est une expression dans laquelle figure un (ou plusieurs) terme(s) représenté(s) par une ou des lettres.

Exemple 1 :

$A = 2a + 1 - 4a - 3 + 2ab$; $E = 2xy - 4yx^2 - y + 3xy + 7yx^2 - 3x + 4y$.

1.2. Réduire une expression littérale :

Définition 2 :

Réduire une expression littérale, c'est l'écrire sous la forme d'une somme algébrique avec le moins de termes possibles

1.3. Réduire une expression sans parenthèses :

Méthode :

Pour réduire une expression sans parenthèses on rassemble et on calcule :

- *les termes constants puis*
- *les termes en x puis les termes en x^2 puis*
- *les termes en x^3 ...etc..*

Exemple 2 :

Réduis les expressions suivantes : $A = 8x - 4x$ *et* $B = 9x^2 - 11x^2$

Réponse :

$A = 8x - 4x = (8-4)x = 4x$; $B = 9x^2 - 11x^2 = -2x^2$

Exemple 3 : *cas général et méthode :*

Réduire C $= 9x^2 + 7x - 3 - 5x^2 + 9x + 4$

$$C = \underbrace{9x^2 - 5x^2}_{} + \underbrace{7x + 9x}_{} \underbrace{- 3 + 4}_{}$$

On **regroupe** les termes en x^2, les termes en x et les termes constants

$$C = 4x^2 + 16x + 1$$

On **calcule** les termes en x^2, en x et les termes constants

$$\mathbf{C} = 4x^2 + 16x + 1$$

2. Développer, réduire et ordonner :

2.1. Développer une expression :

Remarque 1 :

On rappelle les formules de la distributivité double suivantes.

Pour tout a, b, x et y de nombres réels, on a :

- $(a+b)(x+y) = a(x+y) + b(x+y) = ax + ay + bx + by;$
- $(a+b)(x-y) = a(x-y) + b(x-y) = ax - ay + bx - by;$
- $(a-b)(x+y) = a(x+y) - b(x+y) = ax + ay - bx - by;$
- $(a-b)(x-y) = a(x-y) - b(x-y) = ax - ay - bx + by.$

2.2. Réduire une expression :

Définition 2 :

Réduire une somme littérale, c'est regrouper les termes de même nature. (mêmes lettres et mêmes exposants)

Remarque 2 :

On trouve en général trois types de familles les x, les x^2 et les constantes (les nombres tous seuls), mais il en existe bien d'autres :

$x^1 = x$; $x^0 = 1$ $(x \neq 0)$; $1.x = x(-1).x = -x$.

Si E est une expression, alors $-E = (-1) \times E$.

Exemple 4 :

Réduis les expressions littérales suivantes :

$A = 5m^2 + 6 - 7m + 12m^2 + 8m - 15,$

$B = 4a^2 + 3a + 1 + 4b + 2a - 7b + 4 - a^2.$

Réponse :

on regroupe les termes de même nature puis on calcule :

$A = 5m^2 + 6 - 7m + 12m^2 + 8m - 15.$

$= 5m^2 + 12m^2 + 8m - 7m + 6 - 15.$

$= 17m^2 + m - 9.$

$B = 1 + 3a + 4a^2 + 4b + 2a - 7b + 4 - a^2.$

$= 4 + 1 + 3a + 2a + 4a^2 - a^2 + 4b - 7b.$

$= 5 + 5a + 3a^2 - 3b.$

Remarque 3 :

Ordonner une expression littérale, c'est ranger les termes suivants les puissances (dé)croissantes de x et suivant l'ordre alphabétique.

Exemple 5 :

$C = 5x + 3x^2 + 2x^3 + 2$

$C = 2x^3 + 3x^2 + 5x + 2$ *par ordre décroissant ou encore* $2 + 5x + 3x^2 + 2x^3$ *par ordre croissant des puissances de x.*

3. Somme algébrique et suppression des parenthèses:

Règle 1 :

Pour réduire une expression littérale par suppression des parenthèses, on utilise les formules suivantes : Pour trois nombres réels a, b et c on a :

$a+(b+c)=a+b+c$; $\quad a+(b-c)=a+b-c$;

$a-(b+c)=a-b-c$; $\quad a-(b-c)=a-b+c$.

Exemple 6 :

$3 + (4y + 8m) = 3 + 4y + 8m.$

$25b + (3b + 16) = 25b + 3b + 16 = 28b + 16.$

$12 - (5d + 8m) = 12 - 5d - 8m.$

$30 - (-12 + 9u) = 30 + 12 - 9u = 42 - 9u.$

$(5s+7)-(10s-2)=5s+7-10s+2=5s-10s+7+2=-5s+9.$

4. Identités remarquables :

Règle 2 :

Pour tous nombres a et b on a :

Carré d'une somme	Carré d'une différence	Produit d'une somme par une différence
$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$	$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$	$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

Carré du 1er terme — Double — Carré du 2eme term — Carré du 1er terme — Double — Carré du 2eme term — Carré du 1er terme — Carré du 2eme term

Attention :

Si on calcule puis on compare :

- $\mathbf{3}^{\mathbf{2}}+\mathbf{2}^{\mathbf{2}}$ *et* $(3+2)^2$
- $\mathbf{3}^{\mathbf{2}}-\mathbf{2}^{\mathbf{2}}$ *et* $(3-2)^2$

On en déduit alors qu'en général : $\boldsymbol{a}^{\mathbf{2}}+\boldsymbol{b}^{\mathbf{2}} \neq (a+b)^2$, $\boldsymbol{a}^{\mathbf{2}}-\boldsymbol{b}^{\mathbf{2}} \neq (a-b)^2$.

Exemple 7 :

Développe et réduis chacune des expressions suivantes :

$E = (4x - 1)^2$; $F = (4x + 1)^2$ *et* $G = (4x - 1)(4x + 1)$.

Réponse :

On utilise les identités remarquables (avec a = 4x et b = 1.)

$E = (4x - 1)^2 = (4x)^2 - 2 \times (4x) \times 1 + 1^2 = 16x^2 - 8x + 1.$

$F = (4x + 1)^2 = (4x)^2 + 2 \times (4x) \times 1 + 1^2 = 16x^2 + 8x + 1.$

$G = (4x - 1)(4x + 1) = 16x^2 - 1.$

Conclusion :

Pour développer et éventuellement réduire une expression, on utilise souvent les techniques suivantes :

- *La distributivité de multiplication (simple ou double)*
- *Les identités remarquables*
- *Les règles de suppression des parenthèses ou crochets.*

5. Factoriser une expression:

5.1. Règle de factorisation par mise en évidence d'un facteur commun :

. Règle :

- *Nous avons transformé, par exemple, $ax + ay$ en un produit de facteurs :* $ax + ay = a(x + y)$. *Cette transformation est une factorisation.*
- *La factorisation n'est possible que si l'on identifie un « facteur commun ». Ce facteur est soit "évident « ou on le découvre après avoir analysé tous les termes de l'expression et la décomposition de chaque terme.*
- *Cette factorisation par mise en évidence de facteur(s) commun(s) peut se présenter sous différentes formes.*

Exemple 8 :

Cas :	Exemple	Commentaire.
1-Un nombre	$T = 10a + 25$. *Décompose sous forme de Produit chaque terme de l'expression :* $10a = 5 \times 2a$ *et* $25 = 5 \times 5$, *donc* $T = 5 \times 2a + 5 \times 5 = 5(2a + 5)$	*On applique la formule :* $ab + ac = a(b + c)$ *On met « 5 » en facteur.*
2-Un nombre et une lettre.	$T = 14a^2 - 21a = 2 \times \mathbf{7} \times a \times a - 3 \times 7a$ $= 2a \times 7a - 3 \times 7a$ $T = 7a.(2a - 3)$.	*On recherche si le produit de facteurs communs existe : ici c'est « 7a »*
3-Une expression du type $(ax + b)$	$T = (x + 3)(3x - 4) + (7x - 5)(x + 3)$ $T = (x + 3)[(3x - 4) + (7x - 5)]$ $T = (x + 3)[3x - 4 + 7x - 5]$ $T = (x + 3)(10x - 9)$ $S = (x + 5)(x - 8) + (x + 5)^2$, *là encore il ne faut pas oublier que* $(x + 5)^2 = (x + 5)(x + 5)$, *l'expression factorisée est donc :* $S = (x + 5)[(x - 8) + (x + 5)]$ $= (x + 5)(2x - 3)$ $R = (x - 1)^2 - (x - 1)$ $= (x - 1)[(x - 1) - 1]$; *Où* $(x - 1)$ *est le facteur commun.* $Q = (2x + 1)^2 + (2x + 1)(x + 3)$; *où* $(2x + 1)$ *est le facteur commun* $P = (x + 1)(x + 2) - 5(x + 2)$; *où* $(x + 2)$ *est lefacteur commun*	*On recherche le facteur commun :* $(x + 3)$ *On met* $(x + 3)$ *en facteur.* *On utilise la formule* $ab + ac = a(b + c)$ *On développe l'intérieur des crochets.* *On réduit le deuxième facteur.*

5.2. Utilisation des identités remarquables :

Conclusion :

Pour factoriser une expression, on utilise les techniques suivantes :

- *Reconnaitre un facteur commun ;*
- *Utiliser les règles de la distributivité de multiplication ; (simple ou double)*
- *Identifier le développement d'un produit remarquable.*

5.3. Utilisation de plusieurs techniques :

De façon générale, on donne la définition suivante :

Définition 3 :

Factoriser (ou mettre en facteurs) une expression littérale, c'est transformer une somme, ou une différence en un produit.

On développe

Synthèse Quels que soient les nombres k, a et b, on a :

$k \times (a + b) = k \times a + k \times b$

On factorise

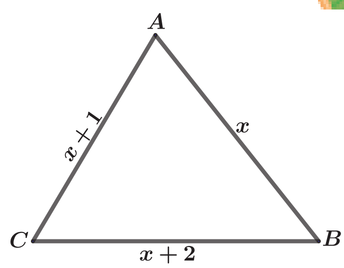
III. Je sais faire :

Enoncés des exercices d'application :

Exercice d'application 1 : ***L'unité de mesure est le cm.***

Soit un triangle ABC tel que : $AB = x$, $AC = x + 1$ *et* $BC = x + 2$.

On suppose $x \geq 1$.



1. *Calcule son périmètre pour* $x = 4$
2. *Calcule son périmètre pour* $x = 5$
3. *Exprime le périmètre en fonction de* x.
4. *Quelle est la valeur du périmètre pour* $x = 6$ *?*

Exercice d'application 2 :

Développe puis simplifie :

$(3x+1)^2$;$(3x-1)^2$;$(2+5x)^2$; $(2-5x)^2$ 3. $(2+5x)^2$ $(2+5x)^2-(3x+1)^2$;

$(2x-3)(2x+3)$; $(4x+1)(7+x)+(2x-4)(5+x)$

Exercice d'application 3 :

Factorise les expressions :

$3x+6$; $5-15x$;x^2+2x ; $8x^3+2x^2+4x$; x^2-4 ; $x+1+(x+1)(3x+4)(4x+1)(7+x)+(2x-4)(7+x)$; $x^2+8x+16$; $49x^2-14x+1$.

Exercice d'application 4 :

Factorise les expressions littérales suivantes :

$A = 5(x-y)+5(x+y)+2(7y+2x)$;$B = 2x(1-4x)-6x-4x(x-3)$

$C = (2x-1)(2x+3)-(2x-1)-(x+1)(x+5)$; $D = (5x-2)(1-2x)+(5x-2)(3+3x)+(5x+2)(2+x)$.

Exercice d'application 5 :

Soit $A = \left(x-\frac{1}{5}\right)^2 - \frac{9}{25}$.

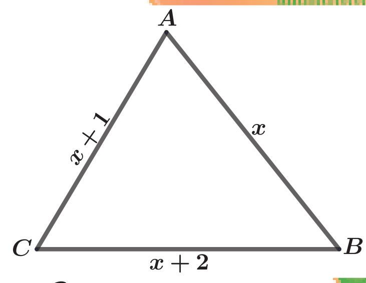
1. *Développe et réduis l'expression A.*
2. *Calcule la valeur de A pour* $x = \frac{4}{5}$
3. *Factorise l'expression A.*
4. *Résous l'équation* $A = 0$.

Exercice d'application 6 :

1. *On considère l'expression suivante :* $A = (3x+1)^2 - x(2+5x)^2$.
   - *a) Développe et simplifie l'expression A.*
   - *b) Calcule A pour* $x = 1$ *.*
2. *Soit* $B = (3x+1)^2-(2+5x)^2$
   - *a. Factorise B*
   - *b. Résous l'équation* $B = 0$

Solutions des exercices d'application :

Exercice d'application1 :



a. *Pour* $x = 4$, *le périmètre du triangle est :*
   $4 + 1 + 4 + 2 + 4 = 15$

b. *Pour* $x = 5$. *Le périmètre du triangle est :*
   $5 + 1 + 5 + 2 + 5 = 18$

c. *Le périmètre du triangle est :* $x + x + 1 + x + 2 = 3x + 3$

d. *Si* $x = 6$ *alors le périmètre du triangle est :* $3 \times 6 + 3 = 18 + 3 = 21$

Exercice d'application 2 :

Développement des expressions

$(3x+1)^2 = 9x^2 + 6x + 1$; $(3x-1)^2 = 9x^2 - 6x + 1$;

$(2+5x)^2 = 4 + 20x + 25x^2$; $(2x-3)(2x+3) = 4x^2 - 9$;

$$(2-5x)^2 - 3.(2+5x)^2 = 4 + 20x + 25x^2 - 3(4 + 20x + 25x^2)$$
$$= 4 + 20x + 25x^2 - 12 - 60x - 75 = -8 - 40x - 50x^2$$

$$(2+5x)^2 - (3x+1)^2 = 4 + 20x + 25x^2 - 9x^2 - 6x - 1 = 3 + 14x + 16x^2$$

$$(4x+1)(7+x) + (2x-4)(5+x) = 28x + 4x^2 + 7 + x + 10x + 2x^2 - 20 - 4x$$
$$= 6x^2 + 35x - 13.$$

Exercice d'application 3 :

Factorisation des expressions

$3x + 6 = 3(x+2)$; $5 - 15x = 5 \times 1 - 5 \times 3x = 5(1-3x)$

$x^2 + 2x = 2x \times x + 2x \times 1 = 2x(x+1)$

$8x^3 - 2x^2 + 4x = 2x \times 4x^2 - 2x \times x + 2x \times 2 = 2x(4x^2 - x + 2)$

$x^2 - 4 = x^2 - 2^2 = (x-2)(x+2)$

$$(4x+1)(7+x) + (2x-4)(7+x) = (7+x)[(4x+1) + (2x-4)]$$
$$= (7+x)(6x-3)$$

$x + 1 + (x+1)(3x+4) = (x+1) \times 1 + (x+1)(3x+4) = (x+1)(3x+5)$

$x^2 + 8x + 16 = x^2 + 2 \times 4x + 4^2 = (x+4)^2 = (x+4)(x+4)$

$49x^2 - 14x + 1 = (7x)^2 - 2 \times 7x + 1^2 = (7x-2)^2 = (7x-2)(7x-2)$

Exercice d'application 4 :

$$A = 5(x-y) + 5(x+y) + 2(7y+2x) = 5x - 5y + 5x + 5y + 14y + 4x$$
$$= 14x + 14y = 14(x+y)$$

$$B = 2x(1-4x) - 6x - 4x(x-3) = 2x - 8x^2 - 6x - 4x^2 + 12$$
$$= 2x - 6x + 12x - 8x^2 - 4x^2 = 8x - 12x^2 = 2 \times 4x - 3x \times 4x$$
$$= 4x(2-3x).$$

$$C = (2x-1)(2x+3) - (2x-1) - (x+1)(x+5)$$
$$= (2x-1)[(2x+3) - 1] - (x+1)(x+5)$$

Math AS.indd 57 15/07/2024 15:30:53

$= (2x-1)[2x+2]-(x+1)(x+5) = (2x-1)2[x+1]-(x+1)(x+5)$

$= (x+1)[4x-2-x-5] = (x+1)(3x-7)$

$D = (5x-2)(1-2x)+(5x-2)(3+3x)+(5x+2)(2+x)$

$= (5x-2)(1-2x+3+3x)+(5x+2)(2+x).$

$= (5x-2)(x+2)+(5x+2)(2+x) = (x+2)(5x-2+5x+2)$

$= (x+2)(10x) = 10x(x+2)$

Exercice d'application 5

1. Développement de l'expression A

$$A = \left(x-\frac{1}{5}\right)^2 - \frac{9}{25} = x^2 - 2\times\frac{1}{5}\times x + (\frac{1}{5})^2 = x^2 - \frac{2x}{5} + \frac{1}{25} - \frac{9}{25}$$

$$= x^2 - \frac{2x}{5} - \frac{8}{25}$$

2. Pour $x = \frac{4}{5}$; $A = \left(\frac{4}{5}-\frac{1}{5}\right)^2 - \frac{9}{25} = \left(\frac{3}{5}\right)^2 - \frac{9}{25} = 0.$

3. Factorisation de l'expression A :

$$A = \left(x-\frac{1}{5}\right)^2 - \frac{9}{25} = \left(x-\frac{1}{5}\right)^2 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \left(x-\frac{1}{5}-\frac{3}{5}\right)\left(x-\frac{1}{5}+\frac{3}{5}\right)$$

$$= \left(x-\frac{4}{5}\right)\left(x+\frac{2}{5}\right)$$

4. Résolution de l'équation $A = 0$

$$A = 0 \Rightarrow \left(x-\frac{4}{5}\right)\left(x+\frac{2}{5}\right) = 0 \Rightarrow x = \frac{4}{5} \quad ou \quad x = -\frac{2}{5}$$

Donc l'ensemble de solutions est $\left\{-\frac{2}{5}; \frac{4}{5}\right\}$

Exercice d'application 6 :

1. A= $(3x+1)^2 - x(2+5x)^2 = 9x^2+6x+1-x(4+20x+25x^2)$

$= 9x^2+6x+1-4x-20x^2-25x^3$

$= -11x^2+2x+1-25x^3.$

2. *Si* $x = 1$, *alors* $A = 11\times 1^2 + 2\times 1 + 1 - 25\times 1^2 = 11\times 1+2+1-25\times 1$

Donc : $A = 11+2+1-25 = -11.$

2. a) $B = (3x+1)^2-(2+5x)^2 = [(3x+1)+(2+5x)][(3x+1)-(2+5x)]$

$= (3x+1+2++5x)(3x+1-2-5x) = (8x+3)(-2x-1).$

b) $B = 0 \Leftrightarrow (8x+3)(-2x-1) = 0$, *soit* $8x+3 = 0$ *ou* $-2x-1 = 0$

C'est-à-dire : $8x = -3$ *ou* $-2x = 1$, *donc :* $x = -\frac{3}{8}$ *ou* $x = -\frac{1}{2}$

D'où : S= $\left\{-\frac{3}{8} ; -\frac{1}{2}\right\}$

IV. Je m'exerce :

Exercice 1 :
Ecris les expressions suivantes sans parenthèses, puis effectue les calculs possibles.

a. $-3{,}2 + (x - 4{,}5)$; *c.* $7{,}5 - (x - 3)$. *e.* $25 + (2x - 3)(-x + 9)$;
b. $2 + (-x - 11{,}8)$; *d.* $3 - (-3 + x)$; *f.* $(x - 3 + y) - 5 + (x - 4y + 7) - 2$.

Exercice 2 :
Donne le nom de la technique qui consiste à remplacer :
- *L'expression* $ab + ac$ *par* $a(b + c)$.
- *L'expression* $a(b + c)$ *par l'expression* $ab + ac$.

Exercice 3 :
Soit $A = -5x + 3$; $B = -5(x + 3)$.
Calcule A et B pour $x = 0$; *pour* $x = -3$.
Développe B, peux-tu trouver une valeur de x pour que A = B ?

Exercice 4 :
Complète de façon à obtenir un résultat sans parenthèses :

$(3x)^2 = \cdots$; $(-5x)^2 = \cdots$; $\left(\frac{2}{3}x\right)^2 = \cdots$; $\left(\frac{-2}{3}x\right)^2 = \cdots$

Exercice 5 :
Soit x est un nombre non nul.
Simplifie l'écriture des expressions suivantes :
a. $x^2.x^3$; $2x^3.3x$; $4x^2.0{,}3x$ *b.* $-5x^2.(2x)^3$; $(-3x)^2.5x$; $(-2x)^2.(-3x)^2$;
c. $\frac{4x^3}{2x}$; $\frac{15x}{3x^4}$; $\frac{(2x^2)^3}{4x^5}$.

Exercice 6 : Développement
Développe les expressions suivantes :
a. $2(5x - 7)$; *b.* $-3(2x + 5)$; *c.* $-5(-4x + 3)$; *d.* $x(2x + 3)$;
e. $6x\left(3x - \frac{1}{2}\right)$; *f.* $\frac{3}{5}\left(20x - \frac{5}{3}\right)$.

Exercice 7 :
Développe et réduis les expressions :
a. $3 - 3(0{,}5x + 21)$; *b.* $5x - 3(-2x + 5)$; *c.* $3(-2x + 5) - 2(4x + 3)$;
d. $12 - 13(-x + 3) - 11(x - 2)$.

Exercice 8 :
Développe et réduis les expressions :
a. $-2 + (2x - 7)(4 - 3x)$; *b.* $5 - (4x + 2)(-2x + 1)$;
c. $3x - 1 + (2x - 3)(3x + 2)$; *d.* $2x^2 - (-5x + 2)(x - 3)$.

Exercice 9 :

Développe et réduis les expressions :

a. $(x+2)(x+3)$; *b.* $(2x+3)(x+4)$; *c.* $(-4x+3)(x+2)$;
d. $(7x+3)(5x+2)$; *e.* $(-3x+2)(-2x-7)$; *f.* $\left(\frac{1}{2}x-3\right)\left(x+\frac{2}{3}\right)$;
g. $\left(\frac{3}{5}x-1\right)\left(\frac{1}{3}x+15\right)$; *h.* $\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)$; *i.* $\left(x-\frac{5}{3}\right)\left(x-\frac{1}{15}\right)$;
j. $\left(-x-\frac{1}{2}\right)\left(-2x-\frac{3}{5}\right)$.

Exercice 10 :

Développe et réduis les expressions :

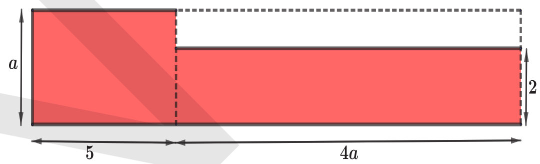
a. $2(3x-5)-(5x-3)(-2x+1)$; *b.* $3x-5(2x+1)+(3x-4)(7x+2)$;
c. $(3x-2)(-x+4)-(-x-1)(-2x+3)$; *d.* $2x-4(x+2)(-4x+1)$;
e. $\left(-\frac{1}{2}x+3\right)-3(x-1)\left(\frac{1}{2}x-3\right)$.

Exercice 11 : L'unité de longueur est le mètre

Exprime l'aire de la partie colorée en fonction de a :

1. En calculant la somme des deux aires.

2. En calculant la différence de deux aires ; développe et réduis les deux résultats obtenus pour vérifier qu'elles sont identiques.



Exercice 12 :

Recopie et complète les développements.

a. $(3x+4)^2 = 9x^2 + 2\ldots + 16$; *b.* $(2x+3)^2 = (\;)^2 + 2(\quad) + (\quad)^2$;
c. $(4x+\ldots)^2 = 16x^2 + 40x + 25$;
d. $(2x-3)^2 = (\quad)^2 - 2(\quad) + (\quad)^2$; *e.* $(7x-\ldots)^2 = 49x^2 - \ldots + 4^2$; *f.* $(2x+3)(2x-3) = (\ldots)^2 - (\ldots)^2$;
g. $(\ldots - 6)^2 = 25x^2 - \ldots + \ldots$; *h.* $(3x+\ldots)(3x-\ldots) = \ldots - 2$.

Exercice 13 :

Le développement de l'expression $(3x+4)^2$ *est-il une des expressions suivantes ? Si oui, laquelle ? Justifie ta réponse.*

$6x^2+8$; $6x^2+24x+8$; $3x^2+24x+16$; $9x^2+24x+16$;
$9x^2-16$; $9x^2+12x+16$.

Exercice 14 :

Développe les expressions suivantes :

a. $(x+1)^2$; $(5x+21)^2$; $(3+2x)^2$. *b.* $(x-3)^2$; $(5x-41)^2$; $(2x-3)^2$.
c. $(3a+b)^2$; $(a-2b)^2$; $(2a-3)^2$. *d.* $(-10x+3)^2$; $(-2x-1)^2$;
$(-3x+2)(-3x-2)$. *e.* $\left(\frac{1}{2}x+1\right)^2$; $\left(\frac{3}{2}x-7\right)^2$; $\left(\frac{4x}{3}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{4x}{3}+\frac{1}{2}\right)$.

Exercice 15 :

a. Parmi les expressions $2-x$; $x-2$; $-2+x$; $-x+2$, lesquelles sont égales ? Lesquelles sont opposées ?

b. Compare $(x-2)^2$ et $(-x+2)^2$ puis $(2-x)(2+x)$ et $(x-2)(2+x)$.

c. Prouve que le produit $(2-x)(-2+x)$ est négatif.

Exercice 16 :

- En remarquant que : $101 = 100+1$ et $99 = 100-1$, applique les identités remarquables pour calculer 101^2 ; 99^2 ; 101×99.
- En suivant la même méthode, calcule 51^2 ; 98^2 ; 104×96.

Exercice 17 :

On donne : $A = (5\sqrt{3}-1)^2$

Ecris A sous la forme $a+b\sqrt{3}$; où a et b sont deux entiers relatifs.

Exercice 18 :

Mets en produit de facteurs, dans chacun des cas :

a. $5x+25$; b. $-12x+18$; c. $12x^2-16$; d. $-9x+3$;

e. $4x+6$; f. $2x^2-4x^3-8x^4$; g. $4\pi x-6\pi x^2$; h. $\frac{a^2}{3}-5a$.

Exercice 19 :

Factorise les expressions suivantes :

a. $(2x-3)(x+2)-5(2x-3)$; b. $(3x-2)4x+3x-2$;
c. $(4x-3)(2x-3)-(4x-3)$; d. $(2x+1)^2+(2x+1)(x+3)$;
e. $(3x-2)^2-4(3x-2)$; f. $(3-4x)(2x-3)-3(2x-3)^2$.

Exercice 20 :

Recopie et complète les factorisations

a. $x^2-4 = (\ldots)^2-(\ldots)^2 = (\ldots+\cdots)(\ldots-\cdots)$; b. $4x^2-9 = (\ldots)^2-(\ldots)^2 = (\ldots+\cdots)(\ldots-\cdots)$;

c. $\frac{1}{4}x^2-9 = (\ldots)^2-(\ldots)^2 = (\ldots+\cdots)(\ldots-\cdots)$; d. $16-x^2 = [\ldots]^2-[\ldots]^2 = [\ldots+\cdots][\ldots-\cdots]$.

Exercice 21 :

Factorise les expressions suivantes :

a. $16x^2-25$; b. $121x^2-9$; c. $9-4y^2$; d. $25a^2-1$; e. $1-\frac{x^2}{16}$;

f. $\frac{4}{9}-x^2$; g) $(x-1)^2-9$; h. $16-(2x+3)^2$; i. $4x^2-(x+5)^2$;
j. $(5x+1)^2-(x-1)^2$; k. $(2x-3)^2-(x-1)^2$; l. $x^2-(3x+2)^2$;
m. $(3-2x)^2-(7x+3)^2$; n. $9(x+1)^2-25(x-2)^2$.

Exercice 22 :

En appliquant l'identité : $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$, *calcule les différences de carrés dans les cas suivants :*

$a.\ 27^2 - 3^2$; $b.\ 98^2 - 2^2$; $c.\ 999^2 - 1$; $d.\ 85^2 - 15^2$; $e.\ 58^2 - 57^2$.

Exercice 24 :

Ecris les expressions suivantes sous forme de carrés.

$A = 16x^2 + 8x + 1$; $B = 25x^2 - 30x + 9$; $C = 9x^2 - 12x + 4$;

$D = 81 - 36x + 4x^2$; $E = \frac{1}{4}x^2 + x + 1$; $F = 9x^2 - 3x + \frac{1}{4}$;

$G = 0{,}25x^2 + 2x + 4$; $H = x^2 - 1{,}2x + 0{,}36$; $I = x^2 + 2\sqrt{3}x + 3$;

$J = x^2 - 2\sqrt{5}x + 5$.

Exercice 25 : Factorisation en plusieurs étapes.

On donne $A = 4x^2 - 28x + 49 - 3(2x-7)$.

a. *Vérifie que* $4x^2 - 28x + 49$ *est le développement d'un carré.*

b. *Factorise l'expression A.*

Exercice 26 :

Transforme les expressions de façon à faire apparaître un facteur commun, puis factorise.

$a.\ 25x^2 - 81 + (2-x)(5x+9)$; $b.\ (x^2 - 25) - x(x+5)$;

$c.\ 25x^2 - 10x + 1 + (5x-1)(x-3)$;

$d.\ (x^2 + 2x + 1) - (5 + 6x) + x - 6$;

$e.\ (2x-1)^2 - (x+3)^2 + (3x+2)(x-5)$.

Chapitre 5: Equations et Inéquations

I. *Activités préparatoires :*

Activité 1 :

Deux frères Sidi, Brahim et leur sœur Aicha causaient ensemble.
Sidi dit à Brahim : « Tu ne peux pas reconnaitre l'âge de ta sœur Aicha »
Brahim dit : Il y a cinq ans elle était cinq fois plus âgée que moi, à présent elle est trois fois plus âgée que moi ».
Sidi demande sa sœur « peux-tu aider ton frère à savoir ton âge ? »

Activité 2 :

1. *On considère l'équation :* $|4x + 3| = 5$.
   a. *Vérifie que* -2 *est solution de cette équation.*
   b. *En utilisant la propriété suivante de la valeur absolue :*

Pour tout $a \geq 0, si |x| = a$, *alors* $\begin{cases} x = a \\ \quad ou \\ x = -a \end{cases}$,

Résous l'équation $|4x + 3| = 5$.

2. *Reprends les questions a. et b. précédentes pour résoudre l'équation :* $|2 - 2x| = 6$.

Activité 3 :

Deux sociétés de la place proposent les tarifs téléphoniques suivants :
La société A nous propose un abonnement à 2000 *ouguiyas par mois et* 30 *ouguiyas par minute de communication.*
La société B nous propose un abonnement à 1400 *ouguiya et* 35 *ouguiyas par minute de communication.*
Pour quelle durée de communication a-t-on intérêt à choisir la société A ?

Remarque 1 :

La durée de communication x *(en mn) pour laquelle, il est plus avantageux de choisir la société A doit vérifier* $30x + 2000 < 35x + 1400$.

Activité 3 : ***Comment résoudre une équation de la forme A.B=0***

1. *a et b sont deux réels. Complète : si* $ab = 0$, *alors* $a = \cdots$ *ou* $b = \cdots$
2. *Résous les équations suivantes en utilisant la règle précédente :*
   $(3x - 6)(x - 1) = 0$; $(x - 2)(x + 3) = 0$.
   Ce type d'équations est appelée équation produit.
3. *Peux-tu ramener à une équation produite chacune des équations ?*
   $x^2 + 8x + 16 = 0$; $9x^2 - 6x + 1 = 0$; $4x^2 - 49 = 0$; $x^2 + 6x - 7 = 0$.

Activité 4 :

1. On donne l'expression$A = 2x + 7$.
   a. Pour quelles valeurs de x, l'expression A est nulle ? Strictement negative ? Strictement positive ?
   b. Reproduis et complète le tableau récapitulatif du signe de $2x + 7$:

Valeur de x	$-\infty$	$\frac{-7}{2}$	$+\infty$
Signe de $2x + 7$			

2. Reprends les questions a. et b. précédentes avec l'expression $B = -3x + 4$.
3. Peux-tu trouver un lieu entre le signe du binôme et celui du coefficient de x ?

Activité 5 :

1. Détermine le signe de chacune des expressions suivantes : $(2x + 3)$ et $(3x - 4)$.
2. Reproduis puis complète le tableau suivant appliquant les règles du signe d'un produit :

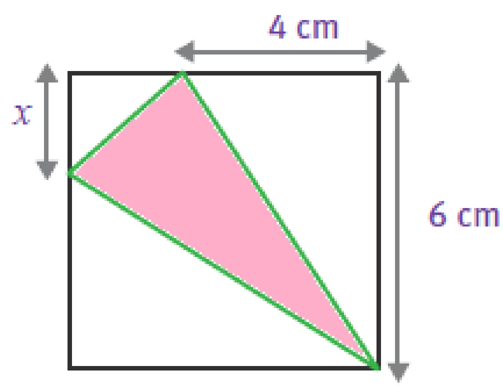
Valeur de x	$-\infty$	$\frac{-3}{2}$	$\frac{4}{3}$	$+\infty$
Signe de $(2x + 3)$				
Signe de$(3x - 4)$				
Signe de$(2x + 3)(3x - 4)$				

3. En déduis les solutions de l'inéquation $(2x + 3)(-3x + 4) \leq 0$.

Activité 6 :

1.Calcule l'aire du carré ci-contre.
Exprime l'aire A du triangle colorié en fonction de celle du carré gris.

2. Pour quelles valeurs de x l'aire A du triangle rose est-elle inférieure ou égale au quart de l'aire du carré ?



II. Je retiens :

1. Equations du premier degré à une inconnue :(rappels et compléments)

I.1. Notion d'équation du premier degré à une inconnue :

Définition 1 :

Une équation est une égalité dans la quelle intervient une lettre dont la valeur est inconnue

Exemple 1 :

$2x - 11 = 7 - x$

- *Le nombre 6 est solution de l'équation* $2x - 11 + 7 - x$

  En effet : $\begin{cases} 2 \times 6 - 11 = 12 - 11 = 1 \\ 7 - 6 = 1 \end{cases}$

L'égalité $2x - 11 = 7 - x$ *est donc vraie pour* $x = 6$.

- *Le nombre 3 n'est pas solution de l'équation* $2x - 11 = 7 - x$.

  En effet : $\begin{cases} 2 \times 3 - 11 = 6 - 11 = -5 \\ 7 - 3 = 4 \end{cases}$

  L'égalité $2x - 11 = 7 - x$ *donc l'équation n'est pas vérifiée pour* $x = 3$.

Règle 1 :

Résoudre une équation du premier degré à une inconnue c'est trouver la (ou les) solution(s) de cette équation (valeur de l'inconnue).

Remarque 2 :

Pour résoudre une équation du premier degré à une inconnue on peut utiliser les règles suivantes :

- *Lorsque l'on ajoute ou lorsque l'on retranche un même nombre aux deux membres d'une équation on obtient une équation qui a les mêmes solutions.*
- *Lorsque l'on multiplie ou lorsque l'on divise les deux membres d'une équation par un même nombre non nul on obtient une équation qui a les mêmes solutions.*

Exemple 2 :

Résous l'équation : $7x - 2 = 6 + 5x$.

Réponse :

$7x - 2 = 6 + 5x$

$7x - 2 + 2 = 6 + 5x + 2$

$7x = 8 + 5x$

$7x - 5x = 8 + 5x - 5x$

$2x = 8$

$x = \frac{8}{2}$

$x = 4$.

La solution de $7x - 2 = 6 + 5x$ *est le nombre* 4.

Remarque 3 :

Quatre étapes importantes sont à retenir pour organiser la résolution algébrique d'un problème :

1. *Choix de l'inconnue.*
2. *La mise en équation du problème.*
3. *Résolution de l'équation.*
4. *Vérification et conclusion.*

Remarque 4 :

Chercher la (ou les) solution(s) d'une équation du premier degré à une inconnue, passe par la résolution d'une équation de référence du type : $a + x = b$ *dont l'unique solution est* $x = b - a$ *ou* $ax = b(\neq 0$ *dont l'unique solution est si* $x = -\frac{b}{a}$.

Principe 1 :

Pour résoudre une équation du premier degré à une inconnue, on utilise souvent les étapes suivantes :

- *On développe et on réduit les deux membres de l'équation ;*
- *On regroupe les constantes à droite en ajoutant la même valeur des deux côtés ;*
- *On regroupe les termes contenant l'inconnue à gauche en ajoutant la même valeur des deux côtés ;*
- *On divise si possible des deux côtés par le coefficient de l'inconnue ;*
- *On conclut.*

I.2. Equation avec valeur absolue :

Règle 2 :

Pour résoudre une équation du type $|ax + b| = n$, *on distinguera trois cas :*

1^{er} *cas :* $n < 0$ *; Il n'y a pas de solution.*

$2^{ème}$ *cas :* $n = 0$*; Il faut et il suffit que :* $ax + b = 0$.

$3^{ème}$ *cas :* $n > 0$ *; Il faut et il suffit que :* $ax + b = n$ *ou* $ax + b = -n$

I.3. Equation produit :

Règle 3 :

Pour résoudre une équation produit de la forme $(ax + b)(cx + d) = 0$ *ou s'y ramenant, on détermine les solutions des deux équations* $(ax + b) = 0$ *et* $(cx + d) = 0$.

II. Inéquation du premier degré à une inconnue :

II.1. Notion d'inéquation du premier degré à une inconnue :

Définition 2 :

Une inéquation du premier degré à une inconnue est une inégalité dans laquelle Il y a une lettre qui représente l'inconnue.

Remarque 5 :

- *Toute inéquation du premier degré à une inconnue x peut se ramener à une inéquation de l'une des formes :* $ax < b$; $ax > b$; $ax \leq b$ *ou* $ax \geq b$.
- *Les solutions de l'inéquation obtenue sont les solutions de l'inéquation initiale.*

Exemple 3 :

- *Résous*: $2x \geq 5$.

Réponse :

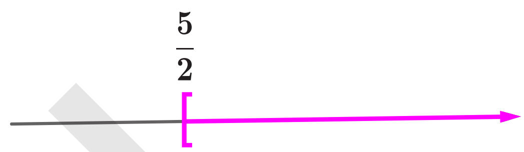
$\frac{1}{2} \times 2x \geq \frac{1}{2} \times 5$

$x \geq \frac{5}{2}$.

Les solutions de l'inéquation sont

Les nombres supérieurs ou égaux à $\frac{5}{2}$.

Graphiquement :



- *Résous* : $-\frac{3}{2}x + 1 \geq -2$.

Réponse :

$-\frac{3}{2}x + 1 - 1 \geq -2 - 1$

$-\frac{3}{2}x \ \geq \ -3$

$-2 \times (-\frac{3}{2}x) \leq -2 \times -3$

$3x \leq 6$

$\frac{1}{3} \times 3x \leq \frac{1}{3} \times 6$

$x \leq 2$.

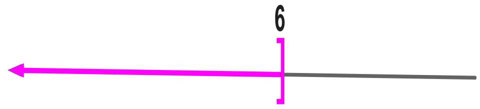
Les solutions de l'inéquation sont
Les nombres strictement inferieurs à 2.

Représentation graphique :

Règle 4 :

Résoudre une inéquation, c'est trouver toutes les valeurs possibles du nombre inconnu pour lesquelles l'inégalité est vraie (vérifiée). Ces valeurs sont les solutions de l'inéquation.

Exemple 4 :

$2x - 11 \leq 7 - x$ $2x - 11 + 11 \leq 7 + 11 - x$ $2x \leq 18 - x$ $2x + x \leq 18 - x + x$ $3x \leq 18$ $\dfrac{1}{3} \times 3x \leq \dfrac{1}{3} \times 18$ $x \leq 6.$	*Les solutions de l'inéquation sont les nombres strictement inferieurs à 2.* ***Représentation graphique :*** 

Remarque 6 ;

Pour résoudre une inéquation du premier degré à une inconnue on peut utiliser les règles suivantes :

- *Lorsque l'on ajoute ou lorsque l'on retranche un même nombre aux deux membres d'une inéquation l'ordre ne change pas.*
- *Lorsque l'on multiplie ou lorsque l'on divise les deux membres d'une inéquation par le même nombre positif l'ordre ne change pas.*
- *Lorsque l'on multiplie ou lorsque l'on divise les deux membres d'une inéquation par le même nombre négatif l'ordre change.*

Principe 2 :

La technique de résolution d'une inéquation ressemble à la technique de résolution d'une équation.

Cependant, lors de la division par le coefficient de l'inconnue, si celui-ci est négatif, il faudra inverser le sens de l'inéquation.

Pour résoudre une inéquation du premier degré, on peut utiliser les étapes suivantes :

- *On développe et on réduit les deux membres de l'inéquation ;*
- *On regroupe les constantes à droite en ajoutant la même valeur des deux côtés ;*
- *On regroupe les termes contenant l'inconnue à gauche en ajoutant la même valeur des deux côtés ;*
- *On divise si possible des deux côtés par le coefficient de l'inconnue en faisant attention à son signe ;*
- *On conclut sur l'axe gradué des nombres relatifs en hachurant la partie qui n'est pas solution et/ou colorant la partie solution.*

II.2. Signe d'un binôme $ax+b\,;a\neq 0$:

Règle 5 : Etude du signe d'un binôme de la forme $ax+b$

Pour étudier le signe du binôme $ax+b$ $(a\neq 0)$, on détermine d'abord la solution de l'équation $ax+b=0$(l'unique solution est : $x_0=\frac{-b}{a}$).

Ensuite, on résout les inéquations $ax+b>0$ et $ax+b<0$.

Pour cela, on distinguera deux cas : $a>0$ et $a<0$

1er cas : $a>0$

Valeur de x	$-\infty$		$-b/a$		$+\infty$
Signe de $ax+b$		$-$	0	$+$	

2ème cas : $a<0$

Valeur de x	$-\infty$		$-b/a$		$+\infty$
Signe de $ax+b$		$+$	0	$-$	

Remarque 7 :

Dans la pratique, pour mémoriser facilement ces deux tableaux sous cette forme, on utilise les signes de a et $-a$:

Valeur de x	$-\infty$		$-b/a$		$+\infty$
Signe de $ax+b$		signe de(-a)	0	signe de a	

Exemple 5 :

- *Détermination du signe de $-2x+1$:*

  Pour $-2x+1$: $a=-2<0$(On est dans le 2ème cas)

Valeur de x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
Signe de $-2x+1$		$+$	0	$-$	

Donc : $-2x+1>0$, si $x\in\left]-\infty;\ \frac{1}{2}\right[$ et $-2x+1<0$,si $x\in\left]\frac{1}{2};\ +\infty\right[$.

- *Détermination du signe de $3+4x$:*

  Pour $3+4x$: $a=4>0$(On est dans le 1er cas)

Valeur de x	$-\infty$		$\frac{-3}{4}$		$+\infty$
Signe de $3+4x$		$-$	0	$+$	

Donc $3+4x>0$ si $x\in\left]\frac{-3}{4};\ +\infty\right[$ et $3+4x<0$ si $x\in\left]-\infty\,;\ \frac{-3}{4}\right[$

- *Détermination de signe de $5x-2$:*

Pour $5x-2$: $a=5>0$(On est dans le 1er cas)

Valeur de x	$-\infty$		$\frac{2}{5}$		$+\infty$
Signe de $5x-2$		$-$	0	$+$	

Donc $5x-2>0$si $x\in\left]\frac{2}{5}\,;+\infty\right[$et $5x-2<0$ si$x\in\left]-\infty\,;\frac{2}{5}\right[$

II.3. Signe d'un produit de binômes de la forme $ax + b\,;\,a \neq 0$:

Règle 4 :

Pour déterminer le signe du produit $(ax + b)(cx + d)$, $(a \neq 0$ etc $\neq 0)$ on détermine les signes des divers facteurs, on en déduit ensuite celui du produit en utilisant les règles de signe d'un produit de deux réels.

Exemple 6 :

Déterminons le signe de $(4x + 7)(-5x + 3)$. Pour cela, on peut déterminer les signes des deux facteurs, ce qui oblige à situer x par ra rapport à $-\frac{7}{4}$ et $\frac{3}{5}$, donc à distinguer trois cas : $-\frac{7}{4} < x$, $-\frac{7}{4} < x < \frac{3}{5}$, $\frac{3}{5} < x$. Il est commode de prendre en considération les signes des deux facteurs dans un tableau :

valeur de x	$-\infty$		$\frac{-7}{4}$		$\frac{3}{5}$		$+\infty$
$4x + 7$		$-$	0	$+$		$+$	
$-5x + 3$		$+$		$+$	0	$-$	
$(4x + 7)(-5x + 3)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

L'ensemble des solutions de $(4x + 7)(-5x + 3) \geq 0$ est $\left[\frac{-7}{4}; \frac{3}{5}\right]$.

Celui de $(4x + 7)(-5x + 3) \leq 0$ est $\left]-\infty\,; \frac{-7}{4}\right] \cup \left[\frac{3}{5}\,;\,+\infty\right[$

Remarque 8 : Signe d'un quotient

Le signe du quotient $\frac{a}{b}$ est le même que celui du produit ab, mais pour le quotient on doit imposer $b \neq 0$.

Exemple 7 :

Déterminons le signe de $\frac{7x+2}{-3x+10}$, pour cela dressons le tableau suivant :

	$-\infty$		$\frac{-2}{7}$		$\frac{10}{3}$		$+\infty$
$7x + 2$		$-$	0	$+$		$+$	
$-3x + 10$		$+$		$+$	0	$-$	
Le quotient $\frac{7x+2}{-3x+10}$		$-$	0	$+$	‖ 0	$-$	

Observe bien le « double trait » à $\frac{10}{3}$, cela signifie que cette valeur est interdite.

70

III. Je sais faire

Enoncés des exercices d'application :

Exercice d'application 1 :

Résous, dans l'ensemble de nombres réels, les équations :

1) $7x - 2 = 6 + 5x$; 2) $4 - (5 - 7x) = 2.(x + 1)$

3) $\frac{x+1}{4} = \frac{x-3}{7}$.

Exercice d'application 2 :

Résous, dans l'ensemble de nombres réels, les équations :

1) $-5(x + 12) + 8 = \frac{1}{13}$;

2) $3(x - 2) = 4x + 1$;

3) $x\sqrt{6} - 3\sqrt{2} = 4x\sqrt{3} + 2$

Exercice d'application 3 :

Résous, dans l'ensemble de nombres réels, les équations :

1) $|5x - 2| = 6$;

2) $|2x + 3| = 8$;

3) $|5x - 2| = -4$;

4) $|-3x + 7| = |7x + 3|$; .

Exercice d'application 4 :

1. *Résous, dans l'ensemble de nombres réels, les équations-produit Suivantes :*
   a. $(3\sqrt{2}x - 6)(x - \sqrt{3}) = 0$;
   b. $(\sqrt{2}x + 2)(3x - \sqrt{3}) = 0$.
2. *Factorise puis résous*
   a. $x^2 + 4x + 4 = 0$;
   b. $4x^2 - 1 = 0$
   c. $x^2 - 2x - 8 = 0$
   d. $x^2 + 7x + 12 = 0$

Exercice d'application 5 :

Résous les inéquations ci-dessous :

a. $(5x + 25)(x + 3) \leq 0$;

b. $(-x - 3)(4x + 8) > 0$

c. $(-2x + 6)(-3x + 3) > 0$

Solutions des exercices d'application :

Exercice d'application 1 :

1) $7x-2=6+5x \Leftrightarrow 7x-2+2=6+5x+2$
$\Leftrightarrow 7x-5x=8+5x-5x$

$2x = 8 \Leftrightarrow \mathrm{x}=\frac{8}{2}=4$

Donc l'ensemble de solutions de cette équation est $S=\{4\}$

2) $4-(5-7x)= 2.(x+1) \Leftrightarrow$
$4-5+7\mathrm{x}=2\mathrm{x}+2 \Leftrightarrow -1+7\mathrm{x}=2\mathrm{x}+2$
$-1+7x+1= 2x+2+1 \Leftrightarrow 7\mathrm{x}=2\mathrm{x}+3$
$\Leftrightarrow 7\mathrm{x}-2\mathrm{x}=2\mathrm{x}+3-2\mathrm{x}$
$5\mathrm{x}=3 \Leftrightarrow \mathrm{x}=\frac{3}{5}$

Donc l'ensemble de solutions de cette équation est $S=\left\{\frac{3}{5}\right\}$

3) $\frac{x+1}{4}=\frac{x-3}{7} \Leftrightarrow 4(\mathrm{x}-3)=7(\mathrm{x}+1) \Leftrightarrow 4\mathrm{x}-12=7\mathrm{x}+7 \Leftrightarrow$
$4\mathrm{x}-7\mathrm{x}=12+7 \Leftrightarrow -3\mathrm{x}=19 \Leftrightarrow \mathrm{x}=-\frac{19}{3}$

Donc l'ensemble de solutions de cette équation est $S=\left\{\frac{-19}{3}\right\}$

Exercice d'application 2 :

1) $-5(x+12)+8=\frac{1}{13} \Leftrightarrow -5x-60+8=\frac{1}{13} \Leftrightarrow -5x=\frac{1}{13}+52$
$\Leftrightarrow -5x=\frac{1}{13}+52 \Leftrightarrow -5x=\frac{677}{13} \Leftrightarrow x=\frac{677}{-5\times 13} \Leftrightarrow x=\frac{-677}{65}$

Donc l'ensemble de solutions de cette équation est $S=\left\{\frac{-677}{65}\right\}$

2) $3(x-2)=4x+1 \Leftrightarrow 3x-6=4x+1$
$\Leftrightarrow 3x-6-4x+6=4x+1-4x+6 \Leftrightarrow -x=7 \Leftrightarrow -1\times(-x)=-1\times 7 \Leftrightarrow$
$x=-7$

Donc l'ensemble de solutions de cette équation est $S=\{-7\}$

3) $x\sqrt{6}-3\sqrt{2}=4x\sqrt{3}+2$
$\Leftrightarrow x\sqrt{6}-3\sqrt{2}-4x\sqrt{3}+3\sqrt{2}=4x\sqrt{3}+2-4x\sqrt{3}+3\sqrt{2}$
$\Leftrightarrow x(\sqrt{6}-4\sqrt{3})=2+3\sqrt{2}$

$$x=\frac{2+3\sqrt{2}}{(\sqrt{6}-4\sqrt{3})}=\frac{2+3\sqrt{2}}{(\sqrt{6}-4\sqrt{3})}\times\frac{(\sqrt{6}+4\sqrt{3})}{(\sqrt{6}+4\sqrt{3})}$$

$$x=\frac{14\sqrt{6}+8\sqrt{3}+3\sqrt{12}}{-12}$$

Donc l'ensemble de solutions de cette équation est $S=\left\{-\frac{14\sqrt{6}+8\sqrt{3}+3\sqrt{12}}{12}\right\}$

Exercice d'application 3 :

Je Résous, dans l'ensemble de nombres réels, les équations :

$$1)\ |5x-2|=6 \Leftrightarrow (5x-2=6 \quad ou \quad 5x-2=-6)$$

$$\Leftrightarrow (5x-2+2=6+2 \ \ ou \ \ 5x-2+2=-6+2) \Leftrightarrow (5x=8 \quad ou \quad 5x=-4)$$

$$\Leftrightarrow (\tfrac{1}{5}\times 5x=\tfrac{1}{5}\times 8 \quad ou \quad \tfrac{1}{5}\times 5x=\tfrac{1}{5}\times(-4)) \Leftrightarrow (x=\tfrac{8}{5} \quad ou \quad x=\tfrac{-4}{5})$$

Donc l'ensemble de solutions de cette équation est $S=\left\{\frac{8}{5};\ -\frac{4}{5}\right\}$

$$2)\ |2x+3|=8 \Leftrightarrow (2x+3=8 \quad ou \quad 2x+3=-8)$$

$$\Leftrightarrow (2x+3-3=8-3 \ \ ou \ \ 2x+3-3=-8-3) \Leftrightarrow (2x=5 \ ou \ \ 2x=-11)$$

$$\Leftrightarrow (\tfrac{1}{2}\times 2x=\tfrac{1}{2}\times 5 \quad ou \quad \tfrac{1}{2}\times 2x=\tfrac{1}{2}\times(-11)) \Leftrightarrow (x=\tfrac{5}{2} \quad ou \quad x=\tfrac{-11}{2})$$

Donc l'ensemble de solutions de cette équation est $S=\left\{\frac{5}{2};\ -\frac{11}{2}\right\}$

3) *L'équation* $|5x-2|=-4;$ *n'a pas de solution.*

$$4)\ |-3x+7|=|7x+3| \Leftrightarrow (-3x+7=7x+3 \ \ ou \ -3x+7=-7x-3) \Leftrightarrow (-3x-7x=3-7 \quad ou \quad -3x+7x=-3-7)$$

$$\Leftrightarrow (-10x=-4 \quad ou \ \ 4x=-10) \Leftrightarrow (x=\tfrac{-4}{-10}=\tfrac{2}{5} \quad ou \quad x=\tfrac{-10}{4}=-\tfrac{5}{2})$$

Donc l'ensemble de solutions de cette équation est $S=\left\{\frac{2}{5};\ -\frac{5}{2}\right\}$

Exercice d'application 4 :

1. a. $\left(3\sqrt{2}x-6\right)(x-\sqrt{3})=0 \Leftrightarrow (3\sqrt{2}x-6=0 \quad ou \quad x-\sqrt{3}=0)$

$$\Leftrightarrow (3\sqrt{2}x=6 \quad ou \quad x=\sqrt{3})$$

$$\Leftrightarrow (x=\frac{6}{3\sqrt{2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2} \quad ou \quad x=\sqrt{3})$$

Donc l'ensemble de solutions de cette équation est $S=\{\sqrt{2};\ \sqrt{3}\}$

b. $\left(\sqrt{2}x+2\right)(3x-\sqrt{3})=0 \Leftrightarrow (\sqrt{2}x+2=0 \quad ou \quad 3x-\sqrt{3}=0)$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{2}x=-2 \quad ou \quad 3x=\sqrt{3}) \Leftrightarrow (x=\frac{-2}{\sqrt{2}}=-\sqrt{2} \quad ou \quad x=\frac{\sqrt{3}}{3})$$

Donc l'ensemble de solutions de cette équation est $S=\left\{-\sqrt{2};\ \frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$

2. Résolvons les équations :

a. $x^2+4x+4=0 \Leftrightarrow (x+2)^2=0$

$\Leftrightarrow x+2=0 \Leftrightarrow x=-2$

Donc l'ensemble de solutions de cette équation est $S=\{-2\}$

$b.\ 4x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (2x)^2 - 1^2 = 0$

$\Leftrightarrow (2x-1)(2x+1) = 0$

$\Leftrightarrow (\ 2x = 1 \ \ ou\ 2x = -1) \Leftrightarrow (\ x = \frac{1}{2} \ \ ou\ \ x = -\frac{1}{2})$

Donc l'ensemble de solutions de cette équation est $S = \left\{\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right\}$

$c.\ \ x^2 - 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 2x - 4 \times 2 = 0 \Leftrightarrow x(x-4) + 2(x-4) = 0 \Leftrightarrow (x+2)(x-4) = 0 \Leftrightarrow (x = -2 \quad ou\ x = 4)$

Donc l'ensemble de solutions de cette équation est $S = \{-2; 4\}$

$d.\ x^2 + 7x + 12 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 3x + 4 \times 3 = 0 \Leftrightarrow$

$x(x+4) + 3(x+4) = 0 \Leftrightarrow (x+4)(x+3) = 0$

$\Leftrightarrow (x = -4 \quad ou\ x = -3)$

Donc l'ensemble de solutions de cette équation est $S = \{-4; -3\}$

Exercice d'application 7 :

Je résous l'inéquation $(5x\ + 25)(x+3) \leq 0$:

$5x + 25 = 0 \Leftrightarrow x = -5$ *et* $x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -3$,

Je dresse le tableau de signes :

x	$-\infty$		-5		-3		$+\infty$
$5x+25$		-	0	+	|	+	
$x+3$		-	|	-	0	+	
$(5x+25)(x+3)$		+	0	-	0	+	

L'ensemble de solutions est : $S = [-5; -3]$

b.Je résous l'inéquation $(-x-3)(4x+8) > 0$:

$-x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -3$ *et* $4x + 8 = 0 \Leftrightarrow x = -2$,

Je dresse le tableau de signes :

x	$-\infty$		-3		-2		$+\infty$
$-x-3$		$+$	0	$-$	|	$-$	
$4x+8$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$(-x-3)(4x+8)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

L'ensemble de solutions est : $S =]-3;-2[$

c. *Je résous l'inéquation* $(-2x+6)(-3x-3) > 0$:

$-2x+6=0 \Leftrightarrow x=3$ *et* $-3x-3=0 \Leftrightarrow x=-1$,

Voici le tableau de signes :

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$-2x+6$		$+$	|	$+$	0	$-$	
$-3x-3$		$+$	0	$-$	|	$-$	
$(-2x+6)(-3x-3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

L'ensemble des solutions est : $S =]-\infty;\ -1[\cup]3;+\infty[$.

IV. Je m'exerce

Exercice 1 :

Résous dans ℝ les équations suivantes :

$a.\ (x+2)(x-4)=0$; $b.\ (-x-3)(2x-5)=0$;

$c.\ 2x(3x-5)=0$; $d.\ (x-\sqrt{2})(2x+\sqrt{3})=0$;

$e.\ \left(\frac{2}{3}x-\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{5}x-2\right)=0$; $f.\ (2x-3\sqrt{2})(\sqrt{3}x-\sqrt{6})=0.$

Exercice 2 :

Résous chacune des équations suivantes en la ramenant à une équation produite :

$a.\ 4x^2-2x=0$; $b.\ (3x-5)^2-(3x-5)=0$;

$c.\ 4x^2-9=0$; $d.\ (2x+3)(x-1)+5(2x+3)=0$;

$e.\ 2x^2-9=0$; $f.\ (5x+7)(2x+3)+(5x+7)^2=0$;

$g.\ (x+1)^2-9=0$; $h.\ 4x^2-25+(2x-5)(x+3)=0.$

Exercice 3 :

Résous dans ℝ les équations suivantes :

$|x|=2$; $\sqrt{x^2}=9$; $|x|=-3$; $|x-3|=5$; $|2x+3|=14$; $\sqrt{(2x-2)^2}=25$;

$|x-1|+|x+1|=4$; $3|x-2|+5|x+4|=17$; $2|x-2|-7|x+4|=-23.$

Exercice 4 :

Résous dans ℝ les équations suivantes :

$6|x-1|+3|x+2|=17+4x$; $|x+\sqrt{3}|+2x=|3x+2\sqrt{2}|+7+5x$;

$|x+\sqrt{2}|+3|x+2\sqrt{2}|=8+4x$; $|x+\sqrt{2}|+3|x+2\sqrt{2}|=8+4x$;

$\sqrt{x+3}=\sqrt{x-2}$; $\sqrt{x+3}+\sqrt{x-2}=5$; $\sqrt{2x+1}+\sqrt{3x+2}=13$;

$\sqrt{4x-5}-\sqrt{2x+3}=-7.$

Exercice 5 : Trois épreuves.

Ali passe un examen comportant trois épreuves : Mathématiques, coefficient 4 ; Français, coefficient 3 et Anglais, coefficient 2. Il a obtenu 12 en Mathématiques et 8 en Français. Avec quelle note en Anglais, peut-il obtenir au moins la moyenne 10 et ainsi être reçu ?

Exercice 6 : L'unité de longueur est le centimètre.

ABCD est un trapèze rectangle tel que les bases $[AB]$ *et* $[DC]$ *mesurent respectivement* x *et 6 et la hauteur* $[BC]$ *mesure 4. Soit EFG un triangle dont la longueur de la hauteur* $[EH]=3$ *et la longueur du côté* $[FG]$ *est 8x.*

Pour quelle(s) valeur(s) de x :

1. *Les aires des deux figures sont-elles égales ?*
2. *Celle du trapèze est-elle supérieure strictement à celle du triangle ?*
3. *Celle du triangle est supérieure strictement à celle du trapèze ?*

Exercice 7 :

1. *Résous dans $\mathbb{R}$, l'inéquation suivante :* $\frac{x}{4} - \frac{3x-1}{12} > \frac{x}{2} - 1$.
2. *Quels sont les nombres strictement négatifs solutions de l'inéquation* :
   $\frac{3x+2}{2} - \frac{2x+3}{3} < \frac{x+4}{3}$.

Exercice 8 :

Un rectangle a pour aire 290 m^2. Montre que sa longueur est supérieure à 17m.

Exercice 9 :

Résous les inéquations suivantes et donne, si c'est possible, pour chacune d'elles, une représentation graphique de l'ensemble des solutions.

$2(x+\sqrt{2}) - (5x - 3\sqrt{2}) > 3(x + 3\sqrt{2}) + 4(x - \sqrt{2})$;

$2(3x\sqrt{2} - 5\sqrt{3}) - 5(x\sqrt{2} - 2\sqrt{3}) \leq 3(x\sqrt{2} + 4\sqrt{3}) - 2(5\sqrt{2} - 2x\sqrt{3})$;

$2\sqrt{5}(7x - 4\sqrt{7}) - 6(3x\sqrt{5} - 2\sqrt{7}) < 3\sqrt{2}(5 - 4x) - 2\sqrt{2}(5x - 6)$.

Exercice 10 :

Résous les inéquations ci-dessous :

$(5x + 17)(5x\sqrt{3} + 3) \leq 0$; $(5\sqrt{3} - (x - 3\sqrt{3}))(4x - (3x - 8\sqrt{2})) > 0$;

$(7x - \sqrt{3})(2x\sqrt{5} + 3) \leq 0$; $\frac{-2x + 5\sqrt{3}}{3x - 8} \geq 0$

Exercice 11 :

ABCD est un rectangle de longueur 13cm et de largeur 6cm. Soit M un point du côté $[AB]$.

1. *Calcule, en fonction dex, les aires des triangles ADM, CDM et BCM.*
2. *Pour quelle(s) position(s) de M :*
   a. *Les aires des triangles ADM et BCM sont-elles égales ?*
   b. *Les aires des triangles ADM et DCM sont-elles égales ?*
   c. *Les aires des triangles CDM et BCM sont-elles égales ?*
3. *Existe-t-il une position de M pour laquelle les trois triangles ont la même aire ?*

Exercice 12 :

Dans un jardin, le tiers de la surface est recouvert par les fleurs, un sixième par des plantes vertes et le reste soit 150m² est occupé par une pelouse. On désigne par x l'aire en m² de ce jardin.

a. Traduis par une équation où l'inconnue est x.

b. Calcule l'aire de ce jardin.

Exercice 13 :

Résous dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$|x| \geq 2$; $|x| < 3$; $|x-3| \leq 5$; $|2x+3| > 14$; $\sqrt{(5x-3)^2} \leq 2$;

$|x-1| \geq |x+1|$; $3|x-2| + 5|x+4| > 17$; $2|x-2| - 7|x+4| \leq -23$.

Exercice 14 :

Résous dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$6|x-1| + 3|x+2| < 17 + 4x$; $|x+\sqrt{3}| + 2x > |3x + 2\sqrt{2}| + 7 + 5x$;

$|x+\sqrt{2}| + 3|x+2\sqrt{2}| \geq 8 + 4x$; $\sqrt{x+3} \leq \sqrt{x-2}$; $\sqrt{x+3} + \sqrt{x-2} \geq 5$;

$\sqrt{2x+1} + \sqrt{3x+2} < 13$; $\sqrt{4x-5} - \sqrt{2x+3} \leq -7$.

Exercice 15 :

Ramène chacune des équations à une équation produit puis la résoudre

a. $x^2 + 6x + 9 = 0$;

b. $25x^2 - 9 = 0$

c. $x^2 - 7x - 12 = 0$

d. $x^2 + 7x + 12 = 0$

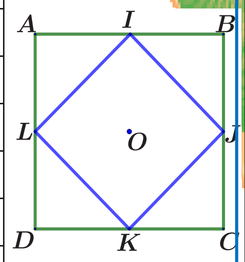
Chapitre 6 : *Vecteurs du plan*

I. Activités préparatoires :

Activité 1 :

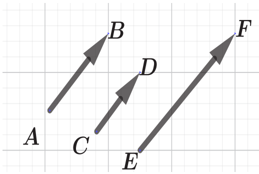
ABCD est un carré, I, J, K, L les milieux des côtés. Complète le tableau suivant :

Vecteurs	Même direction	Même sens	Même longueur	Vecteurs égaux
$\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{KD}$	oui	non	oui	non
$\overrightarrow{IL}$ et $\overrightarrow{JK}$				
$\overrightarrow{IB}$ et $\overrightarrow{DC}$				
$\overrightarrow{IL}$ et $\overrightarrow{DB}$				
$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{LJ}$				
$\overrightarrow{AL}$ et $\overrightarrow{AI}$				



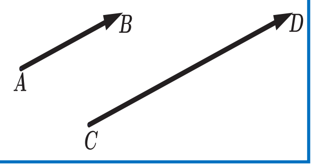
Activité 2 :

1. *Reproduis le quadrillage ci-contre puis représente les vecteurs :* $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{DC}$; $\overrightarrow{DE}$; $\overrightarrow{BC}$.
2. *Peux-tu trouver sur la figure des vecteurs égaux ? opposés ?*



Activité 3 :

Observe les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{CD}$ *ci-contre :*
Que peux-tu dire de la direction, du sens et de la longueur des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{CD}$.



Activité 4 :

Construis un parallélogramme ABCD.

1. *Écris, à partir de cette configuration, des égalités de vecteurs*
2. *On donne quatre points A, B, C et D tels que* $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.
   a. *Représente ces vecteurs.*
   b. *Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ?*

Activité 5 :

1. *Construis un segment [MN]. Place le point I milieu du segment [MN].*
   Que peux-tu dire des vecteurs $\overrightarrow{MI}$ *et* $\overrightarrow{IN}$ *?*
2. *On donne trois points P, Q et J tels que* $\overrightarrow{PJ} = \overrightarrow{JQ}$.
   a. *Représente ces points.*
   b. *Que peux-tu dire de J ?*

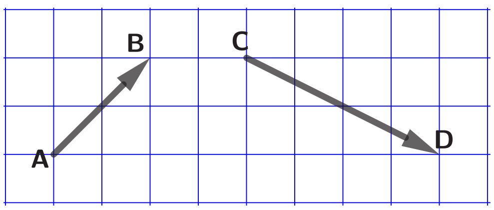
Activité 6 :

On donne trois points A, B et C distincts. Matérialise les déplacements suivants

1. *de A vers B par le vecteur $\overrightarrow{AB}$ suivi par celui de B vers C par $\overrightarrow{BC}$.*
2. *de A directement vers C par le vecteur $\overrightarrow{AC}$.*
3. *Que penses-tu du résultat final ? Quelle égalité obtiens-tu alors ?*

Activité 7: ***(Méthode pour faire la somme de deux vecteurs)***

Soient $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ deux vecteurs voire figure ci-contre



1. *a. Construis B' pour que BB'DC soit un parallélogramme.*

   c. Compare $\overrightarrow{BB'}$ et $\overrightarrow{CD}$.

   En déduis $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$.
2. *a. Construis D'pour que ABD'D soit un parallélogramme.*

   b. Compare $\overrightarrow{DD'}$ et $\overrightarrow{AB}$.En déduis $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AB}$
3. *Que peux-tu conclure ?*

Le vecteur $\overrightarrow{BB'}$ est égal à $\overrightarrow{CD}$, on dira que $\overrightarrow{BB'}$ est un représentant du vecteur $\overrightarrow{CD}$.

Activité 8 :

1. *Construis un vecteur $\vec{u}$ de longueur 2cm, puis les vecteurs $3\vec{u}$; $-2\vec{u}$; $\frac{3}{4}\vec{u}$; $-\frac{1}{2}\vec{u}$.*
2. *Compare les directions des vecteurs $\vec{u}$; $3\vec{u}$; $-2\vec{u}$; $\frac{3}{4}\vec{u}$ et $-\frac{1}{2}\vec{u}$.*
3. *Que peux-tu dire des longueurs des vecteurs $\vec{u}$ et $3\vec{u}$? des vecteurs $\vec{u}$ et $-2\vec{u}$.*

II. Je retiens :

1. Présentation des vecteurs :

1.1. Notion de vecteur : (rappels)

Caractérisation : (Rappels)

Un vecteur est une notion mathématique caractérisée par une direction, un sens et une longueur.

Etant donnés deux points distincts A et B, dans cet ordre, on définit :

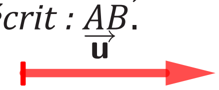
- *Une direction : Celle de la droite (AB) ;*
- *Un sens : Celui de A vers B ;*
- *Une longueur : la longueur du segment [AB].*

On dit que ces deux points A et B définissent un vecteur noté : $\overrightarrow{AB}$ et on lit : « vecteur AB »

Remarque 1 :

- *Il faut faire la distinction entre les notations AB, (AB), $[AB)$, $[AB]$ et $\overrightarrow{AB}$.*
- *On représente un vecteur par une flèche dont l'origine et l'extrémité sont indiquées, comme dans figure ci-contre.*

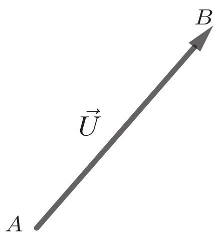
- *Pour nommer un vecteur, on utilise souvent deux lettres et on écrit : $\overrightarrow{AB}$.*
  On peut également nommer un vecteur par une seule lettre



- *Si A=B (A et B sont confondus), $\overrightarrow{AB}$ est le vecteur nul. On le note : $\vec{0}$*

Exemple 1 :

Sur la figure ci-contre, on a représenté le vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$



- *D'origine A et d'extrémité B ;*
- *De longueur AB celle du segment $[AB]$;*
- *De direction celle de la droite (AB) ;*
- *De sens est celui de A vers B.*

Attention :

Un vecteur n'est pas un ensemble de points ! Il ne faut donc pas confondre le vecteur $\overrightarrow{AB}$ avec segment $[AB]$.

Définition 1 :

Le ***vecteur nul*** *noté* $\vec{0}$*, est un vecteur dont la longueur est 0. Sa direction et son sens* ne *sont pas définis.*

On le représente par un point. Par exemple, $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$ *et plus généralement* $\overrightarrow{MM} = \vec{0}$*, pour tout point* M.

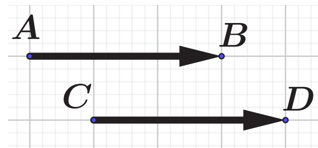
Remarque 2 :

La longueur d'un vecteur $\vec{u}$ est aussi appelée **norme.** *On note $\|\vec{u}\|$ la norme du vecteur $\vec{u}$.*

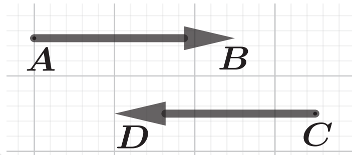
1.2. Vecteurs égaux et vecteurs opposés

Définition 2 :

- *Deux vecteurs sont égaux s'ils ont :*
  a. *La même direction ;*
  b. *Le même sens ;*
  c. *La même longueur.*



- *Deux vecteurs sont opposés s'ils ont :*
  a. *La même direction ;*
  b. *Deux sens contraires ;*
  c. *La même longueur.*



Remarque 3 :

- *Sur la figure, si $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, on dit alors $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont des représentants du vecteur $\vec{u}$.*
- *Tout vecteur $\vec{u}$ admet une infinité de représentants, mais un seul représentant d'origine donnée ou d'extrémité donnée.*
  Par exemple, $\overrightarrow{CD}$ est l'unique représentant de $\vec{u}$ d'origine C et $\overrightarrow{AB}$ est l'unique représentant de $\vec{u}$ d'extrémité B.
- *Pour tout vecteur $\vec{u}$, son opposé est noté opp $(\vec{u})$ ou également $-\vec{u}$.*
- *$opp(\overrightarrow{AB}) = -\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$*

1.3. Vecteurs colinéaires :

Définition 3 :

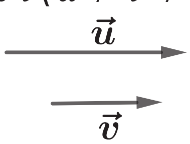
Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls *ayant même direction sont dits colinéaires.*

Remarque 3 :

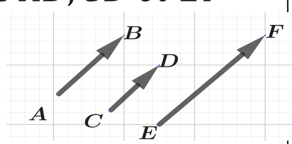
Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ égaux ou opposés sont colinéaires.

Exemple 2 :

- *Les deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ $(\vec{u} \neq \vec{v} \neq \vec{0})$* **sont** *colinéaires.*



- *Les trois vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{EF}$* **sont** *colinéaires.*



Convention : *Le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur.*

2. Vecteurs et premières propriétés :

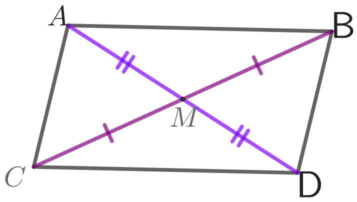
2.1. Vecteurs et Parallélogramme :

Propriété 1 :

- Si $ABCD$ est un parallélogramme, alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$
- Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, alors le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.

Remarque 4 :

On résume la propriété précédente en écrivant :

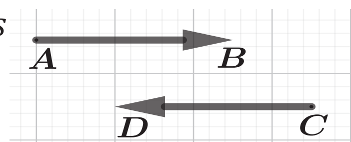
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si :	• $ABDC$ est un parallélogramme. (éventuellement aplati) • $[AD]$ et $[BC]$ ont même milieu.
Les deux cas de figure possibles sont représentés ci-dessous.	
 $ABDC$ est un (vrai) parallélogramme.	 $ABDC$ est un parallélogramme aplati.
M est le milieu de $[AD]$ et de $[BC]$.	

Conséquence :

- Si deux vecteurs sont égaux, leurs opposés le sont aussi :
  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{DC}$.
- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.

Exemple 3 :

En observant la figure ci-contre, on peut écrire les égalités vectorielles suivantes :



$\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$; $\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{DC}$.

2.2. Vecteurs et milieu d'un segment :

Propriété 2:

- Si I est le milieu de $[AB]$, alors $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$.
- Si trois points A, B et I sont tels que $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$, alors I est le milieu de segment $[AB]$.
- Autrement dit : I est le milieu d'un segment $[AB]$ si et seulement si $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$.

3. Opérations sur les vecteurs :

3.1. Addition et soustraction des vecteurs :

3.1. a. Somme de deux vecteurs :

Règle :

Étant donnés trois points A, B et C du plan, on admet que : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Cette relation est appelée relation de Chasles. On dit que $\overrightarrow{AC}$ *est la somme des vecteurs* $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{BC}$.

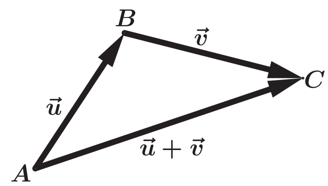
Propriété 5 :

Soient $\overrightarrow{CD}$ *et* $\overrightarrow{AB}$ *deux vecteurs alors :* $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$ *et* $\overrightarrow{AB} + \vec{0} = \overrightarrow{AB}$.

Résumé :

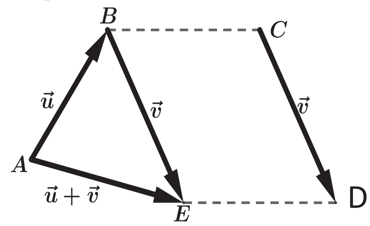
L'ensemble des vecteurs du plan est noté $\mathcal{V}$.

On définit sur $\mathcal{V}$ *une addition de la manière suivante :*



1er cas : $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *sont deux vecteurs consécutifs, c'est-à-dire, l'extrémité de* $\vec{u}$ *et l'origine de* $\vec{v}$ *sont confondues ; par exemple,* $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ *et* $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$.

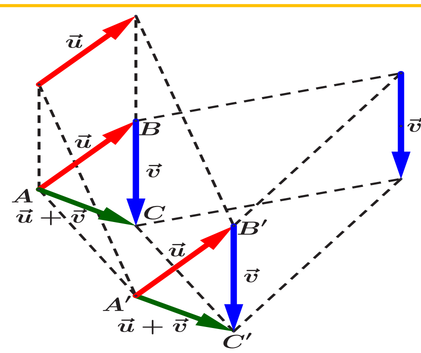
Dans ce cas on définit : $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.



Cette égalité $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ *est vraie pour tous les points A, B et C du plan. Elle est connue sous le nom : Relation de Chasles.*

2ème cas : $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *ne sont pas consécutifs. Dans ce cas, on choisit deux représentants consécutifs et on applique à nouveau la relation de Chasles.* $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AE}$.

Remarque 5 :



Cette définition de l'addition des vecteurs a un sens : le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ *ne dépend pas du choix des représentants de* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$*, comme le montre la figure ci-contre :*

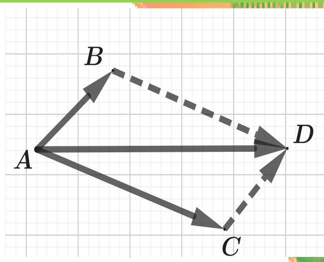
$\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{A'B'}$ *sont des représentants de* $\vec{u}$.

$\overrightarrow{BC}$ *et* $\overrightarrow{B'C'}$ *sont des représentants de* $\vec{v}$.

$\overrightarrow{AC}$ *et* $\overrightarrow{A'C'}$ *sont des représentants du* ***même vecteur*** *; ce vecteur est par définition* $\vec{u} + \vec{v}$.

Math AS.indd 84 15/07/2024 15:31:03

Règle du parallélogramme :



Lorsque $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ sont deux vecteurs ayant la même origine, alors $\vec{u} + \vec{v}$ est le vecteur $\overrightarrow{AD}$; où D est L'unique point tel que ABDC est un parallélogramme.

En effet : $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$.

En s'appuyant sur les résultats des activités précédentes, on peut énoncer les propriétés suivantes de l'addition des vecteurs :

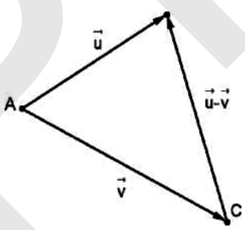
- *Quels soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs, on a : $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$. On dit* que *l'addition des vecteurs est commutative.*
  En effet : $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{v} + \vec{u} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC}$.
- *Quels soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs,* on a : $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$.
  On dit que *l'addition des vecteurs est associative.*
- *Quel soit le vecteur $\vec{u}$, on a : $\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$. On dit* que $\vec{0}$ *comme élément neutre de l'addition des vecteurs.*

III.2. Soustraction de vecteurs :

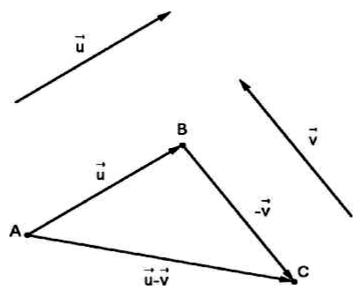
Définition 4 :

Soustraie c'est ajouter l'opposé

$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$



B



Remarque 6 : ***Cas particulier important :***

Lorsque $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$ sont deux vecteurs ayant la ***même origine****, alors :*

$\vec{u} - \vec{v} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$.

3.2. Multiplication d'un vecteur par un réel :

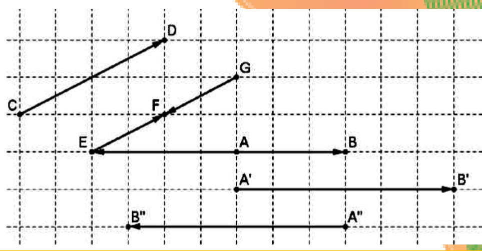
3.2.a. Notion de multiplication d'un vecteur par un réel :

Définition 5 :

Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul du plan et ***k*** *un réel non nul. On appelle* ***produit du*** *vecteur $\vec{u}$ par le réel k, noté $k\vec{u}$ ou $k.\vec{u}$,* ***le vecteur :***

- ***de longueur*** $|k|\|\vec{u}\|$;
- ***de même direction*** *que $\vec{u}$;*
- ***de même sens*** *que $\vec{u}$ si $k > 0$ et de sens opposé à $\vec{u}$ si $k < 0$.*

Exemple 4 :



En observant la figure ci-contre, on écrit :

$\overrightarrow{A'B'} = 2\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{A''B''} = -2\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$;

$\overrightarrow{GF} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{EA} = \frac{4}{7}\overrightarrow{EB}$.

Remarque 7 :

Les vecteurs $k\vec{u}$ et $\vec{u}$ sont toujours ***colinéaires.***

- ***Si*** $k = 0$, *alors* $k\vec{u} = 0\vec{u} = \vec{0}$.
- ***Si*** $k = 1$, *alors* $k\vec{u} = 1\vec{u} = \vec{u}$.
- ***Si*** $k = -1$ *alors* $k\vec{u} = -1\vec{u} = -\vec{u}$.

En s'appuyant sur ce qui précède, on peut énoncer les propriétés de la multiplication d'un vecteur par un réel :

Quels soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ***non nul et les réels k et k' non nuls, on a :***

a. $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$. *la distributivité par rapport à l'addition dans $\mathcal{V}$.*

b. $(k + k')\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u}$. *la distributivité par rapport à l'addition dans $\mathbb{R}$.*

c. $k(k'\vec{u}) = (kk')\vec{u}$. *associativité mixte.*

d. $k\vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow k = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$. *règle du produit nul.*

Exemple 5 :

- $3(\vec{u} + \vec{v}) = 3\vec{u} + 3\vec{v}$ (*d'après a.*)
- $2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC} = 2(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = 2\overrightarrow{AC}$ (*d'après b. et la relation de Chasles*).
- $-2(4\vec{w}) = -8\vec{w}$ (*d'après c.*)

3.2.b. Condition de colinéarité de deux vecteurs

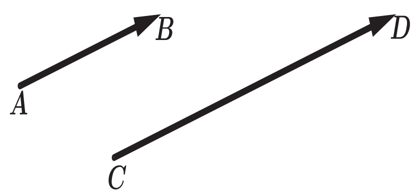
On a déjà vu la définition de la colinéarité :

Propriété 5 :

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls sont ***colinéaires*** *si et seulement* ***si, il existe un nombre réel*** $k \neq 0$ *tel que :* $\vec{u} = k \times \vec{v}$.

Démonstration :

- Si $\vec{v} = k\vec{u}$. *Alors, par définition, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.*
- *Réciproquement, soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs* **non nuls** *du plan tels que* $\vec{u} \neq \vec{v}$ **:**
  - *Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont* ***même sens*** *alors on prend :* $k = \frac{\|\vec{u}\|}{\|\vec{v}\|}$.

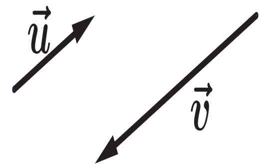


$k > 0$, le vecteur $k\vec{u}$ a la même direction et le même sens que $\vec{u}$ et donc la même direction et le même sens que $\vec{v}$. Il a également la même longueur que $\vec{v}$ car sa longueur

est égale à : $|k|\|\vec{u}\| = \frac{\|\vec{u}\|}{\|\vec{v}\|} \times \|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$. *Donc :* $k\vec{u} = \vec{v}$.

- *Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont des sens opposés alors on prend :* $k = -\frac{\|\vec{u}\|}{\|\vec{v}\|}$.

  Comme $k < 0$, le vecteur $k\vec{u}$ a même direction mais le sens opposé à celui de $\vec{u}$ et donc même direction et même sens que $\vec{v}$. Il a également même longueur que $\vec{v}$ car sa longueur



  est égale à : $|k|\|\vec{u}\| = \frac{\|\vec{u}\|}{\|\vec{v}\|} \times \|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$. *Donc :* $k\vec{u} = \vec{v}$.

Remarque 8 :

- *Une relation du type $\vec{v} = k\vec{u}$ est appelée relation de colinéarité entre deux vecteurs.*
- *Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls alors $k \neq 0$:* $\vec{v} = k\vec{u} \Leftrightarrow \vec{u} = \frac{1}{k}\vec{v}$.
- *La relation de colinéarité entre tout vecteur $\vec{u}$ et le vecteur nul $\vec{0}$ est :*
  $\vec{0} = 0 \times \vec{u}$, *mais si $\vec{u} \neq \vec{0}$, il n'existe pas de relation du type :* $\vec{u} = k \times \vec{0}$.

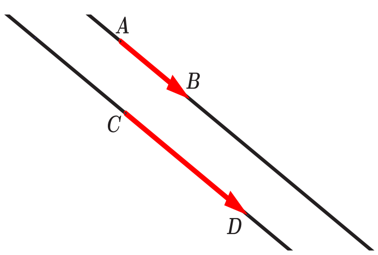
La proposition suivante est évidente, mais elle est d'une utilité considérable dans les exercices.

***Propriété 6 :* Condition d'alignement de 3 points.**

Trois points A, B et C du plan sont alignés si et seulement les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Remarque 9 :

On pourra utiliser cette propriété de la manière suivante pour formuler :



- *La condition d'appartenance d'un point à une droite. Etant donnée une droite (AB) du plan, on a*
  $M \in (AB) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ *et* $\overrightarrow{AB}$ *sont colinéaires.*
- *La condition de parallélisme de deux droites.*
  Deux droites (AB) et (CD) du plan sont parallèles si et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

III. Je sais faire :

Enoncés des exercices d'application :

Exercice d'application 1 :

A, B, C, D et E cinq points du plan tels que :

ABED est un parallélogramme et $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BE}$.

Démontre que E est le milieu de $[DC]$.

Exercice d'application 2 :

ABCD est un parallélogramme de centre O.

1- Construis une figure.

2- Trouve les vecteurs égaux de la figure.

3- Donne les vecteurs opposés de la figure.

Exercice d'application 3 :

A, B, C, D et E sont cinq points distincts.

Complète les égalités pour qu'elles soient toujours vraies.

a. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\dots D} = \overrightarrow{A \dots}$; b. $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{A \dots} = \overrightarrow{\dots E}$; c. $\overrightarrow{A \dots} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{\dots C}$;

d. $\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{\dots}$; e. $\overrightarrow{\dots C} + \overrightarrow{\dots} = \overrightarrow{AB}$; f. $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{\dots D} = \overrightarrow{\dots D}$.

Exercice d'application 4 :

Soit A et B deux points du plan.

On note M le point tel que $3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \vec{0}$.

1. *Exprime* $\overrightarrow{AM}$ *en fonction de* $\overrightarrow{AB}$. *Que peut-on dire des points* A, M *et* B ?

Exercice d'application 5 :

Soient A et B deux points du plan.

On note M le point tel que : $3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} = \vec{0}$.

Exprime $\overrightarrow{BM}$ *en fonction de* $\overrightarrow{BA}$. *Que peut-on dire vecteurs* $\overrightarrow{BM}$ *et* $\overrightarrow{BA}$?

Exercice d'application 6 :

Soit ABC un triangle quelconque.

On note M et N les points définis par $\overrightarrow{AM} = 3\,\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC}$.

Démontre que les droites (MN) et (AC) sont parallèles.

Solutions des exercices d'application :

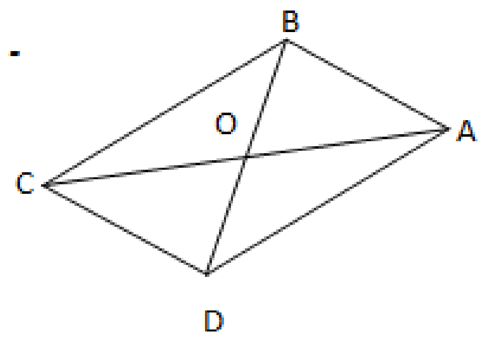
Exercice d'application 1 :

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BE}$ *nous permet d'écrire* $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CE}$ *, ABCD est un parallélogramme donc* $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$*.On a alors :*

$$\underbrace{\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CE} \qquad \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}}_{\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CE}}$$

Exercice d'application 2 :

Donc E est milieu du segment$[\boldsymbol{DE}]$

1. 	***2. Vecteurs égaux*** $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = \overrightarrow{\boldsymbol{DC}}$, $\overrightarrow{\boldsymbol{CB}} = \overrightarrow{\boldsymbol{DA}}$, $\overrightarrow{\boldsymbol{AO}} = \overrightarrow{\boldsymbol{0C}}$ $\overrightarrow{\boldsymbol{OB}} = \overrightarrow{\boldsymbol{OD}}$. ***3. Vecteurs opposés*** $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = -\overrightarrow{\boldsymbol{CD}}, \overrightarrow{\boldsymbol{BA}} = -\overrightarrow{\boldsymbol{DC}}$, $\overrightarrow{\boldsymbol{BO}} = -\overrightarrow{\boldsymbol{D0}}, \overrightarrow{\boldsymbol{CB}} = -\overrightarrow{\boldsymbol{DA}}$

Exercice d'application 3 :

Etant donnés A, B, C, D et E cinq points distincts.

b. $\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BD}} = \overrightarrow{\mathrm{AD}}$; b.$\overrightarrow{\mathrm{BA}} + \overrightarrow{\mathrm{AE}} = \overrightarrow{\mathrm{BE}}$; c.$\overrightarrow{\mathrm{AD}} + \overrightarrow{\mathrm{DC}} = \overrightarrow{\mathrm{AC}}$;

d. $\overrightarrow{\mathrm{DE}} + \overrightarrow{\mathrm{ED}} = \vec{0}$; e. $\overrightarrow{\mathrm{AC}} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$; f.$\overrightarrow{\mathrm{CB}} + \overrightarrow{\mathrm{BD}} = \overrightarrow{CD}$.

Exercice d'application 4 :

1 - $3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \vec{0}$.

D'après la relation de Chasles : $\overrightarrow{MB}$=$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}$ *Alors* $3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \vec{0} \Longrightarrow$
$3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{AB} = \vec{0}$.

$$\Longrightarrow 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{AB} = \vec{0} \Longrightarrow 2\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{AB}$$

$2\overrightarrow{AM}$=$\overrightarrow{AB}$ d'où $\overrightarrow{AM}$=$\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ donc l*es points* A, M *et* B *sont alignés*

Exercice d'application 5

3 $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} = \vec{0}$. D'après la relation de Chasles : $\overrightarrow{MA}$= $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA}$

On aura donc : $3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} = 3\left(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA}\right) + 2\overrightarrow{MB} = \vec{0}$

$3\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{MB} = \vec{0} \Rightarrow 5\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{BA} = \vec{0} \Rightarrow 5\overrightarrow{MB} = -3\overrightarrow{BA} \Rightarrow 5\overrightarrow{BM} = 3\overrightarrow{BA}$;

donc : $\overrightarrow{BM} = \frac{3}{5}\overrightarrow{BA}$*. D'où les vecteurs* $\overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{BA}$ *sont colinéaires.*

Exercice d'application 6 :

D'après la relation de Chasles : $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN}$. On a donc :

$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN} = -3\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC} = -\boldsymbol{3}\overrightarrow{\boldsymbol{AC}} + \overrightarrow{\boldsymbol{AC}} - \overrightarrow{\boldsymbol{AC}} = -3\overrightarrow{AC}$

Alors $\overrightarrow{MN}$ *et* $\overrightarrow{AC}$ *sont colinéaires donc les droites* (MN) *et* (AC) *sont parallèle.*

Math AS.indd 89 15/07/2024 15:31:06

IV. Je m'exerce :

Exercice 1 :

ABCD est un parallélogramme de centre O. Avec des points de la figure, désigne un vecteur égal à : a. $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CO}$; *b.* $\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{CD}$; *c.* $\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OA}$; *d.* $\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{CB}$.

Exercice 2 :

a. M est le milieu d'un segment $[AB]$. *Que peut-on dire de la somme* $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}$?

b. ABCD un parallélogramme de centre O, calculer la somme : $\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{OC}$.

Exercice 3 :

I, J et K étant trois points donnés, on appelle L le point tel que $\overrightarrow{IL}=\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{IK}$.

a. Quelle est la nature du quadrilatère IJLK ?

b. Lorsque le triangle IJK est isocèle en I ?

c. Lorsque le triangle IJK est rectangle en I ?

Exercice 4 :

Trace un parallélogramme ABCD. On appelle E le point tel que :

$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}$. *Quelle est la nature du quadrilatère ADEB ? Justifie.*

Exercice 5 :

a. Trace un trapèze ABCD de bases (AB) *et* (DC) *; puis construis :*

- *Le point E tel que* $\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{BA}$;
- *Le point F tel que* $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AD}$.

b. Démontre que $\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}$.

Exercice 6 :

Trace un triangle ABC isocèle en C.

a. Construis les points D et E tel que : $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ *et* $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AC}$.

b. Démontre que le quadrilatère ADEC est un losange. En déduis que $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CE}$.

c. Démontre que C est le milieu du segment $[BE]$.

d. Démontre que le triangle BAE est rectangle.

Exercice 7

Les diagonales d'un quadrilatère ABCD se coupent en O.

a. Fais une figure et construis les points E, F, G et H tels que :

$\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$; $\overrightarrow{OF}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$; $\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}$; $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OA}$

b. Quelle est la nature des quadrilatères AOBE, BOCF, CODG et DOAH ?

c. Démontre que les points E, B, F sont alignés. De même que peut-on dire des points F, C, G, des points G, D, H et des points H, A, E ?

d. Démontre que le quadrilatère EFGH est un parallélogramme.
e. Quelle est la nature de EFGH lorsque les diagonales de ABCD sont perpendiculaires ? Lorsqu'elles ont la même longueur ?

Exercice 8 :

Construis un triangle BCD rectangle en B tel que BD= 2cm et BC=6 cm.

1. Calcule DC (on donnera la valeur exacte).
2. Place sur la figure le point A symétrique du point D par rapport au point B, puis le point E symétrique du point C par rapport au point B. Quelle est la nature du quadrilatère ACDE ? Justifie.
3. Construis le point F tel que $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{DC}$. Justifie l'égalité $\overrightarrow{EA} = \overrightarrow{AF}$.
   Que représente le point A pour le segment $[EF]$?
4. Soit I le point d'intersection des droites (CF)et (DE).
   a. Démontre que C est le milieu du segment$[IF]$.
   b. Calcule IF et FE.
5. Détermine le centre et le rayon du cercle circonscrit au triangle ECF.

Exercice 9 :

Soit ABC un triangle. On considère les points D et E tels que :

$\overrightarrow{AD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$

Montrer que : $\overrightarrow{AE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$

Que peut-on en conclure sur les points A, E et C ?

Exercice 10 :

M, N et P sont les milieux respectifs des côtés d'un triangle ABC.

G est le point de concours (d'intersection) des médianes de ABC et A' est le symétrique de G par rapport à M.

a. Fais une figure.
b. Démontre que G est le milieu du segment $[AA']$; que peut-on en déduire pour la somme $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GA'}$?
c. Démontre que $\overrightarrow{GA'} = \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}$.
d. Complète l'égalité : $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{...}$

Exercice 11 :

I, J, K étant les milieux respectifs des cotés $[AB]$, $[AC]$ et $[BC]$ d'un triangle ABC, exprime le plus simplement possible les vecteurs :

$(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IK}) + \overrightarrow{CK}$ et $(\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{AJ}) + \overrightarrow{KC}$.

Exercice 11 :

M est le milieu du coté $[AC]$ *d'un triangle ABC et I le point tel que* $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{CM}$.
Démontre que $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{BC}$.*Construis le point J tel que* $\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{JC} = \overrightarrow{CB}$.

Exercice 12 :
Trace un parallélogramme ABCD et place un point E sur $[AB]$, *un point F sur* $[CD]$ *tels que* $\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{DF}$.
a. *Démontre que* $\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CF}$.
b. *Démontre que* $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{EB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{ED}$.

Exercice 13 :
Construis un triangle ABC puis les points B' et C'tel que : $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AB}$.

Exercice 14 :
ABC est un triangle. Construis les points M, N et R vérifiant les conditions :
a. *M tel que* $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{AC}$. b. *N tel que* $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CN}$. c. *R tel que* $\overrightarrow{RA} = \overrightarrow{AC}$.

Exercice 15 :
ABCD est un parallélogramme. A-t-on :
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$? ; $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$? ; $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$? ; $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$? ; $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{BC}$?

Exercice 16 :
On considère un parallélogramme ABCD. Dis si les égalités suivantes sont vraies :
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DB}$;
$\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CA}$; $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BD}$.

Exercice 17 :
ABCD est un parallélogramme de centre O. Construis les points M, N, P, R définis par : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AM}$; $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{CP}$; $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BN}$; $\overrightarrow{DO} - \overrightarrow{CO} = \overrightarrow{CR}$.

Math AS.indd 92 15/07/2024 15:31:07

Exercice 18 :

Soit ABC un triangle quelconque.

On note M et N les points définis par $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ *et* $\overrightarrow{AN} = 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BC}$

Démontrer que les droites (MN) *et* (AC) *sont parallèles.*

(On pourra utiliser la relation de Chasles pour décomposer $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN}$.*)*

Exercice 19 :

a. *Construis un cercle C de centre O et de rayon 34 mm.*
   Trace un diamètre $[BC]$ *de ce cercle et place le point A du cercle tel que :*
   CA=32 mm. Construis le point D tel que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB}$.

b. *Démontre que le triangle ABD est rectangle et calcule l'arrondi à l'unité de ses angles.*

c. *La droite Δ tangente au cercle en B, coupe* $[AD]$ *en H.*
   Démontre que $\widehat{HBA} = \widehat{ADB}$.

d. *Construis le point E tel que* $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{DB}$.
   Démontre que le point E est un point du cercle C.

e. *La droite* (EC) *coupe la droite* (DA) *en F et la droite* (HB) *en K.*
   Démontre que les droites (FB) *et* (DK) *sont perpendiculaires.*

Exercice 20 :

Dans un parallélogramme ABCD dont les diagonales se coupent en I.

a. *Construire les points E, F et G tels que :*
   $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AI}$; $\overrightarrow{IF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ *et* $\overrightarrow{IG} = \overrightarrow{AC}$.

b. *Démontre que* $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{IE}$ *et* $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AC}$.

c. *Démontre que les points B, E et F sont alignés.*

d. *Les droites* (FC) *et* (GE) *se coupent en J.*
   Démontre que ces droites sont les médianes du triangle GIF et que (IJ) *coupe* $[GF]$ *en son milieu.*

Exercice 21 :

ABCD est un parallélogramme. On considère les points E et F tels que :

$$\overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{AD}$$

Place les points E et F. En déduis que C , E et F sont alignés.

Exercice 22 :

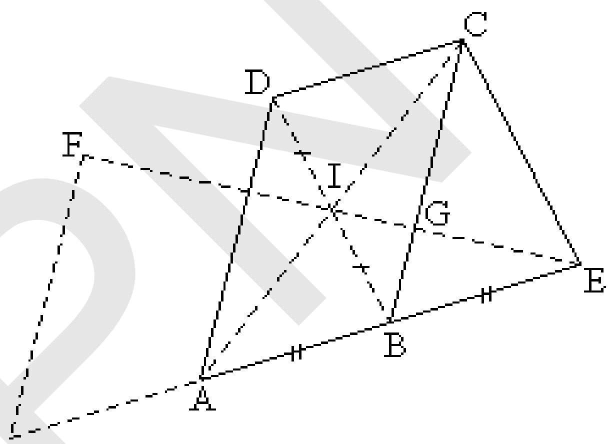
Dans la figure ci-dessous :

ABCD est un parallélogramme de centre I,

B est le milieu du segment [AE],

G est le centre de gravité du triangle ACE, et

$\overrightarrow{BF} = 2\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}$.



1-Détermine les relations reliant $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{CG}$ et $\overrightarrow{CB}$, puis $\overrightarrow{EI}$ et $\overrightarrow{EG}$.

2- Calcule $\overrightarrow{IE} + \overrightarrow{IF}$ Que peut -on déduire ?

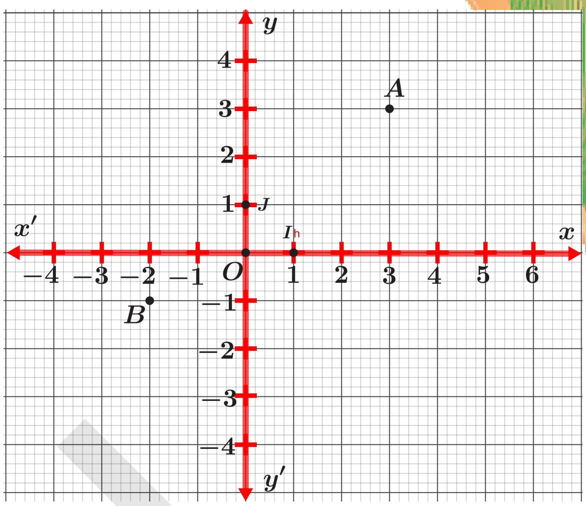
3- Montre que les points E, G et F sont alignés.

Chapitre 7 : Repère du plan

I. Activités préparatoires :

Activité 1 :

Sur une feuille quadrillée, comme dans la figure ci-contre on choisit deux droites perpendiculaires (xx') et (yy'); Elles se coupent en O.



- *Sur la droite (xx'), on choisit un repère (O ; I) prenant comme origine le point O et comme point d'abscisse 1 le point I, premier nœud du quadrillage à droite de O sur (xx')*
- *Sur la droite (yy'), on choisit un repère (O ; J) en prenant la même origine O et comme point d'abscisse 1 Le point J premier nœud au-dessus de O sur la droite (yy') (voir la figure).*

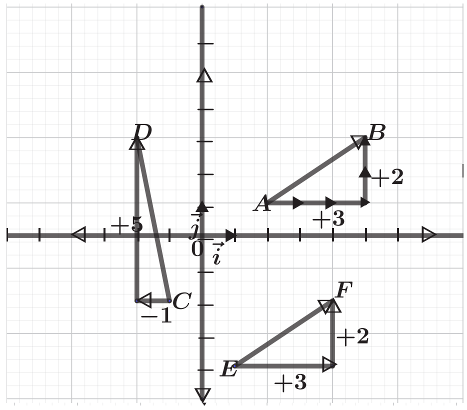
1. *On place sur la figure deux points A et B ; En utilisant le quadrillage.*
   a. *Marque-les projetés orthogonaux sur les axes (xx') et (yy') de chacun des points A et B.*
   b. *Lis respectivement les abscisses des projetés orthogonaux de A sur chacun des axes (xx') et (yy'), puis celles de B. Ecris : A(….; ….) ; B(……; ….).*
2. *Choisis deux autres points C et D sur le quadrillage. Reprends les deux questions a. et b.*

Activité 2 :

Soit $(O\,;I\,;J)$un repère du plan, on donne $A(1\,;\,-2)$ et $B(\,3\,;\,2)$.

1. *Place les deux points A et B, puis construis le point M tel que ABMO est un parallélogramme.*
2. *Calcule les coordonnées de K milieu segment [OB].*
3. *Sachant que K est aussi le milieu de [AM], calcule les coordonnées$(x_M\,;y_M)$ du point M.*
4. *Peux–tu généraliser la démonstration en exprimant les coordonnées $(x_M\,;y_M)$ du point M en fonction de $(x_A\,;\,y_A)$ et $(x_B\,;\,y_B)$, coordonnées respectives de A et de B ?*

Activité 3 :



On donne la figure ci-contre.

Partie 1 : ***Lecture graphique des coordonnées d'un vecteur***

Pour aller de A vers B, on effectue une translation de 3 carreaux vers la droite (+3) et une translation de 2 carreaux vers le haut (+2). On trace ainsi un « chemin » de vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ mis bout à bout reliant l'origine et l'extrémité du vecteur $\overrightarrow{AB}$. Complète :

$\overrightarrow{AB} = \cdots\vec{i} + \cdots\vec{j}$; *Ainsi, on écrit* $\overrightarrow{AB}\binom{3}{2}$ *ou encore* $\overrightarrow{AB} = \binom{3}{2}$.

De même :

$\overrightarrow{CD} = \cdots\vec{i} + \cdots\vec{j}$; *Ainsi* $\overrightarrow{...}\binom{-1}{5}$ *ou* $\overrightarrow{...} = \binom{-1}{5}$.

et $\overrightarrow{EF} = \cdots\vec{i} + \cdots\vec{j}$; *Ainsi* $\overrightarrow{...} = \binom{3}{2}$.

Partie 2 :

On pose : $\overrightarrow{u_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{u_2} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{EF}$; $\overrightarrow{v_1} = 3 \times \overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{v_2} = -5\overrightarrow{CD}$.

1. *Calcule, en fonction de $\vec{i}$ et $\vec{j}$ chacun des vecteurs $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$, $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$.*
2. *En déduis les composantes de chaque vecteur.*

Activité 4 :

Partie 1 :

Etant donnés $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan et deux vecteurs colinéaires $\vec{u}\binom{x}{y}$ et $\vec{v}\binom{x'}{y'}$.

Si l'un des vecteurs est nul, Que penses-tu de $x'y - y'x$?

a. Supposons maintenant que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient non nuls. Complète :

Dire que les vecteurs $\vec{u}\binom{x}{y}$ et $\vec{v}\binom{x'}{y'}$ sont colinéaires équivaut à dire …

un … k tel que $\vec{u} = \cdots\vec{v}$, donc $\binom{x}{y} = k\binom{\cdots}{\cdots}$, c'est-à- dire : $\begin{cases} x = kx' \\ y = ky' \end{cases}$.

On en déduit : $xy' = kx'y' = ky'x' = \cdots$ soit : $xy' = x'y$ ou encore $xy' - yx' = 0$.

Partie 2 :

Soient deux vecteurs $\vec{u}\binom{x}{y}$ et $\vec{v}\binom{x'}{y'}$ non nuls tels que : $xy' - yx' = 0$. Complète :

On suppose que le vecteur $\vec{v}$ étant non nul, l'une de ses composantes est non ….

Supposons que $x' \neq 0$, posons alors $k = \frac{x}{x'}$. L'égalité $xy' - yx' = 0$

s'écrit : $y = \frac{xy}{x'} = ky'$ et donc $\vec{u} = k\vec{v}$.

Activité 5 :

Soient $A(x_A\,;y_A)$; $B(x_B\,;y_B)$ et $C(x_C\,;y_C)$ trois points dans un un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath}\,)$tels que : $x_A = x_C = 2$ et $y_B = x_C = 1$.Complète :

La droite (BC) est … à l'axe$(O;\ \vec{\imath})$ et(AC) est … àl'axe$(O;\ \vec{\jmath})$.

Le triangle ABC est … rectangle en C, puisque $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ est un repère orthonormé, donc $AB^2 = AC^2 + BC^2$.

En choisissant la même unité de mesure de longueur sur la droite BC que sur l'axe $(O;\vec{\imath})$, on a : BC = …−…. De même si l'on choisit la même unité de mesure de longueur sur la droite AC que sur l'axe $(O;\vec{\jmath})$, on a : AC = …−…

Donc : $AB^2 = AC^2 + BC^2$, c'est-à-dire : $AB^2 = (y_C - y_A)^2 + (x_C - x_B)^2$.

D'où : $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

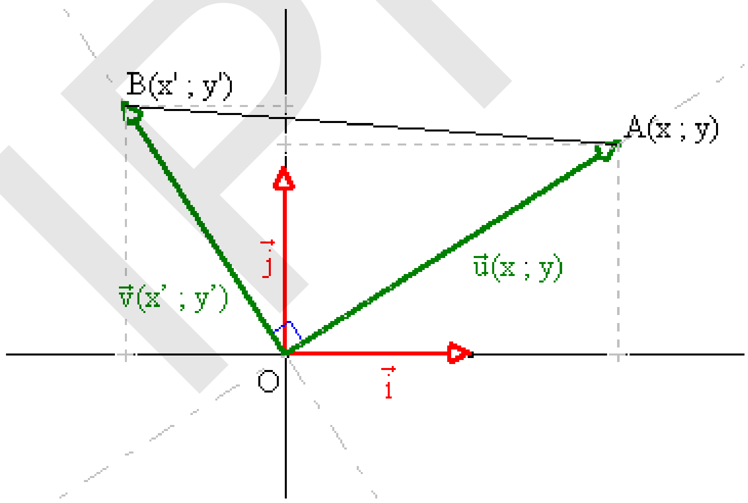
Activité 6 :

Soit$(O,\vec{\imath},\vec{\jmath}\,)$ un repère orthonormé du plan.

$\vec{u}$et $\vec{v}$ deux vecteurs de coordonnées respectives $(x\,;y)$ et $(x';y')$.On appelle A le point du plan défini par : $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$. Le point A a alors pour coordonnées $(x\,;y)$.

On appelle B le point du plan défini par $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$. Le point B a alors pour coordonnées $(x';y')$.

1. *Exprime les distances AB, OA et OB en fonction des coordonnées des points O,*



   A et B.
2. *On suppose à présent que $\widehat{AOB}$ est un angle droit. En appliquant le théorème de Pythagore au triangle OAB, démontre que : $xy' + x'y = 0$.*

Math AS.indd 97 15/07/2024 15:31:09

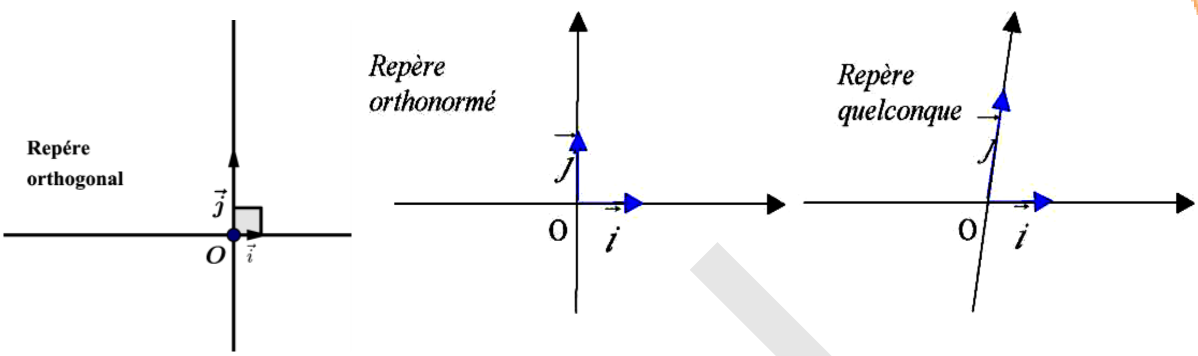
II. Je retiens

1. Repère du plan :

Définition 1 :

On appelle repère du plan tout triplet $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\,)$ où O est un point et $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ sont deux vecteurs non colinéaires.

- Un repère est dit orthogonal si $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ ont des directions perpendiculaires.



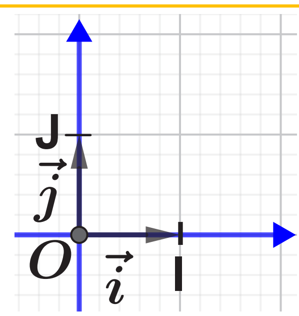
- Un repère est dit orthonormé s'il est orthogonal et si $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ sont de même norme égale à 1.
- Tout point M est repéré par un couple de nombres $(x_M\,; y_M)$ appelés coordonnées du point M dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\,)$; x_M est appelé abscisse et y_M l'ordonnée de ce point.

Remarque 1 :

Trois points distincts non alignés O, I et J du plan forment un repère, que l'on peut le noter (O, I, J).

L'origine O et les unités OI et OJ permettent de graduer les axes (OI) et (OJ).

Si on pose $\vec{\imath} = \overrightarrow{OI}$ et $\vec{\jmath} = \overrightarrow{OJ}$, alors ce repere se note également $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.



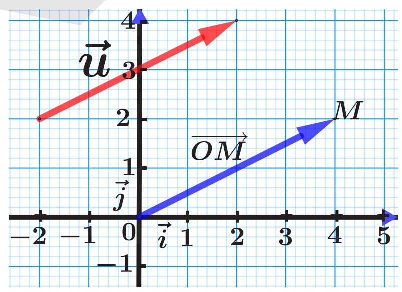
2. Coordonnées du milieu d'un segment :

Propriété 1 :
Étant donnés deux points A et B de coordonnées respectives $(x_A\,;y_A)$ *et* $(x_B\,;y_B)$ *dans un repère* $(O\,;I\,;J)$. *Si M le milieu du segment [AB] de coordonnées* $(x_M\,;y_M)$, *alors* $x_M = \frac{x_A+x_B}{2}$ *et* $y_M = \frac{y_A+y_B}{2}$.

4. Composantes d'un vecteur :

Définition 2 :
Etant donnés deux points A et B de coordonnées respectives $(x_A\,;y_A)$ *et* $(x_B\,;y_B)$ *dans le plan muni d'un repère* $(O\,;I\,;J)$.
On appelle composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}$ *les coordonnées* $(x_M\,;y_M)$ *du point M tel que OMBA est un parallélogramme et on a* $x_M = x_B - x_A$ *et* $y_M = y_B - y_A$ *et on écrit* $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B-x_A \\ y_B-y_A \end{pmatrix}$.

Remarque 2 :
- *Dans le plan muni d'un repère* $(O\,;I\,;J)$, *si un point M a pour coordonnées* $(x_M\,;y_M)$, *alors* $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix} x_M-x_O \\ y_M-y_O \end{pmatrix}=\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix} x_M \\ y_M \end{pmatrix}$.
- *Soit M un point quelconque dans un repère* $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ *et un vecteur* $\vec{u}$ *tel que* $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$, *les composantes du vecteur* $\vec{u}$ *sont les coordonnées du point M :*
  Si $M(x, y)$, *on note :* $\vec{u}(x, y)$ *ou* $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$



- *On pourra utiliser également le terme « coordonnées » pour désigner les composantes d'un vecteur.*

Propriété 2 :
Soient $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *deux vecteurs de composantes* $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ *du plan muni d'un repère* $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ *et un réel k. On a :*
- $\vec{u} = \vec{v}$ *Équivaut à* $x = x'$ *et* $y = y'$.
- *Le vecteur* $\vec{u} + \vec{v}$ *a pour composantes* $\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix}$.
- *Le vecteur* $k\vec{u}$ *a pour composantes* $\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$.

Exemple 1 : ***Calcul des coordonnées d'un point défini par une égalité vectorielle***

Dans un repère, soit les points $A(1\,;2)$, $B(-4\,;-3)$ et $C\,(1\,;-2)$.

1. *Calcule les composantes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$; puis celles des vecteurs 4 $\overrightarrow{BC}$,-3$\overrightarrow{AC}$ et $\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}$.*
2. *Détermine les coordonnées du point D pour que ABCD soit un parallélogramme.*

Réponse :

1. $\overrightarrow{AB}\binom{-4-1}{-3-2}=\binom{-5}{-5}$,$\overrightarrow{AC}\binom{1-1}{-2-2}=\binom{0}{-4}$ et $\overrightarrow{BC}\binom{1-(-4)}{-2-(-3)}=\binom{5}{1}$;

   $4\times\overrightarrow{BC}=4\times\binom{5}{1}=\binom{20}{4}$, $-3\,\overrightarrow{AC}=-3\times\binom{0}{-4}=\binom{0}{12}$ et $\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{5}\binom{-5}{-5}=\binom{-1}{-1}$.

2. *ABCD est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.*

On a : $\overrightarrow{AB}=\binom{-5}{-5}$ *et* $\overrightarrow{DC}\binom{1-x_D}{-2-y_D}=\binom{-5}{-5}$. *Donc* $1-x_D=-5$ *soit* $x_D=6$

et $-2-y_D=-5$. $y_D=3$, *d'où* $D(6\,;3)$.

Remarque 3 :

Si $\vec{u}$ *a pour coordonnées* $\binom{x}{y}$ *alors* $-\vec{u}$ *a pour coordonnées* $\binom{-x}{-y}$.

5. Distance dans un repère orthonormé :

Propriété 3 :

Soient A et B deux points de coordonnées $(x_A\,;\,y_A)$ *et* $(x_B\,;\,y_B)$ *dans un repère orthonormé* $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, *alors* $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$.

Remarque 4 :

- *Cette propriété est une conséquence du théorème de Pythagore ;*
- *La distance entre les deux points A et B est égale à la norme du vecteur* $\overrightarrow{AB}$ $(AB=\|\overrightarrow{AB}\|)$.

Exemple 2 : Calcul d'une distance dans un repère orthonormé

Soient $A(3\,;2)$ *et* $B(2\,;-2)$ *deux points dans un repère orthonormé* $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

La distance AB (ou norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$*) est égale à*

$AB=\sqrt{(2-3)^2+(-2-2)^2}=\sqrt{1+16}=\sqrt{17}$.

6. Critère de colinéarité :

Propriété 4 :

Soit $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ *un repère du plan ;* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *deux vecteurs de coordonnées respectives* $(x\,;y)$ *et* $(x'\,;y')$.

Dire que $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *sont colinéaires revient à dire que les coordonnées des deux Vecteurs sont proportionnelles soit :* $\frac{x}{y}=\frac{x'}{y'}$ $(\text{si } y\neq 0 \text{ et } y'\neq 0)$ *ou* $xy'-yx'=0$.

7. Critère d'orthogonalité de deux vecteurs :

On admet la propriété suivante :

Propriété 5 :

Soit $\vec{u}\binom{x}{y}$ *et* $\vec{v}\binom{x'}{y'}$ *deux vecteurs du plan muni d'un repère orthonormé.*

- *Si* $\vec{u}$ *est orthogonal à* $\vec{v}$ *alors* $xx' + yy' = 0$.
- *Si* $xx' + yy' = 0$ *alors* $\vec{u}$ *est orthogonal à* $\vec{v}$.

Exemple 3 :

a. *Dans un repère orthonormé, les vecteurs* $\vec{u}\binom{2}{3}$ *et* $\vec{v}\binom{-3}{2}$ *sont orthogonaux ; en effet :* $2 \times (-3) + 3 \times 2 = -6 + 6 = 0$. *On écrit donc* $\vec{u} \perp \vec{v}$.

b. *Soit* $\vec{u}\binom{x}{5}$ *et* $\vec{v}\binom{7{,}5}{3{,}5}$, *calculons la valeur de x pour que* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *soient orthogonaux, pour cela écrivons la condition analytique d'orthogonalité :*

$7{,}5 \times x + 3{,}5 \times 5 = 0$, *c'est -à-dire :* $7{,}5 \times x = -17{,}5$ *; soit* $= \frac{-17{,}5}{7{,}5} = -\frac{7}{3}$.

c. *Le plan est rapporté à un repère orthonormé. On donne les deux vecteurs* $\vec{a}\binom{-2}{4}$ *et* $\vec{b}\binom{5}{2}$. $\vec{a}$ *et* $\vec{b}$ *sont-ils orthogonaux ?*

$-2 \times 5 + 4 \times 2 = -10 + 8 = -2 \neq 0$, *donc* $\vec{a}$ *et* $\vec{b}$ *ne sont pas orthogonaux.*

8. Synthèse :

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ *et les points* $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$.

Somme de deux vecteurs	$\vec{w} = \vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix}$	
Multiplication par un réel	$\vec{w} = k\vec{u}$	$\vec{w}\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$
Egalité de deux vecteurs	$\vec{u} = \vec{v}$	$x = x'$ *et* $y = y'$
Colinéarité de deux vecteurs	$\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *sont colinéaires*	$xy' - x'y = 0$
Orthogonalité de deux vecteurs	$\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *sont orthogonaux*	$xx' + yy' = 0$
Coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$	$A(x_A, y_A)$ *et* $B(x_B, y_B)$	$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$
Distance de deux points A *et* B	$A(x_A, y_A)$ *et* $B(x_B, y_B)$	$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$
Coordonnées du milieu d'un segment $[AB]$	I *milieu du segment* $[AB]$	$I\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$

Math AS.indd 101 15/07/2024 15:31:11

III. Je sais faire

Enoncés des exercices d'applications

Exercice d'application 1 :

Dans le plan muni d'un repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, *place les points :*
$A(2\,;\ 1), B(5;3), C(-1,-2), D(-2;3), E(1;-4)$ *et* $F(4;\ -2)$.

1. *Détermine, par lecture graphique les composantes des vecteurs :* $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CE}, \overrightarrow{EF}$ *et* $\overrightarrow{DF}$.
2. *Retrouve, par le calcul, les composantes de ces vecteurs.*
3. *Applique les formules précédentes pour calculer les composantes des vecteurs* $3\overrightarrow{AB}, 4\overrightarrow{CD}$ *et* $3\overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{CD}$.

Exercice d'application 2 :

On considère un repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ *du plan. On donne les points :*
$A(-1\,;1)\,, B(3;2), C(-2;-3), D(6\,;\ -1)$ *et* $E(5;0)$.

1. *Dans chaque cas, vérifie si oui ou non les vecteurs* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *sont colinéaires :*
   a. $\vec{u}\binom{4}{-7}$ *et* $\vec{v}\binom{-12}{21}$ b. $\vec{u}\binom{5}{-2}$ *et* $\vec{v}\binom{15}{-7}$.
2. *Démontre que les droites* (AB) *et* (CD) *sont parallèles.*
3. *Démontre que les points E, B et D sont alignés.*

Exercice d'application 3 :

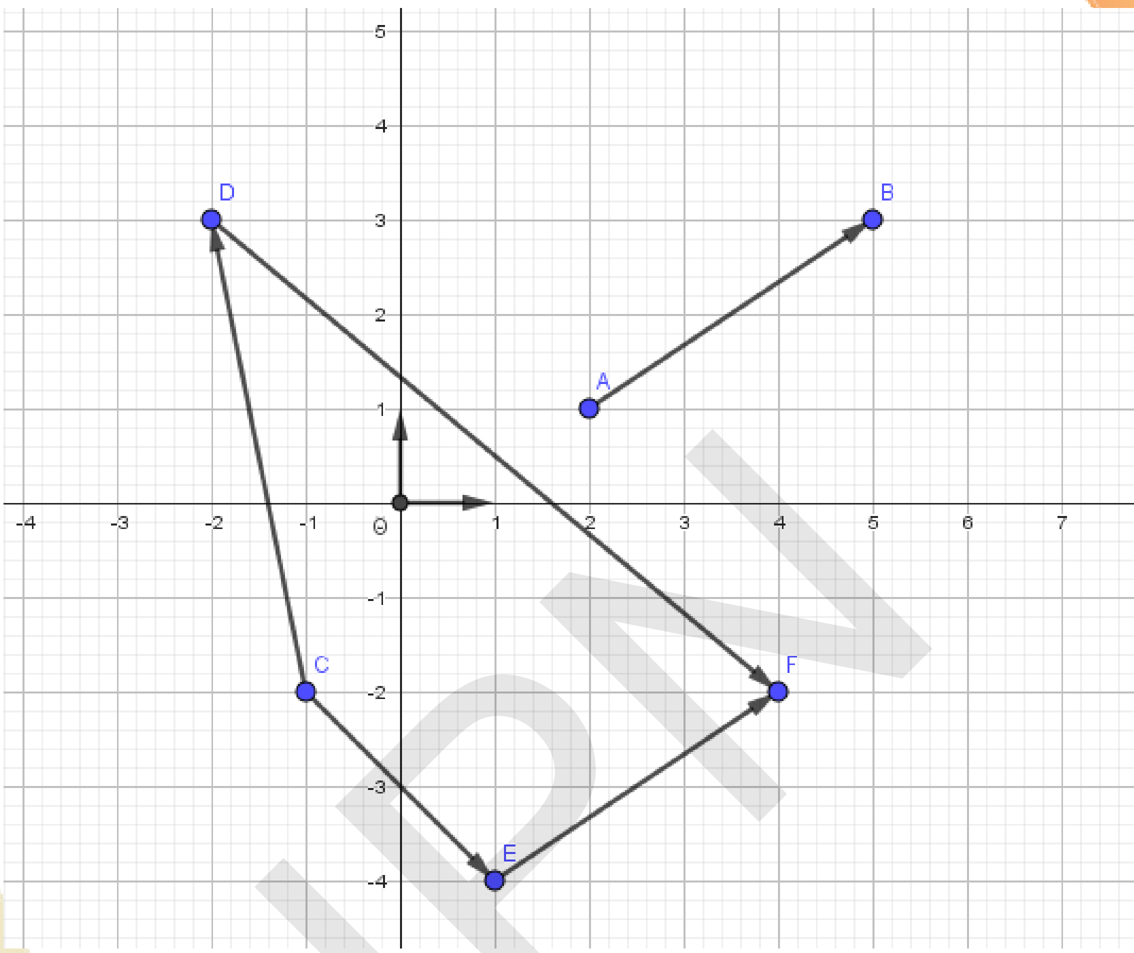
Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on donne : $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}, \vec{v}\begin{pmatrix}4\\y\end{pmatrix}$ *et* $\vec{w}\begin{pmatrix}3\\-4{,}5\end{pmatrix}$.

a. *Vérifie que* $\vec{u}$ *et* $\vec{w}$ *sont orthogonaux.*
b. *Calcule la valeur de y pour que* $\vec{v}$ *et* $\vec{w}$ *soient orthogonaux.*

Solution des exercices d'application :

Exercice d'application 1 :

1) Par lecture graphique :



Pour aller de A vers B, on effectue une translation de 3 carreaux vers la droite $(+3)$ *et une translation de 2 carreaux vers le haut* $(+2)$*, donc* $\overrightarrow{AB} = \binom{3}{2}$.

- Pour aller de C vers D, on effectue une translation de 1 carreau à gauche (-1) *et une translation de 5 carreaux vers le haut* $(+5)$ *, donc* $\overrightarrow{CD} = \binom{-1}{5}$.

- Pour aller de C vers E, on effectue une translation de 2 carreaux à droite $(+2)$ *et une translation de 2 carreaux vers le haut* $(+2)$ *, donc* $\overrightarrow{CE} = \binom{2}{2}$.

- Pour aller de E vers F, on effectue une translation de 3 carreaux à droite $(+3)$ *et une translation de 2 carreaux vers le haut* $(+2)$*, donc* $\overrightarrow{EF} = \binom{3}{2}$.

- Pour aller de D vers F, on effectue une translation de 6 carreaux à droite $(+6)$ *et une translation de 5 carreaux vers le bas*(-5)*, donc* $\overrightarrow{EF} = \binom{6}{-5}$

2. Les composantes des vecteurs :

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}5-2\\3-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$,

$\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-2+1\\3+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix}$,

$\overrightarrow{CE}\begin{pmatrix}1+1\\-4+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}$,

$\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}4-1\\-2+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{DF}\begin{pmatrix}4+2\\-2-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\-5\end{pmatrix}$.

3. $3\overrightarrow{AB}=3\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\\6\end{pmatrix}$

$4\overrightarrow{CD}=4\begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\20\end{pmatrix}$

$3\overrightarrow{AB}-4\overrightarrow{CD}=\begin{pmatrix}9\\6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-4\\20\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13\\-14\end{pmatrix}$.

Exercice d'application 2 :

1. a. $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\-7\end{pmatrix}$ *et* $\vec{v}\begin{pmatrix}-12\\21\end{pmatrix}$ *comme* $4\times 21-(-7)\times(-12)=84-84=0$, *donc les vecteurs* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *sont colinéaires*

b. $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix}$ *et* $\vec{v}\begin{pmatrix}15\\-7\end{pmatrix}$ *comme* $5\times(-7)-(-2)\times 15=-35+30\neq 0$, *donc les vecteurs* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *ne sont pas colinéaires*

2. Je montre que les droites (AB) *et* (CD) *sont parallèles*

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3-(-1)\\2-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$ *et* $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}6-(-2)\\-1-(-3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\2\end{pmatrix}$

Comme $4\times 2-1\times 8=0$ *alors les vecteurs* $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{CD}$ *sont colinéaires, c-à-d qu'ils ont la même direction et par conséquent les droites (AB) et (CD) sont parallèles.*

3. Je montre que les points E, B et D sont alignés

$\overrightarrow{EB}\begin{pmatrix}3-5\\2-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}$ *et* $\overrightarrow{ED}\begin{pmatrix}6-5\\-1-0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

Comme $-4\times(-1)-2\times 1=0$ *alors les vecteurs* $\overrightarrow{EB}$ *et* $\overrightarrow{ED}$ *sont colinéaires, c-à-d qu'ils ont la même direction et par conséquent les points E, B et D sont alignés.*

Exercice d'application 3 :

1. Je montre que les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ *et* $\vec{w}\begin{pmatrix}3\\-4{,}5\end{pmatrix}$ *sont orthogonaux :*

$3\times 3+2\times(-4{,}5)=0$ *alors* $\vec{u}$ *et* $\vec{w}$ *sont orthogonaux.*

2. $\vec{v}\begin{pmatrix}4\\y\end{pmatrix}$ *et* $\vec{w}\begin{pmatrix}3\\-4{,}5\end{pmatrix}$ sont orthoganaux si $4\times 3+y\times(-4{,}5)=0$

Donc $12-4{,}5y=0$ *et* $-4{,}5y=-12$ *alors* $y=\frac{12}{4{,}5}=\frac{8}{3}$

IV. Je m'exerce :

Exercice 1 :

Soit un rectangle ABCD de centre O.

1. *Donne les coordonnées des points A, B, C, D et O dans le repère* $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$.
2. *Même question dans le repère* $(B, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$.

Exercice 2 :

Soit un carré ABCD de centre O. On considère le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$.

a. *Déterminer les cordonnées des sommets de ce carré*

b. *Donne les coordonnées de A' symétrique de A par rapport à C.*

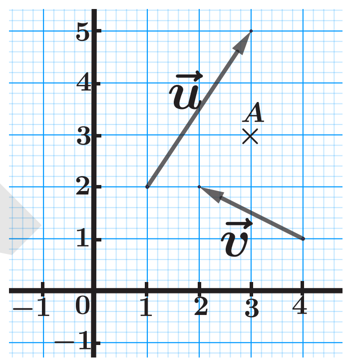
c. *Donne les coordonnées de B' symétrique de B par rapport à A.*

d. *Donne les coordonnées de O' symétrique de O par rapport à A.*

Exercice 3 :

a. *Lis les coordonnées des vecteurs* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$.

b. *Représente les vecteurs* $\vec{a}\binom{2}{4}, \vec{b}\binom{-3}{1}$ *et* $\vec{c}\binom{-1}{-1}$.



Exercice 4 :

a. *Lis les coordonnées de A,* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$

b. *Représente les vecteurs* $\vec{a}\binom{-1}{-2}$; $\vec{b}\binom{1}{3}$ *et* $\vec{c}\binom{1}{-1}$

c. *Place le point B tel que le vecteur* $\overrightarrow{AB}$ *ait pour coordonnées* $\binom{1}{2}$.

Exercice 5

Soit un rectangle ABCD. On considère le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$.

a. *Donne les coordonnées des vecteurs* $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}$ *et* $\overrightarrow{AC}$.

b. *Place le point E tel que le vecteur* $\overrightarrow{CE}$ *ait pour coordonnées* $(-1\,;2)$.

c. *Place le point F tel que le vecteur* $\overrightarrow{DF}$ *ait pour coordonnées* $(2\,;-2)$.

Exercice 6 :

a. *Soient* $A(2\,;\ 3), B(-4\,;\ -1), C(2\,;\ 4)$ *et* $D(-5\,;\ 1)$ *quatre points dans un repère du plan.*

b. *Calcule les coordonnées des vecteurs* $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AC}$ *et* $\overrightarrow{BD}$.

Exercice 7 :

Soient $A(3\,;\ 2), B(-4\,;\ 1)$ *et* $C(6\,;\ -4)$ *trois points dans un repère du plan.*

Calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ *et* $\overrightarrow{BC}$.

Exercice 8 :

Etant donnés les points $A(2\,;\ 3), B(5\,;\ 2)$ *et* $C\ (6\,;\ 3)$.

Calcule les coordonnées du point D pour que ABCD soit un parallélogramme.

Exercice 9 :

Soient les points $A(-2\ ;\ 1), B(2\ ;\ 0)$ *et* $C(1\ ;\ -2)$.

Calcule les coordonnées du point D pour que ABCD soit un parallélogramme.

Exercice 10 :

Soient les points $A(1\ ;\ 4), B\ (3\ ;\ 5), C(-2\ ;\ -1)$ *et* $D(4\ ;\ 2)$.

Démontre que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{CD}$ *sont colinéaires.*

Exercice 11 :

Soit les points $A(-2\ ;\ 5), B(1\ ;\ 3), C(-1\ ;\ 2)$ *et* $D(3\ ;\ -1)$.

1. *Démontre que les vecteurs* $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{CD}$ *ne sont pas colinéaires.*
2. *Les vecteurs* $\overrightarrow{AC}$ *et* $\overrightarrow{BD}$*sont-ils colinéaires ?*

Exercice 12 :

Soient $A(2\ ;\ -4), B(2\ ;\ -3), C(1\ ;\ 5)$ *et* $D(2\ ;\ 3)$ *quatre points dans un repère du plan. Les vecteurs* $\overrightarrow{AC}$ *et* $\overrightarrow{BD}$ *sont-ils colinéaires ?*

Exercice 13 :

Soient $A(3\ ;\ 2), B(1\ ;\ 4)$ *et* $C(-1\ ;\ -3)$.

Calcule les coordonnées des milieux I de [AB], J de [AC] et K de [BC].

Exercice 14 :

Soient $C(-4\ ;\ 3), D(-5\ ;\ 2)$ *et* $E(-3\ ;\ 2)$.

Calcule les coordonnées des milieux I de [CD], J de [CE] et K de [ED].

Exercice 15 :

Soient $E(-3\ ;\ 2)\ ;\ F\ (-3\ ;\ -4)$ *et* $G(l\ ;\ -4)$.

a. *Calcule les distances EF, FG et EG.*

b. *Soit le point* $M\ (-3\ ;\ -2)$. *La parallèle à la droite* (FG) *passant par* M *coupe* (EG) *en N.*

c. *Calcule la valeur exacte de EN et MN.*

Exercice 16 :

1. *Place les points* $E(-4\ ;\ 1)\ ;\ F(2\ ;5)\ G(6\ ;-l),\ H(0\ ;-5)$.
2. *Émets une conjecture à propos du quadrilatère EFGH, puis prouve- la.*
3. *Place puis calcule les coordonnées des points :*

M symétrique de F par rapport à G ; N , tel que $\overrightarrow{GN} = \overrightarrow{EF}$.

Exercice 17 :

Place les points : $A(-3\,;2)$; $B(7\,;\ 2)$; $C(-2\,;\ 5)$ et $D(6\,;\ 5)$.

1. a. Précise, en justifiant, la nature des triangles ACB et ADB, ainsi que celle du quadrilatère ABDC.

b. Démontre que les points A, B, C et D sont sur un même cercle dont on précisera les coordonnées du centre E et le rayon.

2. Soit M le point d'intersection des droites (AD) et (BC) et N celui des droites (AC) et (BU). Démontre que les droites (AB)et (MN) sont perpendiculaires.

Exercice 18 :

Soient $A\,(-1\,;\,-1)$; $B(-3;2)$ et $C(4;5)$.

1. Place le milieu M du segment [AB]. Calcule ses coordonnées.

2. La parallèle à la droite (BC) passant par le point M coupe (AC) en P. Calcule, en justifiant, les coordonnées de P.

3. La parallèle à la droite (CM) passant par le point B coupe la droite (AC) en N.

a. Démontre que C est le milieu de, [AN].

b. Calcule les coordonnées du point N.

Exercice 19 :

Soient $L\left(-\frac{2}{3}\,;1\right)$, $M\left(-\frac{5}{3}\,;0\right)$ et $N(-2\,;3)$.

Soient les points R, S et T les milieux respectifs des segments [LM], [IN] et [MN].

1. a. Calcule les coordonnées de R, S et T.

b. Calcule les longueurs exactes des trois médianes du triangle LMN.

2. soit G le centre de gravité du triangle LMN calculer GL, GM et GN.

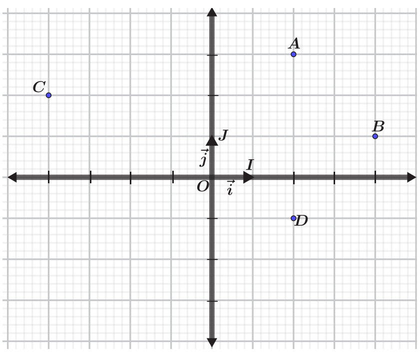
Exercice 20

1. Lis les coordonnées des points A, B, C et D.

2.a. Calcule les coordonnées des points R, S, T et U, milieux respectifs des segments [AB], [BC], [CD] et [AD].

b. Calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{RU}$ et $\overrightarrow{ST}$. Que peut-on en conclure ?

3. Démontre le résultat obtenu au 2° b), sans utiliser de coordonnées. (Coup de pouce : Théorème des milieux)



Exercice 21 :

Soient $A(1\,;\ 4)$; $B(-1\,;\ 8)$ et $D(9\,;\ 8)$ trois points dans un repère du plan.

1. Calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$puis les distances AB, AD et BD.

2. Démontre que le triangle ABD est rectangle en A.

3. a. Construis le point C tel que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.
   b. Montre que ABCD est un rectangle.
   c. Calcule les coordonnées du centre U du cercle circonscrit à ce rectangle, ainsi que le rayon de ce cercle.

Exercice 22 :

Place les points : $A\,(-1\,;\,3)$; $B\,(-2\,;\,2)$, $C\,(4\,;\,-2)$ et $D\,(-2\,;\,-2)$.

1. a. Quelle est la nature du triangle ABC ?
   b. Démontre que les quatre points A, B, C et D sont sur un même cercle $\mathscr{C}$ dont on précisera le centre et la valeur exacte du rayon.
2. Calcule l'arrondi, au dixième de degré, de la mesure des angles $\widehat{BCD}$ et $\widehat{BCA}$.
3. Calcule les coordonnées du point M sachant que $M \in \mathscr{C}$; $x_M = x_A$ et $M \neq A$.
4. Calcule les coordonnées des points du cercle :
   a. R et S de $\mathscr{C}$ d'abscisse 0
   b. T et U de $\mathscr{C}$ d'ordonnée 0.

Exercice 23 :

1. a. Place les points $A(3\,;\,0)$ et $B(0\,;\,3)$ dans un repère orthonormé.
   b. Place les points C et D tel que C est le symétrique de A par rapport à B et D est le symétrique de B par rapport à O.
2. Vérifie, par le calcul, que les coordonnées de C et de D sont respectivement $(-3\,;\,6)$ et $(0\,;\,-3)$.
3. Prouve que le triangle DAC est rectangle en A.
4. Calcule la valeur exacte du rayon du cercle circonscrit au triangle DAC

Exercice 24 :

Dans un repère orthonormé :

1. Place les points : $A(2\,;\,6)$; $B(-3\,;\,3)$; $C(2\,;\,0)$ et $D(7\,;\,3)$.
2. Calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$.
   Montre que le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.
3. Calcule les longueurs AB et AD (on donnera les valeurs exactes).
   Que peut-on alors dire du parallélogramme ABCD ? Justifie.
4. Construis le point M centre du parallélogramme ABCD. Calcule les coordonnées de M.
5. a. Quelle est l'image du triangle AMD par la symétrie centrale de centre M ?
   b. Cite une transformation qui transforme le triangle ACD à ABC.

Exercice 25 :

Sur un repère orthonormé.

1. *Place les points :* $A\ (4\ ;\ 2), B\ (6\ ;\ -4)$ *et* $C\ (0\ ;\ -2)$.
2. *Détermine les coordonnées du vecteur* $\overrightarrow{AB}$ *; en déduis les coordonnées du point D pour que le quadrilatère ABCD soit un parallélogramme.*
3. *Calcule les longueurs AB et BC. En déduis la particularité du parallélogramme ABCD.*

Exercice 26 :

Sur du papier millimétré.

1. *Place les points :*
   $A\ (2\ ;\ 3), B\ (5\ ;\ 6), C\ (7\ ;\ 4)$ *et* $D\ (4\ ;\ 1)$, *dans un repère orthonormé*
2. *Calcule les coordonnées du vecteur* $\overrightarrow{AB}$ *et celles de* $\overrightarrow{DC}$*; en déduis la nature du quadrilatère ABCD.*
3. *Calcule AC et BD.*
4. *Démontre que ABCD est un rectangle.*

Exercice 27 :

1. *Place les points :*
   $A\ (6\ ;\ 5), B\ (2\ ;\ -3)$ *et* $C\ (-4\ ;\ 0)$, *dans un repère orthonormé*
2. *Calcule les distances AB, BC et CA, donne les résultats sous la forme* $a\sqrt{5}$, *où a est un entier naturel.*
3. *En déduis la nature du triangle ABC. Justifie.*
4. *Calcule l'aire du triangle ABC.*
5. *Calcule le périmètre du triangle ABC. Donne le résultat sous la forme* $a\sqrt{5}$, *puis la valeur arrondie au dixième de ce résultat.*
6. *On considère le cercle circonscrit au triangle ABC.*
   a. *Précise la position de son centre E en justifiant la réponse.*
   b. *Calcule les coordonnées de ce point.*
   c. *Détermine la valeur exacte du rayon de ce cercle.*
7. *Calcule la valeur exacte de* $\tan\widehat{ACB}$, *puis une valeur approchée au degré près de* $\widehat{ACB}$.
8. *Calcule les coordonnées du vecteur* $\overrightarrow{CA}$. *En déduis les coordonnées du point D pour que ACBD soit un parallélogramme.*

Exercice 28 :

$(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ *est un repère orthonormé.*

Place les points :$A(8\ ;5)$;$B(2\ ;-1)$ *et* $C(10\ ;-1)$.

Démontre que le point $M(6;1)$ *est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.*

Exercice 29 :

$(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ *est un repère orthonormé.*

1. *Place les points :* $A(-4\,;5)$, $B(2\,;-1)$, $C(-4\,;-7)$ *et* $D(-10\,;-1)$.
2. *Démontre que les points A, B, C et D sont sur un même cercle de centre* $E(-4;-1)$.
3. *Démontre que ABCD est un carré.*

Exercice 30 :

$(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ *est un repère orthonormé. On considère les points :*

$A(-3\,;6)$, $B(4\,;2)$ *et* $M(0\,;y)$ *; où y désignant un nombre réel.*

1. *Calcule* AB^2.
2. *Exprime* AM^2 *et* BM^2 *en fonction de y.*
3. *Pour quelles valeurs de y, ABM est un triangle rectangle en M ?*

Exercice 31 :

Dans un repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ *orthonormé. Place les points :*

$A(0\,;4)$, $B(-4\,;-4)$ *et* $C(4\,;0)$.

1. *Quelle est la nature de ABC ?*
2. *Soit E le point d'intersection de* (OA) *et* (BC).*Prouve que* $[AE]$ *est la médiane issue de A dans le triangle ABC.*
3. *a. Prouve que* $[BO)$ *est la bissectrice de l'angle* $\widehat{ABC}$.

   b. Soit D le milieu du segment $[AC]$ *. Calcule la valeur arrondie au degré près de l'angle* $\widehat{ABC}$.

Exercice 32 :

$(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ *est un repere orthonrmé*

On considère les points $A(-1\,;5)$, $B(-3\,;1)$ *et* $C(-5\,;2)$.

1. *Fais une figure.*
2. *Calcule les composantes (ou coordonnées) des vecteurs* $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$ *et* $\overrightarrow{AC}$.
3. *Prouve que le triangle ABC est rectangle.*
4. *Calcule les coordonnées du centre et le rayon de son cercle circonscrit*

Chapitre 8 : Equations de droites

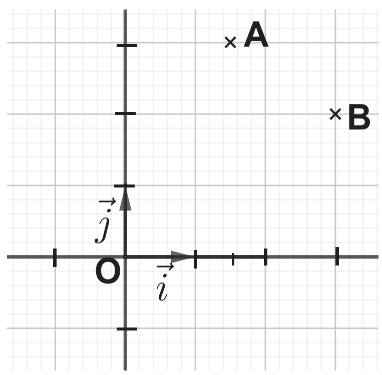
I. Activités préparatoires :

Activité 1 :

Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ orthonormé. Place les points :
$A(-2\,;3)$, $B(4\,;1)$ et $C(3\,;1{,}2)$.

1. *Calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.*
   Les points A, B et C semblent être alignés. Est ce vrai ? Justifie.
2. *Soit N le point de la droite (AB) de coordonnées $(2\,;b)$.*
   a. Place le point N et lire graphiquement une valeur approchée de b.
   b. Exprime les coordonnées de $\overrightarrow{AN}$ en fonction de b.
   c. Que peut-on dire des vecteurs $\overrightarrow{AN}$ et $\overrightarrow{AB}$? En déduis la valeur exacte de b.
3. *Soit P le point de (AB) de coordonnées $(a\,;4)$.*
   a. Place P et lire graphiquement une valeur approchée de a.
   b. Exprime les composantes du vecteur $\overrightarrow{AP}$ en fonction de a.
   c. Que peut-on dire des vecteurs $\overrightarrow{AP}$ et $\overrightarrow{AB}$, En déduis la valeur exacte de a.
4. *Soit $M(x\,;y)$ un point quelconque de la droite (AB).*
   a. Exprime les coordonnées de $\overrightarrow{AM}$ en fonction de x et y.
   b. Que peut-on dire des vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$?
   En déduis une condition sur x et y pour que M soit un point de (AB).

Activité 2 : *Dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ orthonormé, on donne les deux points $A(1{,}5\,;\,3)$ et $B(3, 2)$.(voir figure ci-contre)*
Soit $M(x\,;y)$ un point quelconque de la droite (AB).



a. Exprime les coordonnées de $\overrightarrow{AM}$ en fonction de x et y.
b. En déduis une condition sur x et y qui traduit que M est un point de (AB).

Activité 3 :

Soit (d) *la droite dont une équation cartésienne est :* $2x + 3y - 5 = 0$

1. *Exprime* y *en fonction de* x.
2. *En posant* $m = \frac{-2}{3}$ *et* $p = \frac{5}{3}$, *complète la phrase :*

   Une équation de la … (d) *s'écrit* $y = \ldots x + \ldots$
3. *Peux-tu écrire une équation cartésienne* $ax + by + c = 0$ *d'une droite sous la forme* $y = \ldots x + \ldots$?

Activité 4 :

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$, *on considère les droites* d_1 *et* d_2 *d'équations respectives* $2x + y - 3 = 0$ *et* $-4x - 2y + 5 = 0$.

a. *Les droites* d_1 *et* d_2 *sont-elles parallèles ? Que penses-tu de leurs vecteurs directeurs ? Justifie ta réponse.*

b. *Peux-tu généraliser le résultat de la question a. à deux droites* (d) *et* (d') *d'équations respectives* $ax + by + c = 0$ *et* $a'x + b'y + c' = 0$

Remarque 1 :

Les expressions de x *et* y *obtenues traduisent le fait qu'un point* $M(x\,;y)$ *est de* (AB) *et on dit que* $\overrightarrow{AB}$ *est un vecteur directeur de cette droite.*

Activité 5 :

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$, *on considère les droites* d_1 *et* d_2 *d'équations respectives :* $2x - 3y + 5 = 0$ *et* $3x + 2y - 1 = 0$.

a. *Les droites* d_1 *et* d_2 *sont-elles perpendiculaires ? Que dis-tu de leurs vecteurs directeurs ? Justifie ta réponse.*

b. *Peux-tu généraliser le résultat de la question a. à deux droites* (d) *et* (d'), *d'équations respectives* $ax + by + c = 0$ *et* $a'x + b'y + c' = 0$

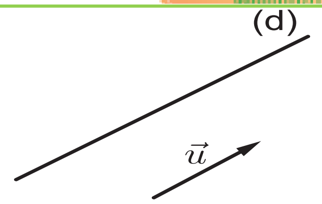
Remarque 2 :

La relation entre x et y qu'on vient de trouver, traduit le fait qu'un point M (x ; y) est de la droite (AB). *On dit qu'on a obtenu une équation de la droite* (AB).

II. Je retiens

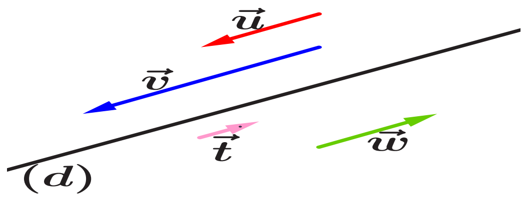
1) Vecteurs directeurs et équations d'une droite :

Définition 1 :
Soit (d) une droite du plan. Un vecteur directeur de (d) est un vecteur non nul $\vec{u}$ qui possède la même direction que la droite (d).

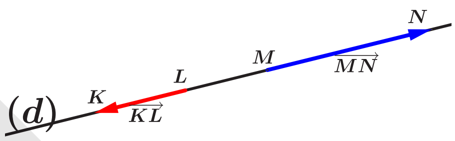


Conséquences :

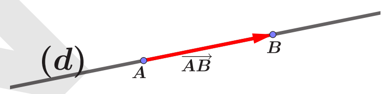
- *Toute droite possède une infinité de vecteurs directeurs.*



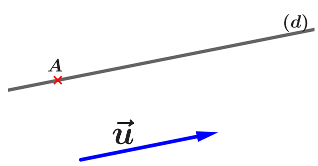
- *Soit $\vec{u}$ un vecteur directeur de la droite (d). Tout vecteur non nul et colinéaire au vecteur $\vec{u}$ est aussi vecteur directeur de cette droite.*



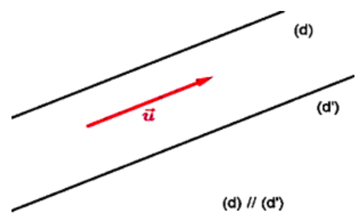
- *Deux points distincts quelconques de la droite (d) définissent un vecteur directeur de cette droite.*



- *La donnée d'un point A et d'un vecteur $\vec{u}$ non nul définit une unique droite (d).*



- *Deux droites (d) et (d') sont parallèles si tout vecteur directeur de l'une est aussi vecteur directeur de l'autre ou plus simplement si leurs vecteurs directeurs sont colinéaires.*



2. Equations cartésiennes d'une droite :

Propriété 1 :
Toute droits d a une équation de la forme $ax + by + c = 0$; avec $(a\,;\,b) \neq (0\,;\,0)$.
Un vecteur directeur de (d) est $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$.

Remarque 3 :

Une droite (d) admet une infinité d'équations cartésiennes. En effet, si $ax + by + c = 0$ est une équation cartésienne de (d), alors pour tout réel k non nul, $k\,ax + kby + kc = 0$ est une autre équation de la même droite.

Propriété 2 : Propriété caractéristique

L'ensemble des points $M(x\,;\,y)$ vérifiant l'équation : $ax + by + c = 0$; avec $(a\,;\,b) \neq (0\,;\,0)$ est une droite de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$.

Démonstration :

Soit (d) une droite, $A(x_A\,;y_A)$ un point de (d) et $\vec{u}\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}$ un vecteur directeur de (d). Soit $M(x\,;\,y)$un point du plan.

« $M(x\,;y)$ appartient à (d) » équivaut à : $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-x_A\\y-y_A\end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}$ sont colinéaires, ce qui équivaut à : $q(x - x_A) - p(y - y_A) = 0$, ce qui équivaut à :

$$qx - py - (qx_A - py_A) = 0$$

Posons: $a = q$; $b = -p$ et $c = -(qx_A - py_A)$

Cette dernière équation s'écrit $ax + by + c = 0$ et $\vec{u}$, vecteur directeur de (d), a pour coordonnées $\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$

Si $a = 0$, alors $b \neq 0$, $ax + by + c = 0$ équivaut à :$y = -\frac{c}{b}$.

L'ensemble des points $M(x\,;y)$ dans ce cas, est donc une droite parallèle à l'axe des abscisses.

Si $b = 0$, alors $a \neq 0$, $ax + by + c = 0$, équivaut à : $x = -\frac{c}{a}$.

L'ensemble des points $M(x\,;y)$ dans ce cas, est donc une droite parallèle à l'axe des ordonnées.

Exemple 1 :

Détermine une équation cartésienne d'une droite dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ du plan, connaissant :

a. un point et un vecteur directeur :

Détermine une équation cartésienne de la droite (d) passant par le point $A(1\,;\,-1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$.

b. deux points distincts de cette droite :

Détermine une équation cartésienne de la droite (d) passant par les points $A(5\,;\,13)$ et $B(10;\,23)$.

Réponse :

a. Soit M un point de la droite (d) de coordonnées $(x\,;\,y)$.

Les vecteurs $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-1 \\ y+1 \end{pmatrix}$ et $\vec{u}\binom{-1}{3}$ sont colinéaires, ce qui équivaut à:

$(x-1)(3) - (y+1)(-1) = 0$, équivaut à : $3x - 3 + y + 1 = 0$,

équivaut à : $3x + y - 2 = 0$.

Une équation cartésienne de la droite (d) est donc : $3x + y - 2 = 0$

b. Les points A et B appartiennent à la droite (d), donc le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de cette droite.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 10-5 \\ 23-13 \end{pmatrix}$, soit $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix}$ en divisant les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ par 5,

nous obtenons le vecteur $\vec{u}\binom{1}{2}$ qui estaussi vecteur directeur de la droite (d).Donc :$b = 1$ et$a = -2$.

Une équation cartésienne de la droite (d) est donc de la forme :

$-2x + y + c = 0$. Comme le point $A(5\,;\,13)$ appartient à la droite (d), ses coordonnées vérifient l'équation : $-2 \times 5 + 13 + c = 0$, soit :

$-10 + 13 + c = 0$. D'où : $c = -3$

Une équation cartésienne de la droite (d) est donc : $-2x + y - 3 = 0$.

3. Equation réduite d'une droite :

Soit (d) une droite du plan.

- Si (d) n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées, alors on peut trouver un unique couple de réels $(m\,;\,p)$ tel que l'équation $y = mx + p$ soit une équation de (d), qui peut aussi s'écrire sous la forme : $mx - y + p = 0$
- Si (d) est parallèle à l'axe des ordonnées, alors il existe un unique réel a tel que l'équation $x = a$ soit une équation de (d).

Définition 2 :

Soit (d) une droite non parallèle à l'axe des ordonnées, alors il existe un unique couple de réels $(m\,;\,p)$ tels que :

Un point $M\,(x\,;\,y)$ appartient à (d) si et seulement si $y = mx + p$.

Cette équation est appelée équation réduite de la droite (d).

Le nombre m est appelé coefficient directeur de la droite (d).

Le nombre p est appelé ordonnée à l'origine.

L'équation réduite peut aussi s'écrire sous la forme : $mx - y + p = 0$.

Un vecteur directeur de cette droite est donc $\binom{1}{m}$.

Math AS.indd 115 15/07/2024 15:31:17

Exemple 2 :

Soit (d) *la droite d'équation cartésienne :* $4x + 2y + 3 = 0$*. Alors :*

- *Son équation réduite est :* $y = -2x - \frac{3}{4}$.
- *Un vecteur directeur de cette droite est* $\binom{1}{-2}$.

Remarque 4 :

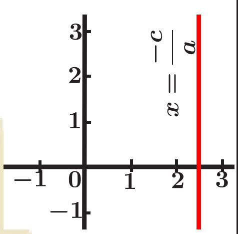
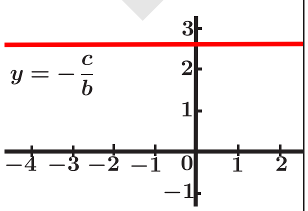
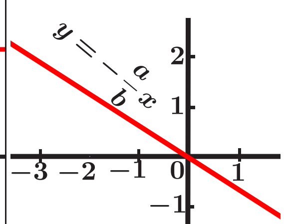
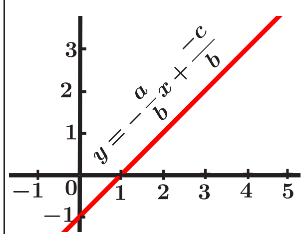
Le coefficient directeur m d'une droite (AB) *non parallèle à l'axe des ordonnées se calcule par la formule :* $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

Exemple 3 :

$A(3\,;4)$ *et* $B(-1\,;2)$ *deux points du plan muni d'un repère* $(O\,;I\,;J)$.

Le coefficient directeur de (AB) est $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{2-4}{-1-3} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$.

Tableau récapitulatif : **Equations cartésiennes et équations réduites**

	Cas où : $b=0$ et $a \neq 0$ $d//(yy')$	Cas où : $a=0$ et $b \neq 0$ $d//(xx')$	Cas où : $b \neq 0$ et $c=0$ d passe par O	Cas où : $a \neq 0$ $b \neq 0$ et $c \neq 0$ d ne passe pas par O
Equation Cartésienne	$ax + 0 + c =$ $ax + c = 0$	$0 + by + c = 0$ $by + c = 0$	$ax + by + 0 =$ $ax + by = 0$	$ax + by + 0 = 0$
Equation Réduite	$x = -\frac{c}{a}$	$y = -\frac{c}{b}$	$y = -\frac{a}{b}x$	$y = -\frac{a}{b}x + (-\frac{c}{b})$
Représentation Graphique				

4. Positions relatives de deux droites :

Propriété 3 :

Deux droites d et d'd'équations respectives :
$ax + by + c = 0$ *et* $a'x + b'y + c = 0$
sont parallèles si et seulement si : $ab' - a'b = 0$

Démonstration :

Soit d la droite d'équation : $ax + by + c = 0$ *et d'la droite d'équation* $a'x + b'y + c' = 0$. $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ *est un vecteur de directeur de d et* $\vec{u}'\begin{pmatrix}-b'\\a'\end{pmatrix}$ *est un vecteur directeur de d'.*

d et d' sont parallèles équivaut à $\vec{u}$ *et* $\overrightarrow{u'}$ *sont colinéaires,*
ce qui équivaut à : $-ba' - a(-b') = 0$,
ce qui équivaut à : $ab' - a'b = 0$.

Exemple 4 :

Dans un repère du plan $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$.

a. *La droite* d_1 *a pour équation* $2\sqrt{3}x + y - 7 = 0$ *et* d_2 *a pour équation* $-6x - \sqrt{3}y + 5 = 0$.
Les droites d_1 *et* d_2 *sont-elles parallèles ? Justifie ta réponse*

b. *La droite* Δ_1 *a pour équation :* $3x + 2y - 3 = 0$ *et* Δ_2 *a pour équation:* $-x + 2y + 5 = 0$.
Les droites Δ_1 *et* Δ_2 *sont-elles parallèles ? Justifie ta réponse.*

Réponse :

a. $\vec{u}_1\begin{pmatrix}-1\\2\sqrt{3}\end{pmatrix}$ *et* $\vec{u}_2\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\-6\end{pmatrix}$ *sont deux vecteurs directeurs respectifs de* d_1 *et* d_2*. On a :*
$(-1) \times (-6) - 2\sqrt{3} \times \sqrt{3} = 6 - 6 = 0$.
Donc les droites d_1 *et* d_2 *sont parallèles.*

b. $\vec{v}_1\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$ *et* $\vec{v}_2\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}$ *sont deux vecteurs directeurs respectifs de* Δ_1 *et* Δ_2*. On a :*
$$-2 \times (-1) - (-2) \times 3 = 2 + 6 = 8 \neq 0.$$
Donc les droites Δ_1 *et* Δ_2 *ne sont pas parallèles.*

Propriété 4 :

Dans un repère orthonormé, deux droites (d) *et* (d')*, d'équations respectives* $ax + by + c = 0$ *et* $a'x + b'y + c = 0$ *sont perpendiculaires si et seulement si :* $aa' + bb' = 0$.

Démonstration :

Soit (d) *la droite d'équation :*$ax + by + c = 0$ *et* (d') *la droite d'équation :* $a'x + b'y + c' = 0$.$\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ *est un vecteur de directeur de (d) et* $\overrightarrow{u'}\begin{pmatrix}-b'\\a'\end{pmatrix}$ *est un vecteur de directeur de* (d').

(d) et (d') sont perpendiculaires équivaut à $\vec{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ sont orthogonaux ce qui équivaut à : $-b \times (-b') + a \times a' = 0$, d'où $aa' + bb' = 0$.

Exemple 5 :

Dans un repère orthonormé du plan $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$.

1. On considère la droite d_1 d'équation $\sqrt{2}x - \sqrt{3}y + 7 = 0$ et d_2 d'équation $\sqrt{3}x + \sqrt{2}y - 6 = 0$.
   Les droites d_1 et d_2 sont-elles perpendiculaires ? Justifie ta réponse.
2. On donne la droite D_1 d'équation : $x + 2y - 4 = 0$ et D_2 d'équation : $2x + y + 1 = 0$.
   Les droites D_1 et D_2 sont-elles perpendiculaires ? Justifie ta réponse.

Réponse :

1. Si $\vec{u}_1\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\ \sqrt{2}\end{pmatrix}$ et $\vec{u}_2\begin{pmatrix}-\sqrt{2}\\ \sqrt{3}\end{pmatrix}$ sont deux vecteurs directeurs respectifs d_1 et d_2,
   on a : $\sqrt{3} \times (-\sqrt{2}) + \sqrt{2} \times \sqrt{3} = -\sqrt{6} + \sqrt{6} = 0$.

Les droites d_1 et d_2 sont donc perpendiculaires.

2. Si $\vec{v}_1\binom{-2}{1}$ et $\vec{v}_2\binom{-1}{2}$ sont deux vecteurs directeurs respectifs de D_1 et D_2,
   on a : $-2 \times (-1) + 1 \times 2 = 2 + 2 = 4 \neq 0$.

Les droites D_1 et D_2 ne sont donc pas perpendiculaires.

Remarque 5 :

Soit la droite (d) d'équation : $y = mx + p$ et $(d') : y' = m'x + p'$ dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

- (d) et (d') sont parallèles si et seulement si $m = m'$.

En effet les vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ de coordonnées $\binom{1}{m}$ et $\binom{1}{m'}$ vecteurs directeurs respectifs de (d) et (d').

D'où : Les vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ sont colinéaires si et seulement si $m = m'$

- (d) et (d') sont perpendiculaires si et seulement si $m \times m' = -1$.
  En effet les vecteurs de coordonnées $\binom{1}{m}$ et $\binom{1}{m'}$ sont deux vecteurs directeurs respectifs de (d) et (d').
  $(d) \perp (d')$ si et seulement si les vecteurs $\vec{u}\binom{1}{m}$ et $\overrightarrow{u'}\binom{1}{m'}$ sont orthogonaux, donc : $1\times1 + m \times m' = 0$ c'est-à- dire : $1 + mm' = 0$, d'où $mm' = -1$.

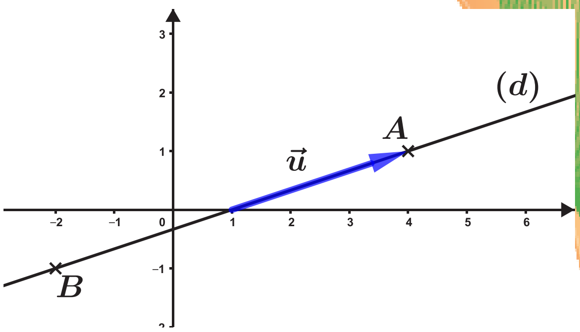
III. Je sais faire

Enoncés des exercices d'application :

Exercice d'application 1 :

Soit $(O\,;\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath})$ un repère du plan.

Détermine une équation cartésienne de la droite (d) à partir de sa représentation graphique donnée dans la figure ci-contre, en utilisant les deux méthodes suivantes :



a. Détermination de $\vec{u}$ vecteur directeur et un point de cette droite.

b. Détermination d'abord de deux points de cette droite comme dans l'exemple1.

Exercice d'application 2 :

Dans le plan muni d'un repère $(O\,;I;J)$, on donne les deux points $C(2\,;-3)$ et $B(5\,;3)$. Ecris l'équation réduite de la droite (BC).

Exercice d'application 3 :

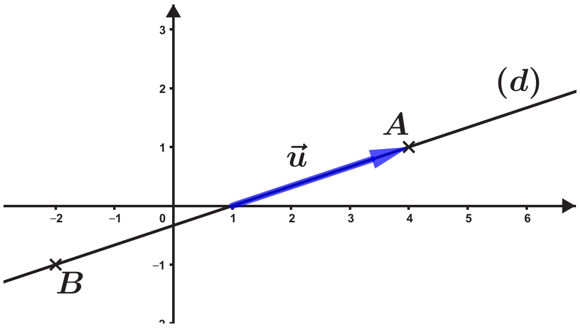
Dans un repère orthonormé considérons les points A (0 ; 3) et B (-1 ; -2).

Déterminer une équation de la médiatrice (d) du segment [AB].

Solutions des exercices d'applications

Exercice d'application 1 :

a. Je détermine une équation cartésienne de la droite (d) à partir de sa représentation graphique :



Par lecture graphique le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (d), cette droite passe par le point A (4 ; 1).

Soit M un point de la droite (d) de coordonnées $(x\,;\,y)$.

Les vecteurs $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-4\\y-1\end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ sont colinéaires, ce qui équivaut à :

$(x-4)(1)-(y-1)(3)=0$, *équivaut à :* $x-4-3y+3=0$,

équivaut à : $x-3y-1=0$.

Une équation cartésienne de la droite (d) est donc : $x-3\,y-1=0$

b. Les points $A(4\,;1)$ et $B(-2\,;-1)$ appartiennent à la droite (d), donc le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de cette droite.

$\overrightarrow{AB}\binom{-2-4}{-1-1}$, *soit* $\overrightarrow{AB}\binom{-6}{-2}$

Donc (d) a une équation de la forme $ax+by+c\ =0$,*avec* $b\ =6$ *et* $a\ =-2$.*. Une équation cartésienne de la droite* (d) *est donc de la forme :* $-2\,x+6y+c\ =0.$

Comme le point $B(-2\,;\,-1)$ *appartient à la droite* (d)*, ses coordonnées vérifient l'équation :* $-2\times(-2)+6\times(-2)\ +c\ =0$*, soit :*

$4-6+\ c=0$. $D'où : c\ =\ \ 2$

Une équation cartésienne de la droite(d) *est donc :*$-2\,x\ +6y+2=0.$

En divisant par -2*, on obtient :* $x-3y-1=0$ *qui est, également, une équation de d.*

Exercice d'application 2 :

L'équation réduite de la droite (CB) *est de la forme* $y=mx+p$

Le coefficient directeur de (CB) est $m=\frac{y_B-y_C}{x_B-x_C}=\frac{3-(-3)}{5-2}=\frac{6}{3}=2$.

Alors l'équation réduite de la droite (CB) *est de la forme* $y=2x+p$

Les coordonnées de B vérifient cette équation, alors $y_B=2x_B+p$ *soit* $3=2\times5+p$ *donc* $p=3-10=-7$

L'équation réduite de la droite (CB) *est* $y=2x-7$

Exercice d'application 3 :

La médiatrice (d) *du segment*$[AB]$ *est la droite passant par le milieu* $I\ (-\frac{1}{2};\frac{1}{2})$ *de* $[AB]$ *et perpendiculaire à* (AB)*. Pour tout point* $M(x,y)$ *de* (d) *on a :* $\overrightarrow{IM}\perp\overrightarrow{AB}$.

On a $\overrightarrow{IM}\begin{pmatrix}x+\frac{1}{2}\\ y-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ *et* $\overrightarrow{AB}\binom{-1-0}{-2-3}=\binom{-1}{-5}$*, d'où :*

$(x+\frac{1}{2})\times(-1)+(y-\frac{1}{2})\times(-5)=0$*, donc* $-x-5y+2=0$ *est une équation cartésienne de la médiatrice du segment*$[AB]$.

IV. Je m'exerce :

Exercice 1 :

Dans les exercices de1 à 7, on demande de construire les droites.

1. *D passant par les points* $A(3\,;4)$ *et* $B(-1\,;2)$.
2. *D passant par A de coordonnées*$(0\,;1)$ *et* $B(-3\,;0)$.
3. *D passant par A de coordonnées* $(0\,;2)$ *et ayant* 2 *pour coefficient directeur.*
4. *D Passant par A de coordonnées* $(5\,;-2)$ *et de vecteur directeur* $\vec{u}\binom{-3}{2}$.
5. *D ayant pour équation* $3x - y + 4 = 0$.
6. *D ayant pour équation* $y = -2x + \frac{3}{4}$.
7. *D ayant pour équation* $y = -3$.

Exercice 2 :

D est la droite d'équation $y = -3x + 2$.

a. Le point A de coordonnées $(-1\,;2)$ *est-il sur la droite D ? Même question pour le point B de coordonnées*$(2\,;-4)$ *?*

a. *Déterminer le point de D d'abscisse 3 ?*
b. *Déterminer le point F de d'ordonnée* -2 *?*
c. *Quelles sont les coordonnées du point d'intersection de D avec l'axe des ordonnées ?*

Exercice 3 :

Ecris une équation de la droite D dans chacun des cas suivants :

a. D passe par le point $A(3\,;1)$ *et de vecteur directeur* $\vec{v}\binom{2}{3}$.

b. D passe par les deux points $C\,(3;1)$ *et* $F(1\,;-2)$.

c. D passe par le point $S(-3\,;-3)$ *et de coefficient directeur* $m = -3$.

d. D passe par $A(-3\,;1)$ *et parallèle à la droite d'équation :*$3x - y + 3 = 0$.

e. D passe par $B(3\,;-3)$ *et perpendiculaire à la droite d'équation :* $y = 2x - 5$.

Exercice 4 :

Soit D la droite d'équation $y = 2x - 3$ *et D' la droite d'équation* $y = 3x + 5$.

1. *Les deux droites sont-elles parallèles ? Perpendiculaires ?*
2. *Vérifie que* $(-8\,;-19)$ *sont les coordonnées du point commun à D et D'.*

Exercice 5 :

ABC est un triangle. On donne $A(4\,;0), B(0\,;3)$ *et* $C(1\,;-1)$.

a. *Calcule les coordonnées de A', milieu de* $[BC]$ *puis écris une équation de la droite* (AA'). *Que représente* (AA') *pour le triangle ABC ?*

b. *Calcule les coordonnées de G, centre de gravité du triangle ABC.*

Exercice 6 :

Dans un repère orthonormé (O, I, J), *on considère un triangle A, B et C ; avec* $A(-2\,;0), B(0\,;4)$ *et* $C(4\,;-2)$.

a. *Détermine les équations des médiatrices des deux segments* $[AB]$ *et* $[AC]$.

b. *Vérifie que* $\left(\frac{11}{7}\,;-\frac{9}{7}\right)$ *sont les coordonnées du centre du cercle circonscrit au triangle ABC.*

Exercice 7 :

Dans un repère orthonormé(O, I, J), *on considère un triangle A, B et C ; avec* $A(2\,;3)B(-3\,;1)etC(-2\,;4)$. *I est le projeté orthogonal de A sur* $[BC]$.

a. *Ecris une équation de la droite* (AI).

b. *Détermine les coordonnées du point H, orthocentre du triangle ABC.*

Exercice 8 :

Le pan est rapporté à un repère orthonormé (O, I, J).

On considère le cercle $\mathscr{C}$ *de centre* $A(2\,;3)$ *et de rayon* $\sqrt{2}$.

1. *Montre que le point* $B(1\,;2)$ *est un point du cercle* $\mathscr{C}$.
2. *Détermine une équation de la tangente en B au cercle* $\mathscr{C}$.

Exercice 9 :

Le repère (O, I, J) *est orthonormé.*

Soit une droite (D) *pour laquelle on possède les renseignements suivants :*

- (D) *coupe* (OJ) *au point A d'ordonnée 3.*
- *(D) coupe la parallèle à* (OJ) *passant par* $C(4; 0)$ *en B et la parallèle à* (OI) *passant par A en E.*
- *On donne* $BE = 2$.

Sachant que le coefficient directeur de (D) *est positif, trouve l'équation réduite de* (D).

Exercice 10 : Bepc Mauritanie 2019

Dans un repère orthonormé, on donne les points $A(0;-3), B(4\,;-1)$ et $C(2\,;3)$.

1. a. *Détermine les coordonnées du point D pour que ABCD soit un parallélogramme ?*

   b. *Place les points A, B, C et D sur le repère.*

2. a. *Montre que l'équation réduite de la droite (BD) est : $y=\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}$.*

   b. *Détermine le coefficient directeur de la droite (AC). Justifie que (AC) est perpendiculaire à (BD).*

Exercice 11*: Bepc Mauritanie 2018

Dans un repère orthonormé (O, I, J), on donne les points :
$A(-2\,;2), B(3\,;3)$ et $C(4\,;-1)$.

1. a. *Place les points A, B et C sur le repère.*

   b. *Calcule BC et vérifie que $AC=3\sqrt{5}$.*

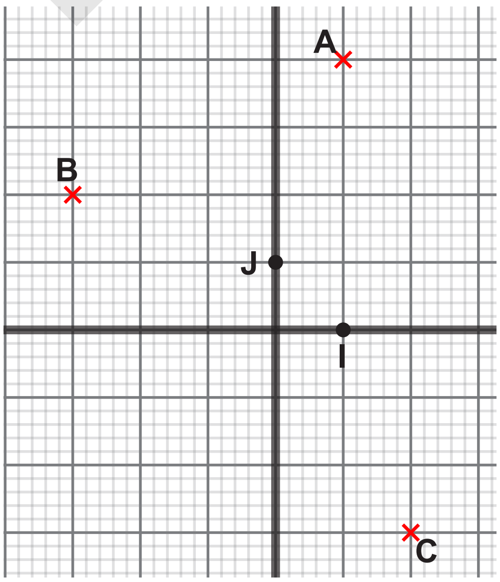
2. a. *Détermine l'équation réduite de la droite (BC).*

b. *Soit(Δ) la droite passant par le point A et de coefficient directeur $\frac{1}{4}$.*

Que représente (Δ) pour le triangle ABC ? Justifie.

Exercice 12* : Bepc Mauritanie 2014

Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), on a placé les points A, B et C (voir figure ci-contre)



1. *Lis les coordonnées des points A, B et C.*

2. a. *Calcule les coordonnées du milieu R de $[AB]$ et celles du milieu S de$[AC]$.*

   b. *Calcule AB et AC.*

   c. *En déduis la nature du triangle ABC.*

3. a. *Vérifie que $x+3y-3=0$ est une équation de (BS) et que $2x+y-1=0$ est une équation de(CR).*

   b. *Vérifie que J est le point d'intersection de droites (BS) et (CR).*

***NB :** Dans les exercices marqués par une étoile, certaines questions ont été modifiées ou supprimées du sujet de BEPC.*

Exercice 13 : Bepc Mauritanie 2001

Dans un repère orthonormé (O ; I ; J) on considère les points A (-2 ;2), B (1 ;8) et C (-2 ; -3). L'unité est le centimètre.

1) Placer les points A, B, et C.

2) Calculer les coordonnées du milieu M de [AC]. Calculer AC.

3) Montrer qu'une équation de la droite (AB) est : $y = 2x + 6$.

Tracer cette droite

4) Tracer la droite (Δ) d'équation : $y = -\frac{1}{2}x - 4$.

C est-il un point de cette droite ?

5) La droite (Δ) coupe (AB) en E.

a) Déterminer les coordonnées du point E.

b) En déduire que E est un point du cercle de diamètre [AC].

c) Le point O est-il à l'intérieur de ce cercle ?

Exercice 14 : Bepc Mauritanie 2002

On considère dans le plan rapporté au repère orthonormé (O ; i ; j) les points A (3,5 ;2), B (2 ;1) et C (5,5 ; -1).

1) Place les points A, B et C.

2) Calcule les distances AB ; AC et BC et en déduire la nature du triangle ABC.

3) Soit I le milieu de [BC] et D le symétrique de A par rapport à I.

a) Construis D et déterminer ses coordonnées.

b) Montre que le quadrilatère ABCD est un rectangle.

4) Soit (C) le cercle circonscrit au triangle ABC

a) Détermine le centre et le rayon de (C).

b) Montre que D est un point de (C).

5) Soi E le point de (AB) d'ordonnée 1,5 ; la parallèle à (BC) passant par E coupe (AC) en F.

a) Construis E et déterminer son abscisse.

b) Construis la droite (EF) et donner une équation de cette droite.

c) En déduire les coordonnées de F.

6) a) Calcule la tangente de l'angle$\widehat{ACB}$.

b) En déduire une valeur approchée de l'angle$\widehat{ACB}$.

On pourra utiliser le tableau suivant :

Angle en degré	26	27	28	29	30
Tangente	0,4877	0,5095	0,5317	0,5543	0,5774

Chapitre 9 : Systèmes, d'équations et d'inéquations

I. Activités préparatoires :

Activité 1 :

Dans une papeterie du quartier, Sidi accompagné de sa soeut Aicha achète deux cahiers et trois stylos et paye 600. Arrivés à la maison sa mère leur pose la question :Quel est le prix de chaque article ?

- *Sidi répond « le cahier et le stylo à 120 chacun. »*
- *Aicha dit « non le cahier à 150 et le stylo à 100. »*

1. *Que penses-tu de ces deux réponses ?*
2. *On désigne par x et y les prix respctifs d'un livre et d'un stylo.*
   Ecris une équation traduisant cette situation.

Remarque 1 :

Une équation traduisant cette situation est $2x + 3y = 600$, *ou encore*
$2x + 3y - 600 = 0$.
Cette équation est une équation du premier degré à deux inconnuesxety.

Activité 2 :

Ahmed veut acheter des cahiers pour ses deux enfants Sidi et Fatma. Il va à la librairie du quartier, son propriétaire lui propose des cahiers de 100 pages à 80 ouguiyas le cahier et des cahiers de 50 pages à 45 ouguiyas le cahier.
Ahmed dispose d'un budjet de 1200 ouguiyas pour l'achat des cahiers .

1. *Combien de cahiers de 50 pages peut-il acheter au maximum ?*
2. *Combien de cahiers de 100 pages peut-il acheter au maximum ?*
3. *Si Ahmed a acheté autant de cahiers de 50 pages que de cahiers de 100 pages, quel est le nombre de cahiers achetés dans ce cas ?*
4. *Sachant, qu'il a acheté xcahiers de 50 pages et y cahiers de 100 pages, traduis cette situation par une inéquation.*

Activité 3 :

Si on ajoute l'âge de Sow au double de celui de Marième, on trouve 20 et si l'on *retranche l'âge de Marième au double de l'âge de Sow, on trouve 10.*
En désignant par x l'âge de sow et par y l'âge de Marième, traduis les deux renseignements par deux équations.

II. Je retiens

1. Système de deux équations du premier degré à deux inconnues :

1.1. Notion d'équation du premier degré à deux inconnues :

Définition 1 :

Etant donnés a, b et c trois nombres réels,on appelle équation du premier degré à deux inconnues toute équation de la forme :

$ax + by + c = 0$ *; où x et y désignent des inconnues.*

Règle 1 :

Resoudre une équation du premier degré à deux inconnues c'est trouver tous les couples de nombres réels qui la vérifient(ou solutions de cette équation).

Exemple 1 :

Résous l'équation : $-2x + 3y + 5 = 0 (1)$

Réponse :

Résoudre cette équation signifie, chercher l'ensemble S des couples $(x\,;y)$ *de nombres réels vérifiant l'égalité* (1).

Pour cela ajoutons $2x - 5$ *aux deux membres de l'égalité* (1), *on obtient alors :* $3y = 2x - 5$, *si on multiplie les deux membres par* $\frac{1}{3}$ *on obtient :*

$y = \frac{2x-5}{3}$ *(Expression de y en fonction dex)*

Donc S est l'ensemble des couples $(x, \frac{2x-5}{3})$ *; où x est un réel quelconque.*

On écrit : $S = \{(x, \frac{2x-5}{3})$ *; où x est un réel quelconque}.*

Remarque 3 :

L'ensemble $S = \{(x, \frac{2x-5}{3})$ *; où x est un réel quelconque} des couples solutions l'équation :* $-2x + 3y + 5$, *écrit ainsi dépend de la valeur de x, en effet :*

- Si $x = 0$, $\frac{2x-5}{3} = -\frac{5}{3}$ et $\left(0, -\frac{5}{3}\right) \in S$.
- $x = 1, \frac{2x-5}{3} = -1$ *et* $(1, -1) \in S$.
- $x = 2, \frac{2x-5}{3} = -\frac{1}{3}$ *et* $\left(2, -\frac{1}{3}\right) \in S$.

On pourra aussi former d'autres couples solutions en donnant à x des valeurs réelles arbitraires.

Math AS.indd 126 15/07/2024 15:31:21

I.2. Notion de Système de deux équations du 1er degré à deux inconnues :

Remarque 4 :

La traduction des deux renseignements de l'activité 3, par deux équations, conduit au fait que x et y vérifient simultanément les deux équations :

$x + 2y = 20$ *et* $2x - y = 10.$

On obtient donc le système de deux éqution du premier degré à deux inconnues x et y suivant :

$$\begin{cases} x + 2y = 20 \longleftarrow 1^{er} renseignment \\ 2x - y = 10 \longleftarrow 2^{ème} renseignment \end{cases}$$

Ces deux renseignements permettront de déterminer l'âge de chacun de ces deux enfants ?

Règle 2 :

Resoudre un système de deux équations du 1er degré à deux inconnues, c'est trouver toutes les solutions communes aux deux équations, c'est-à-dire trouver tous les couples $(x; y)$ des nombres réels pour lesquels les egalités (équations) sont verifiées(vraies) simultanement.

I.3. Méthodes de résolution d'un système de deux équations :

Pour résoudre un système de deux équations du premier degré à deux inconnues, on utilise trois méthodes de résolution.

Deux méthodes algébriques : la prémière appelée méthode de résolution par substitution et la seconde, méthode de résolution par combinaison et la troisième la methode dite graphique.

Dans les deux premières méthodes le principe général consiste à éliminer, en faisant usage des règles énoncées dans la remarque du paragraphe I.1, l'une des inconnues pour se ramener à la résolution d' une équation du premier degré à une inconnue.

On traitera le système d'équations obtenu par la mise en équation de la situation problème donnée dans l'activité 3.

I.3.A. Methode de résolution par substitution :

Dans la méthode par substitution, on exprieme l'une des inconnues en fonction de l'autre à l'aide de l'une des équations et l'on reporte (ou on substitut) le resultat obtenu dans l'autre équation.

Exemple 2 :

On considère le système : $\begin{cases} x + 2y = 20 \\ 2x - y = 10 \end{cases}$

$\begin{cases} x + 2y = 20 \\ 2x - y = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 20 - 2y \\ 2x - y = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 20 - 2y \\ 2(20 - 2y) - y = 10 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x = 20 - 2y \\ 40 - 4y - y = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 20 - 2y \\ -5y = 10 - 40 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 20 - 2y \\ -5y = -30 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 20 - 2y \\ y = \dfrac{-30}{-5} \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x = 20 - 2y \\ y = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 20 - 2 \times 6 \\ y = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 20 - 12 \\ y = 6 \end{cases} \begin{cases} x = 8 \\ y = 6 \end{cases}$

Donc : Sow a 8 ans et sa sœur Marième a 6 ans.

I.3.B. Méthode par combinaison :

Dans la méthode par combinaison, on multiplie l'une où les deux équations par des nombres convenablement choisis de telle manière que l'une des inconnues disparait par addition membre à membre.

Exemple 3 :

On reprend le système : $\begin{cases} x + 2y = 20 \\ 2x - y = 10 \end{cases}$

En multipliant la deuxième equation $(2x - y = 10)$ *par 2, le système devient*

$\begin{cases} x + 2y = 20 \\ 4x - 2y = 20 \end{cases}$

$5x = 40, \ d'où \ x = \dfrac{40}{5}$ *c'est-à-dire :* $x = 8$

En multipliant la première equation $(x + 2y = 20)$ *par - 4, le système devient* $\begin{cases} -4x - 8y = -80 \\ 4x - 2y = 20 \end{cases}$

$-10y = 60, \ d'où \ y = \dfrac{-60}{10}$ *c'est-à-dire :* $y = 6$

La solution du système est donc le couple $(8\,;\ 6)$.

I.3.C. Méthode graphique :

Dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, *une droite non parallèle a là l'axe des abscisses a une équation de la forme* $ax + by + c = 0$, *avec a et b non nuls, on associe l'ensemble des points M* $(x\,;y)$ *du plan P dont les couples de cordonnées sont solutions de cette équation ; c'est une droite qu'on peut noter D.*

La droite D est la représentation graphique de l'ensemble S.

Dans la méthode graphique, on associe aux deux équations du système deux équations de droites. Les coordonnées du point d'intersection de ces deux droites, s'il existe, constituent alors la solution du système.

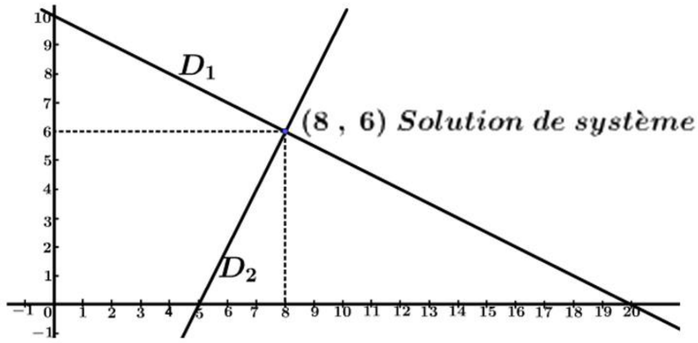
Exemple 4 :

On reprend à nouveau le système :

$$\begin{cases} x + 2y = 20 \\ 2x - y = 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y = 20 \\ 2x - y = 10 \end{cases} \text{Ù}$$

$$\begin{cases} D : y = -\frac{1}{2}x - 10 \\ D' : y = 2x - 10 \end{cases}$$



Dans un repère orthonomé, on détermine deux points de chacune des deux droites D et D' pour les construire, par exemple:

- *La droite D passe par les points* $A(10;\ -5)$ *et* $B(0;\ 10)$,
- *La droite D' passe par les points* $C(5\ ;\ 0)$ *et* $D(3\ ;\ 4)$,

Ces deux droites se coupent au point de coordonnées $(8\ ;\ 6)$ *; Ce couple de nombres est la solution du système.*

II. Système d'inéquations du premier degré à deux inconnues :

II.1. Notion d'inéquation du premier degre à deux inconnues :

Définition 2 :

Etant donnés a, b et c trois nombres réels,on appelle inéquation du premier degré à deux inconnues toute inéquation de la « forme » :

$ax + by + c \leq 0$ *; où x et y désignent les inconnues.*

Le symbole $\leq$ *peut être remplacé par l'un des symboles* $\geq, <$ *ou* $>$.

Exemple 5 :

$5x + y + 12 > 0$ *est une inéquation du 1er degré à deux inconnues : x et y.*

$u\sqrt{3} + \frac{2}{7}v + \sqrt{13} < 0$ *est une inéquation du 1er degré à deux inconnues : u et v.*

$9m - n + 8\sqrt{5} \leq 0$ *est une inéquation du 1er degré à deux inconnues : m et n.*

$s - 2t\sqrt{7} - \frac{\sqrt{11}}{3} \geq 0$ *est une inéquation du 1er degré à deux inconnues : s et t.*

Remarque 5 :

Les couples $(26\ ;0), (0\ ;15)$ *et* $(9\ ;9)$ *sont solutions de l'inéquation :*

$45x + 80y - 1200 \leq 0$ *ou encore :* $9x + 16y - 240 \leq 0$

Règle 3 :

Resoudre une inéquation du premier degré à deux inconnues, c'est trouver tous les couples de nombres réels qui la vérifient(ou sont solutions de cette inéquation).

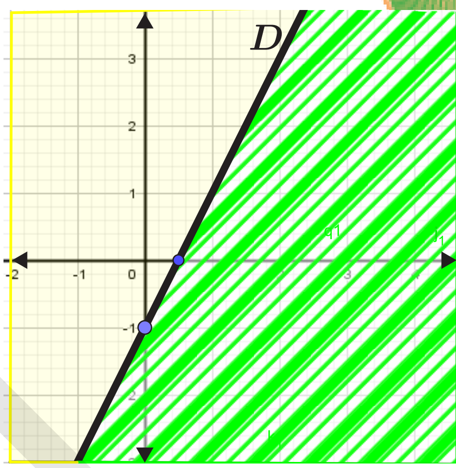
Remarque 6 :

- *Pour résoudre une inéquation du premier degré à deux inconnues, on utilisera les règles énoncées dans la remarque 6.*
- *Dans la pratique, on privilègera la méthode graphique suivante pour résoudre une inéquation du premier degré à deux inconnues.*

Exemple 6 :

Résous l'équation : $2x - y - 1 < 0$.

Réponse :



On trace la droite D d'équation :
$2x - y - 1 = 0$.
Cette droite partage le plan en deux zones (demi-plans).

- *Les coordonnées de tous les points de la zone jaune verifient l'inéquation* $y > 2x - 1$.
  Ces points sont au dessus de la droite D.
- *Les coordonnées de tous les points de la zone hachurée verifient l'inéquation* $y < 2x - 1$.
  Ces points sont au dessous de la droite D.
- *On hachure le demi- plan qui ne convient pas , ou on colorie le demi-plan qui convient. (voir figure ci-contre)*

Remarque 7 :

La droite D d'équation : $2x - y - 1 = 0$ *est appelée frontière de deux demi-plans. Les coordonnées des points de cette droite ne font pas partie de l'ensemble des solutions de l'inéquation* $2x - y - 1 < 0$, *car l'inégalité est stricte.*

II.2. Système de deux inéquations du premier degré à deux inconnues :

Règle 4 :

Resoudre un système de deux inéquations du premier degré à deux inconnues, c'est trouver tous les couples de nombres réels qui le vérifient(ou solutions de ce système).

Remarque 8 :

- *Dans la pratique, on résolvera chacune des inéquations du système de deux inéquations du premier degré à deux inconnues par la méthode graphique puis on détermine la région du plan qui correspond aux solutions communes de ces inéquations.*
- *La recherche des solutions d'un système d'inéquations du premier degré à deux inconnues par la méthode dite graphique a pour conséquence ce qu'on appelle un régionnement du plan.*

Exemple 7:

On donne le système suivant : $\begin{cases} 2x - y < 1 \\ x - 2y > -4 \end{cases}$

Résoudre le système, c'est chercher graphiquement toutes les solutions communes aux deux équations :

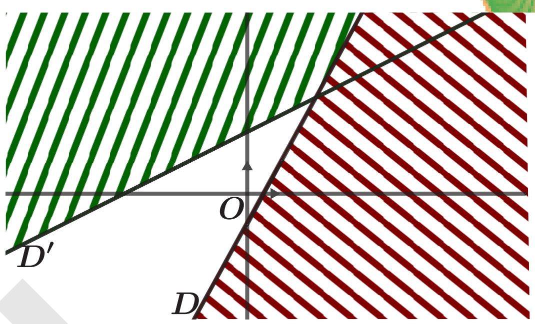
Le système s'écrit : $\begin{cases} 2x - 1 < y \\ \frac{1}{2}x + 2 > y \end{cases}$

On trace les deux droites D et D'd'équations

$D : y = 2x - 1$ *et* $D' : y = \dfrac{1}{2}x + 2$

Pour chacune des deux inéquations, on considère le demi-plan qui convient.

La solution graphique du système correspond à tous les points communs aux deux demi-plans (région non hachurée).



Règle 5 :

Dans la pratique, on représente les deux droites dont les équations sont obtenues en substituant aux signes des inégalités le symbole =. On choisit ensuite un point extérieur, en général l'origine O du repère s'il n'appartient pas à aucune de ces droites, puis on remplace par les coordonnées de ce point dans les inéquations pour déterminer si ce point appartient ou non au demi plan qui convient. On obtient ainsi la partie du plan qui correspond aux solutions du système d'inéquations.

III. Je sais faire :

Enoncés des exercices d'application :

Exercice d'application 1 :

Résous les systèmes suivants par deux méthodes différentes

1) $\begin{cases} 3x + 2y = 2 \\ 2x - 3y = 10 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} -x + \frac{2}{3}y = -14 \\ \frac{3}{2}x + 3y = -27 \end{cases}$

Exercice d'application 2 :

Résous les systèmes suivants :

1) $\begin{cases} 3x - 6y = 3 \\ -2x + 4y = 10 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x - 6y = 3 \\ -2x + 4y = -2 \end{cases}$

Exercice d'application 3 :

Résous graphiquement les deux inéquations :

1) $x - 2y - 4 > 0$ 2) $\frac{1}{2}x - y + 2 \leq 0.$

Exercice d'application 4 :

Détermine graphiquement les solutions des systèmes :

1) $\begin{cases} x + y < -2 \\ x - y > 3 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} 3x - y + 2 < 3 \\ x - y < -3 \end{cases}$;

Exercice d'application 5 :

Un artisan fabrique des objets A et des objets B. La réalisation d'un objet A demande 30 Ouguiyas de matière première et 125 Ouguiyas de main-d'œuvre ; celle d'un objet B demande 70 Ouguiyas de matière première et 75 Ouguiyas de main-d'œuvre.

Pour une bonne gestion de l'entreprise, les dépenses journalières en matière première et en main-d'œuvre ne doivent pas dépasser respectivement 560 Ouguiyas et 1250 Ouguiyas. On désigne par x le nombre d'objets A et par y le nombre d'objets B fabriqués par jour.

1. Calcule en fonction de x et de y la dépense journalière en matière première, et la dépense journalière en main-d'œuvre.

2. (x, y) étant le couple des coordonnées d'un point M dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, déterminer graphiquement l'ensemble des points M (x, y) du plan dont les coordonnées satisfont aux contraintes de l'entreprise.

Exercice d'application 6 :

Ali veut acheter 6 livres et 6 cahiers, il donne 500 MRU au vendeur. Le vendeur lui dit « le prix que tu dois payer est 390 MRU, mais avec le reste de ton argent tu peux acheter encore 2 livres et 1 cahier ». Calculer le prix d'un livre et celui d'un cahier

Solutions des exercices d'application :

Exercice d'application 1 :

1. Je résous le système par combinaison :

Elimination de x :

$$\begin{cases} 2 \times (3x + 2y) = 2 \times 2 \\ -3 \times (2x - 3y) = -3 \times 10 \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} 6x + 4y = 4 \\ -6x + 9y = -30 \end{cases}$$

En additionnant les deux dernières équations j'obtiens : $13y = -26$

Donc $y = \frac{-26}{13} = -2$

Elimination de y :

$$\begin{cases} 3 \times (3x + 2y) = 3 \times 2 \\ 2 \times (2x - 3y) = 2 \times 10 \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} 9x + 6y = 6 \\ 4x - 6y = 20 \end{cases}$$

En additionnant les deux dernières équations j'obtiens : $13x = 26$.

Donc $x = \frac{26}{13} = 2$

Donc le couple $(2; -2)$ est la solution du système.

2. Je résous le système $\begin{cases} -x + \frac{2}{3}y = -14 & \ldots\ldots(1) \\ \frac{3}{2}x + 3y = -27 & \ldots\ldots(2) \end{cases}$ par substitution :

De l'équation (1) : $x = \frac{2}{3}y + 14$

je remplace x par sa valeur dans l'équation (2) :

$\frac{3}{2}(\frac{2}{3}y + 14) + 3y = -27$ Alors $y + 21 + 3y = -27$ et $4y = -48$.

Donc $y = \frac{-48}{4} = -12$. Or $x = \frac{2}{3}y + 14 = \frac{2}{3} \times (-12) + 14 = -8 + 14 = 6$

Donc le couple $(6\,; -12)$ est la solution du système.

Exercice d'application 2 :

1) $\begin{cases} 3x - 6y = 3 \\ -2x + 4y = 10 \end{cases}$

En divisant la première équation par 3 et la deuxième par 2, on obtient :

$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ -x + 2y = 5 \end{cases}$ donc $\begin{cases} x = 2y + 1 \\ -x + 2y = 5 \end{cases}$ en remplacant x par sa valeur dans la deuxième équation : $-(2y + 1) + 2y = 5$ et par conséquent $-1 = 5$ ce qui est impossible, donc le système n'a pas de solution dans l'ensemble de nombres réels.

2) $\begin{cases} 3x - 6y = 3 \\ -2x + 4y = -2 \end{cases}$ En divisant la première équation par 3 et la deuxième par 2 : $\begin{cases} x - 2y = 1 \\ -x + 2y = -1 \end{cases}$, donc $\begin{cases} x = 2y + 1 \\ -x + 2y = -1 \end{cases}$

En remplaçant x par sa valeur dans la deuxième équation :
$-(2y+1)+2y=-1$ *et par conséquent* $-1=-1$ *ce qui est toujours vérifié, donc le système a une infinité de solutions dans l'ensemble de nombres réels. Ce sont les couples de la forme* $(2y+1; y)$ *tel que y est un reel.*

Exercice d'application 3 :

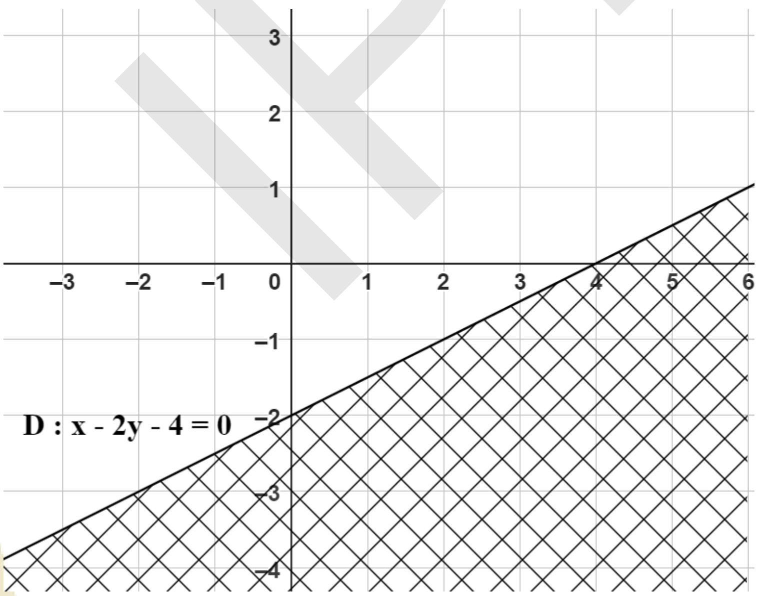
1) Pour résoudre graphiquement l'inéquation $x-2y-4>0$ *on trace la droite D d'équation* $x-2y-4=0$ *dont l'équation réduite est* $y=\frac{1}{2}x-2$

Cette droite partage le plan en deux zones (demi-plans).

- *Les coordonnées de tous les points de la zone non hachurée verifient l'inéquation* $y>\frac{1}{2}x-2$.

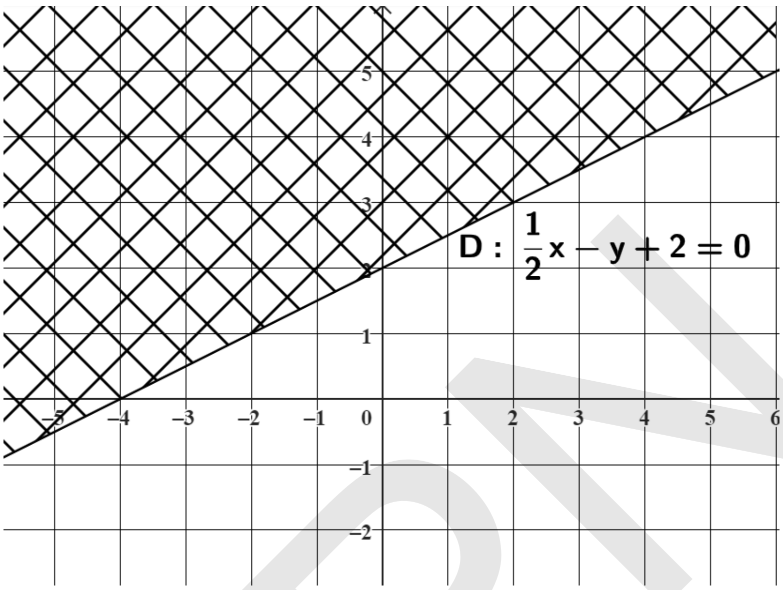
  Ces points sont au dessus de la droite D.
- *Les coordonnées de tous les points de la zone hachurée verifient l'inéquation* $y<\frac{1}{2}x-2$. *Ces ponits sont situés au-dessous de la droite D.*

Les solutions de cette inéquation sont les couples (x ; y) coordonnées des points situés dans le demi-plan ouvert hachuré



2) $\frac{1}{2}x - y + 2 \leq 0$ *équivaut à* $y \geq \frac{1}{2}x + 2$ *pour résoudre graphiquement l'inéquation on procède de la manière précédente on trace la droite D d'équation* $\frac{1}{2}x - y + 2 = 0$ *dont l'équation réduite est* $y = \frac{1}{2}x + 2$

Les solutions de cette inéquation sont les couples (x ; y) coordonnées de points situés dans le demi-plan fermé hachuré (situés au- dessus de la droite D)



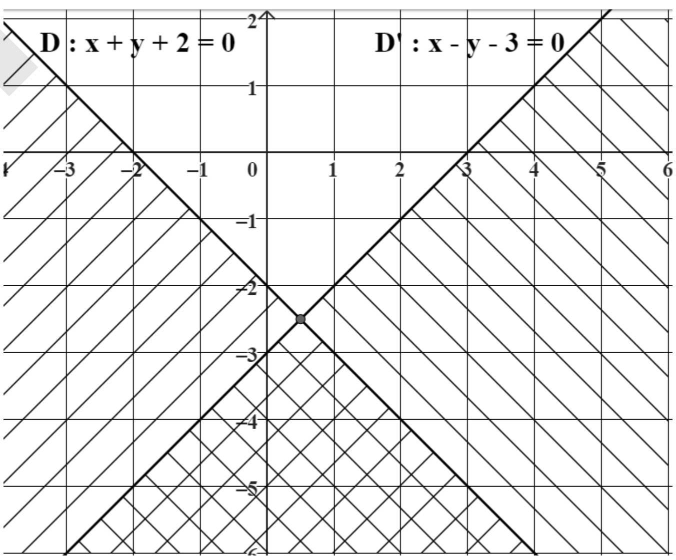
Exercice d'application4 :

1) $\begin{cases} x + y < -2 \\ x - y > 3 \end{cases}$ *équivaut à* $\begin{cases} y < -x - 2 \\ y < x - 3 \end{cases}$

les couples solutions de ce système sont les cordonnées (x ; y) des points du plan situés au-dessous des deux droites d'équations respectives :

$x + y + 2 = 0$ *et* $x - y - 3 = 0$

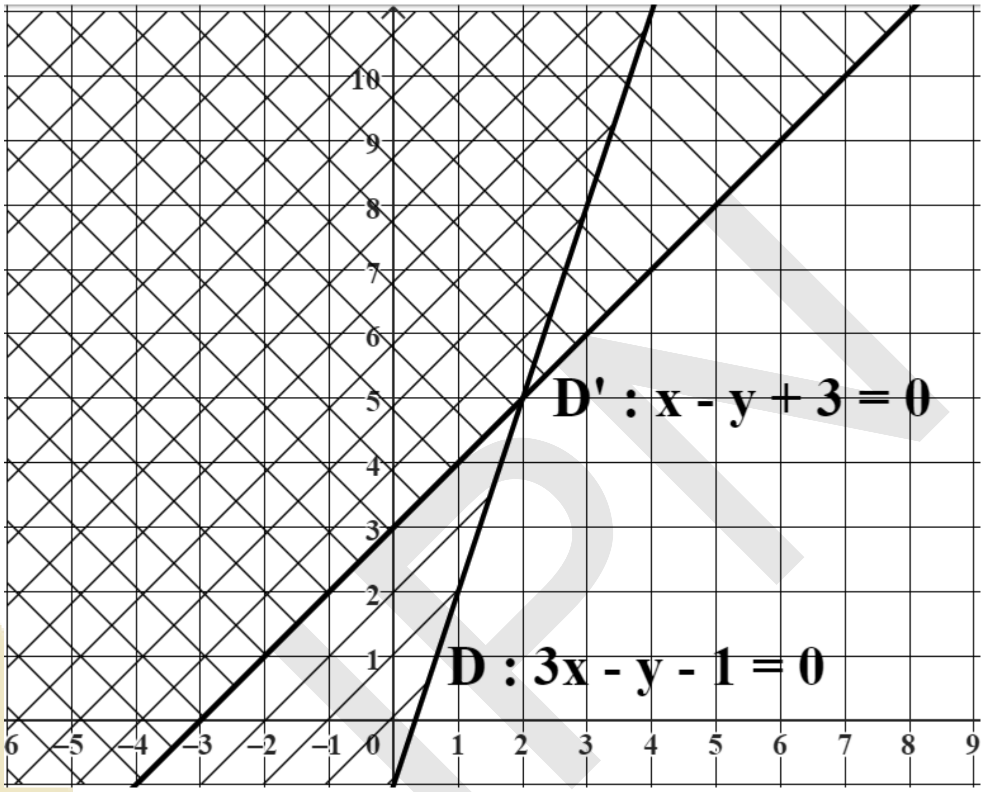
Il s'agit donc de l'intersection des deux parties hachurées (voir la figure)



2) $\begin{cases} 3x - y + 2 < 3 \\ x - y < -3 \end{cases}$ *équivaut à* $\begin{cases} y < -\frac{1}{2}x - 1 \\ y > x + 3 \end{cases}$ *les couples solutions de ce système sont les cordonnées (x ; y) des points du plan situés au-dessous de la droite d'équation :*$3x - y - 1 = 0$ *et au-dessus de la droite d'équation*

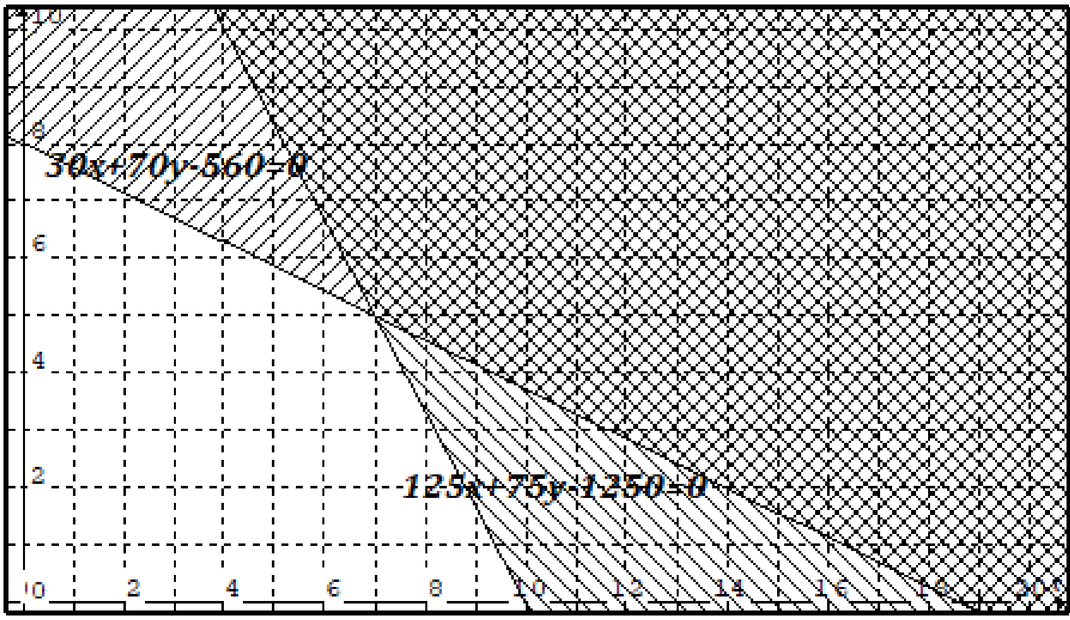
$x - y + 3 = 0$

Il s'agit donc de l'intersection des deux parties hachurées (voir la figure)



Exercice d'application 5 :

Dépense journalière en matière première : $30x + 70y$. *Dépense journalière en main d'œuvre :* $125x + 75y$. *D'où le système d'inéquations :* $\begin{cases} 30x + 70y \leq 560 \\ 125x + 75y \leq 1250 \end{cases}$.



Il y a exactement 63 points du plan dont les coordonnées satisfont aux contraintes de l'entreprise en remarquant que leurs coordonnées x et y sont des nombres entiers naturels, qu'il ne fallait pas oublier les cas $x = 0$ et $y = 0$ et qu'enfin le point de coordonnées (7, 5) est le point d'intersection des deux droites, donc ses coordonnées satisfont aussi aux contraintes de l'entreprise.

Exercice d'application 6 :

<u>Choix de l'inconnue :</u> Soit x le prix d'un livre et y celui d'un cahier

<u>Mise en équation :</u> Le prix de 6 livres et 6 cahiers est donc de 390 et celui de 2 livres et un cahier est de $500 - 390 = 110$. *Donc la première phrase du vendeur est traduite par l'équation* $2x + y = 110$ *et la deuxième phrase est traduite par* $6x + 6y = 390$

<u>Résolution :</u>

Nous avons le système $\begin{cases} 6x + 6y = 390 \\ 2x + y = 110 \end{cases}$ *si on divise la première équation par 6 on obtient* $\begin{cases} x + y = 65 \\ 2x + y = 110 \end{cases}$ *et par soustraction membre à membre, il résulte que* $-x = -45$ *donc* $x = 45$ *et comme* $x + y = 65$ *alors* $y = 65 - 45 = 20$

<u>Conclusion :</u>

Donc le prix d'un livre est de 45 MRU et celui d'un cahier est de 20 MRU.

IV. Je m'exerce :

Exercice 1 :

Résous les systèmes suivants :

1. a. $\begin{cases} 3x - y = 1 \\ 6x - 3y = -3 \end{cases}$; b. $\begin{cases} 7x + 2y = 4 \\ 6x + 3y = 0 \end{cases}$

2. a. $\begin{cases} 7t - 9u = -8 \\ 2t - 7u = -20 \end{cases}$; b. $\begin{cases} 12a + 14b = 2 \\ 2a + 4b = 2 \end{cases}$

3. a. $\begin{cases} 7x - 2y = 4 \\ 3x + 4y = 6 \end{cases}$; b. $\begin{cases} 14x - 3y = 2 \\ 3x + 4y = 5 \end{cases}$

Exercice 2 :

Résous chacun des systèmes suivants par les deux méthodes algébriques :

1. a. $\begin{cases} -2x + 5y = 3 \\ y + 3y = 1 \end{cases}$; b. $\begin{cases} 6x + 7y = -4 \\ -3x + 2y = 5 \end{cases}$; c. $\begin{cases} 3x - 4y = 0 \\ 5y + 8y = 0 \end{cases}$.
2. a. $\begin{cases} x + y = 8 \\ x - y = -8 \end{cases}$; b. $\begin{cases} y = x \\ y = 2x - 3 \end{cases}$; c. $\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x = 3y \end{cases}$.

Exercice 3 :

1. *Résous graphiquement le système :* $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + y = 3 \end{cases}$.

   Vérifie la réponse par le calcul.
2. *Reprends la question précédente avec les systèmes suivants :*

$\begin{cases} x - y = -8 \\ 3x + 2y = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} 3x - y = 5 \\ x - y = -3 \end{cases}$; $\begin{cases} 3x - y = -3 \\ x + y = -2 \end{cases}$; $\begin{cases} x + 3y = -6 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$.

Exercice 4 :

Résous graphiquement les systèmes, puis vérifie la réponse par le calcul.

$\begin{cases} x - 2y = -1 \\ x + y = 2 \end{cases}$; $\begin{cases} y - x = x - 7 \\ y + x = -y - 4 \end{cases}$; $\begin{cases} 6x + 15y = 3x \\ y + 6 = -3x \end{cases}$.

Exercice 5 :

Résous les systèmes suivants :

$\begin{cases} 100x - y = -500 \\ 300x - y = -300 \end{cases}$; $\begin{cases} y = x - 5 \\ y + x = 3 + x \end{cases}$; $\begin{cases} x - 3y = 0 \\ 3\sqrt{3}x + y = 24 \end{cases}$;

$\begin{cases} \sqrt{5}x + (1 + \sqrt{5})y = 1 \\ (1 - \sqrt{5})x - \sqrt{5}y = 2 \end{cases}$; $\begin{cases} \frac{x+2}{2} - \frac{2y+1}{10} = \frac{x-y}{20} \\ \frac{x-1}{3} + \frac{y+1}{4} = \frac{x+y-2}{6} - y \end{cases}$.

Exercice 6 :

Résous les systèmes d'inéquations suivants :

a. $\begin{cases} 3x - 2y < 2 \\ x - 2y > 4 \end{cases}$; *b.* $\begin{cases} 2x + y > 5 \\ x - 3y > 6 \end{cases}$.

Exercice 7 :

1. *Résous le système d'inéquations suivant :* $\begin{cases} 2x - y < 3 \\ x + y > 3 \end{cases}$.
2. *D'après le graphique peut-on savoir si le couple* $(4, 4)$ *est solution*

du système ? Vérifie la réponse avec le calcul.

Exercice 8 :

Un rectangle dont les longueurs de ses dimensions sont x *et* y*, a pour périmètre 392m. Trouve* x *et* y *sachant que la longueur dépasse sa largeur de 52m.*

Exercice 9 :

Un rectangle dont la longueur est trois fois plus grande que sa largeur. Si on augmente sa largeur et on diminue sa longueur de 1m l'aire reste la même. Traduis cette situation problème par un système. Quelles sont les dimensions de ce rectangle ?

Exercice 10 :

Dans un restaurant il y a 20 personnes hommes et femmes, chaque homme dépense 300UM, chaque femme dépense 200UM et la dépense totale est 5200UM. Traduis cette situation problème par un système. Quel est le nombre des hommes et celui des femmes ?

Exercice 11 :

Soit un rectangle de longueur L et de largeur l mesurées en mètre.

1. *Donne son aire en fonction de L et l.*
2. *Si on augmente sa longueur de 9m et on l'on diminue sa largeur de 3m l'aire de ce rectangle est inchangée.*
   a. *Traduire cette affirmation par une relation entre L et l.*
   b. *Développe et simplifie cette relation, on note ① le résultat obtenu.*
3. *Si on diminue sa longueur de 7m et on augmente sa largeur de 4m l'aire du rectangle est inchangée.*
   a. *Traduire cette affirmation par une relation entre L et l.*
   b. *Développe et simplifie cette relation, on note ② le résultat obtenu.*
4. *En résolvant le système à deux inconnues L et l formé par les deux équations ① et ②, trouve la largeur et la longueur du rectangle.*

Exercice 12 : Chez le jardinier

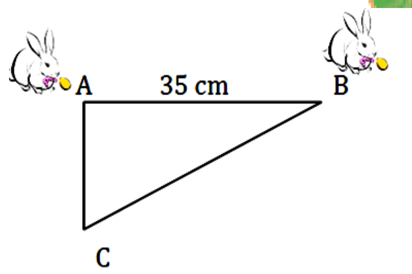
On propose un lot de 16 arbustes fruitiers composé de pommiers et de palmiers à 936 MRU.

Sachant que les pommiers valent 53 MRU et les palmiers valent 75 MRU.

Traduis cette situation problème par un système, puis calcule les nombres d'arbustes de chaque sorte.

Exercice 13 :

Une ficelle de 49 cm est fixée en A et B. 2 lapins distants de 35 cm. On la tend pour former un triangle ABC rectangle en A. Calculer AC et BC.



Exercice 14 :

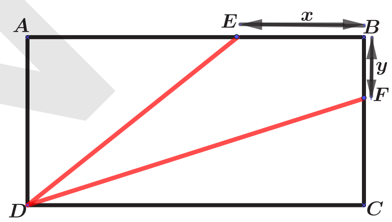
Un fermier a vendu une première fois 3canards et 4poulets pour 272 MRU puis une deuxième fois 2canards et 3poulets à 192 MRU. Combien coûte un canard et un poulet ?

Exercice 15 :

Soit ABCD un rectangle de longueur $AB = 72mm$ *et de largeur* $BC = 51mm$.

Un point E est situé sur le segment $[AB]$*à* x *mm de B et le point F sur BC à y mm de B.*

Détermine x et y pour que DE et DF partage le rectangle en trois parties d'aires égales.



Exercice 16 : Trouver des nombres

Détermine tous les nombres entiers naturels de deux chiffres qui diminuent de 45 quand on permute les deux chiffres.

Exercice 17 : Il ***faut acheter***

Des casquettes et des chapeaux pour coiffer les participants d'un groupe folklorique une casquette coûte 10 MRU et chapeau 15 MRU.

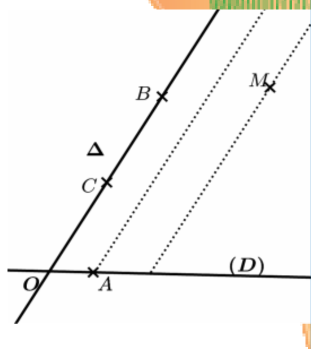
Compte tenu de la répartition des rôles dans le groupe, il faut moins 10 casques et au moins 7chapeaux. En outre, l'achat doit atteindre 210 MRU, mais ne dépasse pas 240 MRU. Trouve graphiquement toutes les possibilités.

Math AS.indd 140 15/07/2024 15:31:25

Chapitre 10 : Projection dans le plan

I. Activité préparatoire :

Activité 1 :



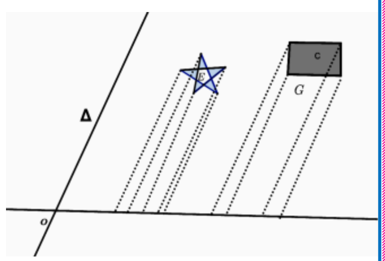
Soient (D) et (Δ) deux droites sécantes en un point O, et M un point du plan.
Trace la parallèle à (Δ) passant par le point M, elle coupe la droite (D) en un point M´.
Combien existe-il de droites ?
Le point M'´appelle le projeté du point M sur la droite (D) parallèlement à la droite (Δ).

Activité 2 :

Soient (D) et (Δ) deux droites sécantes en un point O, et A un point du plan.

1. *Construis A' le projeté de A sur (D) parallèlement à (Δ).*
   Peux-tu trouver un, deux ou plusieurs points dont le projeté est A' ?
2. *Choisis un point B sur la droite (D). Quel est son projeté sur (D) parallèlement à (Δ) ? Que penses-tu de l'image ?*

Activité 3 :



Soient (D) et (Δ) deux droites sécantes en un point O, on donne dans la figure ci-contre les images des deux formes par la projection sur (D) parallèlement à (Δ). Complète cette figure en précisant l'image de chacune des formes.

Activité 4 :

Soient A, B et M trois points distincts et alignés du plan, on désigne par A´, B´ et M'leurs projetés respectives
sur (D) parallèlement à (Δ).

1. *Fais une figure. Que peux-tu dire des points A´, B´ et M' ?*
2. *Quelles sont les images des segments $[AM]$ et $[AB]$? De la droite (AB)*

II. Je retiens :

1. Notion de projection sur une droite :

Définition 1 :

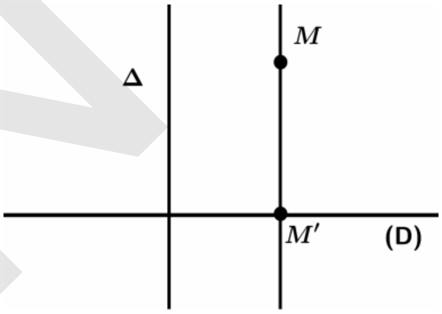
Soient D et (Δ) deux droites sécantes en un point O et M un point du plan.
Le projeté du point M sur la droite D parallèlement à la droite (Δ) est le point M′, intersection de la droite D et la parallèle à (Δ) passant par le point M.

Définition 2 :

Soient (D) et (Δ) deux droites sécantes en un point A, la façon par laquelle on associe un point M du plan à son projeté M´ sur la droite (D) parallèlement à la droite (Δ) s´appelle la projection sur la droite (D) parallèlement à (Δ).
M´ est aussi appelé image (projeté) de M par la projection sur la droite (D) parallèlement à (Δ).

Cas particulier :

Si les droites (D)et (Δ)sont perpendiculaires (ou orthogonales), on dit que :



- *La projection sur la droite (D) parallèlement à une droite (Δ) perpendiculaire (ou orthogonale) à (D) s´appelle la projection orthogonale sur (D).*
- *Le projeté d´un point M sur une droite (D) parallèlement à une droite orthogonale sur (D) s´appelle le projeté orthogonal sur (D).*

Remarque 1 et vocabulaire :

- *Si le projeté du point M sur la droite (D) parallèlement à une droite (Δ) est lui-même, on dit que le point M est invariant par la projection sur (D) parallèlement à (Δ).*
- *Si Mest un point de la droite (D), alors sa projeté sur la droite (D) parallèlement à la droite (Δ) est lui même.*
- *Si un point M est confondu avec son projeté sur (D) parallèlement à (Δ) alors M est un point de (D).*
- *Si D coupe Δ en O alors tous les points de Δ se projettent en O sur D parallèlement à Δ.*
- *La droite (D) est invariante par la projection sur (D) parallèlement à (Δ).*

Premières propriétés d'une projection :

Propriété 1 :

- L´ensemble des points invariants par la projection sur (D) parallèlement à (Δ) est la droite (D).
- L´ensemble des points qui ont la même projection que A sur (D) parallèlement à (Δ) est la droite passant par A et parallèle à (Δ).

2. Projection d´une forme :

3.1. Notion de projection d'une forme :

Définition 3 :

Soient (D) et (Δ) deux droites sécantes en un point O, (F) une forme du plan (F') une partie de la droite (D).

On dit que (F') est l´image de (F) par la projection sur la droite (D) parallèlement à (Δ) si et seulement si :

- La projection de chaque point de (F) sur (D) parallèlement à (Δ) appartient à (F').

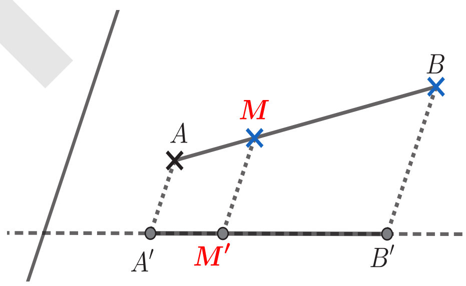
Chaque point de (F') est la projection d´au moins un point de (F) sur (D) parallèlement à (Δ).

3.2. Projection et l'alignement de points :

Propriété 2 :

Par la projection, en général, sur la droite (D) parallèlement à (Δ):

- Les projetés de trois points alignés sont des points alignés, on dit que :
  La projection conserve l'alignement
- Le projeté d'un segment est un segment.
- Le projeté d'une droite est une droite



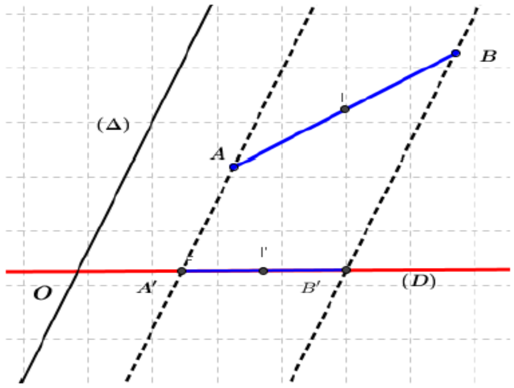
Remarque 2

Si on choisit les points A, B et M alignés sur une droite parallèle à Δ, alors les images de ces points, du segment $[AB]$ et de la droite (AB) sont réduits à un seul même point.

3.3. Projection du milieu d´un segment :

Propriété 3 :

Par la projection sur la droite (D) parallèlement à(Δ),le projeté du milieu d'un segment est, en général, le milieu du segment image.
On dit que la projection conserve le milieu.



4. Projections et théorème de Thalès :
4.1. Théorème de Thalès version vectorielle :

Propriété 4 :

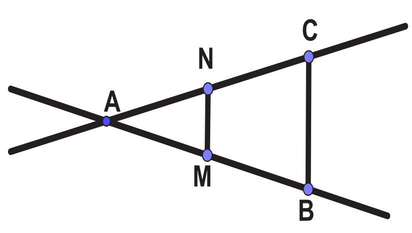
Soient D et (Δ) deux droites sécantes du plan et A, B et C trois points de D tels que A≠B.
Si A', B' et C' sont les projetés de A, B et C sur D parallèlement à (Δ).
Et si $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$ alors $\overrightarrow{A'C'} = k\overrightarrow{A'B'}$.
Cet énoncé généralise la propriété directe de Thales.

Preuve :

Les points A, B et C alignés dans cet ordre, donc $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$. D'où : $AC = k.AB$.
Donc $\frac{AC}{AB} = k$. A', B' et C' les projetés respectifs de A, B et C sur D parallèlement à (Δ), les droites (AA'), (BB') et (CC') sont toutes parallèles à (Δ), donc : $(AA') // (BB') // (CC')$. On trace la droite parallèle à D passant par A, elle coupe (BB') et (CC') en B'' et C''. D'après la propriété de Thales :$\frac{AC}{AB} = \frac{AC''}{AB''}$.
Puisque AB''B'A' et AC''C'A' sont des parallélogrammes, on a : $AB'' = AB'$ et $AC'' = AC'$, donc : $\frac{AC}{AB} = \frac{A'C'}{A'B'} = k$.
*(**k est un nombre réel appelé rapport de projection**)*
$\frac{A'C'}{A'B'} = k$ ou encore $A'C' = k.AC$; d'où : $\overrightarrow{A'C'} = k\overrightarrow{A'B'}$ puisque les points A', B'et C' sont alignés dans cet ordre.

Math AS.indd 144 15/07/2024 15:31:27

4.2. Théorème de Thalès version vectorielle :



Supposons maintenant que : $\overrightarrow{AM} = k.\overrightarrow{AB}$

$(M \in (AB))$ et $(MN)//(BC)$.

Projetons (AB) *sur* (AC) *parallèlement à* (BC)

Le point A a pour projeté A et M a pour projeté N car :

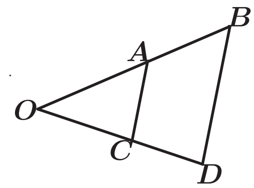
$(MN)//(BC)$ *et C est le projeté de B. Comme* $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$ *alors* $\overrightarrow{AN} = k\overrightarrow{AC}$.

Propriété 5 : Enoncé de la version vectorielle du théorème de Thalès

ABC est un triangle ; M un point de (AB) *distinct de A et N un point de* (AC) *distinct de A.* ① *si* $\begin{cases}\overrightarrow{AM} = k.\overrightarrow{AB}\\ \overrightarrow{AN} = K.\overrightarrow{AC}\end{cases}$, *alors* $\overrightarrow{MN} = k\overrightarrow{BC}$ *(donc* (MN) *et* (BC) *sont parallèles).*

② *si* $\begin{cases}\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}\\ (MN)//(BC)\end{cases}$, *alors* $\overrightarrow{AN} = k.\overrightarrow{AC}$.

Exemple :



Sur la figure ci-contre, les droites (AC) *et* (BD) *sont parallèles, On donne :*

$OA = 2{,}5\ cm; OB = 3\ cm; OC = 2\ cm et BD = 3{,}6\ cm.$

Calcule OD et AC. En déduis que : $\overrightarrow{BD} = \frac{6}{5}\overrightarrow{AC}$.

Réponse :

1re étape :

$(AC)//(BD)$, *donc les triangles OAC et OBD sont dans une configuration de Thales.*

On peut alors utiliser le théorème de Thalès.

On écrit l´égalité des rapports :

Côtés de AOC		
OA	OC	AC
Côtés de BOD		
OB	OD	BD

2^e^ étape : *On utilise les données numériques.*

$\frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD} = \frac{AC}{BD}$ *ou encore*: $\frac{2,5}{3} = \frac{2}{OD} = \frac{AC}{3,6}$. *Donc*

$$= \begin{cases} OD = \dfrac{3 \times 2}{2,5}, & d'où\ OD = \dfrac{6}{2,5} = 2,4. \\ AC = \dfrac{3,6 \times 2,5}{3}, & d'où\ AC = \dfrac{9}{3} = 3. \end{cases}$$

$\frac{AC}{BD}$ *se traduit par :* $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{BD}$, *puisque* $\overrightarrow{BD}$ *et* $\overrightarrow{AC}$ *ont le même sens, donc* $k > 0$ *et*

on a alors : $AC = \|\overrightarrow{AC}\| = |k| \times \|\overrightarrow{BD}\| = k \times BD$ *c'est-à-dire :* $3 = k \times 3,6$, *d'où*

$k = \frac{3}{3,6} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$

II. Je sais faire :

Enoncés des exercices d'application :

Exercice d'application 1 :

ABCD est un parallélogramme de centre O, Quelles sont les projetés des points A, B, C et D sur (BD) parallèlement (DC) ?

Exercice d'application 2 :

ABC est un triangle, la médiane issue de C coupe $[AB]$ en M, la médiane issue de A coupe $[BC]$ en N et soit K le milieu de $[BC]$. Soit p la projection sur (BC) parallèlement à (AC).

Complète :

$p(B) = \cdots ; p(C) = \cdots ;\ p(A) = \cdots ;\ p(AB) = \cdots ;\ p(M) = \ldots\ldots ;\ p([BC] = \cdots$

Exercice d'application 3:

Soient ABC est un triangle et M le point défini par: $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.

1. *Construire le point M' le projeté de M sur (AC) Parallèlement à (BC)*
2. *Montre que* $\overrightarrow{AM'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$. *Et en déduire que :* $\overrightarrow{MM'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.

Solutions des exercices d'application :

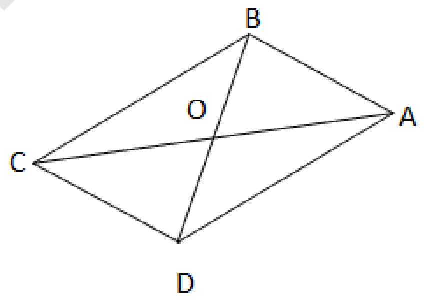
Exercice d'application 1 :

Soit p la projection sur (BD) parallèlement à (DC) ; B, D et O appartiennent à(BD),ils sont donc invariants

$p(B) = B\ ; p(D) = D$ et $p(O) = O$

$(AB)//(DC)$

Donc $p(A) = B\ ,\ p(C) = D$



Exercice d'application 2 :

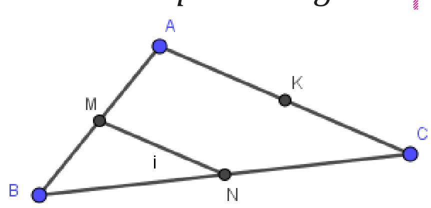
Soit p la projection sur (BC) parallèlement à (AC):

B et C sont sur la droite (BC) donc $p(B) = B\ ; p(C) = C$;

La droite (AC) est la direction la projection sur (BC) donc A et K ont pour image le point C $p(A) = C\ ; p(K) = C$;

$p(AB) = (CB)\ ;\ p([BC] = [BC]$

(MN)//(AC) donc $p(M) = N$



Exercice d'application 3 :

1. La projection sur (AC) *Parallèlementà* *(BC) transforme A vers A, C en lui-même et M vers M'de plus* $\overrightarrow{AM'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$, *et comme la projection conserve le coefficient de l'alignement, alors* $\overrightarrow{AM'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

2. On suppose qu'il existe un nombre réel k tel que :

$\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AM'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ *on peut alors écrire*

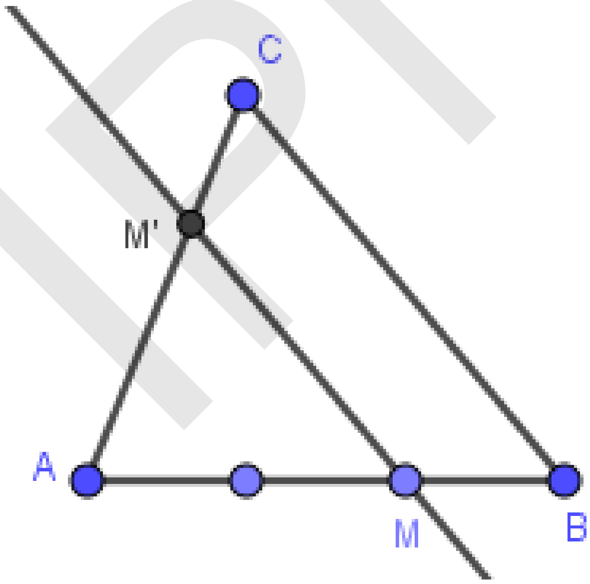
$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AM'}$.

$$= \frac{2}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$$

$$= \frac{2}{3}.(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}).$$

$$= \frac{2}{3}.\overrightarrow{BC}.$$

(la projection conserve le coefficient de l'alignement)



IV. Je m'exerce :

Exercice 1 :

ABC est un triangle quelconque, la médiane issue de A coupe $[CB]$ en I.
H est le projeté orthogonal de B sur $[AI]$ et F est l'image de C dans la projection orthogonale sur (AI).

a. *Fais une figure.*
b. *Quelle est la nature du quadrilatère BHCF ? Justifie ta réponse.*

Exercice 2 :

ABC est un triangle quelconque, soit M un point du segment $[AC]$ (M n'est pas le milieu de $[AC]$).

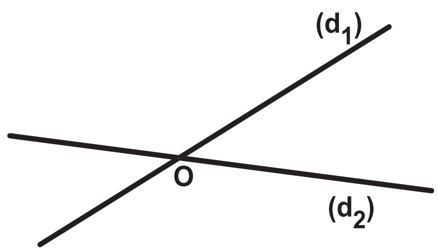
a. *Soit P_1 la projection sur (BC) parallèlement à (AB), construis N le projeté de M par P_1.*
b. *Soit P_2 la projection sur (AB) parallèlement à (AC), construis H l'image de N par P_2.*
c. *Soit P_3 la projection sur (AC) parallèlement à (ou d'axe)(BC), construis K le projeté de H .*
d. *Montre que $AM = KC$.*

Exercice 3 :

Sur la figure ci-contre les droites (d_1) et (d_2) se coupent en O.
Soient A un point de (d_1) et B un point (d_2).
Construis le point M qui vérifie les deux conditions suivantes :

- *A est le projeté de M sur d_1 parallèlement à d_2.*
- *B est le projeté de M sur d_2 parallèlement à d_1.*

a. *Fais une construction.*
b. *Quelle est la nature du quadrilatère AOBM ?*



Exercice 4 :

Δ_1 et Δ_2 deux droites non parallèles, A est un point de Δ_1 et B un point de Δ_2.
M n'est point du plan tel que $M \neq A et M \neq B$.
Construis le point M vérifiant les deux conditions :

- *Le projeté de M sur Δ_1 parallèlement à Δ_2 est B.*
- *$AM = AB$.*

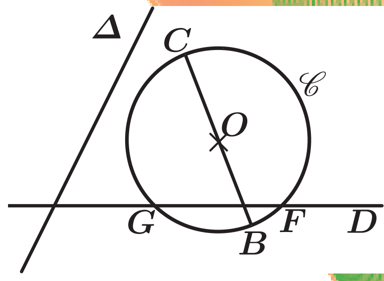
Exercice 5 :

ABCD est un trapèze de bases $[AB]$ et $[DC]$, soit O le milieu du côté $[BC]$ et A' le symétrique de A par rapport à O ?

1. *Fais une figure.*
2. *Démontre la nature du quadrilatère ABA'C.*
3. *Les points C, A' et D sont-ils alignés ? Justifie.*
   Quel est le projeté de A' sur (AD) parallèlement à (AB) ?

Exercice 6 :

Sur la figure ci-contre, on a deux droites sécantes (D) et Δ , un cercle $\mathscr{C}$ de centre O qui coupe la droite (D) en deux points F et G et C est un point du cercle. Soit P_Δ la projection sur (D) parallèlement à Δ.



a. Construis $P_\Delta(C)$ et $P_\Delta(O)$.

b. B et C deux points diamétralement opposés sur le cercle $\mathscr{C}$. Que représente $P_\Delta(O)$ pour $[P_\Delta(C)\ P_\Delta(B)]$?

Exercice 7 :

$ABCD$ est un parallélogramme de centre O.
La perpendiculaire à (BC) qui passe par A coupe (BD) en E.
La perpendiculaire à (AD) qui vient de C coupe (BD) en F.
Soit p la projection sur (BD) parallèlement à (AE).

1. *Quels sont les projetés de A, C, $[AC]$ et le milieu de $[AC]$?*
2. *Montre que $AECF$ est un parallélogramme.*

Exercice 8 :

$ABCD$ et un quadrilatère quelconque M, N, H et K sont les milieux respectifs des côtés $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[AD]$. Soit p la projection sur (MN) parallèlement à (BD).

1. *Que peut-on dire de B' et D', projetés respectifs de B et D dans la projection p ?*
2. *Construis-les projetés respectifs de A et C dans la projection p.*
3. *Quel et le projeté de H dans la projection p ? Que représente-t-il pour $[BC]$? Justifie ta réponse.*
4. *Quelle est l'image de K dans la projection p ? Que représente-t-il pour $[AB]$? Justifie ta réponse.*
5. *Montre que $HK = \frac{1}{2} \times A'C'$.*

Exercice 9 :

ABC et un triangle équilatéral. M est le point du plan vérifiant les deux conditions ci-dessous :

- *C'est le projeté orthogonal de M sur (AC).*
- *B est le projeté orthogonal de M sur (AB).*

1. *Fais une figure.*
2. *Démontre que le triangle BMC est isocèle.*
3. *Démontre que (AM) est la médiatrice de $[BC]$.*
4. *Quelle est l'image du quadrilatère $ABMC$ dans la symétrie orthogonale d'axe (AM) ?*
5. *Montre que la demi-droite $[AM)$ est la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$.*

Exercice 10 :

ABC est un triangle isocèle en C, tous ses angles sont aigus et H est le projeté orthogonal de A sur (BC) et le sommet A est un point de la droite (d).
Construis les sommets A et B en complétant la figure ci-contre.

Exercice 11 :

ABCD est un quadrilatère quelconque, I est le milieu du segment $[AB]$. E est le projeté de I sur (AC) parallèlement à (BC) et F est l'image de E dans la projection sur (AD) parallèlement à (CD).

1- *Fais une figure.*
2- *Démontre que (IF) et (BD) sont parallèles.*

Exercice 12 :

Construis un tringle ABC sachant que : $BC = 5cm$. A se projette orthogonalement en H sur $BC, CH = 4cm$ et $BH = 9cm$. L'aire du triangle $ABC = 7{,}5\ cm^2$.

Exercice 13 :

ABC est un triangle. A' est le milieu du segment$[BC]$, I est le milieu du segment $[AA']$. Les droites (CI) et (AB) se coupent en M et N est le projeté de A' sur (AB) parallèlement à (CI).

1. *Prouve que N est le milieu de (BM).*
2. *Prouve que M est le milieu de $[AN]$.*
3. *Que représente MN par rapport AB ?*

Exercice 14 :

$(d), (d')$ et (d'') trois droites sécantes en un point O.
A et B deux points de D tels que OA=OB.

a. *Construis les projetés C et D des points A et B sur la droite (d')parallèlement à (d'').*
b. *Construis les projetés E et F des point C et D sur (d'') parallèlement à (d).*
c. *Quelle est la nature du quadrilatère AEBF ? Justifie.*

Exercice 15 :

Soit ABCD un parallélogramme de centre O ; on considère les points tels que :
$\overrightarrow{AJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ et E le projeté de J sur (BC) parallèlement à (AB) .

Montre que $\overrightarrow{CE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$ puis $\overrightarrow{JE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

Exercice 16 :

ABCD est un trapèze de bases $[AB]$ et $[CD]$, soient I le milieu de $[AD]$ et J le milieu $[BC]$; M la projection de J sur (DC) parallèlement à (BD) et N la projeté de J sur (AB) parallèlement à (BD).

1. *Montre que $\overrightarrow{IM} = \overrightarrow{NJ}$.*
2. *En déduis que les segments $[MN]$et $[IJ]$ ont le même milieu.*

Chapitre 11 : Théorème de Thalès

I. Activités préparatoires :

Activité 1 :

ABC un triangle quelconque. I et J sont les milieux respectifs de$[AB]$ et $[AC]$. H est le projeté orthogonal de A sur (BC)

a. *Utilise les propriétés du cercle circonscrit à un triangle rectangle pour démontrer que (IJ) est la médiatrice de $[AH]$.*

b. *Que peut-on dire des droites (IJ) et (BC) ?*

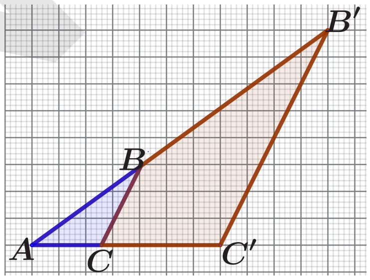
Activité 2 :

ABC est un triangle, I est le milieu de $[AB]$, la droite parallèle à (BC) qui passe par I coupe (AC) en un point J, D est le symétrique de J par rapport à I.

a. *Fais une figure. Dis pourquoi AJBD et JCBD sont des parallélogrammes ?*

b. *Prouve que J est le milieu de $[AC]$.*

Activité 3 :



L'unité sur le quadrillage ci-contre est le centimètre.

a. *Détermine les distances AB, AC, AB' et AC'.*

b. *Vérifie que l'égalité des rapports : $\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC}$.*

c. *Que semble être la position relative des droites (BC) et$(B'C')$?*

d. *Reproduis la figure en se servant du quadrillage de ton cahier*

e. *Place un point E sur (AC)et F sur (AB), n'appartenant pas aux demi-droites respectives $[AC)$ et $[AB)$ tels que : $\frac{AF}{AB} = \frac{AE}{AC}$.*

Que semble être la position relative des droites (BC) et(EF)?

Activité 4 : *Construction de points de la droite (AB)*

Soit (AB) une droite, cherchons deux positions du point M de la droite telles que : $\frac{MA}{MB} = \frac{2}{5}$.

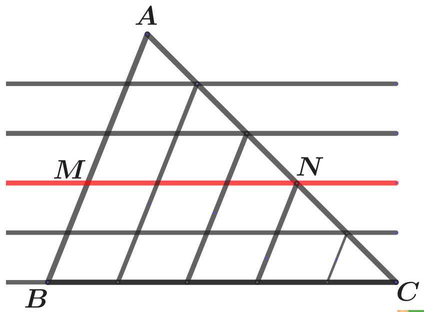
a. *Construis deux droites parallèles Δ, Δ' passant respectivement par A et B.*

b. *Place les points E_1, E_2 sur Δ , le point F sur Δ' tels que : $AE_1 = AE_2 = 2$; $BF = 5$.*

c. *Les droites (E_1F) et (E_2F) coupent (AB) en M_1 et M_2. Vérifier que :*
$$\frac{M_1A}{M_1B} = \frac{AE_1}{BF} = \frac{2}{5} \text{ et } \frac{M_2A}{M_2B} = \frac{AE_2}{BF} = \frac{2}{5}.$$

Activité 5 :

Partie 1 :

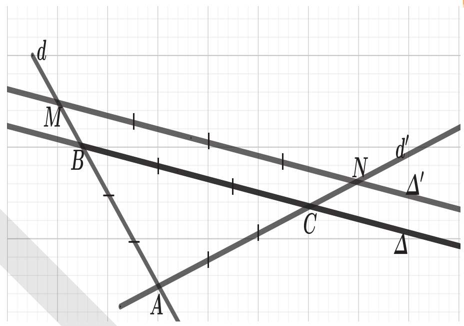


Sur la figure ci-contre, M est le point du côté $[AB]$ du triangle ABC tel que : $\frac{AM}{AB} = \frac{3}{5}$

La parallèle à $(\boldsymbol{BC})$ qui passe par M coupe le côté $[\boldsymbol{AC}]$ en N ?

Quelles sont les valeurs des quotients $\frac{AN}{AC}$ et $\frac{MN}{BC}$?

Partie 2 :



Sur la figure ci-contre

Les droites (d) et (d') sont sécantes en A.

Les points A, B et M sont alignés dans cet ordre sur d ;

Δ et Δ' sont deux droites parallèles, passant respectivement par B et M

Δ coupe (d') en C et Δ' coupe (d') en N.

Les quotients $\frac{AM}{AB}$, $\frac{AN}{AC}$ et $\frac{MN}{BC}$ sont ils égaux ? Justifie.

Activité 6 : Partage d'un segment :

On donne un segment $[AB]$. On veut placer à l'aide de la règle non graduée et du compas le point M qui vérifie : $AM = \frac{2}{5} \times AB$

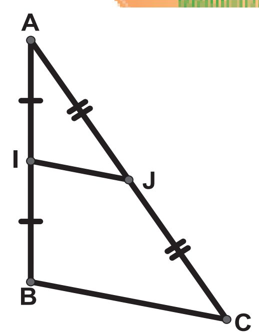
1. Trace une demi- droite $[Ax)$.
2. Choisis une ouverture de compas, puis on trace sur $[Ax)$ sept segments de même longueur à partir de A.
3. Place sur $[Ax)$ les points E et D tels que $AE = 2$ et $AD = 5$.
4. Trace la parallèle à (BD) qui passe par E. Elle coupe $[AB]$ en M. que peux-tu dire des droites (ME) et (BD) ?
5. En appliquant le théorème de Thalès, vérifie que : $AM = \frac{2}{5} \times AB$.

II. Je retiens

I. Droite des milieux : (Rappels)

Propriété 1 :

- *La droite qui passe par les milieux de deux côtés d'un triangle est parallèle au troisième côté.*
  Donc : $(IJ)//(BC)$.
- *Dans un triangle, le segment joignant les milieux de deux côtés est parallèle au troisième côté et mesure sa moitié.*
  $(IJ)//(BC)$ et $IJ = \frac{1}{2}BC$

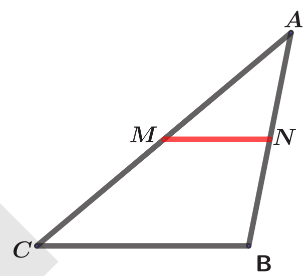


Propriété 2 :

La droite qui passe par le milieu d'un côté d'un triangle et parallèle à un deuxième côté coupe le troisième en son milieu.

M est le milieu de $[AC]$ *et* $(MN)//(BC)$

$N \in (BC)$. *Donc N est le milieu de* $[AB]$



II. Théorème de Thalès :

Propriété 3 : Enoncé du théorème de Thales

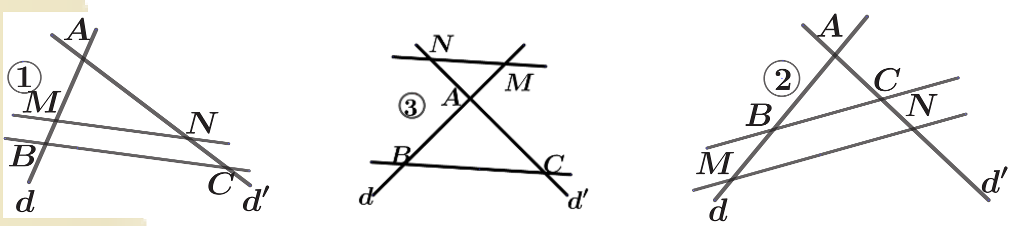
Soient d et d' deux droites sécantes en A.

Soient B et M deux points de d, distincts de A.

Soient C et N deux points de d', distincts de A.

Si les droites (MN) *et* (BC) *sont parallèles, alors* $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$.

Configurations de Thales :



Hypothèses : $\begin{cases} A, B, M \text{ sont alignés sur } d\ ; \\ A, C, N \text{ sont alignés sur } d'\ ; \\ (MN)\ //\ (BC). \end{cases}$ **Conclusion :** $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$.

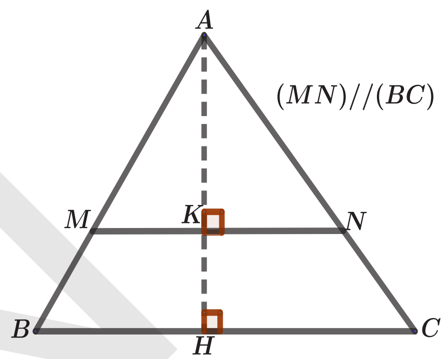
Math AS.indd 154 15/07/2024 15:31:31

Remarque 1 :

Dans l'énoncé du théorème de Thales, lorsque certaines longueurs sont connues, les égalités $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$ *permettent de calculer des longueurs inconnues.*
Par exemples connaissant AM, AB et AC, on peut calculer AN.

Conséquences sur les longueurs et les aires :

Si deux triangles AMN et ABC sont dans la configuration du théorème de Thalès, Les longueurs des côtés du triangle AMN sont proportionnelles, aux longueurs des côtés du triangle ABC, il existe alors un nombre réel k tel que :
$AM = k.AB$; $AN = k.AC$ et $MN = k.BC$;
H et K étant les pieds des hauteurs issues de A,
Les triangles AMK et ABH sont aussi dans la configuration de Thalès :
AK =k AH. On en déduit que :
aire $AMN = \mathrm{k}^2 \times aire ABC$, *en effet :*
aire $AMN = \frac{1}{2}\mathrm{AK} \times \mathrm{MN} = \frac{1}{2}\mathrm{kAK} \times \mathrm{k}BC$ *ou*
encore : $\text{aire AMN} = \frac{1}{2}\mathrm{k}^2\mathrm{AH} \times BC$.



III.Propriété réciproque de Thalès (énoncé)

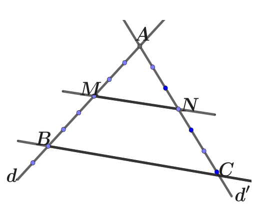
Propriété 3 : **Enoncé de la Propriété réciproque de Thalès**

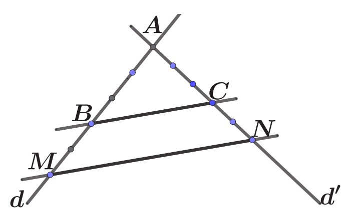
Soient (d) et (d') deux droites sécantes en A.
Soient B et M deux points de (d) distincts de A.
Soient C et N deux points de (d') distincts de A.
Si $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ *et si les points A, B et M et les points A, C et N sont dans le même ordre, alors les droites* (BC) *et* (AN) *sont parallèles.*

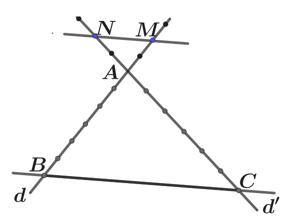
Hypothèses : $\begin{cases} Si\ \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}; \\ A, B \text{ et } M \text{ sont alignés sur } (d) \text{ dans} \\ \text{le même ordre que } A, C \text{ et } N \text{ sur } (d'). \end{cases}$ ***Conclusion :*** $(MN)//(BC)$

Remarque 2 :

- *Cette propriété est appelée aussi propriété indirecte de Thales.*
- *Voici les trois exemples types de configurations souvent rencontrées dans les exercices.*







Remarque 3 :

Dans la pratique, il est question d'appliquer la propriété réciproque du théorème de Thales pour démontrer que deux droites sont parallèles ou la contraposée du théorème de Thalès pour démontrer que deux droites ne sont pas parallèles.

Exemple 1 :

ABC est un triangle avec AB=5cm et AC= 6cm. M est le point de $[AB]$ *tel que AM=2cm et N est le point de* $[AC]$ *tel que* $AN = 2{,}4\ cm$

Réponse :

Comparons : $\frac{AM}{AB}$ *et* $\frac{AN}{AC}$.

$\frac{AM}{AB} = \frac{2}{5} = 0{,}4$ *et* $\frac{AN}{AC} = \frac{2{,}4}{6} = 0{,}4$

$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$, *donc d'après le théorème de Thalès, (MN) et (BC) sont parallèles.*

Exemple 2 :

ABC est un triangle avec AB=5cm et AC= 6cm. M est le point de $[AB]$ *tel que AM=2cm et N est le point de* $[AC]$ *tel que* $AN = 2{,}7\ cm$

Réponse :

Comparons : $\frac{AM}{AB}$ *et* $\frac{AN}{AC}$.

$\frac{AM}{AB} = \frac{2}{5} = 0{,}4$ *et* $\frac{AN}{AC} = \frac{2{,}7}{6} = 0{,}45$

$\frac{AM}{AB} \neq \frac{AN}{AC}$, *donc d'après la contraposée du théorème de Thalès, (MN) et (BC) ne sont pas parallèles.*

III. Je sais faire

Enoncés des exercices d'application :

Exercice d'application 1 :

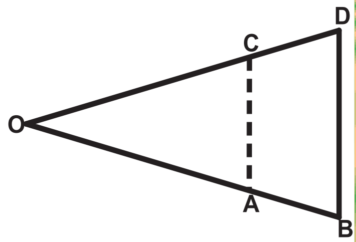
Construis un triangle ABC isocèle en A. Marque I, J et K, milieux respectifs des côtés $[AB]$, $[AC]$ *et* $[BC]$.

1. *Fais une figure*
2. *Quelle est la nature du triangle IJK ? Justifie ta réponse.*
3. *Que penses-tu de IJK si le triangle ABC est isocèle rectangle en A ?*

Exercice d’application 2 :

1. Calcule une longueur :

   Sur la figure ci-contre, les droites (AC) et (BD) sont parallèles.

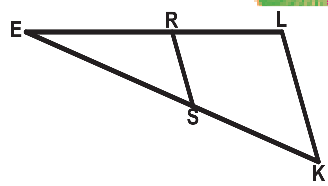
   

   On donne : $OA = 2{,}5cm$; $OB = 3cm$;

   $OD = 2{,}8cm$ et $BD = 3{,}6cm$. Calcule OC et AC.

2. Démontre que les deux droites (RS) et (LK) sont parallèles :

   Sur la figure ci-contre, on donne $EL = 7{,}5cm$

   $ER = 4cm$; $ES = 4{,}8cm$ et $EK = 9cm$.

   Démontre que les droites (RS) et (KL) sont parallèles.

Exercice d’application 3 :

1. Construis un triangle EFG tel que : $\boldsymbol{EF = 3{,}6\ cm}$,
$\boldsymbol{EG = 5{,}4\ cm\ et\ FG = 4{,}5cm}$.

2. Place sur la demi-droite $[\boldsymbol{EF})$ le point K tel que $EK = 6$ cm.
La parallèle à $(\boldsymbol{FG})$ qui passe par K coupe (EG) en L.

3. Ecris les égalités obtenues en appliquant la propriété directe de Thales.
En déduis que $\dfrac{EL}{EG} = \dfrac{6}{3{,}6}$ et calcule EL.

Exercice d’application 4 :

ABC est un triangle tel que$AB = 4cm, AC = 6cm$ et $BC = 5$ cm. Soit $M \in [AB]$ tel que $AM = 3cm$,la parallèle à (AC) passant par M coupe (BC) en N.
Calcule AN et MN.

Exercice d’application 5 :

ABC est un triangle rectangle en A avec $BC = 5cm$ et $AC = 4cm$.

a. Calcule le périmètre $\mathcal{P}$ et l’aire $\mathcal{A}$ du triangle ABC

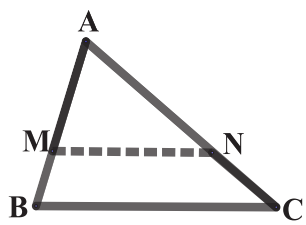
b. M est le point de $[BC]$ tel que $BM = 3cm$. N est le projeté orthogonal de M sur (AB). En déduis $\mathcal{P}'$ et $\mathcal{A}'$ le périmètre et l’aire du triangle BMN.

Exercice d’application 6 :

On considère la figure ci-contre et on donne :

$AM = 2cm$; $AB = 3cm$; $AC = 4{,}5$ cm et $NC = 1{,}5$ cm.

(MN)et (BC) sont- elles parallèles ?



Exercice d’application 7 :

Trace un segment [AB]. A l’aide de la règle non graduée et du compas, place le point P sur [AB] tel que : $AP = \frac{3}{7}AB$

Math AS.indd 157 15/07/2024 15:31:32

Solutions des exercices d'application :

Exercice d'application 1 :

1. Comme I, J et K sont les milieux respectifs des côtés $[AB]$, $[AC]$ *et* $[BC]$ *alors d'après le théorème de droites de milieux :* $IK = \frac{1}{2}AC$ *et* $JK = \frac{1}{2}AB$.

Or le triangle ABC est isocèle en A, donc $AB = AC$ *et alors* $IK = JK$ *et le triangle IJK est isocèle en K.*

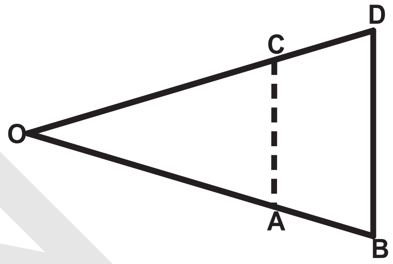
2. Si le triangle ABC est isocèle rectangle en A alors d'après la question précédente, le triangle IJK est isocèle en K.

De plus (AB) *est perpediculaire à* (AC) *et* $(JK)//(AB)$ *et* $(IK)//(AC)$ *alors* (JK) *est perpediculaire à* (IK) *donc le triangle IJK est est isocèle et rectangle en I.*

Exercice d'application 2 :

1. Calcule des distances :

Les points O, A et B sont alignés, les points O, C et D sont alignés aussi et dans le même ordre et les droites (AC) et (BD) sont parallèles.



Alors d'après le théorème de Thalès :

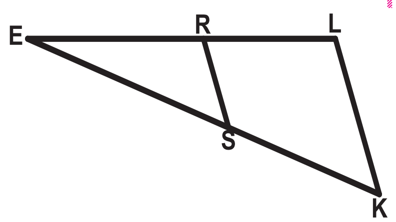
$$\frac{OD}{OC} = \frac{OB}{OA} = \frac{BD}{AC}$$

$\frac{\mathbf{2{,}8}}{\boldsymbol{OC}} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2{,}5}} = \frac{\mathbf{3{,}6}}{\boldsymbol{AC}}$ *alors* $OC = \frac{\mathbf{2{,}8\times2{,}5}}{\mathbf{3}} = \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{3}}$

et $AC = \frac{\mathbf{3{,}6\times2{,}5}}{\mathbf{3}} = 3$

2. Démontrons que les droites (RS) *et* (KL) *sont parallèles :*

$\frac{EK}{ES} = \frac{9}{4{,}8} = 1{,}875$ *et* $\frac{EL}{ER} = \frac{7{,}5}{4} = 1{,}875$



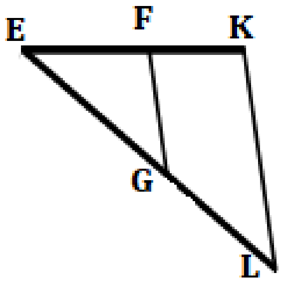
E, R et L sont alignés et, E, S et K sont aussi alignés dans le même ordre. De plus $\frac{EK}{ES} = \frac{EL}{ER}$

Alors d'après le réciproque du théorème de Thalès, les droites (RS) *et* (KL) *sont parallèles.*

Exercice d'application 3 :

Les points E, F et K sont alignés, les points E, G et L le sont aussi et dans le même ordre et les droites (KL) et (FG) sont parallèles.

Alors d'après le théorème de Thalès :



$$\frac{EL}{EG} = \frac{EK}{EF} = \frac{KL}{FG}$$

Donc $\frac{EL}{EG} = \frac{6}{3{,}6}$ *soit* $\frac{EL}{5{,}4} = \frac{6}{3{,}6}$

alors $EL = \frac{6\times5{,}4}{3{,}6}$ *=9 cm*

Exercice d'application 4 :

Calcule de AN et MN.

Les points A, M et B sont alignés, les points A, N et C sont alignés aussi et dans le même ordre et les droites (AC) et (MN) sont parallèles. Alors d'après le théorème de Thalès : $\frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN} = \frac{BC}{MN}$

Soit $\frac{4}{3} = \frac{6}{AN} = \frac{5}{MN}$

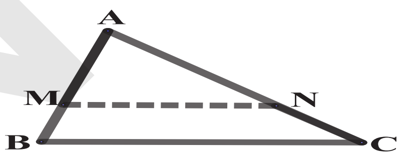
Donc $\frac{4}{3} = \frac{6}{AN}$ *alors* $AN = \frac{6\times3}{4} = 4{,}5$ *cm*

Et $\frac{4}{3} = \frac{5}{MN}$ *alors* $MN = \frac{5\times3}{4} = 3{,}75$ *cm*

Exercice d'application 5 :

Le triangle ABC est rectangle en A, alors d'après le théorème de Pythagore
$AB^2 + AC^2 = BC^2$, *donc* $AB^2 = BC^2 - CA^2 = 25 - 16 = 9$ *alors* $AB = 3$
Le périmètre est $\mathcal{P} = AB + BC + CA = 3 + 5 + 4 = 12\ cm$
L'aire est $\mathcal{A} = \frac{AB\times AC}{2} = \frac{3\times4}{2} = 6\ cm^2$

b. Le triangle AMN est une réduction du triangle ABC, de rapport $k = \frac{AM}{AB} = \frac{2}{3}$
alors son périmètre $\mathcal{P}' = \frac{2}{3}\mathcal{P} = \frac{2}{3}\times 12 = 8\ cm$



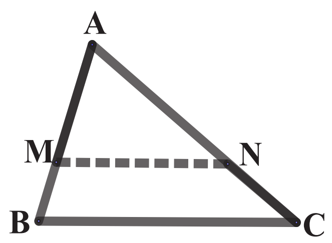
Et l'aire $\mathcal{A}' = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \mathcal{A} = \frac{4}{9}\times 6 = \frac{8}{3} cm^2$

Exercice d'application 6 :

$AN = AC - NC = 4{,}5 - 2 = 2{,}5\ cm.$

Je vérifie si (MN) est parallèle à (BC) :

$\frac{AB}{AM} = \frac{3}{2} = 1{,}5$ et $\frac{AC}{AN} = \frac{4{,}5}{2{,}5} = 1{,}8$



A, N et C sont alignés et, A, M et B sont aussi et dans le même ordre.

De plus $\frac{AB}{AM} \neq \frac{AC}{AN}$

Alors d'après la contraposée du théorème de Thalès, les droites (BC) *et* (MN) *ne sont pas parallèles.*

Exercice d'application 7 :

Trace un segment [AB]. *A l'aide de la règle non graduée et du compas, place*

Pour la construction le point P sur [AB] *tel que :* $AP = \frac{3}{7}AB$, *je suis les étapes suivantes :*

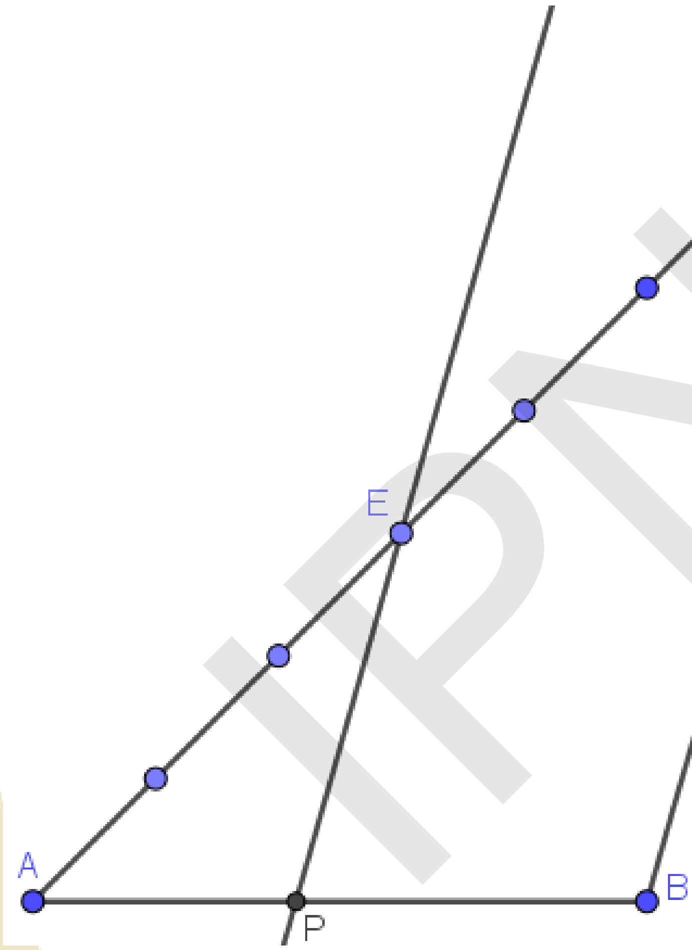
- Je Trace une demi- droite $[Ax)$.

- Je Choisis une ouverture de compas, puis on place sur $[Ax)$ sept segments de même longueur à partir de A.

- Je Place sur $[Ax)$ les points E et D tels que $AE = 3$ et $AD = 7$.

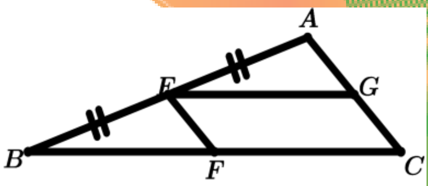
- Je trace (à l'aide de la règle non graduée et du compas,) la parallèle à (BD) qui passe par E. Elle coupe $[AB]$ au point P.

Puisque les droites (PE) et (BD) sont parallèles, on a $\frac{AP}{AB} = \frac{AE}{AD} = \frac{3}{7}$ donc $AP = \frac{3}{7}AB$



IV. Je m'exerce

Exercice 1 :

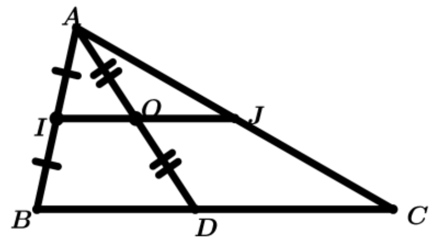


On considère la figure ci-contre :

Les droites (EF)et (AC) sont parallèles.

1. *Montre que F est le milieu de [BC].*
2. *G est-il le milieu de [AC] ? Si oui quelle est la nature du quadrilatère EFCG ?*

Exercice 2 :

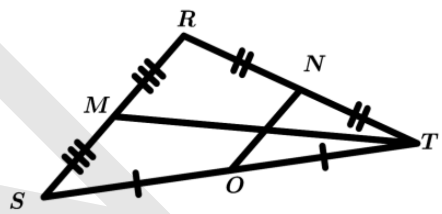


ABC est un triangle et D est un point du côté $[BC]$, avec le codage de la figure ci-contre :

a. *Montre que les droites (IO) et (BD) sont parallèles.*

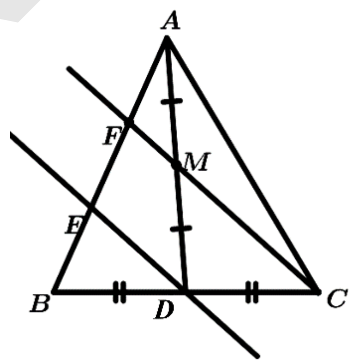
b. *Montre que J est le milieu de [AC].*

Exercice 3 :



Avec le codage de la figure ci-contre : montre que les droites (NO) et (RS) sont parallèles.

Exercice 4 :



ABC est un triangle. D est le milieu de $[BC]$. M est le milieu de [AD]. La droite (CM) coupe (AB) en F.

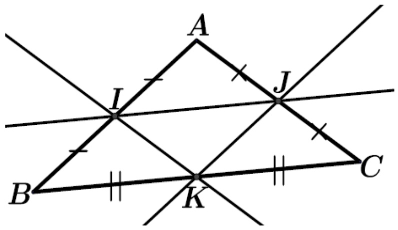
Par D on trace la parallèle à (CF) ; elle coupe (AB) en E.

a. *Fais une figure.*

b. *Démontre que F est le milieu de $[AE]$.*

c. *Démontre que E est le milieu de $[BF]$.*

Exercice 5 :



Observe bien la figure ci-contre, puis :

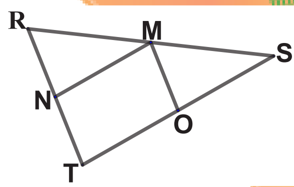
a. *Montre que les droites (IJ) et (BC) sont parallèles.*

b. *Montre que les droites (JK) et (AB) sont parallèles.*

c. *Montre que les droites (IK) et (AC) sont parallèles.*

Exercice 6 :

On donne la figure ci-contre :

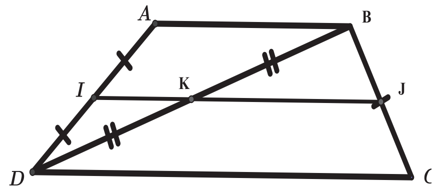


Les droites (MO) *et* (RT) *sont parallèles et* $MO = \frac{1}{2}RT$.

Montre que O est le milieu de [ST].

Exercice 7 :

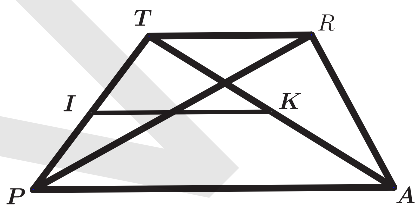
ABCD est un trapèze de bases [AB] et [CD]. I est le milieu du segment [AD] et K est le milieu du segment [BD].



1. a. *Montre que* (IK) *et* (AB) *sont parallèles.*
   b. *En déduis que* (KJ) *et* (DC) *sont parallèles.*
   c. *Montre J est le milieu de [BC].*
2. a. *Exprime IK en fonction de AB.*
   b. *Exprime KJ en fonction de DC.*
   c. *Exprime IJ en fonction de AB et DC.*

Exercice 8 :

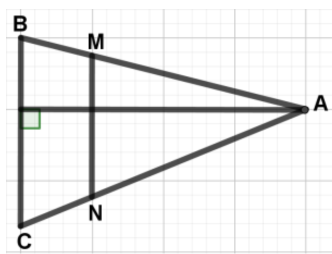
Le quadrilatère TRAP est un trapèze de bases $[TR]$ *et* $[PA]$. *On appelle I le milieu de* $[TP]$ *et K celui de* $[TA]$.



a. *Que peut-on dire des droites* (IK) *et* (TR) *?*
b. *La droite* (IK) *coupe* $[PR]$ *en L et* $[RA]$ *en J. Que peut-on dire des points L et J ?*

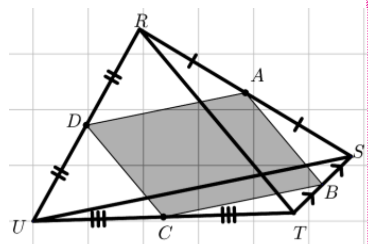
Exercice 9 :

A l'aide du quadrillage, trouve la valeur du quotient $\frac{AM}{AB}$ *,puis recopie et complète les égalités en lisant la figure :*



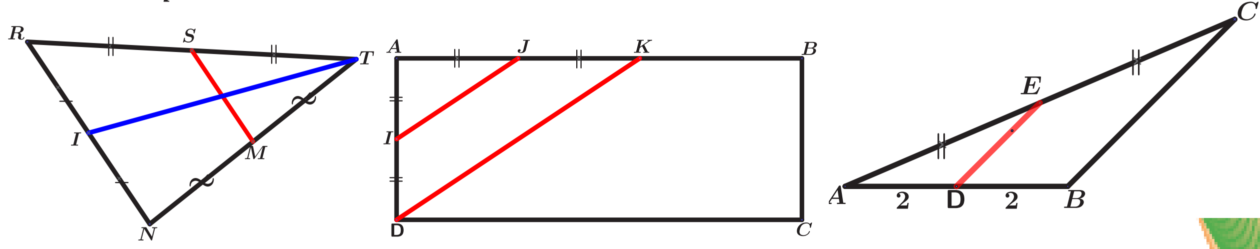
$$\frac{AM}{AB} = \frac{A\,...}{A\,....} = \frac{....}{.....} = \cdots$$

Exercice 10 :



1. *Observe la figure ci-contre.*
   Quelle semble être la nature du quadrilatère ABCD ?
2. *Pour démontrer le résultat de la question 1.*
   a. *Démontre que les droites* (AB) *et* (CD) *sont toutes les deux parallèles à la droite* (RT).
   b. *Démontre que les droites* (AD) *et* (BC) *sont toutes deux parallèles à la droite* (US).
   c. *Que peux-tu en conclure ?*

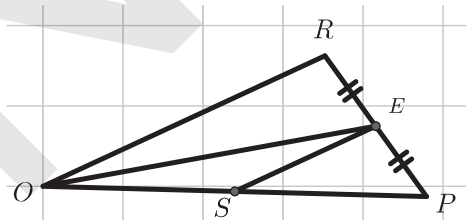
Exercice 11 :
Apres avoir extrait toutes les données de la figure dans chacun des cas suivants, démontre que :



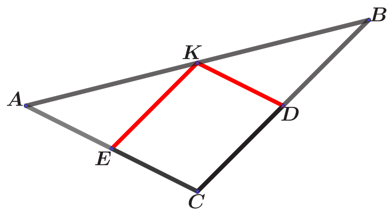
a. (SM) *et* (RN) *sont parallèles ;*
b. (IJ) *et* (DK) *sont parallèles ;*
c. (ED) *et* (BC) *sont parallèles.*

Exercice 12 :
ABC est un triangle rectangle en B, I, J et K sont les milieux respectifs des segments $[AB]$,$[AC]$ *et* $[BC.]$
1. Fais une figure.
2. Démontre que IJK est un triangle rectangle.

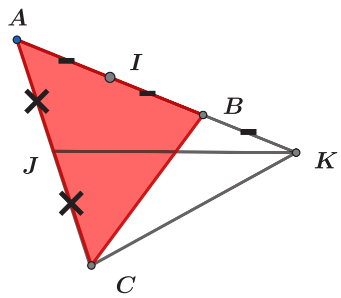
Exercice 13 :
Sur la figure ci-contre :
Les droites (ES) *et* (RO) *sont parallèles.*
Reproduire la figure
Démontre que S est le milieu de $[PO]$.



Exercice 14 :
Sur la figure ci-contre CDKE est un parallélogramme.
E est le milieu de $[AC]$.
Démontre que D est le milieu de $[BC]$.
Que peut-on dire des droites (ED) *et* (AB) *?*



Exercice 15 :
1. Enonce toutes les données de la figure ci-contre
2. La droite (BC) *coupe* (KJ) *en L.*
Démontre que L est le milieu de $[KJ]$.

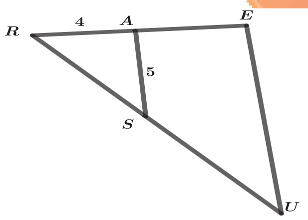


Exercice 16 :

Les droites (AS) et (UE) sont parallèles.

Les droites (ES) et (AU) se coupent en R.

Calcule RU puis en déduire AU.

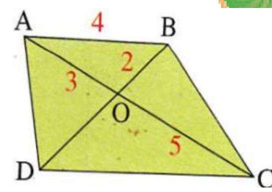


Exercice 17 :

ABCD est un trapèze avec : $(AB) // (CD)$, ses diagonales se coupent en O.

a. *Cite deux triangles qui forment une configuration de Thalès.*

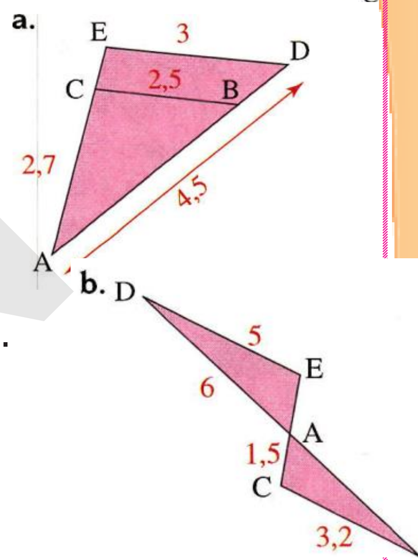
b. *Calcule OD et DC : donne, les valeurs exactes, puis les arrondis au dixième.*



Exercice 18 :

Les droites (EC) et (BD) se coupent en A et $(BC) // (DE)$.

Calcule AB et AE sous forme de quotients d'entiers.



Exercice 19 :

Les droites (EC) et (BD) se coupent en A et $(BC) // (DE)$.

Calcule AB et AE sous forme de quotients d'entiers.

Exercice 20 :

ABC est un triangle tel que $AB = 5$ cm, $AC = 4$ cm et $BC = 3{,}6$cm.

D est le point de la demi-droite [AC] tel que $AD = 7$ cm. La parallèle à (AB) passant par D coupe la droite (BC) en E.

a. *Fais une figure.*

b. *Calcule le périmètre du triangle CDE.*

Exercice 21 :

1. *Construis un triangle EFG tel que :* $EF = 3{,}6$ cm, $EG = 5{,}4$ cm et $FG = 4{,}5$cm.

2. *Place sur la demi-droite $[EF)$ le point K tel que $EK = 6$ cm.*
La parallèle à (FG) qui passe par K coupe (EG) en L.

3. *Ecris les égalités obtenues en appliquant la propriété directe de Thales.*

En déduis que $\dfrac{EL}{EG} = \dfrac{6}{3{,}6}$ *et calcule EL.*

Exercice 22 :

ABCD est un rectangle avec $AB = 3$ *cm et* $AD = 8cm$.

E est le point du segment [AD] tel que AE = 3 cm.

F est le point d'intersection des droites (CE) *et* (AB).

a. *Fais une figure.*

b. *Explique pourquoi les triangles EAF et EDC forment une configuration de Thalès et en déduis les longueurs FA et FB.*

Calcule les rapports $\frac{FA}{FB}$ *et* $\frac{AE}{BC}$.

Pourquoi pouvait-on prévoir leur égalité ?

Exercice 23 :

ABCD est un trapèze avec $(AB) // (DC)$.

On donne $AB = 4$ *cm,* $DC = 7$ *cmet*$AD = 5$ *cm*.

M est le point du segment [DA] tel que $DM = 2cm$.

K est le point d'intersection des droites (AB) *et* (CM).

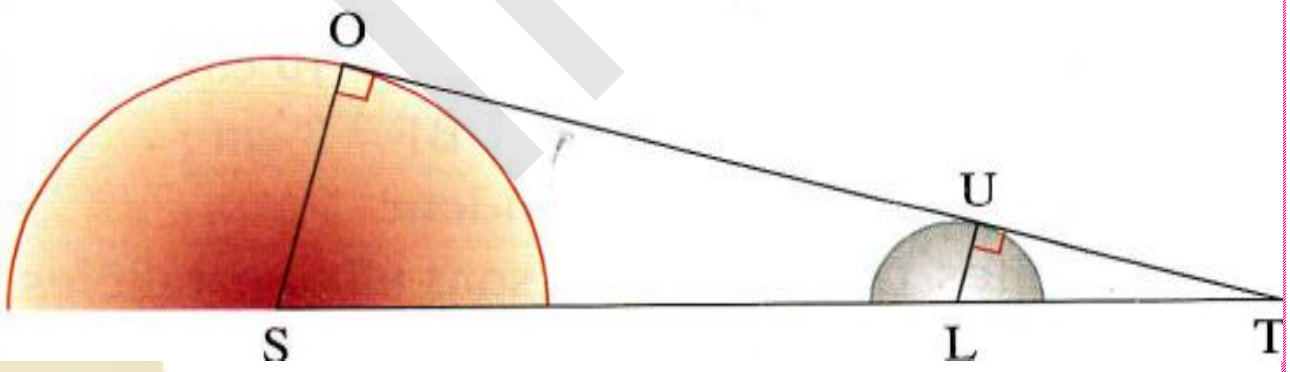
a. *Fais une figure.*

b. *Indique, en justifiant la réponse, deux triangles qui forment une Configuration de Thalès.*

c. *Calcule* KA *et* KB.

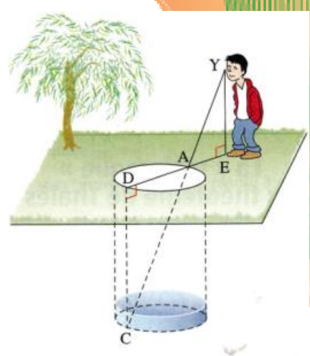
Exercice 24 :

Une personne observe une éclipse de soleil. Cette situation est schématisée ci-dessous.



L'observateur est en T. Les points S (centre du Soleil), L (centre de la Lune) et T sont alignés. Le rayon SO du Soleil mesure 695 000 km.
Le rayon LU de la Lune mesure 1736 km. La distance TS est 150 millions de km.
Calcule la distance TL (on donnera l'arrondi au km)

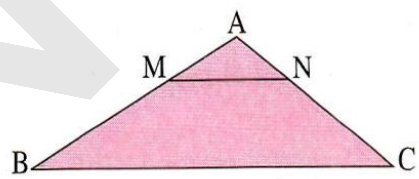
Exercice 25 :



[AD] est un diamètre d'un puit de forme cylindrique.
Le point C est à la verticale de D, au fond du puit.
Une personne se place au point E de la demi-droite [DA) de sorte que ses yeux soient alignés avec les points A et C.
On note Y le point correspondant aux yeux de cette personne. On sait que :
$AD = 1{,}5\,m\,;\; EY = l{,}7m\,;\; EA = 0{,}6m.$

1. *Démontre que les droites (DC) et (EY) sont parallèles.*
2. *Calcule DC, la profondeur du puit.*

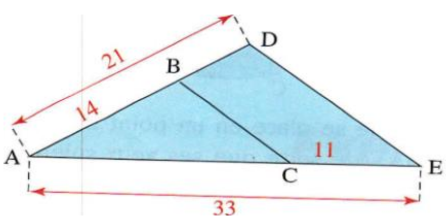
Exercice 26 :



ABC est un triangle tel que AB =6cm et BC = 9cm.
M est le point du segment [AB] tel que AM = 2cm.
La droite parallèle à (BC) passant par M coupe [AC] en N.

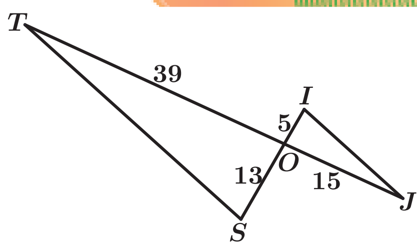
1. *a. Calcule MN.*
b. donne la valeur de $\dfrac{AN}{AC}$.
2. *On suppose que* $NC = 4{,}5\ cm$ *et on note* $AN = x$.
   a. *Exprime AC en fonction de x.*
   b. *Explique pourquoi* $\dfrac{x}{x+4{,}5} = \dfrac{1}{3}$.
   c. *Résous cette équation et donne la longueur AN puis la longueur AC.*

Exercice 27 :



Les droites (BD) et (CE) se coupent en A.
a. *Donne l'écriture décimale* $\dfrac{AD}{AB}$ *et de* $\dfrac{AE}{AC}$.
b. *En déduis que (BC) et (DE) sont parallèles.*

Exercice 28 :



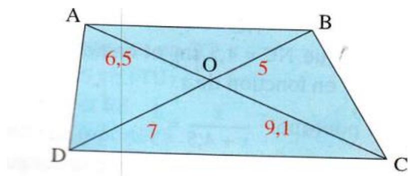
Les droites (IT) et (JS) se coupent en O.

a. Donne l'écriture décimale de $\frac{OI}{OJ}$ *et de* $\frac{OJ}{OS}$ *;*

avec le même dénominateur.

b. En déduis que (IJ) et (ST) sont parallèles.

Exercice 29 :



Les droites (AC) et (BD) se coupent en O.

Le quadrilatère ABCD est-il trapèze ?

Exercice 30 : Relier la géométrie et le numérique

ABCD est un rectangle avec $AB = 6cm$ et $AD = 3\ cm$. M est un point du segment [AB]. La parallèle à (BD) passant par M coupe (AD) en P et (BC) en N. On pose $BM = x$.

1. *Montre que :* $AP = \frac{1}{2}(6 - x)$ *et* $BN = \frac{1}{2}x$.
2. *a. On note $A_1(x)$ l'aire du triangle APM en fonction de* x.

Montre que $A_1(x) = 9 - 3x + \frac{1}{4}x^2$.

   c. On note $A_2(x)$ l'aire du triangle MCN en fonction de x.

   Montre que : $A_2(x) = \frac{3}{2}x + \frac{1}{4}x^2$.

3. *Résous l'inéquation :* $9 - 3x + \frac{1}{4}x^2 > \frac{3}{2}x + \frac{1}{4}x^2$

Interprète géométriquement le résultat.

4. *Démontre que l'aire du trapèze PANC ne dépend pas de x.*

Exercice 31 : *Cercle et carré*

Les points B et C sont des points du cercle de diamètre $BA = 8cm$.

La figure devra être complétée au fur et à mesure des questions.

1. *a. Quelle est la nature du triangle ABC ? Justifie ta réponse.*

   b. Calcule AC.

   c. Calcule la mesure de $\widehat{ABC}$ arrondie au dixième.

2. *M est le point de [AB] tel que $BM = 2cm$. N est le point de [AC] tel que :*

$AN = 4{,}5\ cm$. Montre que les droites (MN) et (BC) sont parallèles.

3. *Le point D est sur la demi-droite $[AC)$ avec $AD = 8cm$. Le point E est l'image du point B par la translation qui transforme A en D. Montre que ABED est un carré.*
4. *F est le point d'intersection des droites (ED) et (BC).*

   a. Démontre que (DE) est parallèle à (BA).

   b. Calcule les valeurs exactes de CF et DF.

Exercice 32 : Triangle équilatéral et losange

Le point O est le centre du cercle circonscrit à un triangle équilatéral ABC. De plus $OB = 6cm$ et la droite (OA) coupe le segment [BC] en A'.

1. *Fais une figure.*
2. *Justifie que l'angle $\widehat{OBC}$ mesure 30°.*
3. *a. En utilisant $\sin\widehat{OBA'}$ démontre que la longueur du segment [OA'] est 3cm.*
   Démontre que la longueur du segment [BA'] est $3\sqrt{3}$cm.
   En déduis la longueur exacte du segment [BC].
4. *Soit E le point du segment [OC] tel que $OE = 2cm$.*
   La parallèle à (BC) passant par le point E coupe le segment [OB] en F.
   Calcule les longueurs des segments [OF] et [EF].
5. *Démontre que l'aire du triangle COB est $9\sqrt{3}cm^2$.*
6. *Le cercle circonscrit au triangle ABC coupe la droite (AA') en A et en un autre point noté K. Démontre que le quadrilatère OBKC est un losange.*
7. *Calcule l'aire du losange OBKC.*

Exercice 33 :

ABC est un triangle tel que, l'unité de mesure est le centimètre :

$AB= 4$; $BC = 7$ *et* $AC = 5$.

Sur le côté $[BC]$, on place le point M tel que $AM = 3cm$.

La parallèle à (BC) passant par M coupe (AC) en P. Calcule MP.

Exercice 34 :

1. *Construis un triangle ayant pour dimensions :*
   $AB = 7cm$; $AC = 4cm$ *et* $BC = 5cm$.
2. *Soit M le point situé sur le segment $[AB]$, tel que : $AM = 1cm$.*
   La parallèle à la droite (AC) qui passe par M coupe (BC) en N.
   Calcule BN et MN. (Donne les résultats d'abord sous forme fractionnaire et ensuite sous forme décimale arrondie à $\frac{1}{10}$ près.)

Exercice 35 : L'unité de longueur est le centimètre.

Soit un triangle ABC tel que : AB=5 ; BC=7,5 et AC=8. D est le point du Segment $[AB]$ tel qu'AD=2. La parallèle à (BC) passant par D coupe la droite (AC) en E.

1. Construis la figure.

2. Calcule DE.

3. Démontre que les angles $\widehat{DEB}$ et $\widehat{EBC}$ sont égaux.

4. Sachant que DE =3, donne la nature du triangle DEB, puis déduis que la demi-droite $[BE)$ d'origine B contenant le point E est la bissectrice de l'angle $\widehat{DRC}$.

Exercice 36 :

1^er^ Cas :

A et B sont deux points donnés. Place le point M sur la droite (AB) tel que :

$$\frac{MB}{MA} = \frac{7}{5}$$

2^emé^ *cas :* *Sur une droite (AB), place le point M tel que :* $\frac{MA}{MB} = \frac{3}{4}$

Exercice 37 :

ABCD est un parallélogramme de centre O. D est la droite parallèle à (AB) passant par O, elle coupe (AD) en I et $[BC]$ en J.

a. Fais une figure.

b. Démontre que I est le milieu de $[AD]$.

c. Que représente J pour $[BC]$? Pourquoi ?

Exercice 38 : L'unité est le centimètre.

Trace un segment $[EF]$ tel que EF=10cm ; puis un demi-cercle de diamètre EF. Sur le demi-cercle ; place le point M tel que EM=8cm. Par M trace la droite (d) perpendiculaire à la droite (EF) ; les droites (d) et (EF) se coupent en P. Par P trace la perpendiculaire à (FM), elle coupe (FM) en G.

1. Démontre que les droites (FM) et (EM) sont perpendiculaires.

2. Démontre que (EM) et (GP) sont parallèles.

3. Calcule la longueur MF puis EP.

4. En déduis la longueur FG.

Exercice 39 :

ROI est un triangle tel que : $RO = 8cm$; $RI = 7cm$ et $OI = 3cm$.

(Voir figure ci-dessous)

Soit M un point du segment RO.

On trace par la parallèle à (OI) qui coupe (RI) en N.

1. On pose $RM = x$ avec $0 \leq x \leq 8$

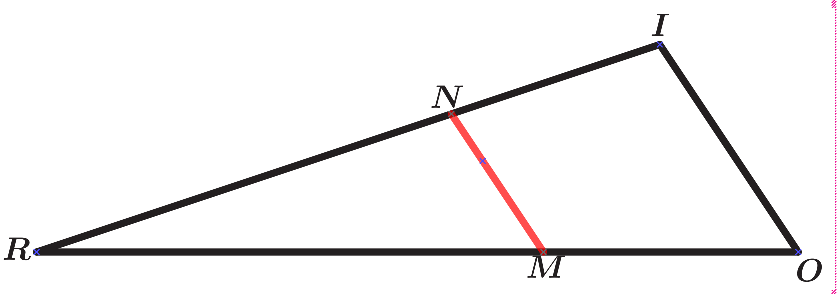
a. Exprime les longueurs RN et MN en fonction de x.

b. Montre que le périmètre du triangle RMN est égal à $\frac{9}{4}x$.

c. Montre que le périmètre du trapèze MOIN est égal à $18 - \frac{3}{2}x$.

2. Détermine x pour que les deux périmètres soient égaux.

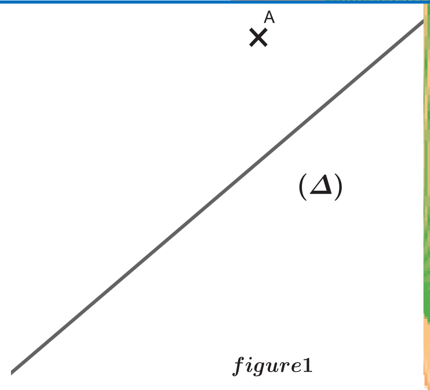
Trace un segment [AB] de longueur 5cm. A l'aide de la règle non graduée et le compas, place le point C sur [AB] tel que : $\frac{BC}{BA} = \frac{4}{5}$



Chapitre12 : Transformations dans le plan

I. Activités préparatoires :

Activité 1 :



Soit A un point quelconque et Δ une droite, figure ci-contre.

1. *Reproduis et construis B tel que Δ est la médiatrice de $[AB]$. On dit que B est le symétrique de A par rapport à Δ.*
2. *Place le point C sur la droite Δ. Quelle est l'image de C par la symétrie par rapport à Δ.*

Activité 2 :

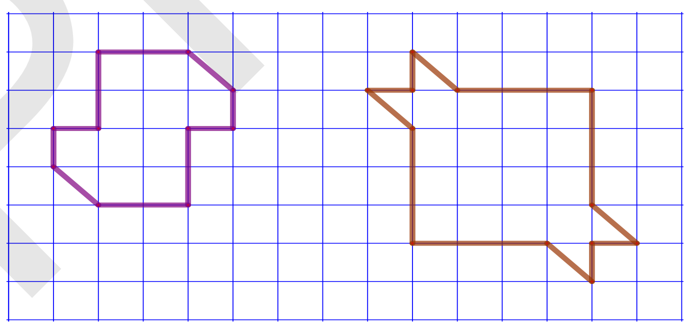
On donne un trapèze ABCD rectangle en A et une droite Δ du plan.

1. *Construis les images des points A, B, C et D par la symétrie axiale S_Δ.*
2. *Complète :* $A \xrightarrow{S_\Delta} \ldots, \ldots \xrightarrow{S_\Delta} B'$, $[AB] \xrightarrow{S_\Delta} \ldots$, $(AB) \xrightarrow{S_\Delta} \ldots$, $[\boldsymbol{AD}] \xrightarrow{S_\Delta} \ldots$.
3. *Place I le milieu de $[BD]$, puis trace le cercle $\mathscr{C}_1$ de centre I passant par A. Le point B appartient-il à ce cercle ?*

Construis l'image du cercle $\mathscr{C}_1$ par S_Δ.Quelles propriétés de S_Δ peux-tu dégager ?

Activité 3 :

Reproduis les deux figures ci-contre et trace, s'il(s) existe(nt), le(s) axe(s) de symétrie de chaque figure.



Activité 4 :

On donne un point O du plan.

1. *Choisis un point A, construis le point A' tel que O est le milieu de [AA'].*
2. *Reprends la question 1 en choisissant un autre point B.*

Activité 5 :

On reprend l'activité 4. On note S_O la symétrie centrale de centre O.

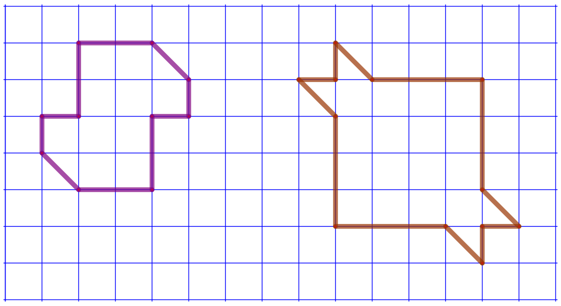
1. *Complète :*$\boldsymbol{A} \xrightarrow{S_O} \ldots, \ldots \xrightarrow{S_O} \boldsymbol{B'}$, $[\boldsymbol{AB}] \xrightarrow{S_O} \ldots$, $(\boldsymbol{AB}) \xrightarrow{S_O} \ldots$.
2. *Choisis un troisième point C pour que ABC soit un triangle rectangle isocèle en A, construis l'image de ABC dans S_O*
3. *Place J le milieu de $[BC]$, puis trace le cercle $\mathscr{C}_2$ circonscrit au triangle ABC.*

Construis l'image de $\mathscr{C}_2$ par S_O.Quelles propriétés de S_O peux-tu dégager ?

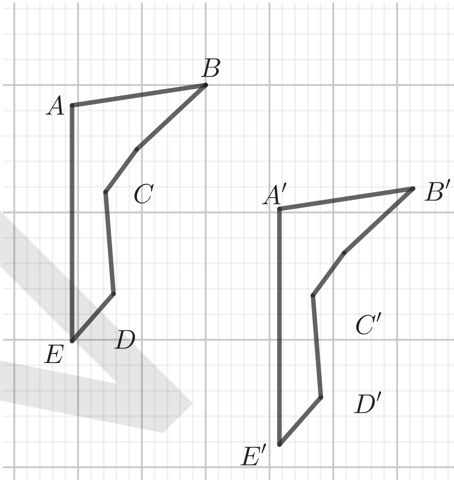
Activité 6 :

On reprend les deux figures ci-contre de l'activité 3.

Pour chaque figure, dis si oui ou non elle possède un centre de symétrie. Si oui indique ce centre.



Activité 7 :



1. Reproduis sur un quadrillage les deux figures ci- contre

2. Trace en vert les flèches allant de :

A vers A' ; B vers B' ; C vers C' ; D vers D' et E vers E'.

Que peut –on dire des vecteurs représentés par ces flèches ?

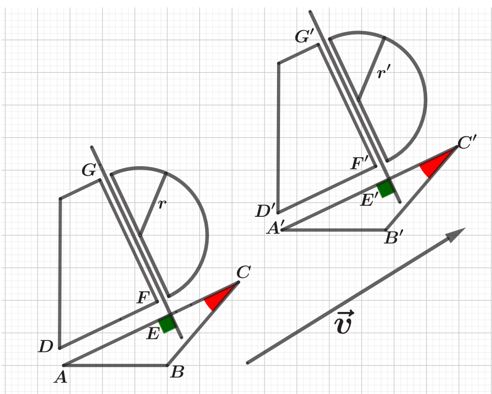
Quelle est la nature de chacun des quadrilatères ABB'A' et ACC'A' ?

3. Cite d'autres quadrilatères de même nature.

On dit que ce déplacement est une translation, on la note $t_{\overrightarrow{AA'}}$

4. *Complète :* $\boldsymbol{A} \xrightarrow{t_{\overrightarrow{AA'}}} \ldots, \boldsymbol{B} \xrightarrow{t_{\overrightarrow{AA'}}} \ldots\ \boldsymbol{C} \xrightarrow{t_{\overrightarrow{AA'}}} \ldots$

Activité 8 :



On donne la figure $\mathscr{F}$ *et son image* $\mathscr{F}'$ *par la translation de vecteur* $\vec{v}$.

Que peut-on dire de ces deux figures ?

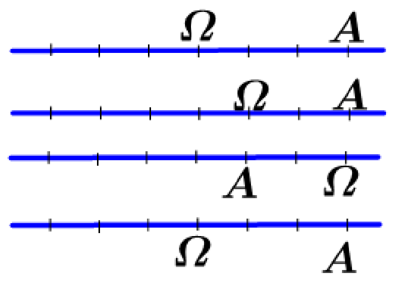
Que peut-on dire :

- *du segment* $[BC]$ *et son image* $[B'C']$ *?*
- *de l'image du milieu de* $[BC]$ *?*
- *du demi-cercle de rayon r et son image ?*
- *de l'image de la droite* (AB) *et son image* $(A'B')$ *?*
- *de l'angle* $\widehat{ABC}$ *et son image* $\widehat{A'B'C'}$ *?*
- *des images des droites parallèles* (AC) *et* (DF) *?*
- *des images des deux droites perpendiculaires* (AC) *et* (FG) *?*

Activité 9 :

Partie 1 :

Place le point B sur une droite D dans les cas suivants :

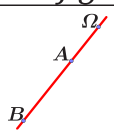
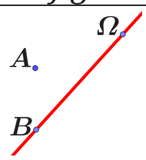
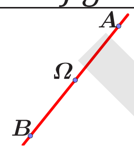
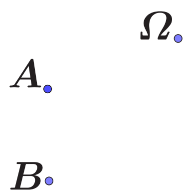


1. $\overrightarrow{\Omega B} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\Omega A}$
2. $\overrightarrow{\Omega B} = -2\overrightarrow{\Omega A}$
3. $\overrightarrow{\Omega B} = 3\overrightarrow{\Omega A}$.
4. $\overrightarrow{\Omega B} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{\Omega A}$. *Que peux-tu dire des points A, B et Ω ?*

Partie 2 :

On considère les deux affirmations suivantes :

1. Il existe un réel $k < 0$; $\overrightarrow{\Omega B} = K\overrightarrow{\Omega A}$. 2. Il existe un réel $k' > 0$; $\overrightarrow{\Omega A} = k'\overrightarrow{\Omega B}$.

Configuration 1	*Configuration 2*	*Configuration 3*	*Configuration 4*
			

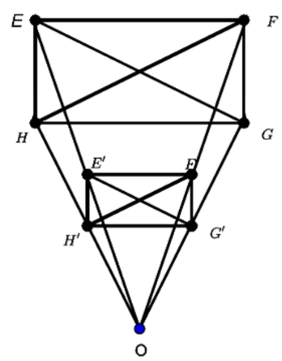
a. *Pour chacune de ces configurations, dis si elle vérifie une, deux ou aucune des affirmations ci-dessus.*

b. *Pour la figure 2 ci-contre, sur quelle demi-droite, il faut placer A pour que la configuration obtenue vérifie l'affirmation 1 ?*

Activité 10 :

Sur la figure ci-contre E'F'G'H' et EFGH sont deux rectangles de côtes parallèles tels que :

$EF = 12$; $FG = 8$, $E'F' = 6$ et $F'G' = 4$.



1. *Sachant que $\frac{OG'}{OG} = \frac{OF'}{OF} = \frac{F'G'}{FG}$, montre que les points O, G et G' sont alignés.*

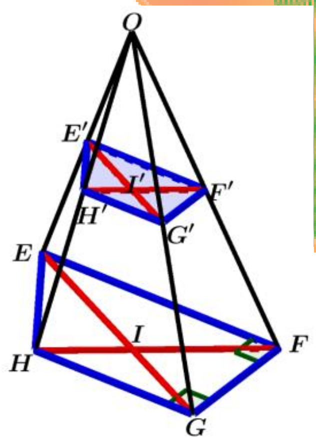
Que peut-on dire des points O, F et F' ?

3. *Détermine un nombre réel k tel que $\overrightarrow{OG'} = k\overrightarrow{OG}$*

4. *Le rectangle E'F'G'H' est-il une réduction ou un agrandissement du rectangle EFGH ?*

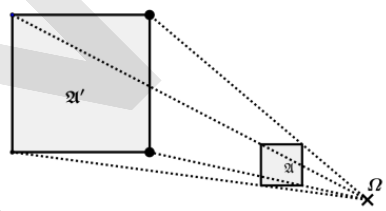
Activité 11 :

Sur la figure ci- contre, on considère l'homothétie h de centre O et de rapport $\frac{1}{2}$.



1. *Quelles sont les images par h des points E, F, G et H ?*
2. *En se basant sur les données de la figure, complète :*
   - $h_{\left(O\,,\frac{1}{2}\right)}(I) = \cdots$ *; H, F et I sont alignés, leurs images H', F' et I' sont ……*
   - $h_{\left(O,\frac{1}{2}\right)}[EF] = [\ldots]$ *et* $h_{\left(O,\frac{1}{2}\right)}[EG] = [\ldots]$
   - $h_{\left(O\,,\frac{1}{2}\right)}(EF) = \cdots$ *et* $h_{\left(O\,,\frac{1}{2}\right)}(FG) = \cdots$ *; puisque* $(EF) \perp (FG)$, *donc :* $(E'F') \ldots (F'G')$
   - $h_{\left(O\,,\frac{1}{2}\right)}(HG) = \cdots$ *; puisque* $(EF)//(HG)$, *donc* $(E'F') \ldots \ldots (H'G')$.
3. *Compare les deux angles :*$\widehat{HEF}$ *et* $\widehat{H'E'F'}$ *;* $\widehat{EHF}$ *et* $\widehat{E'H'F'}$ *puis* $\widehat{EFG}$ *et* $\widehat{E'F'G'}$.

Activité 12 : *Soit h une homothétie de rapport k ;*



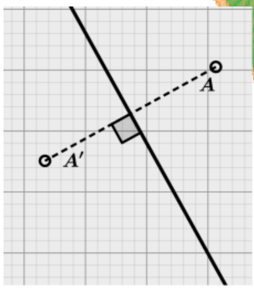
1. *Reproduis la figure et complète les phrases suivantes :*
   a. *Une homothétie multiplie les longueurs par..*
   b. *L'image par l'homothétie d'un carré de côte a est un carré* $\mathfrak{A}'$ *de côté … ;*
   c. *L'aire du carré* $\mathfrak{A}'$ *est donc …* $\times\, \mathfrak{A}$, *où* $\mathfrak{A}$ *désigne l'aire du carré de côte a*
2. *En s'appuyant sur le point a. de cette activité, que peux-tu dire de l'effet de l'homothétie sur un solide de volume* V *?*

II. Je retiens :

1. Symétrie Orthogonale (par rapport à une droite) (Rappels et compléments)

Définition 1 et notation :

Soient Δ une droite et A un point.



- *Si $A \notin \Delta$, le symétrique du point A par rapport à la droite Δ est le point A' tel que Δ soit la médiatrice de $[AA']$. On dit alors que A et A' sont symétriques par rapport à Δ.*
- *Si $A \in \Delta$, le symétrique du point A par rapport à Δ est le point A lui-même. On dit que A est invariant par la symétrie orthogonale d'axe Δ, notée S_Δ.*
- *On écrit :$S_\Delta(A) = A'$ équivaut à: Δ est la médiatrice de $[AA']$.*

Remarque 1 :

La symétrie par rapport à la droite Δ est appelée aussi symétrie axiale ou orthogonale d'axe Δ.

Propriété 1 :(Résumé)

- *Un point et son image forment un segment dont la médiatrice et l'axe Δ ;*
- *L'image d'un segment est un segment parallèle et de même longueur ;*
- *L'image d'une droite est une droite.*
- *Une figure $\mathscr{F}$ et son image $\mathscr{F}'$ sont superposables.*

Définition 2 :

Une droite Δ est un axe de symétrie d'une figure lorsque cette figure est sa propre symétrique dans la symétrie d'axe Δ.

2. Symétrie centrale : (Rappels et compléments)

2.1. Symétrique d'un point, d'une figure :

Définition 3 et notation :

Etant donné un point O, on dit que A' est le symétrique d'un point A par rapport au point O ou A' est l'image de A par la symétrie de centre O, si O est le milieu de $[AA']$. On écrit $S_O(A) = A'$ équivaut à O est le milieu de $[AA']$.

Dans ce cas on peut aussi dire que A et A' sont symétriques par rapport au point O.

Remarque 2 :
La symétrie par rapport au point O est appelée symétrie centrale de centre O.

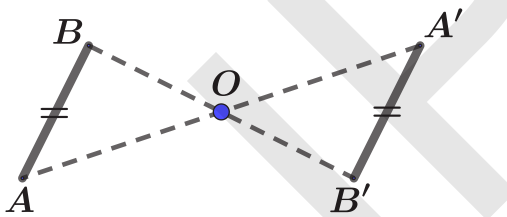
***Propriété 2 :* (Résumé)**
- *Un point et son image sont alignés avec le centre de symétrie.*
- *L'image d'un segment est un segment parallèle et de même longueur.*
- *L'image d'une droite est une droite qui lui est parallèle*
- *Une figure et son image sont superposables.*

2.2. Centre de symétrie :

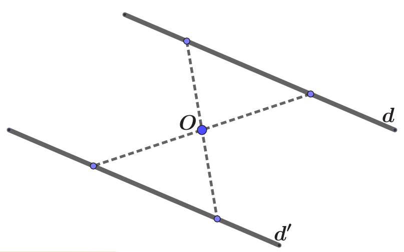
Définition 4 :
Un point O est centre de symétrie d'une figure lorsque cette figure est sa propre symétrique par rapport à O.

Résumé : Propriétés des symétries
La symétrie axiale et la symétrie centrale conservent l'alignement, le parallélisme, l'orthogonalité, les distances, les angles,
les périmètres et l'aires. (ont les même propriétés). Voici les principales propriétés :

- *Le symétrique d'un segment $[AB]$ par une symétrie centrale est un segment $[A'B']$ de même longueur.*

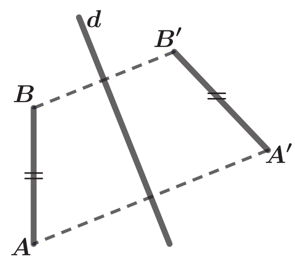


- *Le symétrique d'une droite d par une symétrie centrale est une droite d'qui est parallèle à d.*

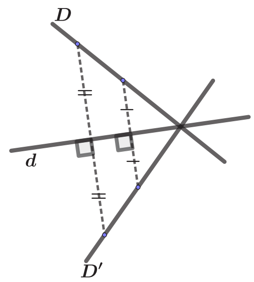


- *Le symétrique d'un angle $\widehat{ABC}$ par une symétrie centrale est un angle $\widehat{A'B'C'}$ de même mesure.*

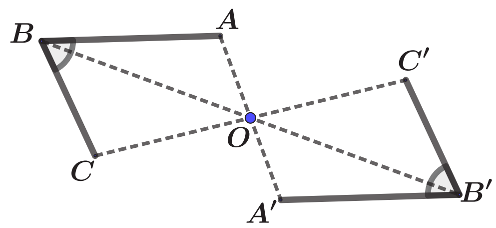
- *Le symétrique d'un segment $[AB]$ par une symétrie axiale est un segment $[A'B']$ de même longueur.*

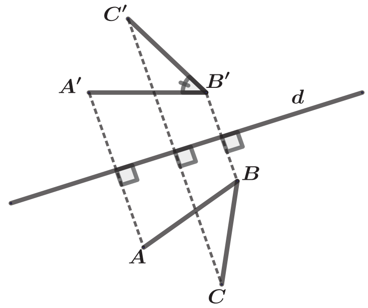


- *Le symétrique d'une droite D par une symétrie axiale est une droite D'. Cette droite pourrait être parallèle à D si celle-ci l'est avec d.*



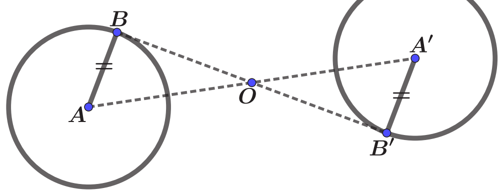
- *Le symétrique d'un angle $\widehat{ABC}$ par une symétrie axiale est un angle $\widehat{A'B'C'}$ de même mesure.*

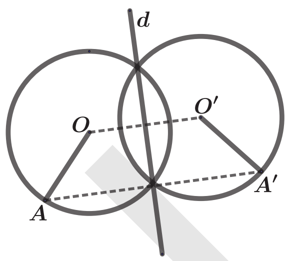




- *Le symétrique d'un cercle $\mathscr{C}$ par une symétrie axiale est un cercle $\mathscr{C}'$ de même rayon.*

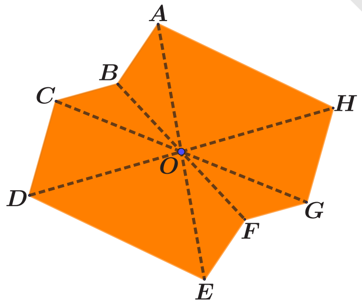
- *Le symétrique d'un cercle $\mathscr{C}$ par une symétrie centrale est un cercle $\mathscr{C}'$ de même rayon.*



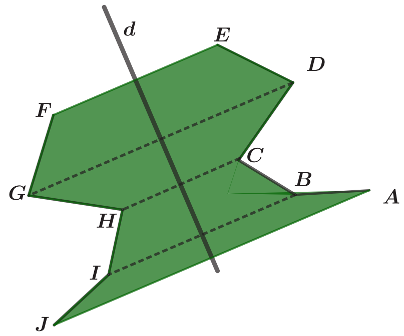


- *Le symétrique d'un polygone par une symétrie centrale ou axiale est un polygone superposable. Un polygone et son symétrique ont donc la même aire.*

- *Soit $\mathscr{F}$ une figure et $\mathscr{F}'$ son symétrique par une symétrie centrale de centre O. On dit que O est le centre de symétrie de $\mathscr{F}$ si et seulement si :*
  $\mathscr{F} = \mathscr{F}'$.



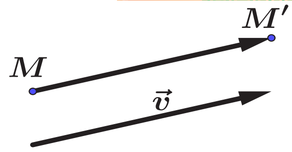
Soit $\mathscr{F}$ une figure et $\mathscr{F}'$ son symétrique par une symétrie axiale d'axe d. On dit que d est axe de symétrie de $\mathscr{F}$ si et seulement si :
$\mathscr{F} = \mathscr{F}'$.



3. Translation :

3.1. Notion de Translation :

Définition 5 :
On appelle translation de vecteur $\vec{v}$ la transformation du plan qui à tout point M associe le point M'
tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{v}$, on la note $t_{\vec{v}} : M \longmapsto M'$; où $t_{\vec{v}}(M) = M'$.



Remarque 3 :
Les propriétés d'une translation sont basées sur celles du parallélogramme.

Conséquence : Propriété fondamentale de la translation
Si A' et B' sont les images respectives des points A et B par une translation, alors $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$.

3.2. Premières propriétés d'une translation :

Propriété 3 :

- *Un segment et son image ont même longueur : $BC = B'C'$.*
- *L'image du milieu d'un segment est le milieu du segment image.*
- *L'image d'une droite d par une translation est une droite parallèle à d.*
- *Un cercle et son image ont même rayon ($r = r'$).*
- *Un angle et son image ont même mesure : $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$*
- *Les images de droites parallèles sont des droites parallèles : (AC) et (DF). étant parallèles leurs images respectives $(A'C')$ et $(D'F')$ sont parallèles. Les images de deux droites perpendiculaires sont deux droites perpendiculaires*
- *L'image d'une figure $\mathscr{F}$ est une figure $\mathscr{F}$ superposables à $\mathscr{F}$*

4. Exemples d'utilisation des symétries et des translations :

Exemple d'utilisation des translations :

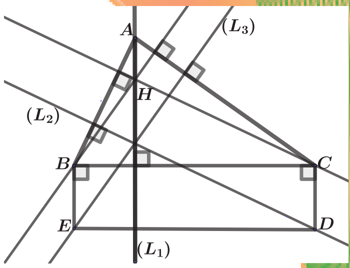
Soit ABC un triangle d'orthocentre H et BCDE un rectangle. L_1 est la droite perpendiculaire à (BC) passant par A, L_2 est la droite perpendiculaire à (AB) passant par C et L_3 est la droite perpendiculaire à (AC) passant par B.

1. Fais une figure.

2.En utilisant une translation démontre que les droites L_1, L_2 et L_3 sont concourantes

Réponse :

On fait la figure. (voir ci-contre)



BCDE est un rectangle, donc $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BE}$ c'est -à- dire que E est l'image de B par la translation $t_{\overrightarrow{CD}}$. D'autre part:

- L_1 est perpendiculaire à (ED) et (BC) est perpendiculaire à (BC), alors L_1 est parallèle à (CD), donc $\overrightarrow{CD}$ est un vecteur directeur de L_1. Par conséquent la droite L_1 est sa propre image par la translation $t_{\overrightarrow{CD}}$.
- L_2 est perpendiculaire à (AB) et (CH) est perpendiculaire à(AB), alors L_2 est parallèle à (CH), donc l'image de(CH) par $t_{\overrightarrow{CD}}$ est parallèle à (CH) et passe par D, image de C. Par conséquent la droite L_2 est l'image de (CH) par la translation $t_{\overrightarrow{CD}}$.
- On démontre que la droite L_3 est l'image de (BH) par la translation $t_{\overrightarrow{CD}}$.

Les trois droites (AH), (BH) et (CH) sont les hauteurs du triangle ABC. Elles ont un point commun H, l'orthocentre du triangle ABC. Leurs images L_1, L_2 et L_3 sont donc concourantes en un point K.

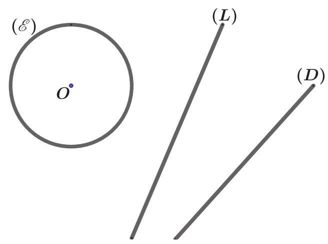
Remarque 4 :

Pour démontrer que trois droites sont concourantes, on peut procéder comme suit :

- Soit on démontre que le point commun à deux d'entre elles appartient aussi à la troisième.
- Soit on démontre que ces trois droites sont les images de trois droites concourantes, par une symétrie centrale une symétrie axiale ou par une translation.

Exemple d'utilisation des symétries : Programme de construction

On donne la figure ci-contre constituée par un cercle $\mathscr{C}$ de centre O et deux droites D et L non sécantes à $\mathscr{C}$. Construis un point M de $\mathscr{C}$ et N de D tels que L soit une médiatrice de $[MN]$



Réponse :

On réalisera une reproduction exacte de cette figure, puis on la complète de manière à obtenir une figure symétrique par rapport à L.

On construit la droite D' image de D par S_L. On marque M l'un des points d'intersection de D' avec $\mathscr{C}$, puis on construit N l'image de M par S_L.

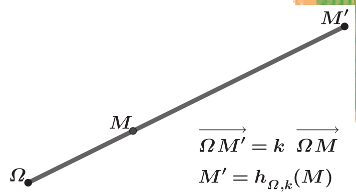
5. Homothéties :

5.1. Notion d'homothétie :

Définition 6 :

Soient Ω un point du plan et k un nombre réel non nul.
L'homothétie de centre Ω et de rapport k est la transformation du plan notée $h_{(\Omega,k)}$ définie par :

$$h_{(\Omega,k)}(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M'} = K\overrightarrow{\Omega M}.$$



Remarque 5 :

Le mot homothétie est composée de deux parties d'origine grec ; homo qui veut dire semblable et de thésis qui veut dire position.

Remarque 6 :

Le point M', image de M par l'homothétie $h_{(\Omega,k)}$ est appelée l'homothétique de M par $h_{(\Omega,k)}$ (plus généralement l'image $\mathcal{F}'$ par l'homothétie h d'une figure $\mathcal{F}$ est appelée figure homothétique de $\mathcal{F}$ par h).

Conséquence :

- *Un point A et son image A' par une homothétie sont toujours alignés avec le centre Ω de l'homothetie.*
- *Si M, N et P sont trois points alignés, distincts deux à deux, il existe une homothétie, et une seule, de centre M et qui transforme N en P.*

Exemple1:

- *L'homothétie de centre Ω et de rapport $\frac{1}{2}$ associe à tout point M, le milieu M'du segment de $[\Omega, M]$ ceci résulte de la caractérisation vectorielle du milieu d'un segment (voir figure 4)*

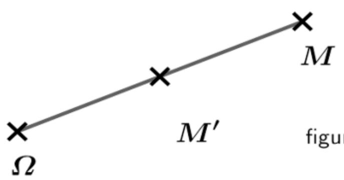


figure4

$$\overrightarrow{\Omega M'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\Omega M} \Leftrightarrow M' \text{ milieu de } [\Omega M]$$

- *L'homothétie de centre Ω et de rapport -1 est la symétrie centrale de centre Ω. Elle fait correspondre, en effet, à tout M du plan, le point M'tel que Ω soit le milieu de $[MM']$. (voir figure 5)*

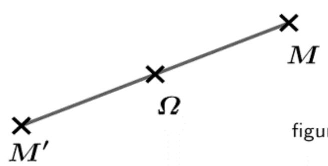


figure4

$$\overrightarrow{\Omega M'} = -\overrightarrow{\Omega M} \Leftrightarrow \Omega \text{ milieu de } [M'M]$$

- *L'homothétie de centre Ω et de rapport 1 associe à tout point M, le point M'* tel que : $\overrightarrow{\Omega M'} = \overrightarrow{\Omega M}$. Cette relation $\overrightarrow{\Omega M'} = \overrightarrow{\Omega M}$ entraîne M'=M et il en résulte que : Quel que soit le point Ω , l'homothétie de centre Ω et de rapport 1 est l'application identique du plan notée $id_{\mathcal{P}}$.

Remarque 7 :

Une homothétie est déterminée par deux éléments :

1. Un point fixe appelé son centre.
2. Un nombre réel non nul appelé le rapport de l'homothétie.

- Le seul point invariant par une homothétie est son centre.

5.2. Effets d'une homothétie et propriétés :

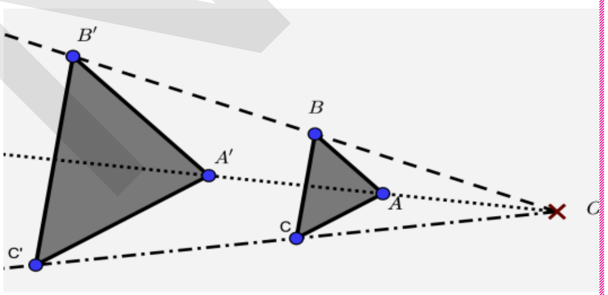
Propriété 4 :

Une homothétie est une transformation du plan qui permet de réduire ou d'agrandir une figure.

Exemple 2 :

Sur la figure ci-contre, le triangle A'B'C' est un agrandissement du triangle ABC

On considère l'homothétie $h_{(O,2)}$. On a :



$h_{(O,2)}(A) = A'$ car $\overrightarrow{OA'} = 2\overrightarrow{OA}$

$h_{(O,2)}(B) = B'$ car $\overrightarrow{OB'} = 2\overrightarrow{OB}$

$h_{(O,2)}(C) = C'$ car $\overrightarrow{OC'} = 2\overrightarrow{OC}$

$h_{(O,2)}(O) = O$ car O est le centre de l'homothétie.

Propriété 5 :

- Soit $h_{(\Omega,k)}(M)$ une homothétie avec $h_{(\Omega,k)}(M) = M'$,alors les points Ω ; M et M' sont alignés et $h(\Omega) = \Omega$.
- L'image d'un segment par une homothétie est un segment qui lui est parallèle.
- L'image d'une droite par une homothétie est une droite qui lui est parallèle.
- L'homothétie conserve l'alignement, les milieux et la mesure des angles.

Propriété 6 :

Une homothétie de rapport k multiplie :

- Les longueurs par k.
- Les aires par k^2
- Les volumes d'un solide par $|k^3|$.

II. Je sais faire :

Enoncés des exercices d'application :

Exercice d'application 1 :

Sans chercher à reproduire les figures ci-dessous, détermine s'il(s) existe(nt), un(des)axe(s) de symétrie pour chaque figure.

Exercice d'application 2 :

1. *Trace un parallélogramme ABCD et place Un point M en dehors des droites* (AB) *et* (DC).
2. *Construis le point N image de M par la translation de vecteur* $\overrightarrow{AB}$.
   En déduis que N est l'image de B dans la translation de vecteur $\overrightarrow{AM}$.
3. *Quelle est la nature du quadrilatère DCNM ?*

Exercice d'application 3 :

Objectif : utiliser les propriétés d'une translation

On considère un rectangle ABCD tel que AB = 8 cm ; BC = 6 cm et AC = 10 cm.

On appelle A'B'C'D' l'image du rectangle ABCD par la translation qui transforme C en A. Sans construction ni mesure, en justifiant :

a) donne la nature du quadrilatère A'B'C'D' obtenu.

b) donne les longueurs AA' puis B'A.

c) donne les périmètres de A'C'D' puis de A'B'C'D'.

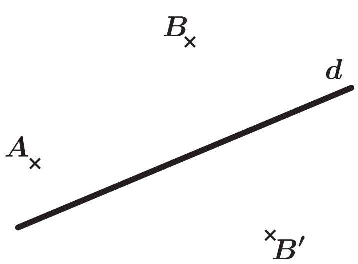
d) donne l'aire de A'B'C'D'.

e) donne le périmètre de A'B'BC. Préciser la nature de ce quadrilatère.

f) donne l'aire du triangle A'C'D'.

Exercice d'application 4 :

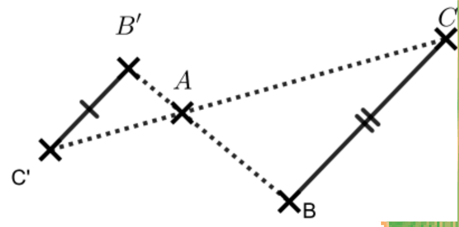
Dans la figure ci-contre, B' est le symétrique de B par rapport à la droite d.



1. *Sur ce dessin, place le point I à l'intersection des droites d et* (AB) *et le point J à l'intersection des droites d et* (AB'). *Trace les droites* (BJ) *et* (IB').
2. a. *Quelle est la droite symétrique de* (AB) *par rapport à d ?*
   b. *Quelle est la droite symétrique de* (AJ) *par rapport à d ?*
   a. *Pourquoi le symétrique de A par rapport à d est le point d'intersection des droites* (BJ) *et* (IB') *?*

Exercice d'application 5 :

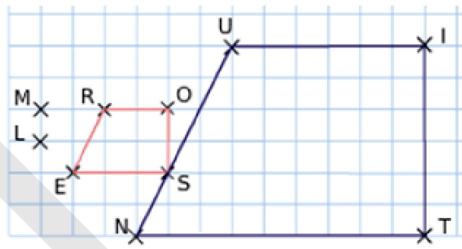
On considère la figure ci-contre telle que (BC) est parallèle à (B'C').
Soit l'homothétie $h_{(A,-\frac{1}{2})}$ *de centre A et de rapport* $-\frac{1}{2}$.
Sachant que $h_{\left(A,-\frac{1}{2}\right)}(B) = B'$.



1. *Détermine l'image de A et de C par* $h_{\left(A,-\frac{1}{2}\right)}$
2. *Quelle est l'image du triangle ABC ? Quel est l'effet de l'homothétie sur ce triangle.*

Exercice d'application 6 :

Par quelle homothétie...
1. le quadrilatère NUIT est-il l'image du quadrilatère ROSE ?
2. le quadrilatère ROSE est-il l'image du quadrilatère NUIT ?



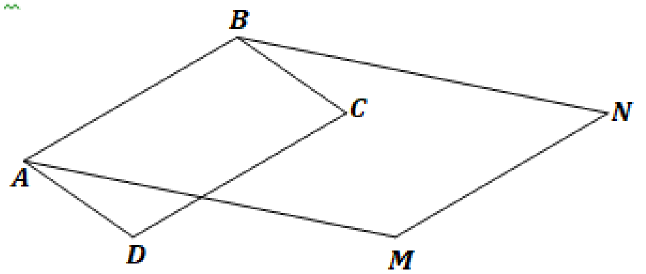
Solutions des exercices d'application :

Exercice d'application 1 :

- *Figure a est un losange il possède deux axes de symétrie : ses diagonales*
- *La figure b est un carré, il possède quatre axes de symétrie : ses diagonales et ses médiatrices.*
- *La figure d est un demi-cercle, il possède un seul axe de symétrie, la médiatrice de son diamètre*
- *La figure est la réunion de deux cercles tangents, cette figure possède deux axes de symétrie : la droite passant par les deux centres, et la perpendiculaire à cette droite au point de tangence des deux cercles.*

Exercice d'application 2 :

1. *figure*



2. *N est l'image de M dans la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MN}$ et ABNM est un parallélogramme, d'où $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BN}$ et par conséquent N est l'image de B dans la translation de vecteur $\overrightarrow{AM}$*

3. *Comme $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ alors $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{MN}$ et DCNM est un parallélogramme.*

Exercice d'application 3 :

a) L'image d'une figure par une translation est une figure superposable donc A'B'C'D' est rectangle

b) A,B',A' et D' sont les images respectives de C ;B ;A et D dans la translation de vecteur $\overrightarrow{CA}$, donc : $AA' = CA = 10$ cm. $[B'A]$ est l'image du segment $[BC]$ donc : BA'=BC=6 cm

c)Périmètre du triangle A'B'C' est égal à celui du triangle ABC donc :
périmètre $A'B'C' = 8 + 6 + 10 = 24$ *cm*
Le périmètre du rectangle A'B'C'D' est égal à celui de ABCD donc :
périmètre $A'B'C'D' = (8 + 6) \times 2 = 24$ *cm*

d)L'aire de A'B'C'D' est égale à celle de ABCD donc :
Aire $A'B'C'D' = 8 \times 6 = 48\ cm^2$

e)Périmètre $A'B'BC = A'B' + B'B + BC + CA = 8 + 10 + 6 + 10 = 34cm.$
A'B'BC est un trapèze car $(BB')//(CA)'$

f) L'aire du triangle A'C'D' = Aire du triangle rectangle ACD

$$= \frac{(AD\times DC)}{2} = \frac{(6\times 8)}{2} = 24cm^2$$

Exercice d’application 4 :

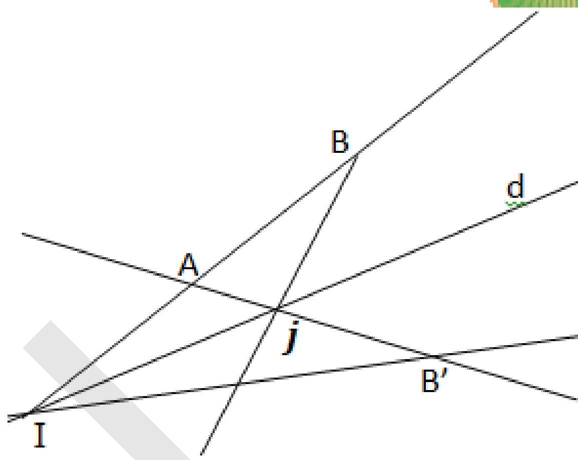
1. Figure

2\. a. Le symétrique de B par rapport à d est B’, et le symétrique de I est lui-même (le point I est sur l’axe de symétrie)
Donc l’image de la droite (AB) dans la symétrie orthogonale d’axe

d est la droite (IB')

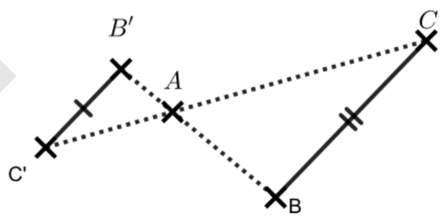
b. $(AJ) = (B'J)$ et comme J est sur l’axe de symétrie, son image est lui-même, et l’image de B est B’. Donc l’image de la droite (AJ) est la droite (BJ)

c. A est le point de rencontre de (AB) et (AJ) dont les images respectives sont (IB') et (BJ) donc le symétrique de A par rapport à d est le point de rencontre des droites (BJ) et (IB').



Exercice d’application 5 :

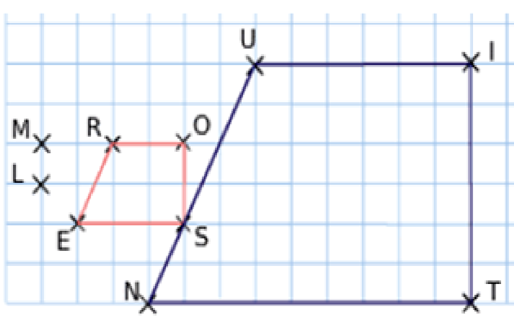
1\. $h(A) = A$ puisque le centre A de l’homothetie est invariant
Puisque A, C et C’ sont alignés et $\overrightarrow{AB'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$; donc d’après la version vectorielle du théorème de Thalès : $\overrightarrow{AC'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$; et $h_{(k,-\frac{1}{2})}(C) = C'$



2\. L’image du triangle ABC est le triangle AB’C’ qui est une réduction du triangle ABC de rapport $|k| = \frac{1}{2}$

Exercice d’application : 6

1\. Sur la figure nous remarquons que L, S et T sont alignés et que $\overrightarrow{LT} = 3\overrightarrow{LS}$; et que $\overrightarrow{LI} = 3\overrightarrow{LO}$; et que $\overrightarrow{LU} = 3\overrightarrow{LR}$ et que $\overrightarrow{LN} = 3\overrightarrow{LE}$ On peut donc dire que le quadrilatère NUIT est l’image du quadrilatère ROSE par L’homothétie de centre L et de rapport **3**



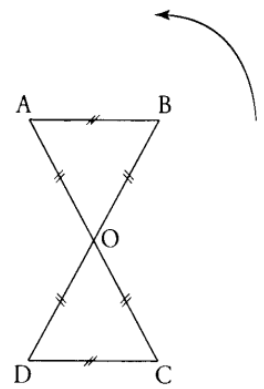
2\. Réciproquement, le quadrilatère ROSE est l’image du quadrilatère NUIT par l’homothétie de centre L et rapport $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$

IV. Je m'exerce :

Exercice 1 :

1. Place trois points A, D et C non alignés et construis le point B tel que : $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}$.
   La parallèle à (AC) passant par B coupe (AD) en E et (DC) en F.
   Démontre que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{EB}$ et que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BF}$.
   En déduis que B est le milieu de [EF].
2. On note O le point d'intersection des diagonales du parallélogramme ABCD et O' son symétrique par rapport à B.
   Démontre que $\overrightarrow{EO'} = \overrightarrow{OF}$.

Exercice 2 :



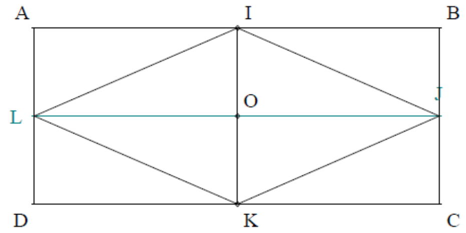
1. Reproduis ce dessin en vraie grandeur sachant que OA = 3 cm et que les points A, O et C, d'une part, et d'autre part les points B, O et D, sont alignés.
2. Démontre que ABCD est un rectangle.
3. Place, sur le dessin le point E image du point O par la translation de vecteur $\overrightarrow{BA}$.
4. Place le point F tel que $\widehat{COF} = 60°$ dans le sens de la flèche.
5. Montre que les points A, B, C, D, E, F sont sur un même cercle que l'on précisera.
6. Écris un vecteur égal au vecteur $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}$.

Exercice 3 : (Utiliser une feuille de papier quadrillée.)
Construis un triangle EFG, rectangle en F tel que EF = FG = 4 cm.

1. Place le point K image de E par la symétrie de centre F.
2. Place le point L'image de F par la symétrie orthogonale d'axe (EG).
3. Place le point J image de G par la translation de vecteur $\overrightarrow{EF}$.
4. Place le point H tel que $\overrightarrow{HE} = \overrightarrow{FG}$.
5. Démontre que $\widehat{EFG} = 90°$.

Exercice 4 :

ABCD est un rectangle de centre O.
I, J, K et L sont les milieux respectifs des segments [AB], [BC], [CD] et [DA].
AIOL, LOKD, IBJO, OJCK sont alors des rectangles et O le milieu des segments [LJ] et [IK].



1. a. *Quel est le transformé du triangle AIL par la symétrie d'axe (IK) ?*
   b. *Quel est le transformé du triangle AIL par la symétrie de centre O ?*
2. a. *Établis les égalités vectorielles : $\overrightarrow{AL} = \overrightarrow{IO}$; $\overrightarrow{LO} = \overrightarrow{OJ}$. En déduis :$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AO}$.*
   b. *Établis les égalités vectorielles : $\overrightarrow{AL} = \overrightarrow{LD}$; $\overrightarrow{LO} = \overrightarrow{DK}$. En déduis : $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{LK}$.*
   c. *Quel est le transformé du triangle AIL dans la translation de vecteur $\overrightarrow{IJ}$?*

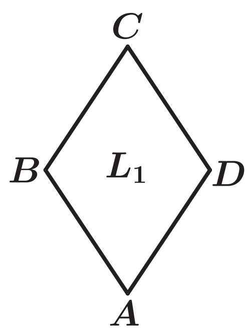
Exercice 5 :

Trace un triangle équilatéral ABC de 4 cm de côté et fais les trois constructions demandées à partir de ce triangle, sans les justifier.

1. *Construis l'image du triangle ABC dans la symétrie de centre C et hachure au crayon de papier l'intérieur de cette image.*
2. *Construis l'image du triangle ABC dans la symétrie orthogonale par rapport à la droite (BC) ; hachure- la en rouge.*
3. *Construis l'image du triangle ABC dans la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$, Hachure- la en bleu ou noir.*

Exercice 6 : *(Les lettres L_1, L_2, L_3 seront écrites sur le dessin.)*

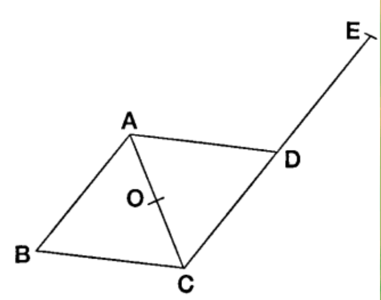
On commencera le dessin au centre de la feuille.
On considère un losange ABCD tel que AC=6cm et BD =4cm.



1. *Dessine le losange ABCD en vraie grandeur. On appelle L_1 ce losange.*
2. *Construis le symétrique L_2 du losange L_1 par rapport à la droite (AD).*
3. *Construis l'image L_3 du losange L_1 dans la translation de vecteur $\overrightarrow{CB}$.*
4. *Construis l'image L_4 du losange L_1 dans la translation de vecteur $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}$.*

Exercice 7 :

Sur la figure ci-contre, on a : $AB = BC = CD = AD$ et $CD = DE$. Soit O le milieu du segment [AC]. (Ne reproduis pas la figure)

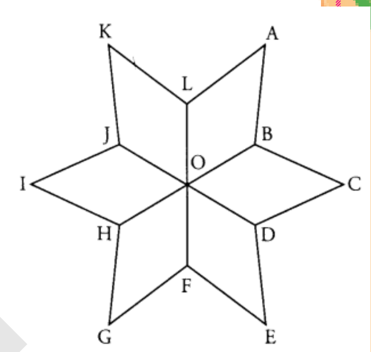


1. *Recopie et complète les phrases suivantes :*
   a. *Le point D est l'image du point B par la symétrie ......*

   b. *Par la translation de vecteur $\overrightarrow{CD}$, le point B a pour image ...*
2. *Complète l'égalité : $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{\ldots A} = \overrightarrow{\ldots E}$.*

Exercice 8 :

La figure ci-contre est constituée de 6 losanges superposables. Recopie et complète, sans démonstration, chacune des phrases suivantes.

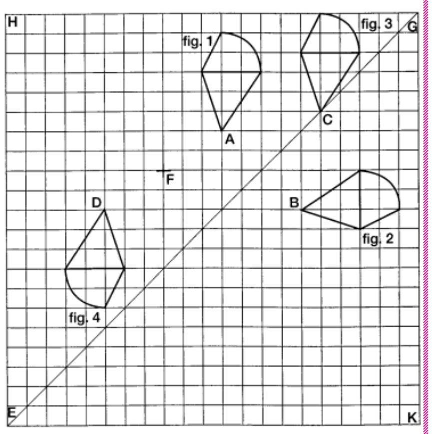


1. *Par la translation de vecteur $\overrightarrow{AO}$, l'image du losange ALOB est le losange ...*
2. *Par la symétrie orthogonale d'axe (HB), l'image du losange ALOB est le losange ...*

<u>Exercice 9 :</u>

On a reproduit plusieurs fois une figure à l'intérieur du carré HGKE dont [EG] est une diagonale.

Complète les phrases suivantes en utilisant les numéros des figures et les points déjà nommés :

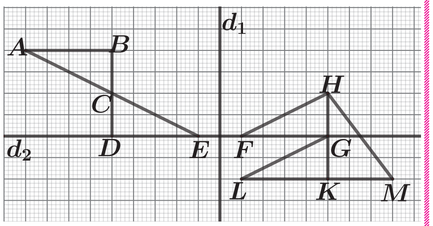


- *La figure ... est l'image de la figure 1 par la symétrie de centre ...*
- *La figure ... est l'image de la figure 1 par la translation de vecteur ...*
- *La figure 2 est l'image de la figure 1 par la ...*

Exercice 10 :

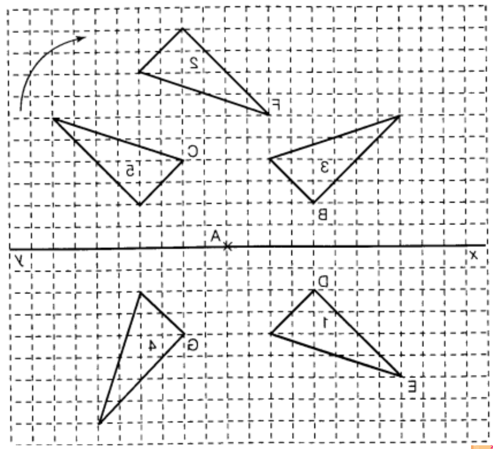
On a représenté sur un quadrillage cinq triangles rectangles de mêmes dimensions.

Sans justification, réponds aux questions suivantes :



1. *Quelle est l'image du triangle FGH par la symétrie d'axe d_1 ?*
2. *Quelle est la transformation par laquelle on passe du triangle ABC au triangle EDC ?*

3. *Quelle est la transformation par laquelle on passe du triangle GKL au triangle HGF ?*



Exercice 11 :

Chacun des triangles 2, 3, 4 et 5 est obtenu à partir du triangle 1 à l'aide d'une symétrie Axiale, d'une symétrie centrale ou d'une translation.

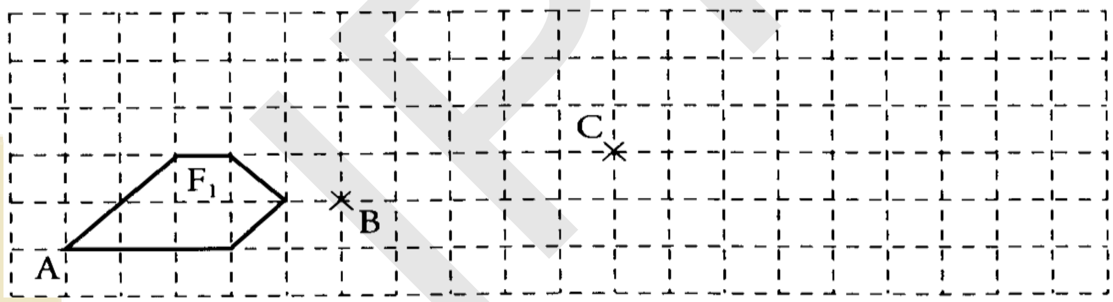
Recopie les quatre phrases suivantes et complète :

1. *L'image du triangle 1 par la symétrie axiale d'axe ... est le triangle ...*
2. *L'image du triangle 1 par la symétrie centrale de centre ... est le triangle ...*
3. *L'image du triangle 1 par la translation de vecteur ... est le triangle ...*

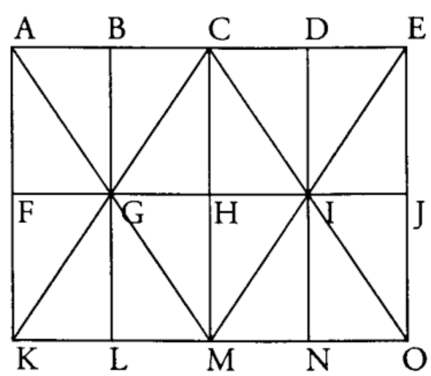
Exercice 12 :

La figure F_1 est tracée ci-dessous.

1. *Trace l'image F_2 de F_1 par la symétrie de centre B ; précise l'image de A par cette symétrie.*
2. *Trace l'image F_3 de F_2 par la symétrie de centre C.*
3. *Par quelle transformation passe-t-on de F_1 à F_3 ? En utilisant des points du dessin, précise cette transformation.*



Exercice 13 :



La figure ci-contre est un assemblage de huit rectangles de mêmes dimensions que ABGF.

Par observation de la figure, réponds aux questions suivantes.

(Il n'est demandé aucune justification et il n'est pas demandé de reproduire la figure.)

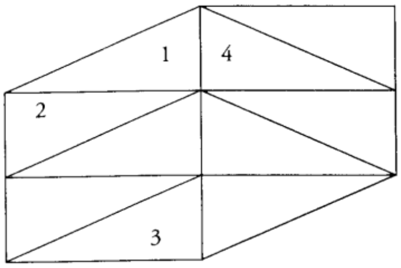
Quelle est l'image du triangle AFG par :

1. *La symétrie orthogonale d'axe (CM) ?*
2. *La symétrie de centre H ?*
3. *La translation de vecteur LN ?*

Math AS.indd 188 15/07/2024 15:31:44

Exercice 14 :

La figure ci-contre est formée de triangles rectangles superposables. Recopie et complète les phrases suivantes en complétant chacune d'elles par l'une des expressions :

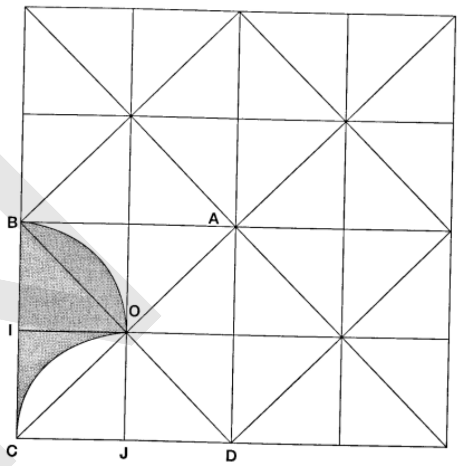


- *Translation.*
- *Symétrie centrale.*
- *Symétrie orthogonale.*

Phrase 1 : Le triangle 2 est le transformé du triangle 1 par une ...
Phrase 2 : Le triangle 3 est le transformé du triangle 1 par une ...
Phrase 3 : Le triangle 4 est le transformé du triangle 1 par une ...

Exercice 15 :

La figure ombrée ci- contre a pour lignes frontières :



- *Le segment [BC].*
- *Le quart de cercle de centre I et de rayon IO.*
- *Le quart de cercle de centre J et de rayon JO.*

Représente, sans explications, mais en les numérotant, et en les hachurant, les images de cette figure dans les transformations suivantes

1. *La symétrie de centre O.*
2. *La symétrie orthogonale d'axe (AB).*
3. *La translation de vecteur $\overrightarrow{CA}$.*

Exercice 16 :

ABC est un triangle rectangle en B. on désigne par I le milieu de $[BC]$, par J le milieu de $[AB]$ et H le projeté orthogonal de B sur (AC).

1. *Démontre que (IJ) est la médiatrice de$[BH]$:*
2. *En utilisant une symétrie orthogonale, démontre que (HI) et (HJ) sont perpendiculaires*

Exercice 17 :

On donne un rectangle ABCD inscrit dans un cercle $\mathscr{C}$ de centre O et deux droites L_1 et L_2 perpendiculaires en O. L_1 coupe (AB) en M et (CD) en P et L_2 coupe $\mathscr{C}$ en M et P. Quelle est la nature du quadrilatère MNPQ ?

Exercice 18 :

ABCD est un parallélogramme. La droite parallèle à (BD) passant par C coupe (AB)en I et (AD) en J.

1. *Démontre que :* $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BI}$ *et* $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DJ}$.
2. *En utilisant une translation démontre que les triangles BIC et DCJ sont superposables.*

Exercice 19 :

On donne deux droites D_1 et D_2 sécantes en O et deux points A et B n'appartenant pas ni à D_1, ni à D_2.

Construis deux points C et D appartenant respectivement à D_1 et D_2 tels que ADBC est un parallélogramme.

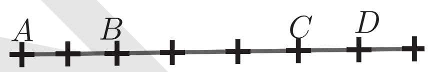
***<u>Indication :</u> On pourra utiliser la symétrie centrale de centre I milieu de** $[AB]$.*

Exercice 20 :

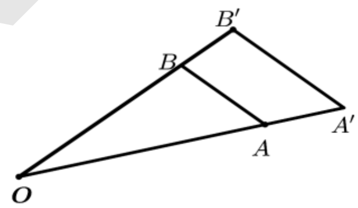
On donne deux droites d_1 et d_2 et deux points A et B. Construis ABCD un parallélogramme tel que C et D appartiennent respectivement à d_1 et d_2.

Exercice 21 :

Réponds par Vrai ou Faux



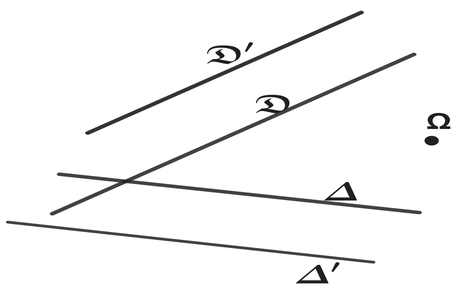
1. *Une symétrie centrale est une Homothétie.*
2. *La droite D de la figure ci-contre est Régulièrement graduée.*
   a. $D = h_{(A\,;\,3)}(B)$; b. $B = h_{(A\,;\,-2)}(D)$;
   c. $A = h_{(B\,;\,-3)}(C)$; d. $A = h_{(D\,;\,6)}(C)$.



3. *Une homothétie ayant deux points invariants distincts est l´application identique.*
4. *L´homothétie de centre O qui transforme A en A´ transforme B en B´.(figure ci-contre).*
5. *Une homothétie de rapport $-\sqrt{2}$ double les aires.*
6. *Une homothétie de rapport – k multiplie les distances par k.*
7. *Les deux figures ci-dessous sont homothétiques.*

Exercice 22

Réponds par Vrai ou Faux



1. *Les droites ci-contre sont homothétiques.*
2. *L´homothétie de centre Ω qui transforme $\mathcal{D}$ en $\mathcal{D}'$ transforme Δ en Δ'.*

Exercice 23 :

1. *Dans chacun des cas suivants, détermine le rapport de l'homothétie de centre A qui transforme B en C :*

   a. $-\overrightarrow{AB} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AC}$; b. $-3\overrightarrow{AB} = 4\overrightarrow{CA}$; c. $4\overrightarrow{AB} = 6\overrightarrow{AC}$; d. $-\overrightarrow{CA} = 2\overrightarrow{AB}$.
2. *Même question que précédemment avec :*

   a. $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} = \vec{0}$; b. $\overrightarrow{BC} = -3\overrightarrow{AB}$; c. $2\overrightarrow{BA} + 3\overrightarrow{CA} = \vec{0}$; d. $3\overrightarrow{CA} - 2\overrightarrow{CB} = \vec{0}$.

Exercice 24 :

Montre que la transformation du plan dans lui-même qui à M associe le point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AM}$ (A étant un point fixé) est une homothétie de centre A. Quel est son rapport ?

Exercice 26 :

Deux points A et B étant fixés. A tout point M, on associe le point M' définit par la relation vectorielle : $\overrightarrow{MM'} = 3\overrightarrow{MA} + 3\,\overrightarrow{MB}$.
Montre que L'application : $M \longrightarrow M'$ est une homothétie de centre I, milieu de [AB], dont on calculera le rapport.

Exercice 27 :

Les applications $M \longrightarrow M'$ définies par chacune des relations ci-dessous sont-elles des homothéties ?
a. $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB}$; b. $\overrightarrow{MM'} = \frac{1}{4}\overrightarrow{MA} - \frac{1}{4}\overrightarrow{MB}$; c. $\overrightarrow{MM'} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\right)$.

Exercice 28 :

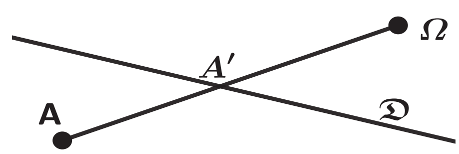
On considère les points A, B et C tels que :
$AB = 21mm, BC = 34mm, CA = 55mm$ *et les points A', B', C' tels que :*
$A'B' = 34mm, B'C' = 55mm, C'A' = 79$ mm.
Peut-il exister une homothétie h telle que $h(A) = A'$, $h(B) = B'$ et $h(C) = C'$.

Exercice 29 :

Soit une droite D et un point Ω n'appartenant pas à D. Construis les images de D par les homothéties de centre Ω et de rapports $\frac{5}{3}$ et $\frac{3}{4}$. Montre que les droites obtenues sont parallèles.

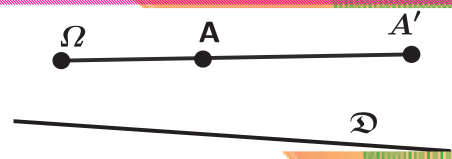
Exercice 30 :

Construis l'image de la droite D de la figure ci-contre par l'homothétie de centre Ω qui transforme A en A'.



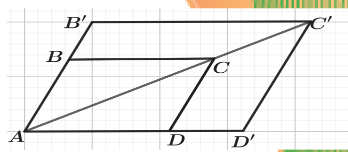
Exercice 31 :

Même exercice qu'au n° 32 avec la figure ci-contre.



Exercice 32 :

Dans la figure ci-contre, ABCD et AB'C'D' sont deux parallélogrammes et soit h l´homothétie de centre A qui transforme B en B'.



1. *Quelle est l'image par h du point C ? Du point D ? Des droites (AC) et (BD)?*
2. *Quelle est l'image par h du centre du parallélogramme ABCD ?*

Exercice 33 :

Soit un cercle de diamètre [AB], avec AB = 9 cm. Construis son image dans l´homothétie de centre A et de rapport $\frac{2}{3}$.

Chapitre 13 : Trigonométrie

I. Activités préparatoires:

Activité 1 : **L'unité de longueur est le centimètre.**

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que $AB = 4$ et $AC = 3$.

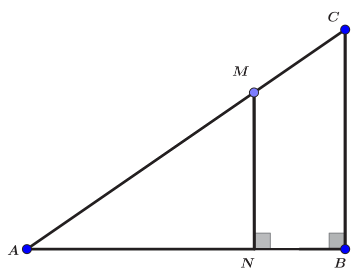
1. Calcule la longueur de l'hypoténuse.
2. Place un point K_1 sur la demi-droite $[BC)$ tel que $BK_1 = 7{,}5\ cm$.
   La parallèle à (AC) passant par K_1 coupe $[BA)$en L_1.
   a. Vérifie que le triangle BL_1K_1 est rectangle en point L_1.
   b. En utilisant la propriété de Thales, détermine BL_1.
   c. Pour chacun des deux triangles ABC et BL_1K_1, détermine l'hypoténuse et le côté adjacent de l'angle $\hat{B}$ commun à ces deux triangles ?
   d. Calcule les rapports $\frac{AB}{BC}$ et $\frac{BL_1}{BK_1}$.Que constates-tu ?
3. Place un point K_2 sur la demi-droite [BC) tel que $BK_2 = y$. La parallèle à (AC) passant par K coupe [BA) en L_2. On pose $BL_2 = x$.
   a. Quelle est la nature du triangleBLK_2 ?
   b. Montre que : $\frac{BL_2}{BK_2} = \frac{x}{y} = \frac{AB}{BC}$.

Activité 2 :

On reprend les données de l'activité 1.

1. Détermine la longueur BK_1 puis BK_2 en $fonction$ de y.
2. Calcule les rapports $\frac{AC}{BC}$, $\frac{BL_1}{BK_1}$ et $\frac{BL_2}{BK_2}$.
3. Que représentent les rapports respectifs $\frac{AC}{BC}$, $\frac{BL_1}{BK_1}$ et $\frac{BL_2}{BK_2}$ pourl'angle $\hat{B}$ dans les triangles ABC, BLK_1 et BLK_2.

Activité 3 :



ABC est un triangle rectangle en B, tel que $\hat{A}$ a pour mesure β en degré $(\hat{A} = \beta°)$. M est un point de $[AC)$ et N son projeté orthogonal sur (AB).

a. En s'appuyant sur la figure ci-contre, prouve que : $\frac{BC}{AB} = \frac{MN}{AN}$.

b. Le nombre $\frac{MN}{AN}$ garde-t-il la même valeur lorsque le point M change de position sur la demi-droite $[AC)$? Que peux-tu conclure ?

Math AS.indd 193 15/07/2024 15:31:46

Activité 4 :

Soit ABC est un triangle rectangle en B tel que $\widehat{BAC} = \alpha.(0 < \alpha < 90°)$

1. *Vérifie que $AB < AC$ et $BC < AC$.*
2. *En déduis que : $0 < \cos\widehat{BAC} < 1$ et $0 < \sin\widehat{BAC} < 1$*
3. *Le nombre $\tan\widehat{BAC}$ est-il positif ? Supérieur à 1 ? Inférieur à 1 ?*

Activité 5 :

Soit ABC est un triangle rectangle en A. on désigne par α la mesure en degrés de l'angle$\widehat{ABC}$.

1. *Démontre que : $(\sin\hat{B})^2 + (\cos\hat{B})^2 = 1$.*
2. *Montre que : $\tan\hat{B} = \frac{\sin\hat{B}}{\cos\hat{B}}$.*

Activité 6 :

Soit ABC est un triangle rectangle en B.

1. *Que peux-tu dire des angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{ACB}$?*
2. *Compare $\cos\widehat{CAB}$ et $\sin\widehat{ACB}$ puis $\sin\widehat{CAB}$ et $\cos\widehat{ACB}$. Que remarques-tu ?*

Activité 7 :

Construis un triangle ABC rectangle et isocèle en A tel que AB = AC= a, où a est nombre strictement positif.

1. *Exprime BC en fonction de a.*
2. *Recopie et complète : $\widehat{ABC}$ ... $\widehat{ACB}$ = ...*
3. *Recopie et complète : $\cos 45° = \frac{\cdots}{a\sqrt{2}} = \frac{\cdots}{\sqrt{2}} = \frac{\cdots}{2}$.*
4. *Calcule sin45°, puis en déduis tan45°.*

Activité 8 :

Construis un triangle ABC équilatéral de côté a, où est un nombre strictement positif.

1. *Trace la hauteur issue de A qui coupe $[BC]$ en H.*
2. *Recopie et complète : ABC est un triangle équilatéral, donc$\widehat{ABC}$ =....*
3. *Calcul BH en fonction de a.*
4. *Dans le triangle BAH rectangle en H, calcule AH^2 en fonction de a et déduis-en que $AH = \frac{\sqrt{3}}{2}a$.*
5. *Dans le triangle ABH rectangle en H. Détermine les mesures des angles aigues du triangle ABH.*
   Calcule cos 60° et sin60°. En déduis cos 30° et sin 30°, puis tan60° ettan 30°.

II. Je retiens :

1. Cosinus, sinus et tangente d'un angle aigu :

1.1. Cosinus d'un angle aigu :

Définition 1 et notation :

Dans un triangle rectangle, le quotient : $\dfrac{\text{Côté adjecent d'un angle aigu}}{\text{L'hypoténuse}}$ *est appelé cosinus de cet angle.*

Si ABC est un triangle rectangle en A, on écrit :

$\cos\hat{B} = \dfrac{AB}{BC}$ *et aussi* $\cos\hat{C} = \dfrac{AC}{BC}$

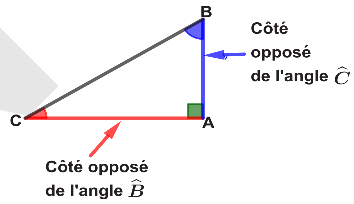
1.2. Sinus d'un angle aigu :

Définition 2 et notation :

Dans un triangle rectangle, le quotient : $\dfrac{\text{Côté opposé d'un angle aigu}}{\text{L'hypotenuse}}$ *est appelé sinus de cet angle.*

Si ABC est un triangle rectangle en A, on écrit :

$\sin\hat{B} = \dfrac{AC}{BC}$ *et aussi* $\sin\hat{C} = \dfrac{AB}{BC}$



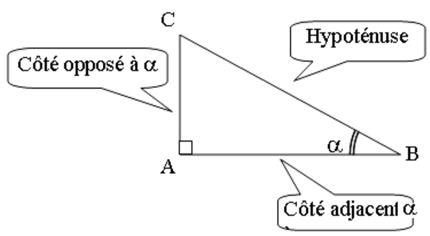
1.3. Tangente d'un angle aigu :

Remarque 1 :

Dans l'activité 3, le quotient $\dfrac{MN}{AN}$ *(le rapport) a la même valeur (constante) quelle que soit la position du point M sur la demi-droite [AM). Ce rapport ne dépend que de l'angle* $\hat{A}$ *. On l'appelle tangente* $\hat{A}$*.*

Définition 3 :

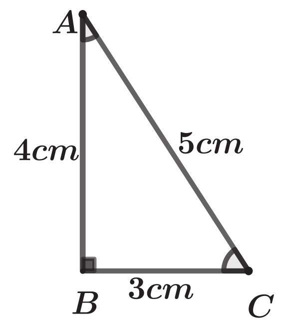
Soit ABC un triangle rectangle en A, la tangente de l'angle aigu $\widehat{ABC}$ *est le nombre noté* $\tan\widehat{ABC}$ *défini par :* $\tan\widehat{ABC} = \dfrac{\text{« côte opposé à } \widehat{ABC}\text{»}}{\text{« côte adjacent à } \widehat{ABC}\text{ »}}$



Exemple 1 :

Le triangle ci-contre est rectangle en B.

Calcule $\sin \widehat{ACB}$; $\cos \widehat{ACB}$ *et* $\tan \widehat{ACB}$.



Réponse :

$$Sin\widehat{BAC} = \frac{\text{Côté opposé de l'angle aigu } \widehat{ACB}}{\text{L'hypotenuse}}$$

$$= \frac{BC}{AC} = \frac{3}{5} = 0{,}6.$$

$$Cos\widehat{BAC} = \frac{\text{Côté adjacent de l'angle aigu} \widehat{ACB}}{\text{l'hypotenuse}} = \frac{AB}{AC} = \frac{4}{5} = 0{,}8.$$

$$\tan \widehat{ACB} = \frac{\text{« côte opposé à} \widehat{ACB} \text{ »}}{\text{« côte adjacent à} \widehat{ACB} \text{ »}} = \frac{AB}{BC} = \frac{4}{3}.$$

2. Premières propriétés de cosinus, sinus et tangente:

Propriété 2 :

- *Le cosinus et le sinus d'un angle aigu sont des nombres compris entre 0 et 1.*

Dans l'activité 4 :

$0 < \sin \widehat{BAC} < 1 (ou\ 0 < \sin \alpha < 1)$; $0 < \cos \widehat{BAC} < 1\ (ou\ 0 < \cos \alpha < 1)$

- *La tangente d'un angle aigu* $\widehat{BAC}$ *est un nombre positif et* $\tan \widehat{BAC} > 1$, *si* $AC > AB$.

Remarque 2 :

On peut parler du cosinus, du sinus et de la tangente d'un angle aigu ou de sa mesure.

Remarque 3 :

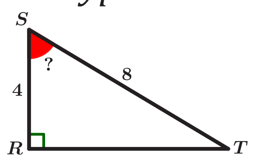
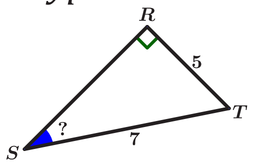
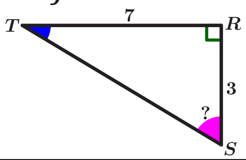
- *Si* $\sin \widehat{ABC} = \frac{x}{y}$, *alors* $x = y \times \sin \widehat{ABC}$ *et* $y = \frac{x}{\sin \widehat{ABC}}$.
- *On a des égalités analogues en remplaçant « sin » par « cos » ou « tan ».*

3. Utilisation de la Calculatrice pour déterminer la mesure d'un angle :

Avant d'utiliser les touches cos, sin ou tan d'une calculatrice, il est nécessaire de mettre celle-ci en mode degrés (voir le mode de la calculatrice).

Détermination d'un angle :

Pour trouver la mesure de l'angle $\hat{S}$ d'un triangle RTS rectangle en R:

Si on connait	On utilise	On tape	D'où
Le côté adjacent et l'hypoténuse 	Le cosinus $\cos \hat{S} = \frac{RS}{ST} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$	On ne tape ... rien ! il faut savoir que $Cos60° = \frac{1}{2}$. (Angle connu)	$\hat{S} = 60^{\circ}$
Le côté opposé et l'hypoténuse 	Le sinus $\sin \hat{S} = \frac{RT}{ST} = \frac{5}{7}$	5 ÷ 7 = Sin⁻¹ OU Sin⁻¹ [5 ÷ 7] =	$\hat{S} = 45{,}6^{\circ}$
Le côté opposés et l'adjacent 	La tangente $\tan \hat{S} = \frac{RT}{RS} = \frac{7}{3}$	7 ÷ 3 = tan⁻¹ OU tan⁻¹ [7 ÷ 3] =	$\hat{S} = 66{,}8^{\circ}$.

5. Relations entre cosinus, sinus et tangente :

Propriété 2 :

Quel que soit l'angle aiguα, on a :

- $(sin\alpha)^2 + (cos\alpha)^2 = 1.$
- $tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$

Propriété 3 :

Lorsque deux angles sont complémentaires, le sinus de l'un est égal au cosinus de l'autre. Si $\hat{A} + \hat{B} = 90°$ alors $sin\hat{A} = cos\hat{B}$ et $cos\hat{A} = sin\hat{B}$.

Exemple 2 :

Si $sin46° = 0{,}72, alors$

$cos44° = 0{,}72; si\ cos20° = 0{,}94, alors\ sin70° = 0{,}94.$

Remarque 4 :

Dans un triangle rectangle dont l'un des angles aigus mesure α, la relation $(\cos\alpha)^2 + (\sin\alpha)^2 = 1$ *peut s'écrire simplement :* $\cos^2\alpha + \sin\alpha^2\alpha = 1$.
Cette formule est appelée relation fondamentale de la trigonométrie.

5. Cosinus, sinus et tangente des angles particuliers :

Conclusion :

Le tableau ci-contre donne le cosinus, le sinus et la tangente des angles dont les mesures sont : 30°, 45° et 60°.

a°	30°	45°	60°
Sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$
tan	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Cas particuliers :

On convient que :

- $\cos 0° = 1$ *et* $\sin 0° = 0$ *et donc* $\tan 0° = 0$.
- $\cos 90° = 0$ *et* $\sin 90° = 1$ *et donc* $\tan 90°$ *n'existe pas.*

Résumé :

Voici un tableau récapitulatif donnant le cosinus, le sinus et la tangente de quelques angles remarquables :

a°	0°	30°	45°	60°	90°
Sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
Cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	0
Tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	**N'existe pas**

III. Je sais faire :

Enoncés des exercices d'application :

Exercice d'application 1 :

a. ABC est un triangle rectangle en A avec AB =8 cm et sin $\hat{B}$ =0,5.
Calcule BC et AC.

b. ABC est un triangle rectangle en A avec $\cos\hat{C} = 0{,}7$ et $AC = 5{,}6\ cm$
Calcule BC et AB.

c. ABC est un triangle rectangle en A avec $AB = 6\ cm$ et $\tan\hat{C} = 0{,}75$
Calcule AC et BC.

Exercice d'application 2 :

Soit α la mesure d'un angle aigu.

a. On donne $\cos\alpha = 0{,}6$; calcule $\sin\alpha$ et $\tan\alpha$ en utilisant les formules précédentes.

b. On donne $\sin\alpha = \frac{\sqrt{7}}{5}$; calcule $\cos\alpha$ et $\tan\alpha$.

Exercice d'application 3 :

ABC est un triangle rectangle en A tel que $\cos\widehat{ABC} = \frac{1}{5}$, calcule une valeur approchée de la mesure de l'angle $\widehat{ACB}$ au degré près.

Solutions des exercices d'application :

Exercice d'application 1 :

a. ABC un triangle rectangle en A tel que : AB =8 cm et $\sin\hat{B} = 0{,}5 = \frac{1}{2}$.

La relation fondamentale $\cos^2\hat{B} + \sin^2\hat{B} = 1$, donc $\cos^2\hat{B} = 1 - \sin^2\hat{B}$

On tire : $\cos\hat{B} = \sqrt{1-\sin^2\hat{B}} = \sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

La définition de cosinus $\cos\hat{B} = \frac{AB}{BC}$,donc $BC = \frac{AB}{\cos\hat{B}} = \frac{8}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{16}{\sqrt{3}} \cong 9{,}3cm$

$\sin\hat{B} = \frac{AC}{BC}$, donc $AC = BC\sin\hat{B} = \frac{16}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{2} = \frac{8}{\sqrt{3}} \cong 4{,}65cm$

b. ABC est un triangle rectangle en A avec $\cos\hat{C} = 0{,}7 = \frac{7}{10}$ et $AC = 5{,}6cm$.

On a : $\cos\hat{C} = \frac{AC}{BC}$, donc $BC = \frac{AC}{\cos\hat{C}} = \frac{5{,}6}{0{,}7} = 8cm$.

La relation fondamentale $\cos^2\hat{C} + \sin^2\hat{C} = 1$, donc $\sin^2\hat{C} = 1 - \cos^2\hat{C}$

On tire : $\sin\hat{B} = \sqrt{1-\cos^2\hat{C}} = \sqrt{1-\left(\frac{7}{10}\right)^2} = \sqrt{\frac{51}{100}} = \frac{\sqrt{51}}{10}$.

La définition de sinus : $\sin\widehat{C} = \frac{AB}{BC}$, *donc* $AB = BC\cos\widehat{C} = 8 \times \frac{\sqrt{51}}{10} \cong 5{,}71cm.$

c. *ABC est un triangle rectangle en A avec* $AB = 6$ *cm et* $\tan\hat{C}$ *=0,75. On a :*

La définition de tangente : $\tan\hat{C} = \frac{AB}{AC}$, *donc* $AC = \frac{AB}{\tan\widehat{C}} = \frac{6}{0{,}75} = 8cm.$

Appliquons le théorème de Pythagore au triangle ABC rectangle en A

$AB^2 + AC^2 = AC^2$, *donc* $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10.$

Exercice d'application 2 :

Soit α *la mesure d'un angle aigu.*

a. *On donne* $\cos\alpha = 0{,}6$; *calcule* $\sin\alpha$ *et* $\tan\alpha$ *en utilisant les formulesde la propriété 2. Ecrivons la relation fondamentale :* $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha$ *=1, on tire :*
   $\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \sqrt{1 - (0{,}6)^2} = \sqrt{1 - 0{,}36} = \sqrt{0{,}64} = 0{,}8.$
   $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{0{,}8}{0{,}6} = \frac{4}{3}.$

b. *On donne* $\sin\alpha = \frac{\sqrt{7}}{5}$; *calcule* $\cos\alpha$ *et* $\tan\alpha$.*Ecrivons la relation fondamentale :* $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha$ *=1, on tire :*

$$\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{7}}{5}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{7}{25}} = \sqrt{\frac{18}{25}} = \frac{3\sqrt{2}}{5}.$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{\sqrt{7}}{5}}{\frac{3\sqrt{2}}{5}} = \frac{\sqrt{7}}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{14}}{6}.$$

Exercice d'application 3 :

ABC est un triangle rectangle en A tel que $\cos\widehat{ABC} = \frac{1}{5}$, *calcule une valeur approchée de la mesure de l'angle* $\widehat{ACB}$ *au degré près.*

Les angles $\widehat{ABC}$ *et* $\widehat{ACB}$ *sont complémentaires, donc* $\sin\widehat{ACB}$ *=*$\cos\widehat{ABC}$*,par conséquent* $\sin\widehat{ACB} = \frac{1}{5}.$

A l'aide d'une table trigonométrique ou une calculatrice, il vient : $\widehat{ACB} = 11{,}5°.$

IV. Je m'exerce :

Exercice 1 :

a. Quelle est la nature du triangle ABC tel que : $\widehat{ABC} = 65°$, $\widehat{BCA} = 25°$.

b. Compare $\cos 65°$ et $\sin 25°$.

c. Compare de même $\sin 65°$ et $\cos 25°$.

d. En déduis sans la calculatrice, la valeur de $\tan 65° \times \tan 25°$.

Exercice 2 :

ABC est un triangle isocèle en B tel que $\widehat{ABC} = 40°$ et $AC = 4cm$. $[OB]$ est la médiane issue de B.

a. Quelle est la nature du triangle OAB ?

b. Détermine l'arrondi à 1mm près de OB sachant que $\tan\widehat{ABO} \cong 0{,}94$.

Exercice 3 :

Soit un cercle de centre D et de rayon 4cm.

Soit A et B deux points de ce cercle tels que AB=66mm et C le point diamétralement opposé à B.

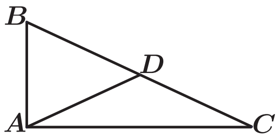
a. Fais une figure soignée.

b. Quelle est la nature de ABC ?

c. Calcule l'arrondi de AC à 1mm près et les mesures des angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{BCA}$ à 1° près.

Exercice 4 :

Sur la figure ci-contre : On a ABC est un rectangle en A, BD=5cm et D est le milieu du segment $[BC]$. L'angle $\widehat{ABD}$ mesure 58°.



1. Quelle est la nature des triangles ACD et ADB ?
2. a. Calcule les valeurs exactes des angles $\widehat{ACB}$ et $\widehat{BAD}$.

b. Calcule les valeurs exactes des longueurs BC, AB et AC.

c. Donne les valeurs arrondies à 1mm près de AB et AC.

Exercice 5 :

On donne $\sin\widehat{xOy} = \sqrt{\frac{1}{8}}$ et $\cos\widehat{xOy} = \sqrt{\frac{7}{8}}$.

a. Vérifie que $(\sin\widehat{xOy})^2 + (\cos\widehat{xOy})^2 = 1$.

b. Détermine sans calculatrice la valeur de $\tan\widehat{xOy}$.

Exercice 6 :

Sans la calculatrice, détermine : $(sin50°)^2 + (sin40°)^2$.

Exercice 7 :

1. a. *A l'aide de la calculatrice, calcule :*

   $(cos67° + sin67°)^2 + (cos67° - sin67°)^2$;

   $(cos35° + sin35°)^2 + (cos35° - sin35°)^2$.

   b. *Que constates-tu ?*
2. *Démontre que pour tout angle aigu x:* $(cosx + sinx)^2 + (cosx - sinx)^2 = 2$

Exercice 8 :

Moussa s'adresse à son professeur :

Monsieur, je ne comprends pas : ma calculatrice est toute neuve et elle ne sait pas trouver l'angle $\widehat{xOy}$ *qui donne* $sin\widehat{xOy} = 0{,}2181$.

1. *Quel est le message écrit sur l'écran de la calculatrice de Moussa lorsqu'il veut calculer* $\widehat{xOy}$ *?*
2. *Quel conseil peut-on donné à Moussa avant qu'il ne jette sa calculatrice (toute neuve) ?*

Exercice 9 :

Le triangle ABC est rectangle et isocèle de sommet principal B.

1. *Démontre que* $sin\ 45° = cos\ 45°$.
2. *Avec la relation* $(sinx)^2 + (cosx)^2 = 1$*,démontre que :* $(sin45°)^2 = \frac{1}{2}$.

Exercice 10 :

On lit dans un manuel de trigonométrie que $sin\ 15° = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

1. *Vérifie que* $cos\ 15° = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.
2. *En déduis que* $tan\ 15° = 2 - \sqrt{3}$.

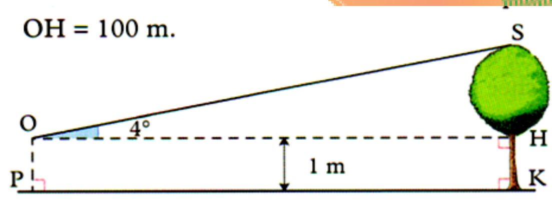
Exercice 11 :

Le nombre x désigne la mesure d'un angle aigu. Démontre les formules :

a. $1 + (tan\,x)^2 = \frac{1}{(cos\,x)^2}$; $1 + \frac{1}{(tan\,x)^2} = \frac{1}{(sin\,x)^2}$ *et* $\frac{1-sinx}{cosx} = \frac{cosx}{1+sinx}$.

Exercice12 :

Calcule la hauteur de l'arbre sachant les données de la figure ci-contre.

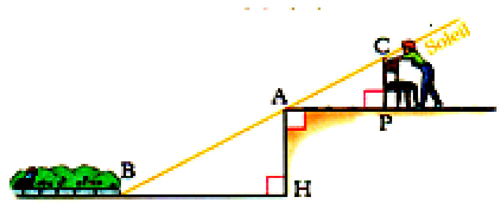


Exercice 13 :

Dans le parc du château, Ali a surveillé l'ombre du bord A de la terrasse.

On donne $BH = 5{,}5m$ *et* $CP = 1{,}2m$.

Lorsque cette ombre a atteint le bord B d'un massif, Ali a placé une chaise de façon que l'ombre du point C soit en A. Dans cette position AP=1,6m. On pose $\widehat{CAP} = \hat{a}$.



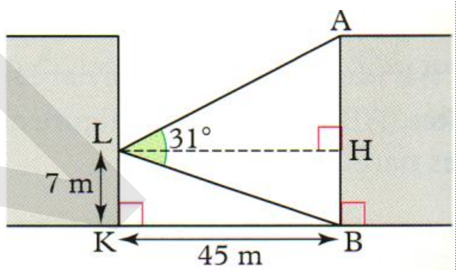
a. *Montre que* $\widehat{ABH} = \hat{a}$.

b. *En exprimant de deux façons tan*$\hat{a}$ *, calculer la hauteur AH.*

Donne la valeur de $\hat{a}$ *(arrondis à 1°)*

Exercice14 :

De la fenêtre de sa chambre, à 7m au-dessus du sol, Aicha voit l'immeuble qui lui fait face sous un angle de 31°.Les deux immeubles sont distants de 45m.



a. *Détermine l'angle* $\widehat{HLB}$ *(arrondis au degré prés).*

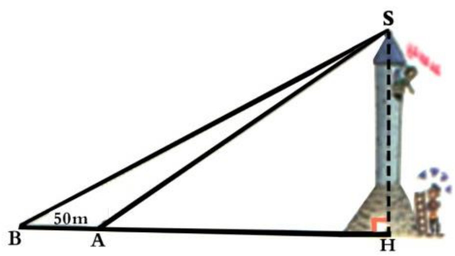
En déduis la mesure de $\widehat{HLA}$.

b. *Calcule AH, puis la hauteur de l'immeuble que voit Aicha.*

Exercice 15 :

Pour déterminer l'altitude du sommet de la tour par rapport à la plaine, on vise S d'un point A situé à une distance inconnue du pied de la colline.

On effectue une deuxième visée en un point B situé à 50m de A, les points S, A, B étant dans un même plan vertical.



$\widehat{SAB} = 21°$; $\widehat{SBH} = 17{,}8°$; $SH = h$*(en mètres)*.

a. *Exprime AH en fonction de h et de la tangente l'angle* $\widehat{ASH}$.

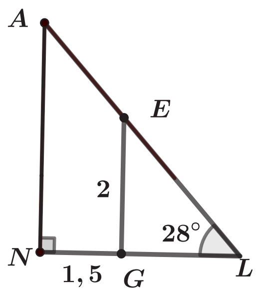
b. *Exprime BH en fonction de h et de la tangente de l'angle* $\widehat{BSH}$.

c. *En déduis que :* $h = \dfrac{50}{tan72{,}2° - tan69°}$.

d. *Avec la calculatrice, trouve une valeur approchée de h et de AH à* 0,1m.

Exercice 16 :

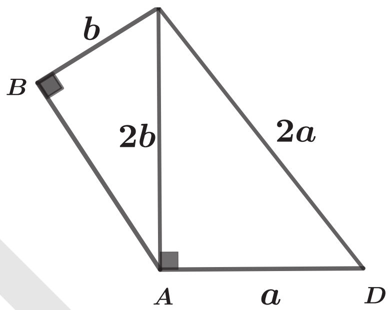
Les points E et G appartiennent respectivement aux segments $[LA]$ *et* $[LN]$*. Utilise l'angle* $\widehat{ALN}$ *pour calculer les longueurs LG, LA et NA et on donne les arrondis au dixième.*



Exercice17 :

Dans la figure ci-contre les longueurs sont exprimées dans la même unité.

Les droites (AB) *et* (CD) *sont-elles parallèles ?*

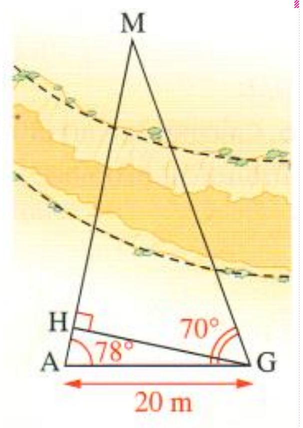


Exercice 18 :

Un géomètre veut calculer la distance entre son emplacement G et la maison M un point de l'autre côté du fleuve (voir figure ci-contre).

Pour cela il calcule la distance entre G et un point accessible A.

Il trouve $AG = 20m$*. Il place son théodolite (instrument de topographie qui permet de calculer les angles horizontaux et verticaux) successivement en G et en A, pour mesurer les angles* $\widehat{MAG}$ *et* $\widehat{AGM}$*. Il trouve :* $\widehat{MAG} = 78°$ *et* $\widehat{AGM} = 70°$.



1. *Calcule la valeur exacte de GH.*
2. *a. Explique pourquoi* $GM = \dfrac{HG}{Cos58°}$ *?*
   b. En déduis la valeur exacte de GM.
   c. Calcule l'arrondi au dixième de GM.
3. *Donne les valeurs approchées de l'aire et du périmètre du triangle AGM.*

Chapitre 14 : Fonctions affines

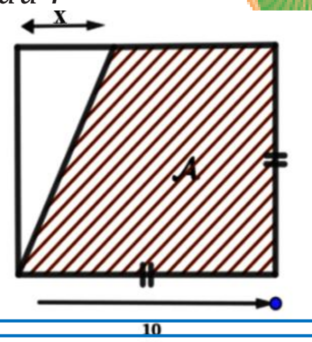
I. Activités préparatoires :

Activité 1 :

Partie1 : ***Le taxi d'Ahmed***

Dans son Taxi, Ahmed affiche ses tarifs 0.8 MRU pour la prise en charge et 0.5 MRU par Kilomètre parcouru. Complète le tableau :

Nombre de Km	2	3		5	x
Prix demandé			2,8		



Partie 2 :

Exprime l'aire hachurée $\mathcal{A}$ en fonction de x.

Activité 2 :

Soient f et g deux fonctions affines définies respectivement par :
$f(x) = 2x - 5$ *et* $g(x) = -3x + 4$.

1. *Reproduis et complète le tableau ci-dessous.*

x_1	x_2	$x_2 - x_1$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$	$g(x_1)$	$g(x_2)$	$\dfrac{g(x_2)-g(x_1)}{x_2-x_1}$
-2	3							
4	-6							
-1	0							
1	2							
$\sqrt{2}$	1							
$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$							

2. *Que remarques-tu ? Que penses-tu si x_1 et x_2 sont quelconques ?*
3. *Ce résultat peut-il être généralisé à toute fonction affine ?*

Activité 3 :

Soient f, g et h les fonctions affines telles que :
$f(x) = 3x + 1$, $g(x) = -2x + 1$ *et* $h(x) = 3$.

1. *Complète le tableau suivant :*

x	-2	$-\sqrt{3}$	-1	0	1	$\sqrt{2}$	2	π	3,5	4
$f(x)$										
$g(x)$										
$h(x)$										

2. *Quelle remarque fais-tu sur les variations de chacune de ces fonctions ?*
3. *Y a-t-il un lien entre le coefficient directeur et le sens de variation ?*

Activité 4 :

On considère la fonction affine f définie par $f(x) = 4x - 3$

1. *Complète le tableau de valeurs suivant :*

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$										

2. *Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O ; I ; J), place les points de coordonnées* $(x, f(x))$, *pour x prenant les valeurs citées dans le tableau précédent. Que remarques-tu ?*

La droite passant par tous ces points est appelée représentation graphique de f.

Activité 5 :(Envoi de colis).

Les tarifs d'envois de colis par voie terrestre sont pratiqués par une entreprise sont donnés dans le tableau suivante.

Poids en kg	De 0 à 5 kg	De 5 à 10 kg	De 10 à 15	De Supérieur ou égal à 15
Tarif en MRU	0,2 par gramme	Forfait de 250MRU +0,15 MRU par gramme	Forfait de 750 MRU +0,1 MRU Par gramme	Forfait de 1500 MRU +0,05 MRU par gramme

1. *Complète le tableau suivant :*

Poids du colis en kg	2	3,5	4	5	7	10	13	15	17,5	20	23,5
Tarif en MR											

2. *Quel est le tarif d'envoi d'un colis en fonction de son poids p ?*
   a. *Si le poids est compris entre 0 et 5.*
   b. *Si le poids est compris entre 5 et 10.*
   c. *Si le poids est compris entre 10 et 15.*
   d. *Si le poids est supérieur à15.*

Activité 6 :

On donne la fonction affine définie par morceaux sur $\mathbb{R}$ *:*

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 1\,; & si\ x \leq 2 \\ x - 5\,; & si\ x > 2 \end{cases}$$

1. *Représente la fonction affine* $f_1(x) = -2x + 1$ *sur l'intervalle* $]-\infty; 2[$
2. *Représente la fonction affine* $f_2(x) = x - 5$ *sur l'intervalle* $]2; +\infty[$
3. *Peux-tu en déduire une représentation de f ?*

II. Je retiens :

1. Notion de fonction affine :

1.1. Présentation de la fonction affine :

Définition1 et vocabulaire :

Etant donnés deux réels a et b, le procédé qui a tout nombre réel x fait correspondre le nombre réel $ax + b$ est appelé fonction affine, souvent notée $f(x)$.On la note aussi : $f : x \longmapsto ax + b$

Le coefficient directeur   L'ordonnée à l'origine

- *Le nombre f(x) est appelé image de x par f.*
- *x est l'antécédent de f(x).*

Exemple 1 :

- $f(x) = -3x + 7$, est *une fonction affine dont le coefficient directeur est -3et l'ordonnée à l'origine est 7.*
- $f(x) = 1 + 2x$ est *une fonction affine dont le coefficient directeur est 2et l'ordonnée à l'origine est 1.*
- $f(x) = 5$; *est une fonction affine dont le coefficient directeur est 0 et l'ordonnée à l'origine est 5.*

Exemple 2 :

- On considère la fonction $f(x) = 2x - 5$.
  $f(3) = 2 \times 3 - 5 = 1$ On dit que l'image de 3 est 1 et que l'antécédent de 1 est 3
  $f(-4) = 2 \times (-4) - 5 = -13$ On dit que l'image de -4 est -13 et que l'antécédent de -13 est -4

1.2. Coefficient directeur et sens de variation :

1.2.A. Calcul du coefficient directeur :

Règle 1:

Soit f une fonction affine, alors le coefficient directeur a de cette fonction est donné par la formule : $a = \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}, x_1 \neq x_2$

Exemple 1:

Soit f la fonction affine telle que $f(1) = 3$*et* $f(-2) = -9$

Alors le coefficient directeur a de cette fonction est :

$$a = \frac{f(-2)-f(1)}{-2-1} = \frac{-9-3}{-3} = 4$$

Math AS.indd 207 15/07/2024 15:31:53

1.2.B. Coefficient directeur et sens de variation :

Propriété 1 :

Soit f une fonction affine définie par $f(x) = ax + b$.

Signe de a	Sens de variation	Interprétation
$a > 0$	f Croissante	Si x croit, alors $f(x)$ croit aussi.
$a < 0$	f Décroissante	Si x croit, alors $f(x)$ décroit aussi.
$a = 0$	f est constante	Si x change, $f(x)$ ne change pas.

2. Représentation graphique :

Définition 2 :

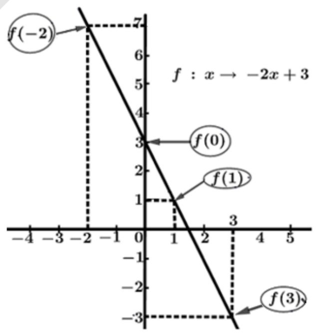
Soit f une fonction affine définie par $f(x) = ax + b$.
Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O ; I ; J), on appelle représentation graphique de f l'ensemble des points de coordonnées $(x, f(x))$. En posant $f(x) = y$ cet ensemble est donc la droite d'équation $y = ax + b$.

Remarque 1 :

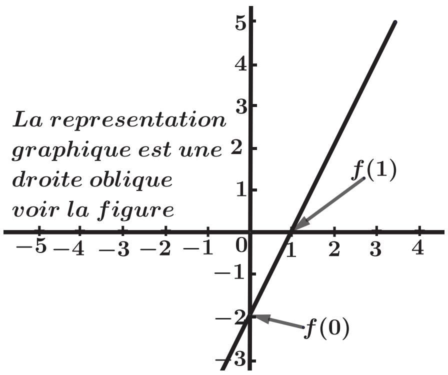
Si $f(x) = ax + b$ est une fonction affine, on a $f(0) = a \times 0 + b = b$ ou aussi $f(0) = b$, la représentation graphique de f passe donc par le point de coordonnées $(0;\ b)$.
Une droite ayant pour équation $f(x) = ax + b$ est la représentation graphique de la fonction affine $f(x) = ax + b$.

Exemple 2 :

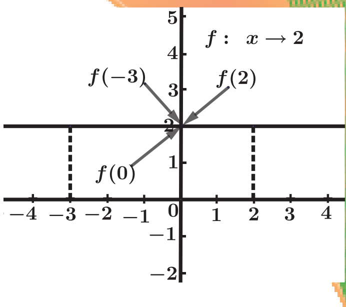
- La représentation graphique de la fonction affine $f(x) = -2x + 3$ est donnée La figure1. (voir ci-contre)



- La représentation graphique de la fonction affine $f(x) = 2x - 2$ est donnée par la figure2. (voir ci-contre)



- *La représentation graphique de la fonction affine $f(x) = 2$ est une droite parallèle à l'axe des abscisses qui passe par le point* $(0;2)$.
  (voir ci-contre)



Résumé :

Signe de a	*Sens de variation*	*Représentation graphique*	*Interprétation*
$a > 0$	f *croissante*	*La droite « monte » de gauche à droite*	*Si x croit, alors $f(x)$ croit aussi*
$a < 0$	f *décroissante*	*La droite « descend » de gauche à droite*	*Si x croit, alors $f(x)$ décroit aussi*
$a = 0$	f *est constante*	*La droite est parallèle à l'axe (Ox)*	*Si x change $f(x)$ ne change pas*

Remarque 2 :

- *Si $b = 0$, la fonction affine $f(x) = ax + b$ devient $f(x) = ax$, alors f est une fonction linéaire.*
- *La représentation graphique d'une fonction linéaire $f(x) = ax$ est la droite ayant pour équation $y = ax$; cette droite passe par l'origine du repère car $f(0) = 0$.*

Attention :

Seules les fonctions linéaires vérifient les deux propriétés :
$f(x + y) = f(x) + f(y)$ et $f(kx) = kf(x)$, les fonctions affines non linéaires ne vérifient pas ces propriétés.

3. Fonctions affines par Morceaux :

3.1. Notion de Fonction affine par Morceaux :

Définition 3 :

Une fonction est dite affine par morceaux (ou par intervalles) si elle est définie sur plusieurs intervalles disjoints ou presque par des fonctions affines.*

Exemple 3 :

- *La fonction :* $f(x) = |x| = \begin{cases} f(x) = -x\ ; & si\ x < 0. \\ f(x) = x\ ; & si\ x \geq 0. \end{cases}$

  La valeur absolue d'une expression de la forme $ax + b$ $(a \neq 0)$ est une fonction affine par intervalle, elle a deux expressions sur deux intervalles.

- *La fonction g définie par :* $g(x) = |2x+3| = \begin{cases} -2x-3\,; & si\ x < \frac{-3}{2} \\ 2\,x+3\,; & si\ x \geq \frac{-3}{2} \end{cases}$

- *La fonction définie par :* $h(x) = \begin{cases} 3x-2\,; & x \leq -3 \\ 2 & -3 \leq x < 2 \\ 4x+2\,; & x \geq 2 \end{cases}$

  On a défini trois intervalles ou parties ou également ''morceaux''

3.2. Représentation graphique d'une fonction affine par morceaux :

Définition 3 :

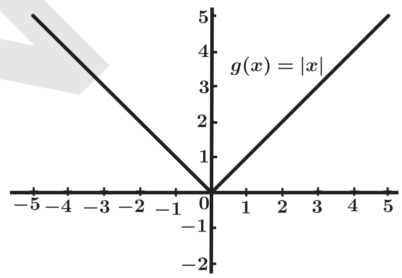
La représentation graphique d'une fonction affine par morceaux est constituée de la réunion de plusieurs segments ou demi-droites.

Remarque 3 :

Pour représenter graphiquement une fonction affine par morceaux, on calcule et on représente chaque expression pour les bornes de l'intervalle correspondant.

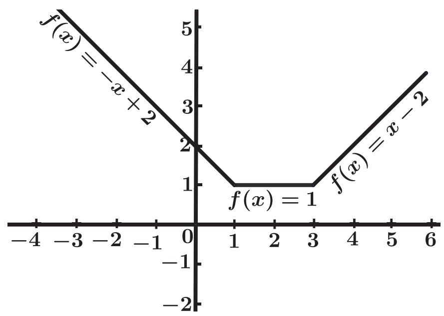
Exemple 4 :

Pour représenter graphiquement les fonctions suivantes :



- $f(x) = |x|$ équivaut à : $\begin{cases} f(x) = -x\,; & si\ x < 0 \\ f(x) = x; & si\ x \geq 0 \end{cases}$

  On a donc calculé et représenté chaque expression pour les bornes de l'intervalle correspondant. (Voir ci-contre)



- $g(x) = \begin{cases} -x+2; & x < 1 \\ 1\quad ; & 1 \leq x \leq 3 \\ x-2\,; & x > 3 \end{cases}$

  On a représenté chaque expression pour les bornes de l'intervalle correspondant. Les bornes sont connues (voir ci-contre)

III. Je sais faire :

Enoncés des exercices d'application :

Exercice d'application 1 :

Parmi les fonctions ci-dessous, quelles sont celles qui sont affines ?

$f(x) = 6x$; $f(x) = \dfrac{1}{3x+4}$; $f(x) = \sqrt{x} + 3$; $f(x) = 3x^2 + 4$;

$f(x) = 0$; $f(x) = -2x + 1$; $f(x) = x^3$.

Exercice d'application 2 :

1. Calcule le coefficient directeur de chacune des fonctions affines suivantes :
   - f sachant que $f(2) = 5, f(3) = 7$.
   - g telle que $g(-1) = 3, g(3) = -8$.
2. Trouve l'expression de la fonction affine h telle que :

$$h(5) = 9 \text{ et } h(3) = 6.$$

Exercice d'application 3 :

Précise le sens de variation de la fonction affine dans les cas suivants :

a. f la fonction affine définie par $f(x) = 5x - 2$.

b. g la fonction affine définie par $g(x) = -2x + 7$.

c. h la fonction affine définie par $h(x) = -4$.

d. $i(x)$ la fonction affine telle que : $i(-2) = 6$ et $i(1) = 3$.

Exercice d'application 4 :

Trace les représentations graphiques des fonctions suivantes :

$$h(x) = 2x - 6 \ ; \ g(x) = -3x + 2$$

Solutions des exercices d'application :

Exercice d'application 1 :

Parmi les fonctions ci-dessous, quelles sont celles qui sont des fonctions affines ?

Fonction	Réponse
$f(x) = 6x$	oui
$f(x) = 0$	non
$f(x) = \dfrac{1}{3x+4}$	non

Fonction	Réponse
$f(x) = \sqrt{x} + 3$	non
$f(x) = 3x^2 + 4$	non
$f(x) = -2x + 1$	oui
$f(x) = x^3$	non

Exercice d'application 2 :

1. *Je calcule des coefficients directeurs*
   - $\frac{f(3)-f(2)}{3-2} = \frac{7-5}{3-2} = 2.$
   - $\frac{g(3)-g(-1)}{3+1} = \frac{-8-3}{3+1} = -\frac{11}{4}.$
2. *L'expression de la fonction affine h telle que :* $h(5) = 9$ *et* $h(3) = 6.$
   L'expression de la fonction affine $h(x) = ax + b$. *On remplace* x *respectivement par* 3 *et* 5, *on obtient le système :* $\begin{cases} 3a + b = 6 \\ 5a + b = 9 \end{cases}.$
   La résolution de ce système donne $a = \frac{3}{2}$ *et* $b = \frac{3}{2}$ *;d'où* $f(x) = \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}.$

Exercice d'application 3 :

Je précise le sens de variation de chacune des fonctions affines suivantes :

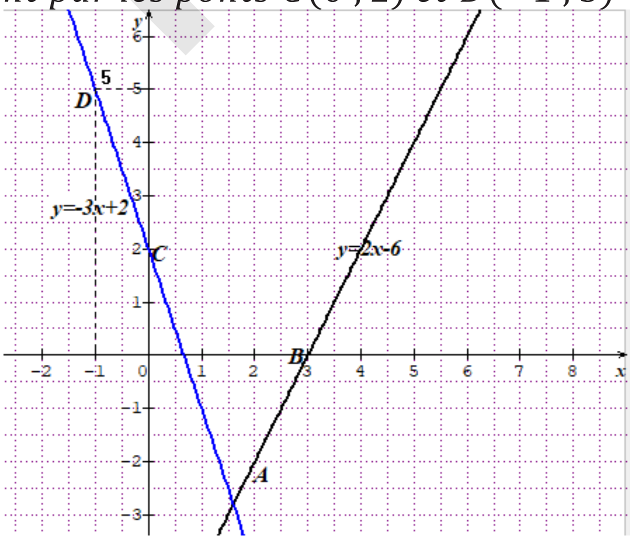
a. f *la fonction affine* $f(x) = 5x - 2$ *est croissante car* $a = 5$.

Fonction affine définie par :	*Coefficient directeur*	*Sens de variation*
$f(x) = 5x - 2$	$a = 5 > 0$	f *est croissante*
$g(x) = -2x + 7$	$a = -2 < 0$	f *est décroissante*
$h(x) = -4$	$a = 0$	h *est constante*
$i(-2) = 6$ *et* $i(1) = 3$	$a = -1$	i *est décroissante*

Exercice d'application 4 :

$h(2) = -2$ *et* $h(3)=0$ *alors la représentation graphique de la fonction h est la droite passant par les ponts* $A(2\,;-2)$ *et* $B(3\,;0)$

$g(0) = 2$ *et* $g(-1) = 5$ *alors la représentation graphique de la fonction g est la droite passant par les ponts* $C(0\,;2)$ *et* $D(-1\,;5)$



IV. Je m'exerce :

Exercice 1 :

Réponds par vrai ou faux en justifiant.

a. *Toute fonction affine est une fonction linéaire*

b. *Toute fonction linéaire est une fonction affine*

c. *L'image de zéro par une fonction linéaire est zéro.*

d. *L'image de zéro par une fonction affine est toujours égale à zéro.*

e. *Si l'image de zéro par une fonction f est zéro, alors f est une fonction linéaire.*

Exercice 2 :

Parmi les procédés suivants, quels sont ceux qui correspondent à une fonction affine ? Précise ceux qui correspondent à une fonction linéaire.

$f(x) = 2 - 3x$; $f(x) = 3x^2 + 1$; $f(t) = 5 - (1 + 2)$; $f(x) = 4$

$f(t) = 1 - t$;

$f(x) = \dfrac{4x - 3}{2}$; $f(x) = \dfrac{2}{5}(x - 1)$; $f(t) = \dfrac{2}{1}$; $f(x) = (x - 1)^2 - x(x - 3)$.

Exercice 3 :

Donne l'image de chacun des nombres : -20 ; $-\frac{1}{2}$; $\frac{4}{5}$; 1 ; 2 *par chacune des fonctions suivantes :* $f(x) = 5x - 2$, $g(x) = \frac{1}{4}x + 1$ *et* $h(x) = -x + \frac{1}{2}$.

On pourra noter, dans chaque cas, les résultats dans un tableau de type :

Nombre x	-20	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{4}{5}$	1	2
Image par ...						

Exercice 4 :

Complète le tableau de valeurs associées à la fonction affine $y = -2x + 3$;

x	-3	-1	0	...	3	...
y	...	...	...	-1	...	-7

Exercice 5 :

Recopie et complète le texte suivant :

a. *La fonction :* $f : x \longmapsto 0{,}5x$ *est une fonction ... de coefficient... ; sa représentation graphique est.... d'équation ....*

b. *La fonction* $g : x \longmapsto \cdots x + \cdots$ *est une fonction... ; sa représentation graphique est la droite ....* $y = 0{,}5x + 3$.

c. *Les droites* d_1 *et* d_2 *sont parallèles, leur ... est 0,5.*

d. *La droite* d_2 *coupe l'axe des ordonnées au point* $B(\ldots ; \ldots)$ *est ... de* d_2.

Exercice 6 :

En physique et chimie, on utilise indifféremment deux échelles de température : le degré Celsius (°C) et le degré Kelvin (°K).

On donne les informations suivantes :

- *0 °K (le zéro absolu) est égal à* $-273°C$ *et* $273°K$ *est égal à* $0°C$;
- *Il existe une fonction affine* f *telle que si* T_c *exprime une température (en degré kelvin), alors* $T_K = f(T_c)$ *exprime la même température (en degré kelvin).*

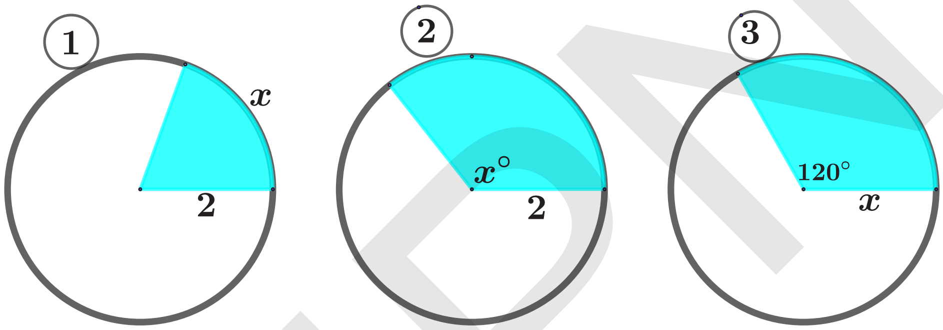
a. *Calcule* T_K *en fonction de* T_c.

b. *Complète le tableau suivant :*

T_k	0	100					456

Exercice 7 :

Dans chacun des cas suivants, on appelle $p(x)$ *le périmètre et* $a(x)$ *l'aire de la surface colorée.* p *et* a *sont ils : linéaire ? Affine ? Autre ?*



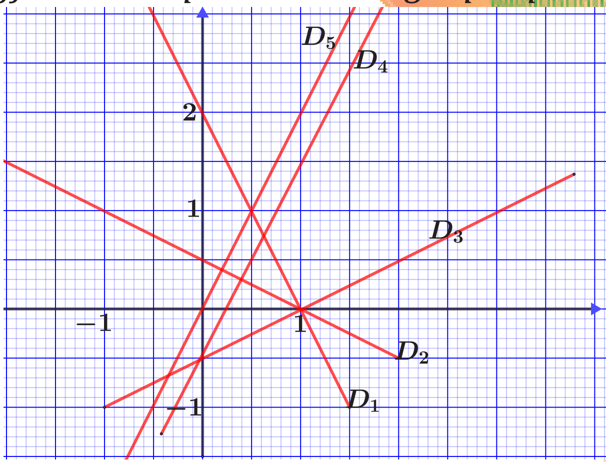
Exercice 8 :

Montre que les fonctions suivantes sont des fonctions affines :

$f : x \longrightarrow 2(x+3) - 4(x-2)$; $\quad g : x \longrightarrow (x+1)^2 - (x+5)x$

Exercice 9 :

Retrouve, pour chacune des fonctions affines, la représentation graphique correspondante :



a. $y = 2x - \frac{1}{2}$;

b. $y = 2x$;

c. $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$;

d. $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$;

e. $y = -2x + 2$.

Deux nombres et leurs images

Exercice 10 :

Détermine la fonction affine f sachant que 1 a pour image 2 et -3 a pour image 10. Représente ensuite cette fonction.

Exercice 11 :

Détermine la fonction affine f sachant que $f(3) = \frac{1}{2}$ et $f(-1) = -\frac{1}{2}$. Représente ensuite cette fonction.

Exercice 12 :

Soit la fonction affine définie par $f(x) = 3x - 1$.

a. *Calcule les images des nombres -2 ; 1 ; 0 ; $\frac{5}{3}$*

b. *Trouve le nombre qui a pour image 5.*

c. *Trouve le nombre qui a pour image 0.*

***Exercice 13 :* L'unité de longueur est le centimètre.**

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). On considère les points : $A\ (3\ ;\ 1), B\ (2\ ;\ -2)$ et $C\ (-6\ ;\ 4)$.

1. Place les points A, B et C dans le repère.

2. On considère la fonction affine $f : x \longrightarrow mx + p$ dont la représentation graphique est la droite (AB).

a. Détermine les images de 2 et de 3 par la fonction f.

b. Détermine les valeurs de m et p de la fonction f.

Exercice 14 :

Détermine la fonction affine f telle que : $f\ (-1) = 5$ et $f\ (1) = 1$.

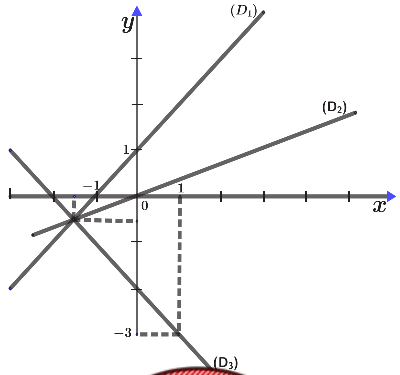
Exercice 15 :

Soit la fonction affine définie sur R par $f(x) = 5x + b$

1. *Calcule l'accroissement d e* $f(x)$ *lorsque l'accroissement de* $f(x)$ *est 30.*
2. *Calcule l'accroissement de x lorsque l'accroissement d e* $f(x)$ *est 45.*
3. *Calcule* $f(x_2)$ *sachant que :* $f(x_1) = -10$ *et l'accroissement de* x_1 *à* x_2 *est 2.*

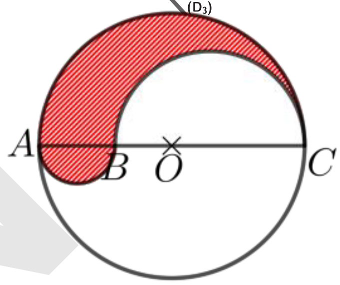
Fonction et géométrie

Exercice 16 :



En utilisant les indications portées sur le graphique ci-contre, détermine les fonctions affines f_1; f_2 *et* f_3 *représentées par les droites* d_1 ; d_2 *et* d_3.

Exercice 17 :



O est le centre du cercle de diamètre [AC]. On donne : $OA = 10$ *et on pose :* $OB = x$.

1. *Exprime en fonction de x la longueur* $p(x)$ *de l'arc ABC passé en trait gras. La fonction p est-elle affine ? linéaire ?*
2. *Exprime en fonction de x l'aire colorée Surface* $\mathscr{A}(x)$. *La fonction A est-elle affine ? Linéaire ?*

Exercice 18 : *L'unité de longueur est le centimètre*

OAB étant un triangle tel que : $OA = 2, OB = 3$ *et* $AB = 4$, *on place un point M sur la demi-droite [OA) à l'extérieur du segment [OA]. La parallèle à (AB) passant par M coupe [OB) en N. On pose* $OM = x$ $(x > 2)$. *Exprime ON et MN en fonction de x.On appelle P (x) le périmètre du triangle OMN et P'(x) le périmètre du quadrilatère ABMN.*

1. *Détermine* $P'(x)$ *et* $P(x)$.*La fonction P est-elle linéaire ? Est-elle affine ?*
2. *Reprends la question avec la fonction P'.*

Exercice 19 :

Détermine le sens de variation des fonctions suivantes :

$f(x) = -3x + 4$; $g(x) = 5x$; $h(x) = (2\sqrt{3} - 3\sqrt{2})x - 5\sqrt{3} + 1$.

Exercice 20 :

1. *On considère la fonction affine* f *definie par* $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$.
   a. *Calcule* $f(-9)$*et* $f(3)$.
   b. *Détermine le sens de variation de f.*
   c. *Construis la présentation graphique de la fonction* f.
2. *On considère la fonction g definie par* $g(x) = 2x + 5$.
   a. *Quel est l'antécédent de chacun des réels* $-2, 0$ *et* 5 *?*
   b. *Détermine le sens de variation de* g.
   c. *Construis sa courbe représentative.*

Exercice 21 :

a. *Résous l'équation* $|2x + 3| = 5$
b. *Etudie le sens de variation de h ; où* $h(x) = |2x + 3|$
c. *Construis sa représentation graphique. Retrouve le (s) résultat(s) de la question a.*

Représentation graphique et étude de situation

Exercice 22 :

ABC est un triangle tel que $AB = 6\ cm$; $BC = 5\ cm$; $AC = 4\ cm$.
M est un point du segment [AB] ; la parallèle à (BC) *passant par M coupe* $[AC]$ *en N. On pose* $AM = x$.

a. *Précise les valeurs possibles de x.*
b. *Exprime* AN, MN, MB *et* NC *en fonction de x.*
c. *Exprime le périmètre du triangle AMN et le périmètre du trapèze MNCB en fonction de x.*
d. *Détermine la valeur de x pour laquelle ces périmètres sont égaux et calcule ce périmètre.*
e. *Dans un même repère, trace les droites* d_1 *et* d_2 *qui représentent les fonctions suivantes :*

$$f_1 : x \longmapsto 2{,}5x\ ;\quad f_2 : x \longmapsto -\frac{5}{6}x + 15.$$

Lis sur le graphique les coordonnées du point d'intersection de d_1 *et* d_2.
Que représentent ces coordonnées ?

Exercice 23 :

Une automobile dont le réservoir a une capacité de 64 litres consomme, habituellement en moyenne, 7litres d'essences au 100km. Par suite d'une avarie, sa consommation moyenne est passée à 12 litres aux 100 km, et l'automobile tombe en panne sèche au bout de 800 km, alors que son réservoir était plein au départ. La distance y (exprimée en km), parcourue par l'automobile depuis le départ est une fonction affine de la quantité x d'essence consommée depuis le départ (exprimée en litres).

a. *Détermine les deux fonctions f et g donnant y en fonction de x avant et après l'avarie.*
b. *Choisis un repère et représente graphiquement f et g. Détermine graphiquement à quelle distance du point de départ a eu lieu l'avarie.*
c. *Retrouve par le calcul la distance au point de départ à laquelle a eu lieu l'avarie ?*

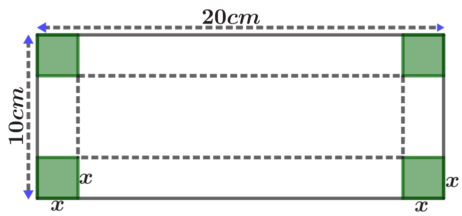
Exercice 24 :

Dans un réservoir composé de deux cylindres on verse un liquide dont le niveau supérieur ou égal à une hauteur x.

1. *Exprime le volume du liquide que contient le réservoir en fonction de x. (on distinguera deux cas : ($0 \leq x \leq 10$ et $10 < x \leq 20$))*
2. *Représente graphiquement ce volume avec :*
   - *En abscisse : 1cm pour 2 cm*
   - *En ordonnée : 1cm pour 500 cm^3*

Lorsque $x = 10$, peut-on dire que le récipient est plein aux trois quarts ?

Exercice 25 : La boite à malices.



Dans chacun des angles d'une feuille rectangulaire de 20 cm sur 10 cm, on découpe un carré de x cm de côté (coloré en vert sur le dessin ci-contre). En pliant suivant les pointillés on fabrique alors une boîte parallélépipédique.

1. Ecris en fonction de x ; l'aire de cette boîte, le volume de cette boîte.

2. Recopie et complète les tableaux ci-dessous qui donne le volume de la boîte $V(x)$ en fonction de x.

x	2,1	2,2
$V(x)$		

x	2,11	2,12
$V(x)$		

x	0	0,5	1	1,5	2	2 ,5	3	3 ,5	4	5
$V(x)$										

3. *Représente graphiquement V en fonction de x.*
   En utilisant la représentation graphique, pour quelles valeurs de x le volume $V(x)$ est-il égal à 100 cm^3 ?

Exercice 26 :

Sur une année, on propose au public deux types de tarifs pour l'emprunt de livres dans une bibliothèque : le tarif plein : 9 MRU par livre emprunté, le tarif « abonné » : cotisation annuelle de 100 MRU à laquelle s'ajoute 50 MRU par livre emprunté.

1. *Reproduis et complète le tableau suivant :*

Nombre de livres empruntés pendant l'année	10	20	50	100
Prix paye au plein tarif (en MRU)		1800		
Prix paye au tarif abonné (en MRU)	1500			

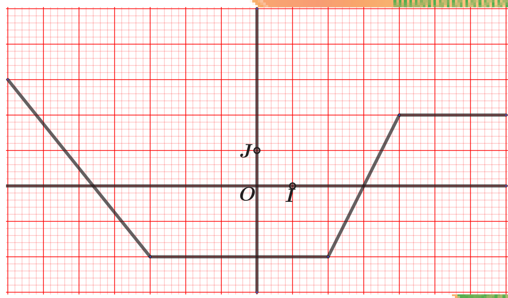
2. *Quel est le prix payé, en UM, pour l'emprunt de 35 livres :*
   a. *Avec le tarif plein ? Justifie ta réponse.*
   b. *Avec le tarif « abonné » ? Justifie ta réponse*
3. *On note : x le nombre de livres empruntés sur l'année ;*
   • *$P(x)$ le prix payé pour l'emprunt de x livres au tarif plein ;*
   • *$A(x)$ le prix payé pour l'emprunt de x livres au tarif « abonné ».*
   Exprime $P(x)$ et $A(x)$ en fonction de x.
4. *a. Résous l'équation : $90x = 50x + 1000$.*
   b. Que représente la solution trouvée pour une personne empruntant des livres à la bibliothèque ?

Exercice 27 :

a. *On considère le mois d'août 2005. Soit x le nombre de jours écoulés depuis le début du mois. On admet que le volume d'eau restant dans la cuve pour x jours écoulés est donné par: $y = 4,8 - 0,3x$.*
   Calcule le volume restant dans la cuve à la fin du 7éme jour.
b. *Soit g la fonction affine définie par $g(x) = 4,8 - 0,3x$.*
   Construis la représentation graphique de la fonction g sur une feuille millimétrée (prendre 1 cm pour 2 jours en abscisse et 1 cm pour 0,4 m^3en ordonnée).
c. *Cet habitant a continué à consommer 300 litres d'eau par jour en août.*
   Détermine par lecture graphique le volume d'eau (en m^3) qui reste dans la cuve au bout du 10éme jour. (Fais apparaître la réponse sur le graphique).

Fonctions affines par morceaux

Exercice 28 :



La représentation ci-contre est celle d'une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ affine par morceaux. Reproduis cette représentation, puis détermine les quatre expressions qui donnent $f(x)$ pour x appartenant à $\mathbb{R}$.

Exercice 29 :

Représente graphiquement les fonctions f et g définies respectivement, pour $x \in \mathbb{R}$, par : $f(x) = x - |x-2|$ et $g(x) = |x-3| - |5-x|$.

***Exercice 30 :* Fonction en escalier.**

Représente graphiquement la fonction en escalier f définie par le tableau suivant :

x	$-10 \leq x < -3$	$-3 \leq x < 5$	$5 \leq x < 8$
$f(x)$	5	-4	2

Exercice 31 :

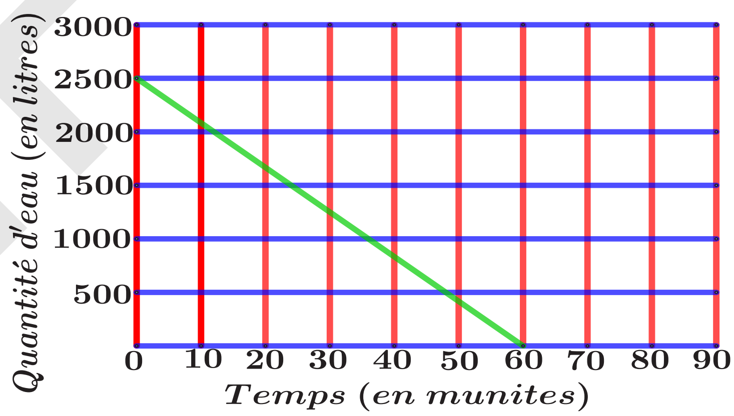
Représente graphiquement la fonction en escalier f définie par le tableau ci-après.

x	$-6 \leq x < 0$	$0 \leq x < 2$	$2 \leq x < 4$	$4 \leq x < 6$
$f(x)$	-4	-2	0	3

Résolution graphique d'un problème

Exercice 32 :

On décide de vider une citerne qui contient 2700 litres d'eau. Le graphique ci-contre représente les variations de la quantité d'eau contenue dans la citerne en fonction du temps.



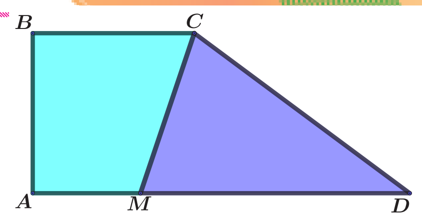
a. En utilisant le graphique et en faisant les calculs nécessaires, complète le tableau ci-dessous

Temps (en min)	0	10	30	40	60
Volume d'eau restant V (en l)	.....	.....	......	......	.....

b. Quelle est la nature de la fonction qui lie quantité V d'eau qui est contenue dans la citerne au temps t (en min) ?

c. Exprime la relation qui existe entre V et t.

Exercice 33 :



ABCD est trapèze rectangle en A ; voir figure ci-contre : de bases $[AD]$ *et* $[BC]$. $AD = 10\ cm$ *et* $AB = BC = 5cm$. *M est un point variable de* $[AD]$*, on pose* $AM = x$.

1. $f(3x + 5y) = 3f(x) + 5f(y)$ *; Quels que soient les nombres x et y.*
2. *Montre que les aires respectives du trapèze AMCB et du triangle MDC sont* $\frac{5x}{2} + \frac{25}{2}$ *et* $\frac{50}{2} - \frac{5x}{2}$.
3. *Représente graphiquement les deux fonctions affines f et g définies respectivement par :* $f(x) = \frac{5x}{2} + \frac{25}{2}$ *et* $g(x) = \frac{50}{2} - \frac{5x}{2}$.

Résous graphiquement l'équation $f(x) = g(x)$. *Que représente la solution trouvée ?*

Chapitre15 : Probabilités

I. Activités préparatoires :

Activité 1 : Questions de hasard

- *Si on lance une pièce de notre monnaie (l'ouguiya), qu'est-ce qui est le plus facile à obtenir : Ar ou Fr ? Pourquoi ?*
  (Ar la face portant la valeur de la pièce en arabe, Fr la face portant la valeur de la pièce en français)
- *Mohamed a lancé une pièce de monnaie et a obtenu 5 fois de suite Ar.*
  Voulez-vous la lancer : pouvez-vous prévoir si ce sera Ar ou Fr ? Pourquoi ?
- *En lançant un dé à 6 faces numérotées de1 à 6, qu'est-ce qui est le plus facile à obtenir : un 2 ou un 6 ? Pourquoi ?*
- *Fatou et son frère Moussa jouent aux dés, chacun avec son dé. Mais Moussa est un peu tricheur et a échangé son dé avec un autre qui n'a que 6 sur toutes ses faces. Quand Fatou lance son dé, peut- on prévoir quel numéro sortira ? Et quand Moussa lance le sien ? Pourquoi ?*
- *On a fabriqué un dé spécial pour faire des paris. Il a trois faces avec un 1, deux faces avec un x et une face avec un 2. Si on le lance qu'est-ce qui sera le plus facile à obtenir ? Et qu'est-ce qui sera le moins facile ? Pourquoi ?*

Activité 2 :

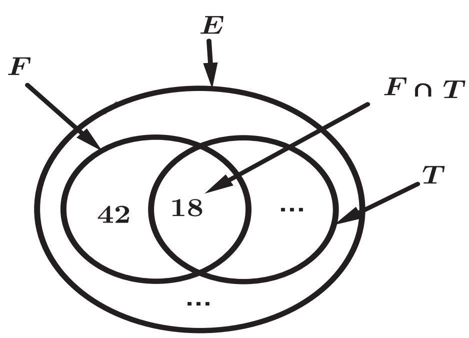
On reprend l'exemple d'un dé spécial fabriqué pour faire des paris. Il a une face avec un 1, deux faces avec un 2, trois faces avec un 3. Si on le lance :

Il y a ... chance(s) sur 6 d'obtenir un 1, et on écrit $p_1 = \frac{}{}$.

Il y a ... chance(s) sur d'obtenir un 2, et on écrit $p_2 = \frac{}{}$.

Activité 3 :

Un centre de loisir accueille 100 enfants. Deux sports leur sont proposés : Le football et le tennis.
A la question : Aimez-vous le football ? 60 enfants lèvent la main.
A la question : Aimez-vous le tennis ? 45 enfants lèvent la main.
A la question aimez-vous le tennis et le football ? 18 enfants lèvent la main.



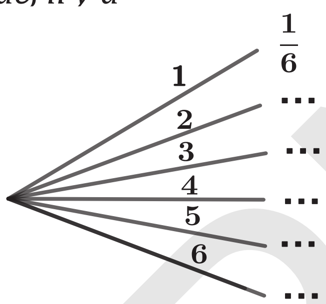
Complète ce diagramme sachant qu'on note E, F, T et $F \cap T$ comme suit :
E est l'ensemble des enfants du centre ;
F est l'ensemble des enfants qui aiment le football ;
T est l'ensemble des enfants amateurs du tennis ;
$F \cap T$ est l'ensemble des enfants pratiquant les deux sports.
Quel est le nombre d'enfants qui ne pratiquent aucun des deux sports proposés ?

Activité 4 :

Une expérience aléatoire peut être représentée par un arbre pondéré.
Représente les deux expériences évoquées dans l'exemple 2 en complétant les deux arbres pondérés suivants

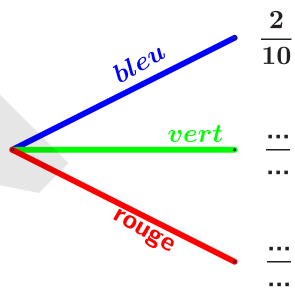
L'exemple du ci-haut

Si on lance un dé, il y a une chance sur 6 d'obtenir 1, une chance sur 6 d'obtenir 2, etc ………



Exemple ci-haut de l'urne

Si on tire une boule, il y a 2chances chances sur 10 pour qu'elle soit bleue, etc……..



Activité 5 :

Le nombre total des élèves d'un collège est de 250 élèves. 40% des élèves sont des filles et 70% des filles ont plus 13 ans. Au total il y a 180 élèves de plus 13 ans.

	Plus de 13 ans	Moins de 13 ans	Total
Garçon			
Fille			
Total			

Complète le tableau ci-dessus puis réponds aux questions posées
On sélectionne un élève au hasard du collège.
Quelle est la probabilité pour que ce soit un garçon ?
Quelle est la probabilité pour que ce soit une fille de moins de 13 ans ?
Quelle est la probabilité pour que ce soit un garçon ayant plus de 13 ans ?

Activité 6 :

On lance un dé parfaitement équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et note le chiffre de la face supérieure. Quelles sont les possibilités d'obtenir :

a. un nombre pair?
b. un nombre impair?
c. un nombre multiple de 3?
d. un nombre multiple de 5?

Activité 7 :

On reprend les données de l'activité précédente. On note par les lettres A, B, C et D, les événements suivants :

A : « obtenir un nombre pair » ; C : « obtenir un nombre multiple de 3 » ;

B : « obtenir un nombre impair » et D : « obtenir un nombre multiple de 5 »

a. Quelle est la probabilité de l'événement A ? Vérifie quelle est égale à la somme des probabilités des issues qui réalisent cet événement.

b. Mêmes questions pour les événements B, C et D.

Activité 8:

On reprend les données de l'activité précédente (activité 7).

a. Les événements A et D peuvent se réaliser simultanément (en même temps) ?

b. Même question pour C et D.

c. Complète la phrase suivante :

Les événements A et B ... se réaliser simultanément. De plus si l'un ne se réalise pas, alors l'autre se ...obligatoirement

Activité 9 :

Une machine fabrique en série des tiges métalliques de forme cylindrique.
Une tige peut présenter l'un des défauts suivants :

- *défaut D1 : le diamètre n'est pas conforme*
- *défaut D2 : la longueur n'est pas conforme*

Sur un lot de 100 tiges, les informations suivantes sont données :

8 tiges présentent le défaut D1, 6 tiges présentent le défaut D2 et 2 tiges présentent simultanément les défauts D1 et D2.

1°) Déterminer en utilisant un diagramme, le nombre de tiges du lot qui ne présentent :

a) que le défaut D1
b) que le défaut D2
c) ni le défaut D1, ni le défaut D2.

2°) Répondre aux mêmes questions en utilisant un tableau.

3°) Répondre aux mêmes questions en utilisant un arbre.

II. Je retiens :

1. Expérience aléatoire :

Définition 1 :

Une expérience est aléatoire lorsqu'elle comporte plusieurs résultats (issues) possibles et que l'on ne peut pas prévoir avec certitude quel est le résultat qui va se produire.

Exemple 1 :

- *On lance un dé non truqué (équilibré) et on note le résultat obtenu. Les résultats (les issues possibles) sont :* $1, 2, 3, 4, 5$ *ou* 6.
- *On tire une boule dans une urne (un contenant…) contenant 3 boules rouge, 2 boules bleues et 5 boules vertes et on note la couleur de la boule tirée. Les issues (résultats) possibles sont : vert, bleu ou rouge.*

V. Notion de probabilité :

Définition 2 :

A chaque issue d'une expérience aléatoire correspond un nombre p compris entre 0 et 1 $(0 \leq p \leq 1)$ *qui mesure (exprime) la chance de réalisation de cette issue. Ce nombre est appelé :la probabilité de cette issue.*

Exemple 2 :

Quand on lance un dé à 6 faces numérotées de1 à 6.

- *Il y a une chance sur 6 d'obtenir 1, une chance sur 6 d'obtenir 2, etc……..*

  On a donc : $p(1) = p(2) = p(3) = p(4) = p(5) = p(6) = \frac{1}{6}$

Une urne contient 3 boules rouges,5 boules vertes et 2 boules bleues

- *Il y a 3 chances sur 10 d'obtenir une boule rouge et 5 chances sur 10 d'obtenir une boule verte et 2 chances sur 10 d'obtenir une boule bleue.*

  Soit p(rouge) la probabilité d'obtenir une boule rouge, p(vert) la probabilité d'obtenir une boule verte et p(bleu) obtenir une boule bleue.

  On a donc : $p(\text{rouge}) = \frac{3}{10}$; $\quad p(\text{vert}) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \quad p(\text{bleu}) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$.

Propriété 1 :

La somme de toutes les probabilités des issues d'une expérience aléatoire est égale 1.

Exemple 3 :

On reprend les résultats obtenus dans l'exemple précédent :

$$P(1)+p(2)+p(3)+p(4)+p(5)+p(6)=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{6}{6}=1$$

$$p(rouge)+\ p(vert)\ +\ p(bleu)=\frac{3}{10}+\frac{2}{10}+\frac{5}{10}=\frac{10}{10}=1.$$

Remarque 1 : Lien avec les fréquences

Quand on répète un grand nombre de fois une expérience aléatoire, la fréquence de réalisation d'un événement devient proche de sa probabilité. En effet par exemple : Si on lance 1000 fois un dé, la fréquence de 6 sera de 0,167, qui est une valeur approchée de $\frac{1}{6}$.

VI. Outils pour les probabilités :

Il est parfois utile de représenter une situation de probabilité par différents outils : Un diagramme de Venn, un arbre pondéré ou un tableau à double entrée

3.1. Diagramme de Venn :

Le diagramme utilisé pour présenter les données de l'activité 3 est appelé : Diagramme de VENN

3.2. Arbre pondéré :

Le diagramme utilisé pour présenter les données de l'activité 4 est appelé : Arbre pondéré

3.3. Tableau : *table à double entrée présentée dans l'activité 5*

VII. Evénement et probabilité d'un événement :

4.1. Notion d'événement :

Remarque 2 :

Les réponses à ces questions produisent une ou plusieurs issues qu'on appelle événements.

Définition 3 :

On note Ω l'ensemble des issues d'une expérience aléatoire.

Un événement est une partie de Ω (Un événement est constitué d'une ou plusieurs issues d'une expérience aléatoire).

- *Un événement est impossible s'il ne peut pas se produire.*
- *Un événement est certain s'il se produit forcement.*
- *Un événement constitué d'une seule issue est appelé événement élémentaire.*

Propriété 2 :

- *La probabilité d'un événement est égale à la somme des probabilités des issues qui réalisent cet événement.*
- *La probabilité d'un événement impossible est égale à 0.*
- *La probabilité d'un événement certain est égale à 1.*

Exemple 4 :

Quand on lance un dé à 6 faces numérotées de1 à 6.

- *On appelle E l'événement obtenir « au moins 4 », F l'événement obtenir « le chiffre 8 » et G obtenir « un nombre entier ».*

  $P(E) = p(4) + p(5) + p(6) = \frac{1}{6} = \frac{1}{6} = \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$

  $P(F) = 0$*(il est impossible d'obtenir 8).*

  $P(G) = 1$ *(il est certain d'obtenir un nombre entier).*

- *On appelle A l'événement « Obtenir une boule bleue ou verte »*

  B l'événement « Obtenir une boule, verte ou rouge » et C l'événement « obtenir une boule jaune ».

  $P(A) = p(bleu) + p(vert) = \frac{2}{10} + \frac{5}{10} = \frac{7}{10}$

  $p(B) = 1$ *(B est un événement certain, car dans cette urne on n'a que des boules rouges, vertes ou bleues).*

  $p(C) = 0$ *(C est un événement impossible car l'urne ne contient pas de boule jaune).*

4.2. Evénements incompatibles, événement contraire:

Définition 4 :

- *Deux événements sont incompatibles s'ils ne peuvent pas se réaliser en même temps (simultanément).*
- *L'événement contraire d'un événement A est celui qui ne se réalise pas lorsque A est réalisé. On le note non A ou $\bar{A}$.*

Exemple 5 :

Si on note A l'événement « Obtenir un nombre pair » et « on obtient 3 ou 5 » sont incompatibles.

Soit B l'événement « on obtient au moins 2 ». L'événement contraire de B est $\bar{B}$: « obtenir 1 ». L'événement contraire de A est non A ou $\bar{A}$ « Obtenir un nombre impair ».

Propriété 3 :

- *Lorsque deux événements sont incompatibles, la probabilité que l'un ou l'autre se réalise est égale à la somme de leurs probabilités.*
- *La somme des probabilités d'un événement et son contraire est égalé à 1 :* $p(A) + p(\overline{A}) = 1$

Exemple 6 :

Si on note C l'événement « on obtient 5 ou 6 » et D « on obtient au moins 2 »

$P(C) = p((5) + p(6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ *(les événements obtenir 5 et obtenir 6 sont incompatibles).*

L'événement contraire de D est obtenu 1. $p(D) = p(1) = \frac{1}{6}$, *donc* $p(B) = 1 - p(1) = 1 - \frac{5}{6}$.

4.3. Réunion et intersection de deux événements :

Définition 5 :

- *L'événement « A et B » noté* $A \cap B$ *est réalisé lorsque les deux événements A et B sont réalisés simultanément (en même temps).*
- *L'événement « A ou B » noté* $A \cup B$ *est réalisé lorsque l'un au des deux événements est réalisé.*

Ces définitions sont illustrées par les deux dessins ci-dessous :

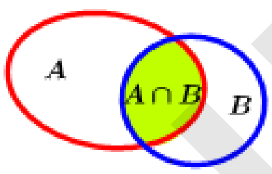
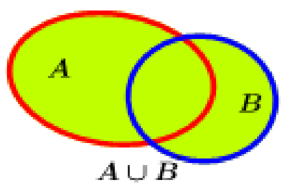


Diagramme de Venn :



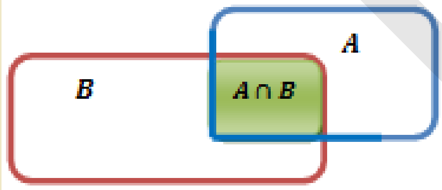
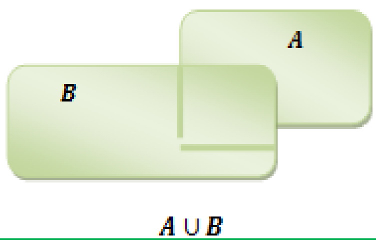


Diagramme de Carroll :*



Propriété 3 :

Soient A et B deux événement, on a : $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

Exemple 7 :

Soient A et B deux événements tels que $P(A) = \frac{1}{5}$ *et* $P(A \cup B) = \frac{1}{2}$.

1. Supposons que A et B soient incompatibles. Calcule $P(B)$.

2. Supposons que A et B soient indépendants. Calcule $P(B)$.

3. Calculer $P(B)$ *en supposant que l'événement A ne peut être réalisé que si l'événement B est réalisé.*

Réponse :

1. *A et B incompatibles donc* $A \cap B = \emptyset$ *d'où* $P(A \cup B) = P(A) + P(B) \Rightarrow$
$P(B) = \frac{1}{2} - \frac{1}{5} = \frac{3}{10}$.

2. *A et B indépendants :* $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$$= P(A) + P(B) - P(A)XP(B)$$

$$= (1 - \frac{1}{5})\ P(B) = \frac{1}{2} - \frac{1}{5} \Rightarrow$$

$$= \frac{4}{5} P(B) = \frac{3}{10}$$

$$P(B) = \frac{3}{10}\ X\ \frac{5}{4} = \frac{3}{8}$$

III. Je sais faire :

Enoncés des exercices d'application :

Exercice d'application 1 :

Un sondage auprès de 150 personnes a donné les résultats suivants :

- A la question « consommez-vous régulièrement du thé », 50 personnes répondent oui.
- A la question « Etes-vous fumeur ? », 80 personnes répondent oui.
- A la question « Etes-vous fumeur consommant régulièrement du thé ? », 35 personnes répondent oui.

Représente ces données par un diagramme de Venn.

Combien de personnes sont des fumeurs ne consommant pas régulièrement du thé ?

a. Combien de personnes consomment régulièrement du thé et ne sont pas fumeurs ?

b. Combien de personnes ne sont pas fumeurs et ne consomment pas régulièrement du thé ?

c. Combien de personnes sont fumeurs ou consomment régulièrement du thé ?

Exercice d'application 2 :

On écrit sur les faces d'un dé, à six faces, chacune des lettres du mot OISEAU.

On lance ce dé et on regarde la lettre inscrite sur sa face supérieure.

1. Citer les issues de cette expérience.
2. Donner un exemple d'événement élémentaire.
3. Donner un exemple d'événement non élémentaire.

Exercice d'application 3 :

Une expérience aléatoire admet 15 issues. Il s'agit d'une situation d'équiprobabilité.

Détermine la probabilité d'un événement réalisé par :

a. 1 issue b. 3 issues c. toutes les issues d. 7 issues

e. 5 issues f. aucune issue

Exercice d'application 4 :

On lance deux fois de suite une pièce de monnaie dont les faces portent les lettres P, F (pile ; face)

Soit A l'évènement : « On obtient au moins une fois la face PILE. »

Calcule P(A).

Exercice d'application 5 :

Un centre de loisirs accueille 100 enfants.

Deux sports sont proposés : le football et le tennis.

A la question : Aimez-vous le football ? 60 enfants lèvent la main.

A la question : Aimez-vous le tennis ? 45 enfants lèvent la main.

A la question : Aimez-vous le tennis et le football ? 18 enfants lèvent la main.

En faisant un **diagramme** représentant ces données, répondre aux questions suivantes :

Combien d'enfants aiment le football mais n'aiment pas le tennis ?
Combien d'enfants aiment le tennis mais n'aiment pas le football ?
Combien d'enfants n'aiment aucun des deux sports ?
Combien d'enfants aiment au moins un des deux sports ?

Solutions des exercices d'application :

Exercice d'application 1 :

On peut créer le tableau suivant dans lequel on place les données du texte :

	Consommateurs de thé	Non consommateurs	Total
Fumeurs	35		80
Non-fumeurs			
Total	50		150

On peut ensuite compléter ce tableau en effectuant les opérations suivantes :

	Consommateur de thé	Non consommateurs	Total
Fumeurs	35	80 - 35 = 45	80
Non-fumeurs	50 - 35 = 15	70-15 = 55	150 - 80 = 70
Total	50	150 - 50 = 100	150

On peut alors terminer le tableau en remplissant la dernière cellule.

	Consommateur de thé	Non consommateurs	Total
Fumeurs	35	45	80
Non-fumeurs	15	55	70
Total	50	100	150

On peut alors, par lecture directe du tableau, dire que :
45 personnes sont des fumeurs ne consommant pas régulièrement de thé
15 personnes consomment régulièrement de thé et ne sont pas fumeurs,
55 personnes ne sont pas fumeurs et ne consomment pas régulièrement de thé.
Et par addition des nombres contenus dans les cellules grisées, on obtient que :
95 personnes sont fumeurs ou consomment régulièrement de thé.

Exercice d'application 2 :

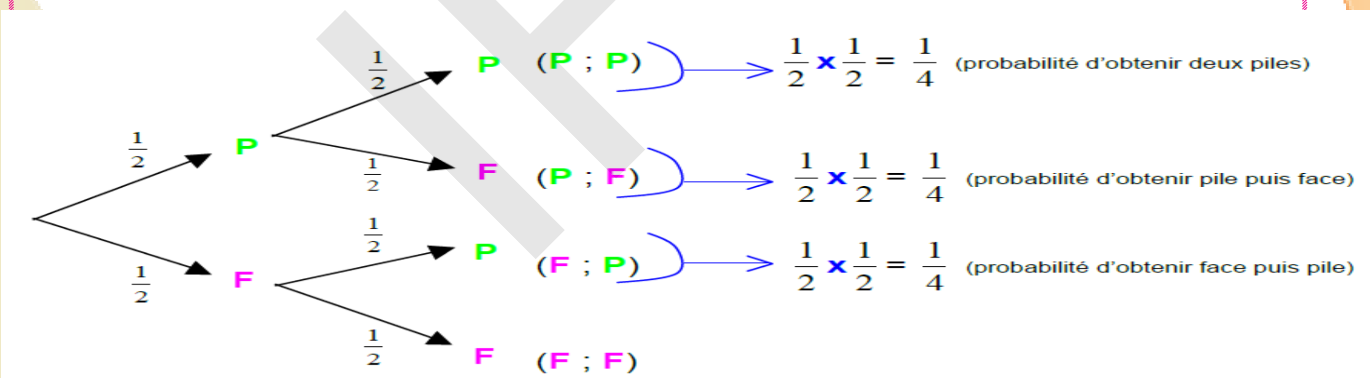
1. Dans cette expérience aléatoire on a 6 issues possibles : O ; I ; S ; E ; A et U.
2. un exemple d'événement élémentaire : « La face supérieure porte la lettre U» qui a une seule issue
3. un exemple d'événement non élémentaire : « Obtenir une voyelle sur face la supérieure » qui a plusieurs issues.

Exercice d'application 3 :

Dans une expérience aléatoire admet 15 issues :

a. La probabilité d'un événement réalisé par une seule issue est : **1/15**
b. La probabilité d'un événement réalisé par 3 issues est : 3/15=**1/5**
c. L'événement réalisé par toutes les issues est l'événement certain sa probabilité est égale à :1
d. La probabilité d'un événement réalisé par issues est : **7 /15**
e. La probabilité d'un événement réalisé par 5 issues est : 5/15 =**1/3**
f. L'événement réalisé par aucune issue est l'événement impossible, sa probabilité est donc 0

Exercice d'application 4 :

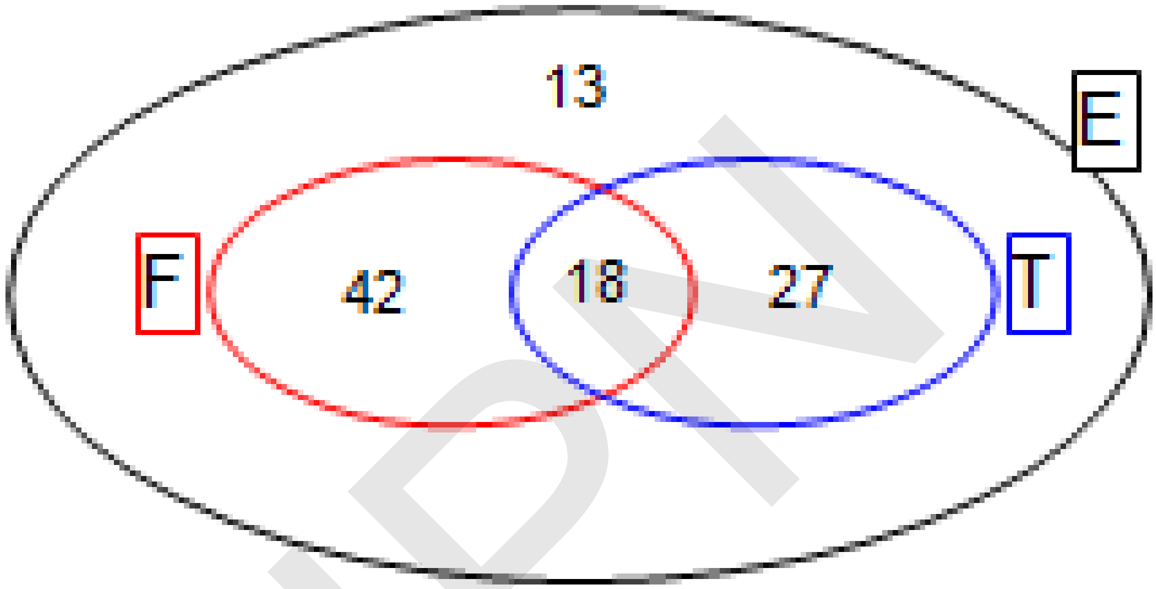


Sur un même chemin, on multiplie les probabilités. La probabilité que l'évènement A se réalise est de $\frac{3}{4}$.

Il y a donc trois chances sur quatre d'obtenir au moins une fois la PILE lorsqu'on lance deux fois de suite une pièce de monnaie

Exercice d'application 5:

La lecture du diagramme de Venn permet d'avancer les réponses suivantes :
42 enfants aiment le football mais n'aiment pas le tennis,
27 enfants aiment le tennis mais n'aiment pas le football,
13 enfants n'aiment aucun des deux sports,
87 enfants aiment au moins un des deux sports.



IV. Je m'exerce :

Exercice 1 :

On considère l'expérience aléatoire suivante :

On lance un dé à six faces et on regarde le nombre de points inscrits sur la face du dessus.

On considère les événements suivants :

A : « On obtient un nombre impair »

B : « On obtient un multiple de 3 »

Calcule la probabilité de l'évènement A∪ B.

Exercice 2 :

On a mélangé dans un sac 70 chocolats noirs et 45 chocolats blancs.

Quelle est la probabilité de l'événement N « tirer un chocolat noir » ?

Exercice 3 :

On lance un dé sur lequel les numéros des faces ont été remplacés par les chiffres 1 ; 2 ; 2 ; 3 ; 3 ; 3.

4. *Construis un arbre des possibilités et détermine la probabilité de sortir un nombre pair.*
5. *Quelle est la probabilité de sortir un nombre impair ?*

Exercice 4 :

On lance deux fois la même pièce équilibrée (les faces sont appelées pile et face).

1. *Construis un arbre des possibilités.*
2. *Quelle est la probabilité d'obtenir deux fois « pile » ?*
3. *Quelle est la probabilité d'obtenir deux résultats différents ?*

Exercice 5 :

Une urne ne contient que des boules jaunes, des boules bleues et des boules rouges. On sait que :

La probabilité de tirer une boule jaune est $(J) = 0{,}2$.

La probabilité de tirer une boule bleue est $p(B) = 0{,}5$.

Quelle est la probabilité $p(R)$ *de tirer une boule rouge ?*

Exercice 6 :

Un jeu de 32 cartes à jouer est constitué de quatre « familles » : trèfle et pique, de couleur noire ; carreau et cœur, de couleur rouge. Dans chaque famille, on trouve trois « figures » : valet, dame, roi. On tire une carte au hasard dans ce jeu de 32 cartes.

Quelle est la probabilité des événements suivants :

1. *« La carte tirée est une dame. »*
2. *« La carte tirée est une figure rouge. »*
3. *« La carte tirée n'est pas une figure rouge. »*

Exercice 7 :

Détermine la probabilité de tirer un as ou un cœur dans un jeu de 32 cartes.

Exercice 8 :

Un sachet contient 2 bonbons à la menthe, 3 à l'orange et 5 au citron. On tire, au hasard, un bonbon du sachet et on définit les événements suivants :

A : « le bonbon est à la menthe » ;

B : « le bonbon est à l'orange » ;

C : « le bonbon est au citron ».

1. Détermine les probabilités $p(A)$ puis $p(B)$ et $p(C)$.

2. Représente l'expérience par un arbre pondéré.

(On fait figurer sur chaque branche la probabilité associée)

Exercice 9 :

Dans un lycée de 1023 élèves on a recensé les élèves pratiquant l'Anglais et l'Espagnol. On obtient les résultats suivants

524 élèves pratiquent l'Anglais et l'Espagnol.

936 élèves pratiquent l'Anglais.

415 élèves ne pratiquent pas l'Espagnol.

En utilisant un diagramme, répondre aux questions suivantes :

Combien d'élèves ne pratiquent ni l'Anglais ni l'Espagnol

Combien d'élèves pratiquent l'Anglais mais pas l'Espagnol

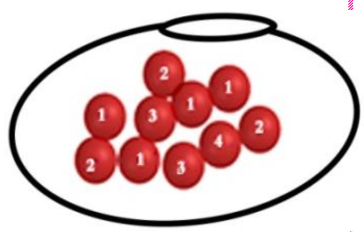
Combien d'élèves pratiquent l'Espagnol mais pas l'Anglais

Combien d'élèves pratiquent l'Anglais ou l'Espagnol, mais pas les deux.

Exercice 10 :

Un sac opaque contient les boules représentées ci-contre ; un nombre de points est indiqué sur chacune d'elles.

On tire au hasard une boule et on lit le nombre de points.



1. Dessine l'arbre des possibles en notant les probabilités et donne-les sous forme fractionnaire et décimale.

2. Calcule la probabilité de l'événement A : « obtenir au moins 2 points ».

Exercice 11 :

On lance 500 fois un dé. Le nombre d'apparitions de chaque face est noté :

Numéro de la face	1	2	3	4	5	6
Nombre d'apparitions	75	80	90	85	78	92

1. En utilisant le tableau, dire quelle était la probabilité d'obtenir 4 ?

2. En utilisant le tableau, dire quelle était la probabilité d'obtenir un nombre pair ?

3. En utilisant le tableau, dire quelle était la probabilité d'obtenir un nombre impair ?

Exercice 12 :
*Un joueur de tennis a droit à deux tentatives pour réussir sa mise en jeu.
Gwladys réussit sa première balle de service dans 65 % des cas. Quand elle échoue, elle réussit la seconde dans 80 % des cas.
Quelle est la probabilité pour qu'elle commette une double faute (c'est-à-dire qu'elle échoue deux fois de suite) ?*

Exercice 13 :
*Dans un pot au couvercle rouge, on a mis 6 bonbons à la fraise et 10 bonbons à la menthe.
Dans un pot au couvercle bleu, on a mis 8 bonbons à la fraise et 14 bonbons à la menthe.
Les bonbons sont enveloppés de telle façon qu'on ne peut pas les différencier.
Moussa préfère les bonbons à la fraise.
Dans quel pot a-t-il plus de chance de choisir un bonbon à la fraise ?*

Exercice 14 :
Dans une classe de collège, après la visite médicale, on a dressé

le tableau suivant :

	Porte des lunettes	Ne Porte pas de lunette
Fille	3	15
Garçon	7	5

Les fiches individuelles de renseignements tombent par terre et s'éparpillent.
1. *Si l'infirmière en ramasse au hasard, quelle est la probabilité que la fiche soit :*
   a. *celle d'une fille qui porte des lunettes ?*
   b. *Celle d'un garçon ?*
2. *Les élèves qui portent des lunettes dans cette classe représentent 12,5% de ceux qui en portent dans tout le collège. Combien y a-t-il d'élèves qui portent des lunettes dans le collège ?*

Exercice 15 :
*A bord d'un bateau de croisière de passage à Tahiti, il y avait 24 000 personnes, dont aucun enfant.
Chaque personne à bord du bateau est : soit un touriste, soit un membre de l'équipage.*

Voici le tableau qui donne la composition des personnes à bord de ce bateau.

	Hommes	Femmes	Total
Touristes		1400	1700
Membres de l'équipage		300	
Total			2400

1. Recopier puis compléter le tableau ci-dessus.

2. On choisit à bord du bateau, une personne, au hasard.

a. Peut-on dire qu'il y a plus d'une chance sur deux que ce soit un homme ? Justifie ta réponse.

b. Quelle est la probabilité que cette personne fasse partie des touristes ?

c. Quelle est la probabilité que cette personne ne soit pas un homme membre de l'équipage ?

Exercice 16 :

Le baklava est une pâtisserie traditionnelle dans plusieurs pays comme la Bulgarie ou le Maroc. Il s'agit d'un dessert long à préparer, à base de pâte feuilletée, de miel, de noix ou de pistaches ou de noisettes, selon les régions.

Dans un sachet non transparent, on a sept baklavas indiscernables au toucher portant les lettres du mot BAKLAVA.

B **A** **K** **L** **A** **V** **A**

On tire au hasard un gâteau dans ce sachet et on regarde la lettre inscrite sur le gâteau.

1. *Quelles sont les issues de cette expérience ?*
2. *Détermine les probabilités suivantes :*
   a. La lettre tirée est un L.
   b. La lettre tirée n'est pas un A.
3. *Enzo achète un sachet contenant 10 baklavas tous indiscernables au toucher. Ce sachet contient 2 baklavas à base de pistaches, 4 baklavas à base de noisettes et les autres baklavas sont à base de noix.*
   Enzo pioche au hasard un gâteau et le mange ; c'est un gâteau à base de noix. Il souhaite en manger un autre.
   Son amie Laura affirme que, s'il veut maintenant prendre un nouveau gâteau, il aura plus de chances de piocher un gâteau à base de noix. A-t-elle raison ? Justifie ta réponse.

Exercice 17 :

Dans un jeu de société, les jetons sont des supports de format carré, de mêmes couleurs, sur lesquels une lettre de l'alphabet est inscrite. Le revers n'est pas identifiable.

Il y a 100 jetons. Le tableau ci-dessous donne le nombre de jetons du jeu pour chacune des voyelles :

Lettres du jeu	A	E	I	O	U	Y
Effectif	9	15	8	6	6	1

On choisit au hasard une lettre de ce jeu.

1. *Quelle est la probabilité d'obtenir la lettre I ?*
2. *Quelle est la probabilité d'obtenir une voyelle ?*
3. *Quelle est la probabilité d'obtenir une consonne ?*

Exercice 18 :

7	7	5	2	7	6	7	4

Dans une urne, il y a huit boules indiscernables au toucher, qui portent chacune un numéro :

1. *Si on tire au hasard une boule dans cette urne, quelle est la probabilité qu'elle porte le numéro 7 ?*
2. *Yacine s'apprête à tirer une boule. Il affirme qu'il y a plus de chance de tirer un numéro pair qu'un numéro impair. A-t-il raison ?*
3. *Finalement Yacine a tiré la boule portant le numéro 5 et la garde : il ne la remet pas dans l'urne. Brahim s'apprête à tirer une boule dans l'urne. Quelle est la probabilité que cette boule porte le numéro 7 ?*

Exercice 19 :

Dans une équipe de 8 élèves constituée de 5 filles et 3 garçons, il y a 6 internes. Le professeur d'EPS désigne, au hasard, un élève pour être le capitaine de l'équipe.

a. *Quelle est la probabilité que le capitaine soit une fille ?*

b. *Quelle est la probabilité pour que le capitaine soit un élève interne ?*

Exercice 20 :

Un enfant possède 5 crayons de couleur : un rouge, un vert, un bleu, un jaune et un marron.

Il dessine un bonhomme et choisit : un crayon pour la tête, un crayon pour le corps et un crayon pour les membres.

En utilisant une disposition en forme d'arbre, déterminer tous les choix possibles des trois crayons :

1°) En supposant qu'il peut utiliser la même couleur pour différentes parties.

2°) En supposant qu'il utilise toujours trois couleurs distinctes.

Exercice 21 :

On dispose d'un dé à 12 faces numérotées de1 à 12. On note le numéro de la face supérieure du dé.

a. Quelles la probabilité d'obtenir un nombre pair ?
b. Quelle est la probabilité d'obtenir un multiple de 4 ?
c. Quelle est la probabilité de ne pas obtenir un multiple de 3 ?

Exercice 22 :

On dispose d'un sac qui contient 10 boules : 5 boules vertes, 3 boules rouges et 2 boules jaunes. On tire une boule au hasard et on note sa couleur.

a. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule rouge ?
b. Quelle est la probabilité ne pas obtenir une boule verte ?
c. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule rouge ou une boule verte ?
d. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule bleue ?
e. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule colorée ?

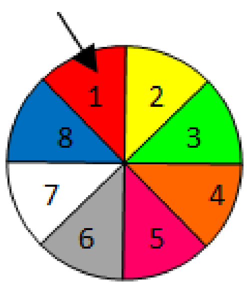
Exercice 23 :

On dispose d'un sac qui contient 6 boules : 4 boules vertes et 2 rouges. Les boules vertes sont numérotées 1 ; 2 ; 2 et 3 et les boules rouges 4 et 5.On tire une boule au hasard et on note sa couleur et son numéro.

a. Quelle est la probabilité de tirer une boule rouge ?
b. Quelle est la probabilité de tirer une boule numérotée 2 ?
c. Quelle est la probabilité de tirer une boule verte numérotée 2 ?
d. *Quelle est la probabilité de tirer une boule verte ou numérotée 2 ?*

Exercice 24 :

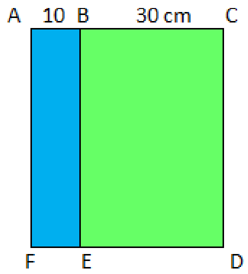
On fait tourner une roue partagée en 8 secteurs égaux et on regarde le numéro sur lequel s'arrête la roue.



a. Quelle est la probabilité d'obtenir 6 ?
b. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins 6 ?
c. Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre premier ?

Exercice 25 :

On lance au hasard une flèche dans la cible suivante qui est telle que ACDF soit un carré et ABEF soit un rectangle.



On suppose que toutes les fléchettes touchent la cible.

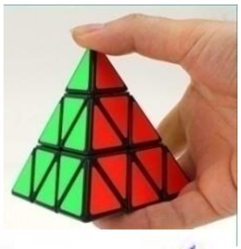
Quelle est la probabilité que la fléchette tombe dans le rectangle ABEF ?

Chapitre16 : Pyramide

I. Activités préparatoires:

Activité 1:

Peux-tu donner une description de chaque objet ?



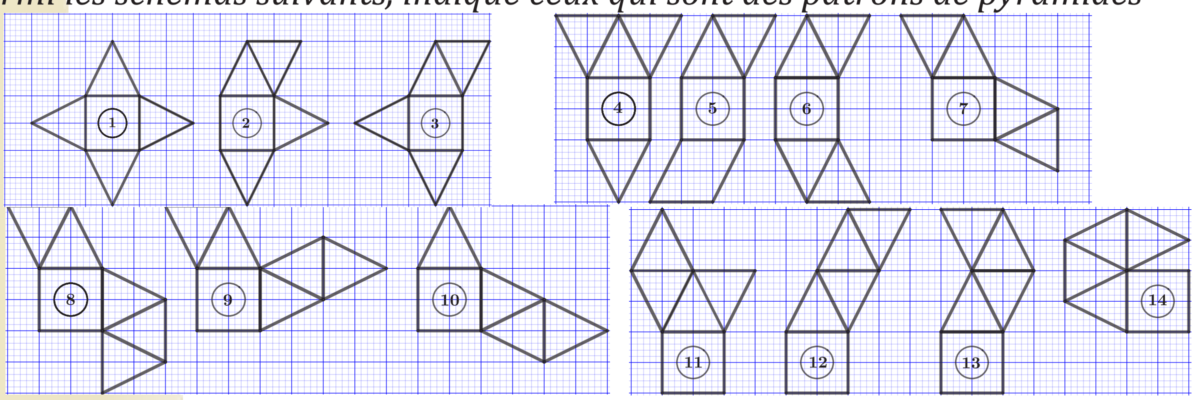



Activité 2 :

1. *Commence par tracer un pentagone ABCDE qui est la base d'une pyramide et un point S situé dans un autre Plan, le sommet de cette pyramide.*
2. *Trace les triangles : SAB, SBC, SCD, SDE, SEA qui sont les faces latérales.*
3. *Trace les segments [AS], [BS], [CS], [DS], [ES] sont les arêtes latérales.*
4. *Trace la perpendiculaire sur la base passant par le sommet S, le segment [SH]est la hauteur de la pyramide.*
5. *Fais apparaître les arêtes visibles en traits pleins et les arêtes cachées en traits pointillés dans chaque cas.*

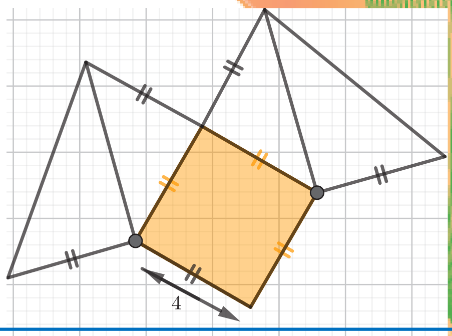
Activité 3 :

Parmi les schémas suivants, indique ceux qui sont des patrons de pyramides



Activité 4: Patron d'une pyramide par découpage et construction

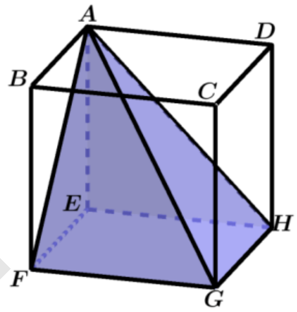
1. Sur une feuille de carton construis le patron de la pyramide, à base carrée, ci-contre.



2. Refais deux autres patrons identiques au premier.
3. Découpe puis construis les pyramides (utilise de la colle force)

Activité 5 : Volume d'une pyramide

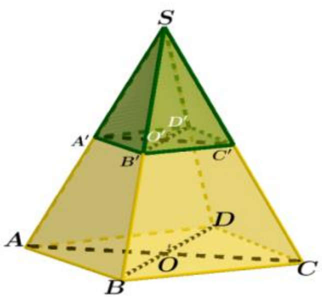
Observe le cube ABCDEFGH d'arête a. Désigne trois pyramides à base carrées, telles que leur sommet soit le point A et leur base soit une face du cube, précise leur hauteur.



1. Calcule les longueurs des arêtes de la pyramide AEFGH, puis en déduis l'aire latérale de cette pyramide.
2. Il semble que ces trois pyramides aient le même volume et constituent le cube. Il est possible de vérifier ceci (voir Exercice d'application2) en désignant par $\mathcal{B}$ l'aire de la base et h la hauteur de chacune de ces pyramides.
   a. Quel est le volume du cube ?
   b. Exprime le volume de chaque pyramide, en fonction de $\mathcal{B}$ et de h.

Activité 6 :

SABCD est une pyramide régulière à base carrée de côté 6cm.On réalise une section de la pyramide SABCD par un plan parallèle à la base ABCD de telle manière que : $\frac{SA'}{SA} = \frac{1}{3}$.

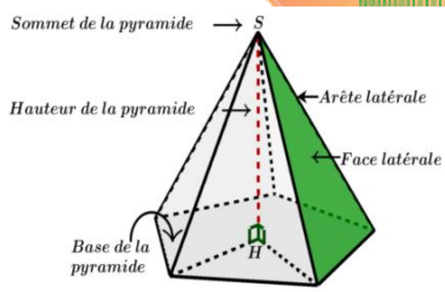


1. Démontre que $A'B' = \frac{1}{3}AB$.Calcule A'B'.
2. En déduis B'C', C'D' et D'A'.
3. Démontre que A'B'C'D' est un carré.
4. Quelle est la nature de la pyramide S A'B'C'D' ?
5. Calcule la surface ABCD, puis déduis celui du carrée A'B'C'D'.
6. Calcule le volume de la pyramide SABCD, puis déduis celui de SA'B'C'D'.

II. Je retiens :

1. Présentation d'une Pyramide :

Définition et vocabulaire :



Une pyramide est un solide ayant une face polygonale, appelée la base et dont les autres faces, appelées ***faces latérales,*** *sont des triangles qui ont un sommet commun. C'est le* ***sommet*** *de la pyramide.*

La hauteur d'une pyramide est le segment issu de son sommet et perpendiculaire au plan de la base.

Les arêtes latérales sont les segments joignant les sommets de la base et sommet de la pyramide.

La hauteur d'une face latérale est appelée arête latérale de la pyramide.

Remarque 1 :

- *Le nombre des arêtes latérales est égal au nombre des sommets de la base.*
- *Le nombre des faces latérales est égal au nombre des côtés de la base.*

2. Représentation en perspective cavalière :

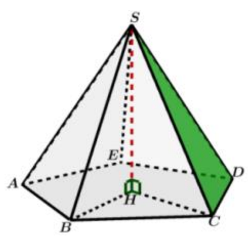
Règle 1:

Pour représenter une pyramide en perspective cavalière, une méthode relativement simple est de tracer la base puis de placer le sommet de la pyramide ; ensuite on trace les arêtes latérales en faisant apparaître les arêtes visibles en traits pleins et les arêtes cachées en traits pointillés.

Exemple 1 :

La pyramide SABCDE dont la base est un pentagone est représentée en perspective cavalière (voir figure ci-contre).

Les arêtes visibles sont en traits pleins et les arêtes cachées en traits pointillés.

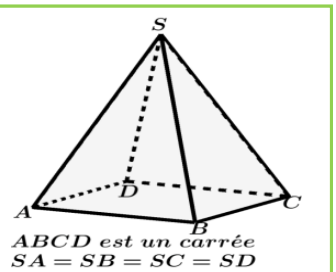


3. Pyramides régulières :

Définition :

Une pyramide régulière est une pyramide dont la base est un polygone régulier et dont les faces latérales sont des triangles isocèles superposables.

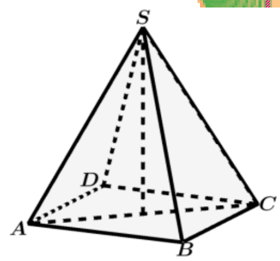
Dans une pyramide régulière toutes les arêtes latérales ont la même longueur.



Remarque 2 :
On dit qu'un polygone est régulier lorsque ses côtés sont égaux et tous ses angles ont la même mesure, par exemple un triangle équilatéral, un carré, par contre un losange, un rectangle ne sont pas des polygones réguliers.

Propriété :
Si une pyramide est régulière, alors sa hauteur passe par le centre de sa base.

Exemple 2 : **L'unité de longueur est le centimètre**

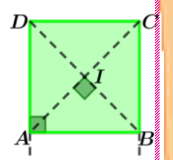


SABCD est une pyramide régulière de sommet S et de base le carré ABCD. I est le centre de ABCD, SI est la hauteur de la pyramide. On donne : AB=6 et SA=7.

1. Dessine en dimensions réelles la base ABCD et le Triangle ASI.

2. Calcule AI et SI.

Réponse :



1. Les dessins ci-contre ne sont pas en vraie grandeur

Figure 1 : *Dessin de la base*

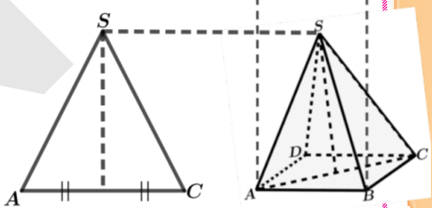


Figure 2 : *Dessin du triangle ACS*

Calcul de AI :

I est le centre du carre ABCD, donc sa diagonale AC en utilisant la propriété de Pythagore on obtient :$AC = 6\sqrt{2}$.*Par conséquent* $AI = \frac{1}{2}AC = 3\sqrt{2}$.

Calcul de la hauteur SI :

SAI est un triangle rectangle en I, centre de la base ABCD.

La propriété de Pythagore appliquée au triangle SAI, rectangle en I, donne : $AS^2 = AI^2 + IS^2$. *D'où : SI* $= \sqrt{AS^2 - AI^2} = \sqrt{31}$.

4. Patron d'une pyramide :

Définition 3:
le patron d'une pyramide, et un dessin ,qui par pliage, permet de retrouver la pyramide sans vide ni superposition.

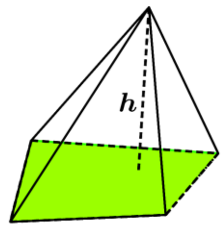
Remarque 3 :
Pour obtenir un patron d'une pyramide, on découpe par exemple en suivant les arêtes latérales et pour trouver différents patrons, on peut partir de l'un d'entre eux et faire pivoter l'une des faces autour des autres.

5. Eléments métriques d'une pyramide :

Règle 2 :

On admet les énoncés suivants :

- *La surface latérale S_l d'une pyramide est égale à la somme des faces latérales (triangles).*
- *La surface totale est égale à la somme de la surface latérale et la surface de la base(polygone).*



- *Le volume d'une pyramide est le tiers du produit de l'aire de la base par la hauteur. Ce qui se traduit par la formule :*

$\mathcal{V} = \frac{1}{3}\mathcal{B} \times h$ *; où $\mathcal{V}$: volume, $\mathcal{B}$: aire de la base et h : hauteur de la pyramide*

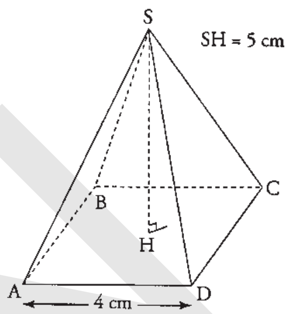
Exemple 3

Une pyramide régulière est représentée ci- contre perspective :

1. Sur le solide SABCD, nommer les arêtes de même longueur que [SA].

Quelle est la nature de la face ABCD ? Expliquer.

2. Calculer le volume de la pyramide SABCD.



Réponse

1) *On a une pyramide régulière, donc les faces triangulaires sont des triangles isocèles superposables de sommet principal S et la base est un carré :*

- *SA = SB = SC = SD;*
- *La face ABCD est un carré.*

2) *Avec une hauteur h de 5 cm et une base carrée de côté 4 cm :*

$$V(SABCD) = \frac{1}{3}B \times h = \frac{1}{3}4^2 \times 5 = \frac{16 \times 5}{3} = \frac{80}{3}\text{cm}^3$$

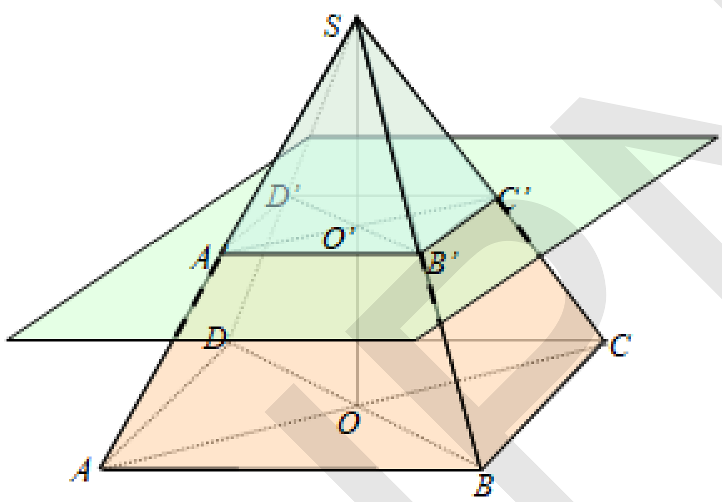
Remarque 4 :

Dans une pyramide régulière dont la base est polygone à n côtés :

- *Toutes les faces latérales ont la même surface(aire) et le périmètre de la base est égal au produit de n par la longueur du côté du polygone(base)*
- *La surface latérale d'une pyramide régulière est égale à $n \times S_F$; où n est le nombre de côtés de la base et S_F l'aire d'une face.*
- *On appelle apothème un segment joignant le sommet de la pyramide et le milieu du côté opposé d'une face latérale (médiane du triangle isocèle issue de son sommet).*
- *La surface latérale d'une pyramide régulière est égale à la moitié du produit du périmètre de la base par l'apothème de la pyramide. Ce qui se traduit :*

$$S_l = \frac{\text{périmètre de la base} \times \text{apothème}}{2}.$$

6. Section d'une pyramide par un plan :



Règle 3 :

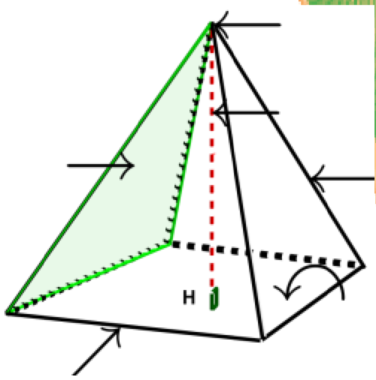
De manière générale, la section d'une pyramide régulière par un plan parallèle à la base est aussi une pyramide régulière. La petite pyramide obtenue est une réduction de la pyramide de départ. Si les longueurs sont multipliées par un coefficient k, alors l'aire est multipliée par k^2 et le volume par k^3.

III. Je sais faire :

Enoncés des exercices d'application :

Exercice d'application 1 :

1. Reproduis la figure ci-contre puis complète avec les mots :
   Base, hauteur, sommet, arête latérale, face latérale, côté de base.
2. Complète les phrases suivantes avec les mots :
   Polygone, triangles, perpendiculaire, sommet.
   - Les faces latérales d'une pyramide sont des ……
   - La base d'une pyramide est un ………………..
   - La hauteur d'une pyramide est………au plan de la base.



Les faces latérales d'une pyramide ont un point commun : le………

Exercice d'application 2 : **Trois pyramides inscrites dans un cube**

Pour visualiser, à partir d'un cube initial ABCDEFGH représenté en perspective cavalière, les trois pyramides de même sommet E et de bases carrées respectives les trois faces ABCD ; BCGF et HDCG du cube, représente en perspective cavalière la pyramide dans chacun des trois cas (Fais apparaître les arêtes visibles et les arêtes cachées dans chaque cas)

Exercice d'application 3 :

1. SABCDE est une pyramide de sommet S, dont les faces latérales sont des triangles isocèles superposables. La hauteur de cette pyramide perce le plan (ABC) en I.
   Démontre que $SA = SB = SC$ et que $IA = IB = IC$. Justifie que I est le centre d'un cercle qui passe par les points A, B, C, D et E. ABCDE est un pentagone régulier ?
2. La hauteur d'une pyramide régulière à base carrée est 8 cm. Le périmètre de sa base est 16 cm. Calcule la longueur d'une arête joignant le sommet de la pyramide et un sommet de sa base.

Exercice d'application 4 :

1. Construis un patron d'une pyramide régulière SABCD de sommet S telle que :
   SA = 3cm ; AB =2cm.
2. Représente cette pyramide en perspective cavalière.

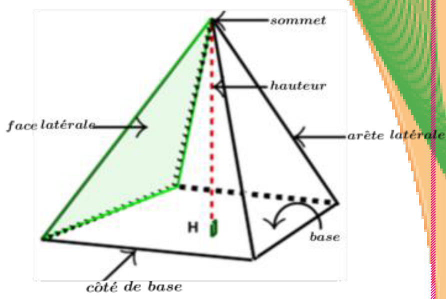
Exercice d'application 5 :

SABCD est une pyramide régulière de sommet S, dont la base est un carré de côté 8cm, dont les arêtes latérales mesurent 12cm.

Calcule l'aire latérale et le volume de cette pyramide.

Solutions des exercices d'application :

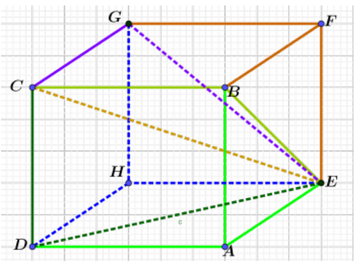
Exercice d'application 1 :



1. *Je reproduis la figure ci-contre puis je complète avec les mots :*
   Base, hauteur, sommet, arête latérale, face latérale, côté de base.
2. *Je complète les phrases suivantes avec les mots :*
   Polygone, triangles, perpendiculaire, sommet.
   - *Les faces latérales d'une pyramide sont des* **triangles.**
   - *La base d'une pyramide est un* **polygone**.
   - *La hauteur d'une pyramide est* **perpendiculaire** *au plan de la base.*

Les faces latérales d'une pyramide ont un point commun : le **sommet.**

Exercice d'application 2 : **Trois pyramides inscrites dans un cube**



Pour visualiser, à partir d'un cube initial ABCDEFGH représenté en perspective cavalière, les trois pyramides de même sommet E et de bases carrées respectives les trois faces ABCD ; BCGF et HDCG du cube, on représente en perspective cavalière la pyramide dans chacun des trois cas (Fais apparaître les arêtes visibles et les arêtes cachées dans chaque cas)

Exercice d'application 3 :

1. *SABCDE est une pyramide de sommet S, dont les faces latérales sont des triangles isocèles superposables. La hauteur de cette pyramide perce le plan* (ABC) *en I.*
   Puisque les triangles sont superposables, on a : $SA = SB = SC$ *et de plus les triangles SIA, SIB et SIC sont rectangles en I, donc :* $IA = IB = IC$.
   Les égalités $IA = IB = IC = ID = IE$ *signifie que I est le centre d'un cercle qui passe par les points A, B, C, D et E, d'où ABCDE est-il un pentagone régulier car il est inscriptible dans un cercle et tous ses côtés sont égaux.*
2. *La hauteur de cette pyramide régulière perce la base au point d'intersection des diagonales de la base carrée de côté 4cm. La longueur L d'une arête*

joignant le sommet de la pyramide et un sommet de sa base est l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit mesurent $4\sqrt{2}$ cm et 8cm, donc : L= $\sqrt{32+64}=\sqrt{96}=4\sqrt{6}$.

Exercice d'application 4 :

1. *Pour construire un patron d'une pyramide régulière SABCD de sommet S telle que :SA = 3cm ; AB = 2cm. Cette pyramide étant régulière, sa base ABCD est donc un carré, pour obtenir un patron :*
   - *Je commence par tracer un carré ABCD de côté 2cm ;*
   - *Je trace ensuite sur chaque côté un triangle isocèle de hauteur 3cm.*
2. *Pour représenter cette pyramide en perspective cavalière, Je suis les étapes suivantes :*
   a. *Je trace un carré ABCD de côté 2cm ;*
   b. *Je trace les diagonales ABCD puis je marque le point de leur intersection*
   c. *Je place le sommet S sur la droite perpendiculaire au plan de la base*
   d. *Je joins les sommets de base au point S*
   e. *Je fais apparaître les arêtes visibles en traits pleins et les arêtes cachées en traits pointillés.*

Exercice d'application 5 :

Sachant que SABCD est une pyramide régulière de sommet S, dont la base est un carré de côté 8cm, dont les arêtes latérales mesurent 12cm. Je calcule :

- *L'aire latérale=* $4\times$ *aire d'une face latérale*

  $=4\times\frac{1}{2}$(*côté de la base*$\times$*hauteur*)

  $=2\times AB\times SH$(*où SH est la hauteur de cette pyramide*)

  Calculons d'abord SH, pour cela appliquons le théorème de Pythagore au triangle ASH rectangle en H ; $AS^2=AH^2+SH^2$ *donc :* $SH^2=AS^2-AH^2$

  On tire : $SH=\sqrt{AS^2-AH^2}=\sqrt{12^2-8^2}=\sqrt{144-64}=\sqrt{80}=4\sqrt{5}$.

  L'aire latérale= $2\times AB\times SH=2\times 8\times 4\sqrt{5}=64\sqrt{5}$.

- *Le volume de cette pyramide=* $\frac{1}{3}$(*aire de la base*$\times$*hauteur*) $=\frac{1}{3}A_{ABC}\times SH$

  $=\frac{1}{3}\times 8\times 8\times 4\sqrt{5}=\frac{256\sqrt{5}}{3}$

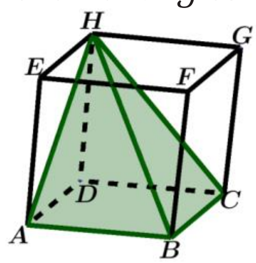
IV. Je m'exerce :

Exercice 1 :

ABCDEFGH est un cube d'arête $a = 4$ cm. On appelle V son volume et V' celui de la pyramide HABCD. Voir figure ci-dessous.

Réponds par vrai ou faux aux affirmations suivantes :

a. *Sur un patron de la pyramide HABCD, il y a exactement 2 triangles rectangles.*



b. *$V = 3\,V'$.*

c. *$HB^2 = 16 \times 3$.*

d. *$V' \cong 213\ mm^3$.*

Exercice 2 :

Réponds par vrai ou faux aux affirmations suivantes :

a. *En perspective cavalière, un carré est obligatoirement représenté par un losange.*

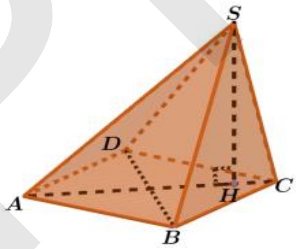
b. *Toute pyramide à base carrée est régulière.*

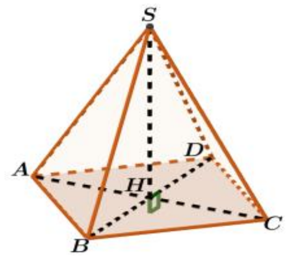
c. *Il n'existe pas de pyramide dont une arête est aussi la hauteur.*

d. *Dans une pyramide régulière à base carrée, l'arête latérale est toujours plus grande que le côté de la base.*

Exercice 3 :

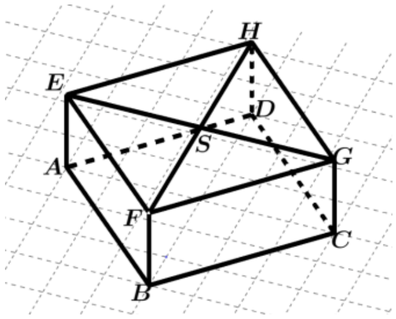
L'une des figures n'est pas une pyramide régulière ; laquelle ?





Exercice 4 :

Voici la représentation en perspective d'un parallélépipède rectangle ABCDEFGH. Sur le quadrillage du cahier, représente en perspective la pyramide SABCD dont le sommet est le centre S de la face EFGH du parallélépipède.



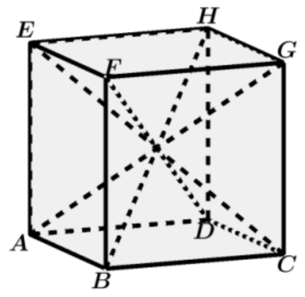
On appelle H le centre de la face ABCD du Parallélépipède. Que représente SH pour la pyramide ?

Exercice 5 :

SABCD est une pyramide de hauteur 4,5 cm et de volume 9,375 cm^3, Sa base est le carré ABCD. Calcule le côté de ce carré.

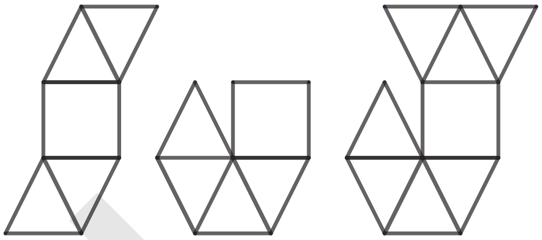
Exercice 6 :

ABCDEFGH est un cube. Les diagonales du cube [AG], [BH], [CE] et [DF] se coupent au point O, le centre du cube. Nomme toutes les pyramides régulières à base carrée tracées sur le dessin.



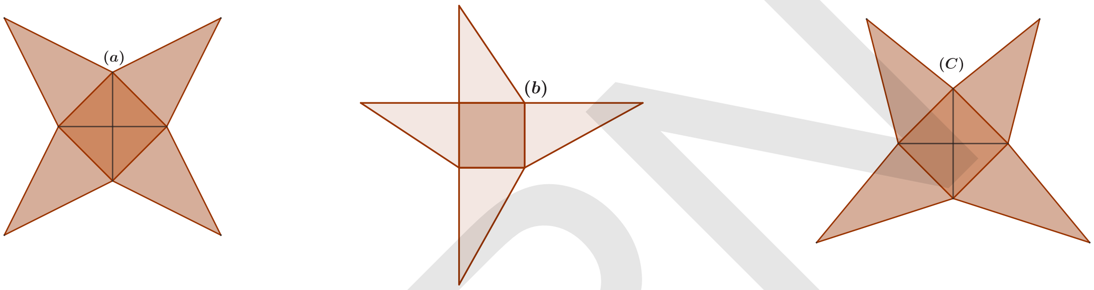
Exercice 7 :

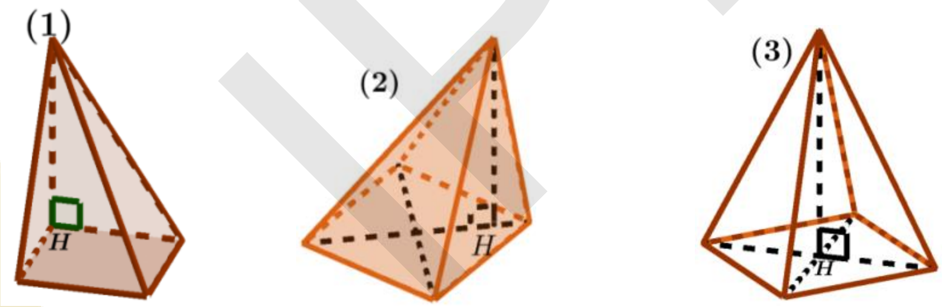
L'une des figures n'est pas le patron d'une pyramide ; laquelle ?



Exercice 8 :

Associe à chaque pyramide son patron.



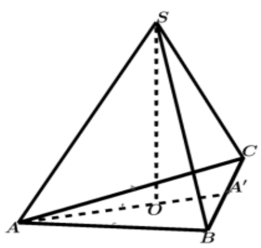


Exercice 9 : **L'unité de longueur est le mm.**

SABC est une pyramide régulière de base ABC telle que :

$AB = 40$ *et* $SA = 60$.

[SO] est la hauteur de cette pyramide. A' est le point d'intersection de (AO) *et* (BC).



1. *Dessine en dimensions réelles les figures de chacun des plans* (ABC), (SAC) *et* (SOA).

2. *Calcule AA', SO et SA'.*
3. *Calcule l'aire de la base, l'aire latérale et le volume de cette pyramide.*

Exercice 10 :

Le carré ABCD est la base d'une pyramide régulière de sommet S.
M est le milieu du côté [AB] et H le centre du carré ABCD.
Quelle est la nature des triangles SAB, SAM et SMH ?
Calcule l'aire latérale et le volume de la pyramide dans chacun des cas suivants:
1). $SH = 5cm$; $AB = 4cm$. 2).$SA = 10cm$; $AB = 4cm$. 3).$SM = 8cm$; $SH = 6cm$.

Exercice 11 :

Une pyramide régulière SABCD a pour base un carré de 4cm de côté et les arêtes latérales mesurent 7cm.

a. *Construis un patron de cette pyramide en vraie grandeur.*
b. *Calcule l'aire latérale de la pyramide, puis l'aire totale.*
c. *Calcule le volume de la pyramide.*

Exercice 12 :

a. *SABCD est une pyramide à base carrée. Les triangles SAB et SAD sont rectangles en A. SA = 3 cm, AB = 4 cm.*
b. *Calcule les Longueurs SB et SC (le triangle SAC est rectangle en A).*
c. *Construis un patron de la pyramide ; découpe, assemble.*
d. *Quelle est la hauteur de la pyramide ? Calcule le volume de la pyramide.*

Exercice 13 :

ABCDEFGH est un cube dont les arêtes mesurent 3 cm.
Le solide dont les sommets sont B, E, F et G s'appelle un tétraèdre.

a. *Construis un patron du tétraèdre BEFG ; découpe et assemble.*
b. *Observe le tétraèdre posé sur la face EFG puis sur la face EGB.*
c. *Quelle est la hauteur du tétraèdre relative à la face EFG ?*
d. *Calcule le volume du tétraèdre.*
e. *On appelle K le pied de la perpendiculaire menée de F au plan de la face EBG. Calcule l'aire du triangle EGB puis la longueur FK.*

Exercice 14 :

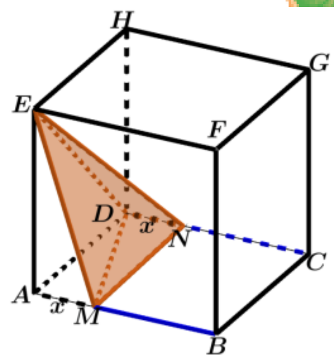
Une pyramide CIEL a pour sommet C et pour hauteur CL. On donne :
$IE = 4{,}8\ cm$; $EL = 3{,}6\ cm$; $IL = 6\ cm$ et $CL = 7{,}5\ cm$.
Construis un patron de cette pyramide. Découpe et assemble.
Calcule le volume de la pyramide.

Exercice 15 :

Ibrahima, le menuisier du village, veut réaliser une étoile en bois. Pour cela, il réalise d'abord un cube de 5 cm d'arête, puis, sur chacune des faces du cube il fixe une pyramide régulière dont la hauteur est 9cm. Le cube est les six pyramides sont taillés dans un même bois de masse volumique 0,8g/cm^3. Calcule la masse de cette étoile.

Exercice 16 :

Sur l'arête $[AB]$ et $[DC]$ d'un cube ABCDEFGH, on place les points M et N tels que : $AM = DN = x$ et $AB = 9cm$.



a. Exprime, en fonction de x , le volume $\mathscr{V}$ de la pyramide EAMND.

b. Calcule $\mathscr{V}$ pour $x = 3$.

c. Pour quelle valeur de x, le volume $\mathscr{V}$ de la pyramide est-il égal aux deux neuvièmes du volume du cube ?

d. Pour quelle valeur de x, le volume $\mathscr{V}$ de la pyramide est-il égal au quart du volume du reste du cube ?

Exercice 17 :

ABCDEFGH est un cube de 5cm d'arête. Le point I est le milieu de $[AE]$ et O est le centre de gravité de la face ABCD.

a. Dessine, en dimensions réelles, la figure de chacun des plans (ADE),(ACE) et (BDF).

b. Calcule IH, OI et OH. Le triangle (OIH) est-il rectangle ?

c. OAIHD est une pyramide. Quel est son sommet ? Quelle est la nature de la base ?

d. M est le milieu de $[AD]$ et N le milieu de $[IH]$.
Démontre que (OM)et (MN) sont perpendiculaires.
Quelle est la hauteur de la pyramide OAIHD ?

e. Calcule le volume de cette pyramide.

Exercice 18 :

ABCDEFGH est parallélépipède rectangle et M est le milieu de $[AB]$.

On donne $AB = 4{,}8cm$, $AD = 3{,}6cm$ et $AE = 4{,}5cm$.

a. Calcule EM, MC, EG, EC et DE.

b. Construis un patron de la pyramide EAMCD.

c. Calcule l'aire latérale et totale de cette pyramide.

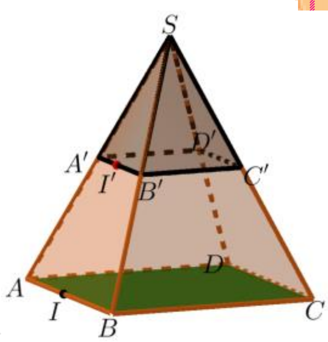
d. Calcule son volume.

Exercice 19 :

Un artisan fabrique des boîtes en forme de tronc de pyramide pour un confiseur. Pour cela, il considère une pyramide SABCD à base rectangulaire où O est le centre du rectangle ABCD. On a :

$AB = 24cm, BC = 10cm, AO = 13cm, SO = 14{,}4cm$ *et* $AS = 19{,}4cm$.

1. *Calcule le volume de la pyramide SABCD.*
2. *L'artisan coupe la pyramide SABCD par un plan parallèle à la base et passant par le milieu M de* $[SO]$. *Ce plan coupe respectivement les arêtes latérales* $[SA], [SB], [SC]$ *et* $[SD]$ *en I, J, K et L. Fais une figure.*
3. *Calcule la longueur de IJ.*
4. *Calcule le volume de la pyramide SIJKL, puis en déduis celui de la boite.*



Exercice 20 : L'unité est le centimètre

Sur la figure ci-contre qui n'est pas en grandeur réelle,

- *SABCD est une pyramide régulière de sommet S et de base le carré ABCD.*
- *Un plan parallèle au plan de la base coupe* $[SA]$ *en A'.*
- *I est le milieu de* $[AB]$.

On donne : $AB = 6cm, \frac{SA'}{SA} = \frac{1}{3}, SI = 6cm$ *et* $SI' = 2cm$.

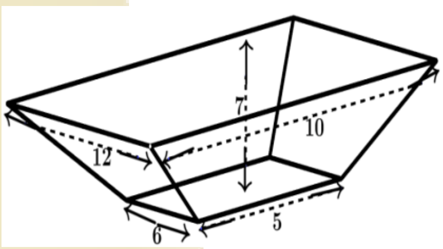
1. *a. Justifie que* $AB = 6$.

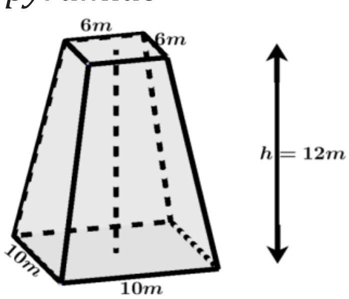
   b. Justifie que l'aire latérale de la pyramide SA'B'C'D' est égale à $8cm^2$.
2. *Calcule l'aire latérale du tronc de pyramide.*

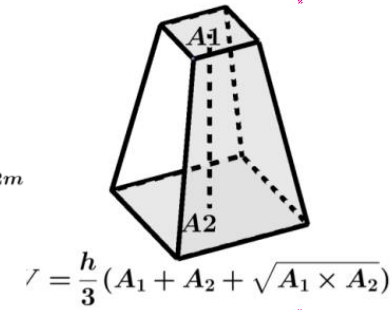
Exercice 21 :

Sur les deux figures ci-dessous, qui ne sont pas en grandeur réelles, on donne les dimensions de deux bases (petite et grande) et la hauteur

1. *Calcule le volume de chaque tronc de pyramide*







2. *Etablis la formule ci-contre du volume du tronc de pyramide suivant en fonction des aires respectives* A_1 *et* A_2 *de sa petite et grande base et de sa hauteur h.*

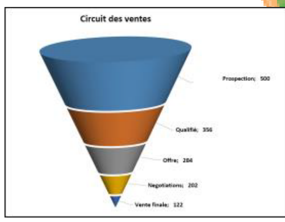
Chapitre 17 : Cône de révolution

I. Activités préparatoires :

Activité 1 :

Voici ci-dessous certains objets. Peux-tu donner une description de chaque objet ?



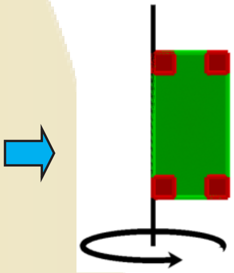
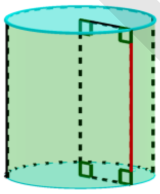
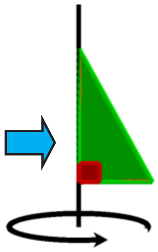
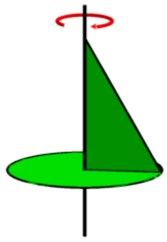



Remarque 1 :

Les objets ayant un disque comme base et dont la forme est arrondie et le sommet pointu peuvent être assimilés à des cônes.

Activité 2 : Solides de révolution

On fait tourner respectivement un rectangle et un triangle rectangle autour de l'un de ses côtés de l'angle droit. (voir figures ci-dessous)

Quels sont les solides engendrés par ces deux mouvements ? Donne leurs caractéristiques.

Remarque 2 : Cône de révolution

Un cône de révolution est un solide obtenu en faisant tourner un triangle rectangle autour d'une droite qui porte un des côtés de l'angle droit et également en faisant tourner un triangle isocèle autour de son axe de symétrie.

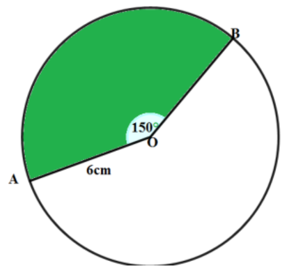
Activité 3 :

1. Représente d'abord le disque de base en perspective cavalière par un ovale : le diamètre $[MM']$ vu de face est dessiné en vraie grandeur et le diamètre $[NN']$ vu de côté réduit (plus petit).
2. Trace la hauteur $[OS]$ verticale et en vraie grandeur.
3. Achève la construction en traçant les deux génératrices $[SM]$ et $[SM']$ et en mettant en pointillés les parties cachées.

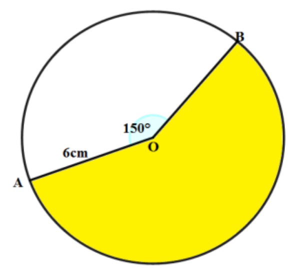
On obtient ainsi la représentation en perspective cavalière d'un cône de révolution.

Activité 4 : **Fabrication de chapeaux**

Un jeune apprenti artisan, veut fabriquer des chapeaux pour se protéger contre le soleil. Son chef lui propose la démarche suivante :



1. *Sur une feuille de papier de dessin, reproduis la figure ci-contre en vraie grandeur, puis découpe les disques en les coupant suivant [OA],et [OB], on obtient deux bouts de disques.*



2. *Colle avec un ruban adhésif, les rayons bord à bord, des deux, tu as construit ainsi deux chapeaux pointus. Les deux surfaces obtenues sont des surfaces latérales de deux cônes (creux).*
3. *Pour obtenir les patrons, il reste à construire leurs bases, sur une feuille qui matérialise les bords inférieurs des deux cônes obtenus plus haut.*
   Découpe les deux disques correspondants qui sont les bases des deux cônes que tu as construits puis colle chaque disque sur le bout de base.
4. *Dans le disque de centre O et de rayon r, la mesure α de l'angle du secteur circulaire est proportionnelle à la longueur de l'arc AB.*
   Complète le tableau proportionnalité suivant en calculant la longueur de ces deux arcs dans le tableau suivant

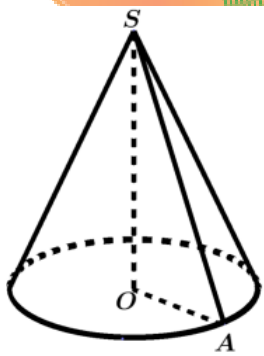
Angle au centre	360	210	150
Longueur de l'arc	$2\pi r$		

Le patron d'un cône de révolution se compose d'un disque et d'un secteur de disque. Le disque est la base du cône.

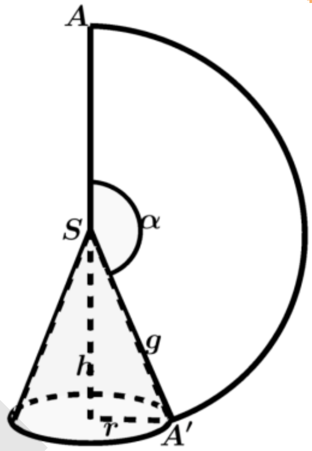
Activité 5 :

On considère le cône de révolution ci-contre.

Soit r est le rayon de la base et h la hauteur du cône.



1. *Calcule la longueur g de la génératrice* $[SA]$.
2. *On donne le patron ci-contre de ce cône. On désigne par* α *la mesure en radians de l'angle au centre du secteur angulaire (angle au sommet du patron)*
   a. *Exprime de deux manières la mesure de l'arc* AA'.
   En déduis que $\alpha = 2\pi\frac{r}{g}$.
   b. *Calcule l'aire du secteur angulaire (patron du cône).*
3. *Quelle est l'aire totale de ce cône de révolution ?*
4. *On admettra, comme pour une pyramide, le résultat suivant : Le volume du cône de révolution est égal au tiers du produit de l'aire du disque de base par la hauteur.*
   Complète : $V = \frac{\dots}{\dots} S_B \times \dots = \frac{\dots r^{\dots} \dots}{3}$.



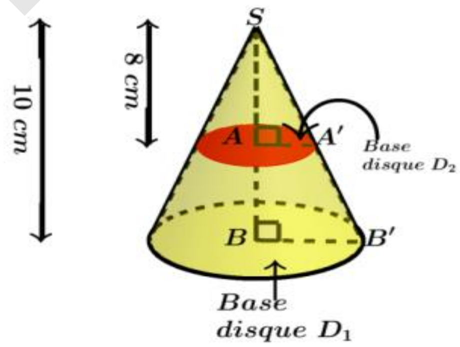
Activité 6 :

On a coupé le grand cône de sommet S par un plan parallèle à sa base D_1*. Quel solide obtient-on ?*

a. *Calcule le coefficient de réduction.*

b. *L'aire* A_1 *de* D_1 *est* $60\ cm^2$*, déduis-en l'aire* A_2 *du disque* D_2*.*

c. *Calcule le volume* V_1 *du grand cône, puis déduis-en le volume* V_2 *du petit.*



Math AS.indd 256
15/07/2024 15:32:11

II. Je retiens :

1. Présentation d'un cône de révolution :

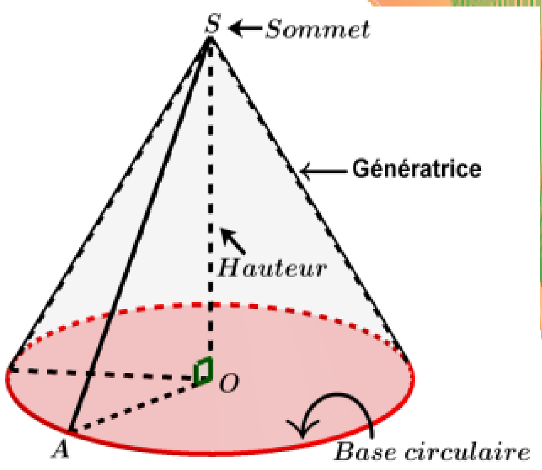
Description d'uncône de révolution :

Un cône de révolution est un solide composé :

- d'une base en forme de disque ;

- d'un sommet, situé sur la perpendiculaire au disque en son centre ;

- La hauteur d'un cône de révolution est le segment joignant le sommet au le centre du disque dont le support est la droite est perpendiculaire au disque en son centre.



- Une génératrice du cône est un segment qui joint le sommet du cône à un point de la circonférence du disque de base.

Remarque 3 :

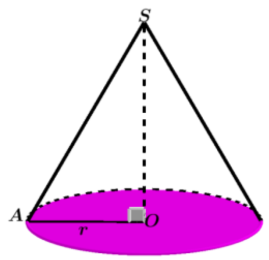
Un cône de révolution est un solide qui peut être généré par un triangle rectangle en tournant autour d'un des côtés de l'angle droit.

- *L'hypoténuse de ce triangle est une génératrice.*
- *La base du cône de révolution est un disque.*
- *La hauteur du cône de révolution est le segment qui joint le centre de ce disque au sommet du cône ; il est perpendiculaire au disque de base.*

2. Représentation en perspective cavalière :

Règle 1 :

Pour tracer un cône en perspective cavalière (voir figure ci-contre) et décrire les éléments de ce solide :



- *On commence par tracer la* ***base*** *de ce cône, qui est le disque de centre O : on la représente en perspective par un ovale (une ellipse) car elle n'est pas vue de face.*
- *On place le* ***sommet*** *du cône : le point S.*
- *La* ***hauteur*** *du cône est le segment* [OS].
- *On place un point A et on dessine, en vraie grandeur, un rayon [OA] du disque.*

Le triangle AOS, rectangle en O, génère le cône en tournant autour de (OS).

3. Patron d'une pyramide :

Définition :

Un patron d'un cône de révolution est un dessin formé par un disque et un secteur angulaire, qui permet de fabriquer ce solide après découpage et pliage.

Remarque 4 :

- *Dans l'activité 4, les segments [OA] et [OB] sont deux génératrices du cône de révolution.*
- *La longueur de l'arc est égale à la circonférence du disque de base.*

Point Méthode :

Pour tracer le patron d'un cône de révolution connaissant le rayon du disque de base et une génératrice :

- *Place le sommet S de la pyramide.*
- *Trace un segment d'extrémité S de longueur la génératrice.*
- *Trace un secteur angulaire de centre S et d'angle α à partir du segment tracé ; où $\alpha = \frac{r \times 360}{g}$.*
- *Placer un point M sur ce secteur angulaire puis placer le point O sur la demi-droite [SM] tel que : MO = rayon du disque de base.*
- *Tracer le disque de base de centre O et de rayon donné.*

4. Eléments métriques d'un cône de révolution :

Règle 2 :

Si r est le rayon de la base et h la hauteur d'un cône de révolution, on admet les énoncés suivants :

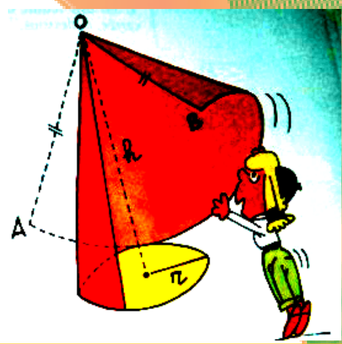
1. *L'aire de la base est : πr^2 ;*
2. *La longueur d'une génératrice (ou apothème) est : $g = \sqrt{r^2 + h^2}$;*
3. *La mesure α en radians de l'angle au sommet du patron est : $\alpha = 2\pi \frac{r}{g}$*
4. *La surface (ou l'aire) latérale S_l d'un cône de révolution est : $\pi r g$*

- *La surface totale (la somme de la surface latérale et la surface de la base(disque)) est $\pi r g + \pi r^2$ ou encore $\pi r(g + r)$*
- *Le volume d'un cône de révolution est le tiers du produit de l'aire de la base par la hauteur. Ce qui se traduit par la formule : $\mathcal{V} = \frac{1}{3} S_B \times h = \frac{\pi r^2 h}{3}$*

Où $\mathcal{V}$: volume, S_B : aire de la base et h : hauteur du cônede révolution.

Remarque 5 :

- *La surface latérale d'un cône, appelée aussi développement, est générée par l'hypoténuse du triangle rectangle. Elle a la forme d'un secteur de disque.*
- *La génératrice d'un cône de révolution est appelée aussi apothème.*



Exemple 1 :

1. *Un cône de révolution a 0,80 m de rayon et 3 m d'apothème. Trouve l'aire de sa surface latérale et l'aire de sa surface totale.*
2. *Quel est le volume d'un cône de 0,08 m de rayon et 2,7m de hauteur ?*

Réponse :

1. - *La surface (ou l'aire) latérale*

   $S_l = \pi r g \cong 3{,}1416 \times 0{,}80 \times 3 \cong 7{,}53984\ m^2$

   - *La surface totale*

     $S_T = \pi r g + \pi r^2 = 7{,}53984\ m^2 + (3{,}1416 \times 0{,}80 \times 0{,}80) \cong 9{,}55044\ m^2$ *ou*

     On peut aussi écrire la surface Totale

     $S_T = \pi r(g + r) \cong 3{,}1416 \times 0{,}80(3 + 0{,}80) \cong 9{,}55044\ m2$.

2. *Le volume d'un cône*

   $$\mathcal{V} = \frac{1}{3} S_B \times h = \frac{\pi\, r^2 h}{3} \cong \frac{3{,}1416 \times 0{,}08^2 \times 2{,}7}{3}.$$

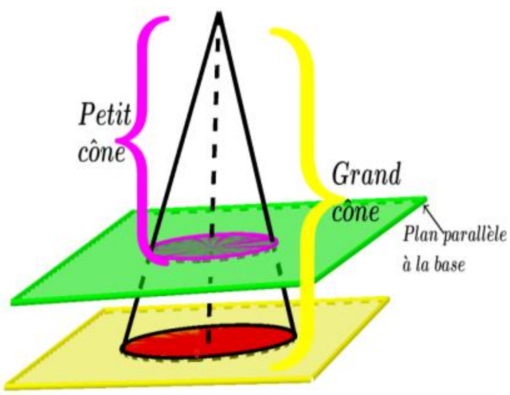
   D'où : $\mathcal{V} \cong 1{,}80956 m^3$

5. Section d'un cône de révolution par un plan :

Règle 3 :

La section d'un cône par un plan parallèle à sa base (c'est-à-dire perpendiculaire à son axe) est un disque.

Le petit cône obtenu est une réduction du cône de départ. Si les longueurs sont multipliées par un coefficient k, alors l'aire est multipliée par k^2 et le volume par k^3.



Exemple 2 :

Recopie et complète la solution de l'énoncé :
On représente un cône et une section parallèle à la base.
$SO = 72cm$ *et* $SO' = 36$ *cm. Le rayon [OA] mesure 24 cm.*

a. *Calcule le rayon O'A' de la base du petit cône.*
b. *Calcule le volume* V_1 *du grand cône, puis déduis-en le volume* V_2 *du petit cône. Donne le résultat exact, puis arrondi à l'unité.*

Réponse :

a. *On a coupé par un plan parallèle à la base, la section obtenue est un cône dont le rayon du disque de base vérifie :* $\frac{O'A'}{OA} = \frac{SO'}{SO} = \frac{36}{72} = \frac{1}{2}$.
Le rayon du disque de base du petit cône est égal à :
$$O'A' = \frac{1}{2} \times OA' = \frac{1}{2} \times 24 = 12(en\ cm).$$

b. *On applique la formule du volume :*
$V_1 = \frac{1}{3}\pi \times OA^2 \times SO = \frac{1}{3}\pi \times OA^2 \times SO = \frac{1}{3}\pi \times 24^2 \times 24 = 4608\,\pi$.
Le volume du petit cône est $V_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times V_1 = \frac{1}{8} \times 4608\,\pi = 576\pi(\ en\ cm)$.
Donc le petit cône a un volume de $\cong 1808{,}64 cm^3$ *soit* $1809 cm^3$.

II. Je sais faire :

Enoncés des exercices d'application :

Exercice d'application 1 :

Lors de l'exposition d'un club de Mathématiques d'un collège, les élèves de $4^{ème}$ AS ont réalisé plusieurs figures géométriques planes avec des plaquettes de fer. S'inspirant de cette exposition le professeur demande à chaque élève de construire, avec des plaquettes rectangulaire en carton, un triangle rectangle, puis de le faire tourner autour d'un des côtés de l'angle droit.

a. Quelle figure géométrique simple décrit le deuxième côté de l'angle droit ?
b. Quelle figure décrit l'hypoténuse de ce triangle ?
c. Dessine en perspective cavalière le solide obtenu, en prenant S pour sommet du cône. O le centre du disque de base ; M un point du cercle de base de rayon $r = 2{,}5$ cm et de hauteur 6cm.
d. Calcule le cosinus de l'angle $\widehat{OSM}$, en déduis l'arrondi à 0,1° de sa mesure. (voir figure ci-contre)
e. On appelle M'le point du cercle de base diamétralement opposé à M. Donne l'arrondi à 1° de l'angle $\widehat{MSM'}$.

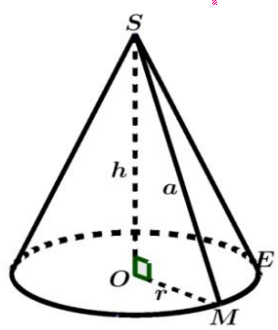
Exercice d'application 2 :

On veut construire un cône de révolution de 6 cm de rayon de base et 8 cm de hauteur.

Soit S le sommet et [SA] une génératrice de ce cône.

1. Calcule la longueur de SA.
2. Calcule la longueur de l'arc de cercle nécessaire et en déduis l'angle au centre correspondant.
3. Construis ce cône de révolution.

Exercice d'application 3 :

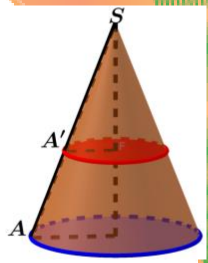


Le solide représenté ci-contre est un cône de révolution.
Sa base est un disque de centre O et de rayon 3cm.
S est le sommet, la droite (SO) est perpendiculaire à tous les rayons [OM], [SO] est la hauteur du cône, elle mesure 4cm.

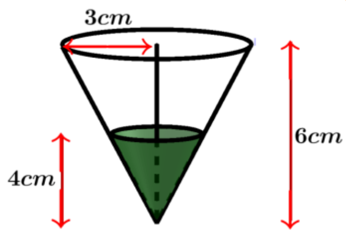
a. Dessine en vraie grandeur, le triangle SOM, puis calcule SM.
b. A quelle distance de S se trouvent tous les points du cercle de base ?
c. Calcule la mesure exacte de l'aire $\mathcal{A}_B$ du disque de base.
d. Détermine la mesure exacte du volume du cône, sachant que : $\mathcal{V} = \frac{1}{3}\mathcal{A}_B \times h$, puis trouve son arrondi à 0,1cm³.
e. Trouve l'aire latérale.

Exercice d'application 4 :

1. *On représente la section plane d'un cône parallèlement à sa base telle que :* $SA = 12cm$ *et* $SA' = 7{,}2cm$.
   a. *Calcule le coefficient de réduction k.*
   b. *L'aire* A_1 *de la base est* $113\ cm^2$*. Déduis-en l'aire* A_2 *de la section.*



2. *Un bassin a la forme d'un cône de hauteur 6 m et dont la base est un disque de rayon 3 m. On remplit ce bassin sur une hauteur de 4m.*
   a. *Calcule le volume exact* V_1 *du bassin.*
   b. *Quelle est la nature du volume occupé par l'eau ?*
   c. *Calcule le coefficient de réduction.*
   d. *Déduis-en le volume d'eau* V_2 *contenu dans le bassin.*
   e. *Calcule le volume d'eau* V_3 *qu'il faut ajouter pour remplir le bassin, arrondi au* cm^3 *près.*

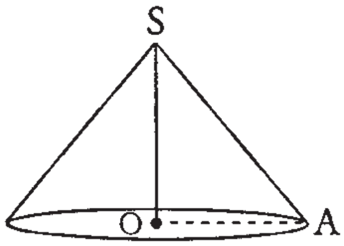


Exercice d'application 5 :

Construis le patron d'un cône de révolution de hauteur $4\sqrt{2}$ *cm, et tel que le rayon de son disque de base mesure 2 cm.*

Exercice d'application 6 :

La figure ci-contre représente un cône de hauteur $SO = 20$ *cm et de base le cercle de rayon* $OA = 15$ *cm*



1. Calcule, en cm^3*, le volume de ce cône ; on donnera la valeur exacte sous la forme* $k\pi$ *(k étant un nombre entier).*

2. Montre que $SA = 25$ *cm.*

3. L'aire latérale de ce cône est donnée par la formule $\pi \times R \times SA$*.*

(R désignant le rayon de la base).

Calcule, en cm^2*, cette aire ; on donnera la valeur exacte sous la forme* $n\pi$ *(n étant un nombre entier), puis une valeur arrondie à* 10^{-1} *prés.*

Solutions des exercices d'application :

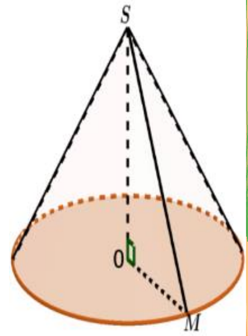
Exercice d'application 1 :

En faisant tourner un triangle rectangle autour d'un côté de l'angle droit.

a. *La figure géométrique décrite par le deuxième côté de l'angle droit est un disque*

b. *L'hypoténuse décrit un cône*

c. *Je dessine en perspective cavalière dans cône, en prenant S pour sommet du cône. O le centre du disque de base ; M un point du cercle de base de rayon r = 2,5 cm et de hauteur 6cm.*



d. *Pour calculer le cosinus de l'angle $\widehat{OSM}$, on détermine d'abord la longueur de la génératrice $[SM]$. D'après le théorème de Pythagore appliqué au triangle OMS rectangle en O,*

$SM^2 = OS^2 + OM^2$,*on tire :*

$$SM = \sqrt{OS^2 + OM^2} = \sqrt{6^2 + (2,5)^2} = \sqrt{36 + 6,25} = \sqrt{42,25} = 6,5.$$

$\cos \widehat{OSM} = \frac{OS}{SM} = \frac{6}{6,5}$, *d'où :* $\widehat{OSM} \cong 22,63°$ *et j'endéduis l'arrondi* $22,6°$ *à 0,1° de sa mesure.*

On appelle M' le point du cercle de base diamétralement opposé à M. On a :
$\widehat{MSM} = 2\widehat{OSM} \cong 45,26°$ *puis je donne l'arrondi 45° à 1° de l'angle* $\widehat{MSM}$.

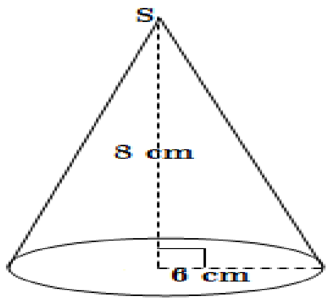
Exercice d'application 2 :

On veut construire un cône de révolution de 6 cm de rayon de base et 8 cm de hauteur. Soit S le sommet et [SA] une génératrice de ce cône.

1. Je calcule la longueur de SA, d'après le théorème de Pythagore appliqué au Triangle OMS rectangle en O ; où O est le centre de la base, on a :

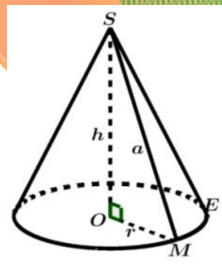
$SA^2 = OA^2 + OS^2$, *on tire :* $SA = \sqrt{OA^2 + OS^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{36 + 64}$
$= \sqrt{100} = 10$; *d'où :* $SA = 10cm.$

2. *La longueur L de l'arc de cercle nécessaire est égale à la circonférence de la base, donc :* $L = 2\pi r = 12\pi \cong 37,68cm$;
et j'en déduis la mesure de l'angle au centre correspondant α *en radians :*
$\alpha = \frac{L}{SA} = \frac{12\pi}{10} = \frac{6\pi}{5}.$



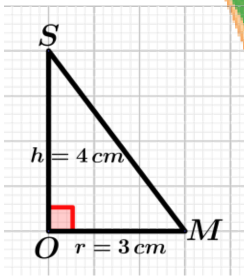
3. *Je construis ce cône de révolution.*

Exercice d'application 3 :



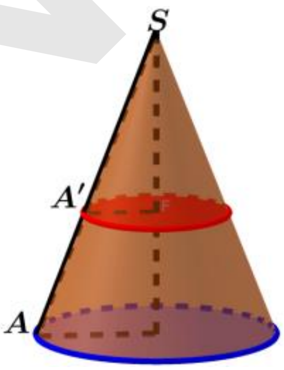
Le solide représenté ci-contre est un cône de révolution.
Sa base est un disque de centre O et de rayon 3cm.
S est le sommet, la droite (SO) est perpendiculaire à tous les rayons [OM], [SO] est la hauteur du cône, elle mesure 4cm.

a. *Je dessine en vraie grandeur, le triangle SOM, puis je calcule SM.*
b. *Tous les points du cercle de base se trouvent a une distance 5cm de S.*
c. *Je calcule la mesure exacte de l'aire $\mathcal{A}_B$ du disque de base en écrivant :* $\mathcal{A}_B = \pi r^2 = \pi \times 3^2 = 9\pi$.

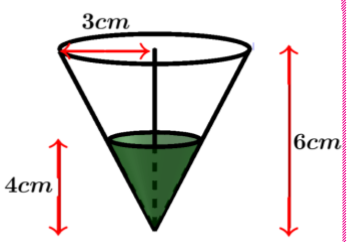


d. *Je détermine la mesure exacte du volume du cône en appliquant la formule :*
$\mathcal{V} = \frac{1}{3}\mathcal{A}_B \times h = \frac{1}{3}9\pi \times 4 = 12\pi$. *Puisque* $\mathcal{V} = 12\pi \cong 37{,}68\ cm^3$ *; son arrondi est 37,7à 0,1* cm^3.
e. *L'aire latérale est donnée par la formule :* $S_l = \pi r g$.
Ceci donne $S_l = \pi \times 3 \times 5 = 15\pi \cong 47{,}1\ cm^2$.

Exercice d'application 4 :



1. *On représente la section plane d'un cône parallèlement à sa base telle que :* $SA = 12cm$ *et* $SA' = 7{,}2cm$.
   a. *Je calcule le coefficient de réduction k. On a coupé par un plan parallèle à la base, la section obtenue est un cône dont le rayon du disque de base vérifie :* $\frac{O'A'}{OA} = \frac{SA'}{SA} = \frac{7{,}2}{12} = \frac{3}{5}$.
   b. *L'aire* A_1 *de la base est 113* cm^2. *J'en déduis l'aire* A_2 *de la section,* $A_2 = \left(\frac{3}{5}\right)^2 \times A_1 = \left(\frac{3}{5}\right)^2 \times 113\ cm^2 = \frac{1017}{25}\ cm^2 = 40{,}68\ cm^2$.
2. *Un bassin a la forme d'un cône de hauteur 6m et dont la base est un disque de rayon 3 m. On remplit ce bassin sur une hauteur de 4m.*
   a. *Je calcule le volume exact* V_1 *du bassin :*
   $$V_1 = \frac{1}{3}\mathcal{A}_B \times h = \frac{1}{3}\pi r^2 \times h = \frac{1}{3} \times \pi 3^2 \times 6 = 18\pi.$$



   b. *Le volume occupé par l'eau est cône de révolution.*

c. *Je calcule le coefficient de réduction est le rapport des hauteurs* $k = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

d. *J'en déduis le volume d'eau* V_2 *contenu dans le bassin :*

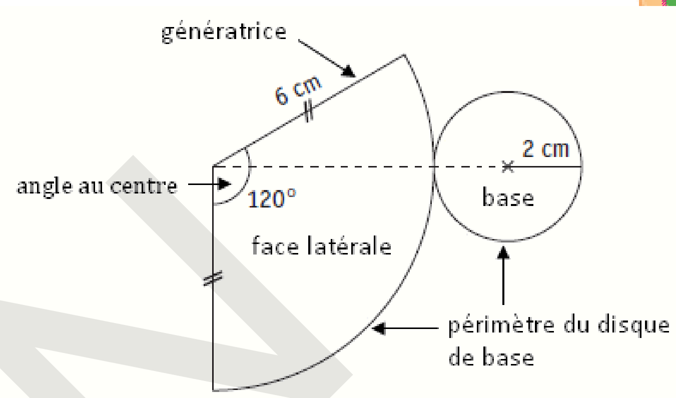
$$V_2 = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \times V_1 = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \times 18\pi cm^3 = \frac{16\pi}{3} cm^3$$

Je calcule le volume d'eau V_3 *qu'il faut ajouter pour remplir le bassin :*

$$V_3 = V_1 - V_2 = 18\pi cm^3 - \frac{16\pi}{3} cm^3 = \frac{38\pi}{3} cm^3 \cong 39{,}77 cm^3$$

soit $V_3 = 40cm^3$ *arrondi au* cm^3 *près.*

Exercice d'application 5 :



Pour construire le patron du cône il faut déterminer : le rayon, la génératrice et l'angle au centre du secteur circulaire. On a :

(1) *Le rayon du disque de base qui est égal à 2 cm*

(2) *La génératrice est calculée par :*

$$g = \sqrt{h^2 + r^2} = \sqrt{(4\sqrt{2})^2 + 2^2} = 6 \text{ cm}$$

(3) *L'angle au centre du secteur circulaire (en degré) :*

$$\alpha = \frac{r}{g} \times 360° = \frac{2}{6} \times 360° = 120°.$$

Exercice d'application 6 :

1. *Le volume du cône dont la base est un disque de rayon OA et la hauteur est SO :* $V = \frac{1}{3} B \times h = \frac{1}{3} \pi \times OA^2 \times SO = \frac{1}{3} \pi \times 15^2 \times 20 = \frac{5 \times 3 \times 15 \times 20}{3} \pi = 1500\pi.$

2. *La hauteur est perpendiculaire à la base dans un cône de révolution donc les côtés [SO] et [OA] sont perpendiculaires dans le triangle SOA : le triangle SOA est donc rectangle en O. D'après le théorème de Pythagore, on a alors :*
$SA^2 = SO^2 + OA^2 = 20^2 + 15^2 = 400 + 225 = 625 = 25^2$. *Donc SA = 25 cm.*

3. *L'aire latérale du cône est :*

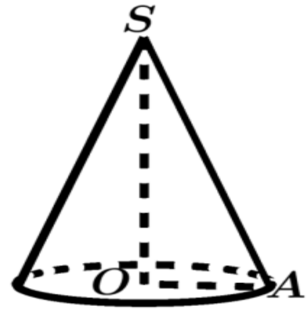
$$\pi \times R \times SA = \pi \times OA \times SA = \pi \times 15 \times 25 = 375\pi \cong 1178{,}0972.$$

L'aire latérale exacte est $375\pi\ cm^2$ *c'est-à-dire* $1178{,}1\ cm^2$ *(arrondi à* 10^{-1}*)*

IV : Je m'exerce :

Exercice 1 :

1. *Dans chaque cas, calcule le volume V d'un cône de révolution de hauteur h, de rayon r, précise les unités choisies.*
   a. $h = 12cm$; $r = 52mm$.
   b. $h = 4{,}5cm$; $r = 80cm$.
2. *Calcule le volume du cône de révolution représenté ci-contre :* $SO = 6cm$; $SA = 6{,}5cm$.
   Donne la valeur exacte puis l'arrondi à 0,001cm³.

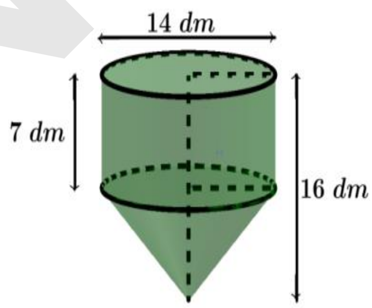


3. a. *Quel est le rayon de la base d'un cône de Révolution de hauteur 10 cm, de volume égal à 30π cm³.*
   b. *Quelle est la hauteur d'un cône de révolution dont la base a pour rayon 6cm et dont le volume est égal à 24π cm³ ?*

Exercice 2 :

Un réservoir d'eau est formé d'une partie cylindrique et d'une partie conique.

a. *Donne, en dm³, les volumes exacts des deux parties du réservoir, exprimés avec le nombre π.*
b. *Donne le volume exact du réservoir, puis sa valeur arrondie à 1dm³.*
c. *Le réservoir peut-il contenir 1 000 l*



Exercice 3 :

L'unité de longueur est le cm, l'unité d'aire est le cm², l'unité de volume est le cm³. $\mathscr{V}$ est le volume d'un cône de révolution de hauteur h ; r est le rayon du cercle de base. $\mathscr{B}$ est l'aire de la base.

h	r	$\mathscr{B}$	$\mathscr{V}$
8	3		
7,5	4		
	6		24π
10			30π

Donne les valeurs exactes de $\mathfrak{B}$ et $\mathcal{V}$ en fonction de π.

Exercice 4 :

S est le sommet d'un cône de révolution ; O est le centre du cercle de base et M un point de ce cercle tel que : $SO = 6cm, SM = 6{,}5cm$.

Calcule le volume de ce cône (donne la valeur exacte puis l'arrondi au mm³)

Exercice 5 : Angle au sommet

Un cône de révolution a une hauteur de 6 cm.

Le rayon du disque de base est 2,5 cm. On appelle S le sommet du cône et O le centre du cercle de base. M et M' sont deux points diamétralement opposés du cercle de base.

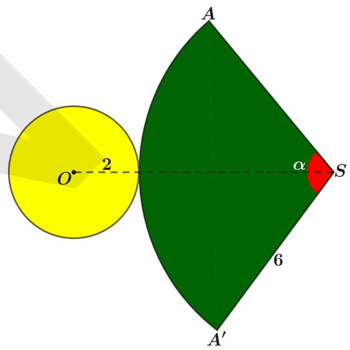
a. Calcule SM.

b. Calcule l'arrondi de $\widehat{MSM'}$ *à 1.*

<u>Indication :</u> $\widehat{MSM'}$ *s'appelle l'angle au sommet du cône. On a :* $\widehat{MSM'} = \mathbf{2\widehat{OSM'}}$.

Exercice 6 :

La figure ci-dessous représente un secteur circulaire de rayon 6 cm et la longueur de l'arc AA' *et un disque de rayon* $r = 2$.



a. On appelle $\widehat{ASA'}$ *l'angle au sommet et* ℓ *longueur de l'arc exprimée en cm.*

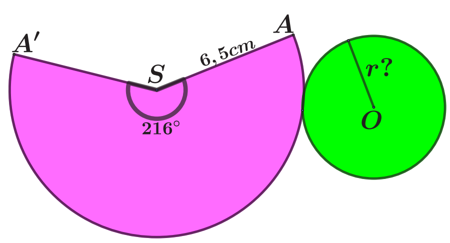
Montre que : $\ell = \frac{a}{360} \times 2\pi \times 6$.

b. Pour quelle valeur de a, la figure serait-elle le schéma d'un patron de cône de révolution ?

Construis un tel patron avec $SA = 6cm$; $r = 2$ *cm.*

Exercice 7 :

Voici le schéma d'un patron de cône révolution



a. Calcule le rayon r du cercle $\mathscr{C}$.

b. Construis le patron en vraie grandeur ;

Découpe et assemble. Fais une figure à main levée pour représenter le cône et porte les données sur le dessin.

c. Calcule la hauteur du cône et son angle au sommet.

267

Exercice 8 :

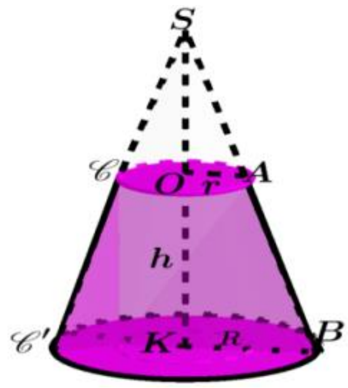
Voici un patron d'un abat-jour :(voir figure ci-dessous)

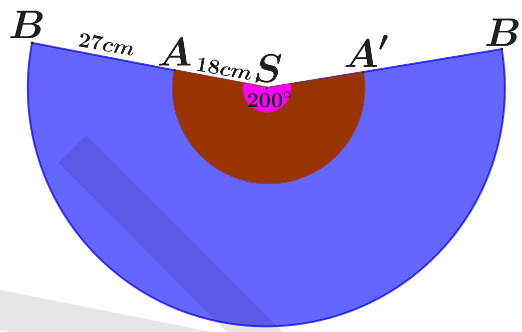
a. *Calcule la surface latérale de l'abat-jour.*

b. *Calcule les rayons des cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$.*

c. *Calcule la hauteur h de l'abat-jour.*

d. *Calcule une mesure de l'angle $\widehat{KSB}$.*
(cet angle est l'inclinaison de la surface latérale par rapport à la verticale).





Exercice 8 :

Un réservoir a la forme d'un tronc de cône. Les cercles de base ont pour rayons 0,80m et1,20m. La hauteur du réservoir est égale à 0,80 m.

a. *Fais une figure.*

b. *Calcule le volume du réservoir en m^3,puis sa capacité en ℓ.*

Exercice 9 :

On désigne par h, R et g respectivement la hauteur, le rayon et la génératrice d'un cône de révolution.

Recopie et complète le tableau suivant en justifiant les calculs :

h(en cm)	24		10
R(en cm)	9	5	
g(en cm)		12	15

Exercice 10 :

Le développement de la surface latérale d'un cône de révolution est un secteur circulaire de 100° et de 9 cm de rayon.

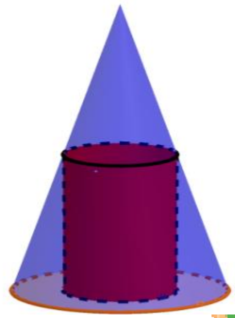
a. *Calcule la hauteur de ce cône.*

b. Calcule la longueur de l'arc de cercle

c. Trouver le rayon de la base de ce cône

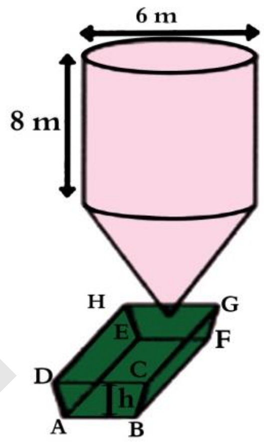
Exercice 11 : On coupe, on creuse

Un cône de bois a une hauteur de 12 cm, un rayon de 4,5 cm. On coupe ce cône au tiers de sa hauteur par un plan parallèle au plan de sa base et on enlève un cylindre comme le montre la figure ci-contre. Calcule le volume du solide obtenu.



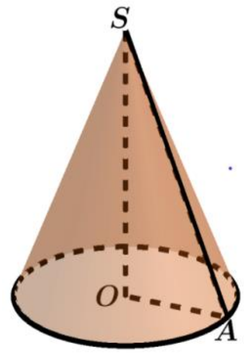
Exercice 12 : Le silo

Un silo à grains est formé d'un cylindre et d'un cône de même diamètre 6m. La hauteur du cylindre est égale à 8m.
La hauteur totale du silo est égale à 14 m.
Le silo étant plein à ras bord, on remplit des bennes qui ont la forme du prisme droit représenté ci-contre.
Les bases sont des trapèzes, $h = 1{,}5$ m ; $AB = 2$ m
$DC = 2{,}6$ m ; $AE = 4$ m.
Combien pourra-t-on remplir de bennes ?



Exercice 13 :

La hauteur [SO] du cône de révolution ci-contre mesure 4 cm. Le rayon du cercle est 3 cm. Soit M un point du cercle $\mathscr{C}$.



a. Calcule l'arrondi au dixième de l'angle $\widehat{MSO}$.

b. Calcule SM.

c. Fais un patron de ce cône.

d. Calcule l'aire latérale de ce cône.

e. Calcule le volume du cône.

f. Le cône est coupé par un plan P perpendiculaire à l'axe [SO]. Fais une figure.

g. Ce plan coupe [SO] en H et SH = 3 cm. On obtient un cône de révolution de sommet S dont le cercle de base est le cercle $\mathscr{C}$ de centre H.

Calcule l'aire latérale et le volume de ce cône

Implication	استلزام، اقتضاء	Parallélogramme	متوازي الأضلاع	Orthogonaux	متعامدة
Incidence	تقاطع	Patron	منشور	Segment	قطعة مستقيمة
Inconnue	مجهول	Pavé droit	منشور قائم	Semi-circulaire	نصف دائري
Inéquation	متراجحة	Périmètre	محيط	Sens	اتجاه
nférieur...pluspetit	اصغر	Perspective cavalière	التمثيل المنظوري	Sens devariation	اتجاه التغيرات
Intérieur d'un cercle	داخل دائرة	PGCD	القاسمالمشترك الأعلى	Série	سلسلة
Interpréter	فسر	Point	نقطة	signe	إشارة
Intersection	تقاطع	Pointsalignés	نقط مستقيمة	Simplifier	مختزل (بسيط)
Intervalle	مجال	Polygone	مضلع	Sinus	جيب
Invariant	لا متحول	Polygone régulier	مضلع منتظم	Solide	مجسم
Inverse	مقلوب	Population	ساكنة-مجتمع	Solution	حل
Inversed'unefraction	مقلوب كسر	PPCM	المضاعف المشترك الأدنى	Somme	جمع
Isocèle	متساوي الساقين	Prioritédes opérations	سبقية العمليات	Sommet	قمة
Linéaire	خطي	Prismedroit	موشور قائم	Soustraction	طرح، نقص
Losange	معين	Production	الإنتاج	Sphère	كرة
Maquette	تصميم	Produit	جداء	Statistique	إحصاء
Médiatrice	واسط	Programme de construction	برنامج إنشاء	Supérieur, Plus grand	اكبر
Mesure	قياس	Projection	إسقاط	Surface	سطح، مساحة
Milieu	منتصف	Proportionnalité	التناسبية	Symétrie axiale	تناظر محوري
Mode	منوال	Protection	حماية	Symétrie centrale	تناظر مركزي
Moyenne	متوسط	Puissance	قوة	Symétrique	تناظر
Multiple	مضاعف	Pyramide	هرم	Système	نظام
Nombrecomposé	عدد مركب	Quatrième proportionnel	الرابع التناسبي	Tableau	جدول
Nombredécimal	عدد عشري	Quotient	الحاصل	Tangente	تماس
Nombreentier naturel	عدد طبيعي	Racine	جذر	Taux	نسبة
Nombre entier relatif	عدد صحيح	Radian	رديان	Tracer	أرسم
Nombrefractionnaire	عدد كسري	Rayon	شعاع	Traduire	ترجم
Nombreimpair	عدد فردي	Réciproque	عكسي	Transformation	تحويل
Nombre irrationnel	عدد لانسبي	Reconnaitre	تعرف على	Translation	إزاحة
Nombrepair	عدد زوجي	Rectangle	مستطيل	Trapèze	شبه منحرف
Nombrepremier	عدد أولي	Rédiger	أنشئ (حرر)	Triangle	مثلث
Nombre rationnel	عدد نسبي	Réduction	اختصار	Triangle équilatéral	مثلثمتساوي الأضلاع
Nombreréel	عدد حقيقي	Réduire	اختصر	Triangle isocèle	مثلث متساوي الساقين
Numérateur	بسط	Relation	علاقة	Triangle rectangle	مثلث قائم
Opération	عملية	Repère	مرجع	Trigonométrique	مثلثاتية
Opposé	نظير	Représentation	مثل	Troncature	قطع
Ordonné	رتيب	Reproduire	أعد	Unité	وحدة
Ordre	رتبة، ترتيب	Réunion	اتحاد	Valeur approchée	قيمة تقريبية
Parallélisme	متوازي	Orthogonalité	تعامد	Volume	حجم

***NB :* * Ce lexique est tiré des programmes de Mathématiques version 2016.**

Implication	استلزام، اقتضاء	Parallélogramme	متوازي الأضلاع	Orthogonaux	متعامدة
Incidence	تقاطع	Patron	منشور	Segment	قطعة مستقيمة
Inconnue	مجهول	Pavé droit	منشور قائم	Semi-circulaire	نصف دائري
Inéquation	متراجحة	Périmètre	محيط	Sens	اتجاه
nférieur...pluspetit	اصغر	Perspective cavalière	التمثيل المنظوري	Sens devariation	اتجاه التغيرات
Intérieur d'un cercle	داخل دائرة	PGCD	القاسمالمشترك الأعلى	Série	سلسلة
Interpréter	فسر	Point	نقطة	signe	إشارة
Intersection	تقاطع	Pointsalignés	نقط مستقيمة	Simplifier	مختزل (بسيط)
Intervalle	مجال	Polygone	مضلع	Sinus	جيب
Invariant	لا متحول	Polygone régulier	مضلع منتظم	Solide	مجسم
Inverse	مقلوب	Population	ساكنة-مجتمع	Solution	حل
Inversed'unefraction	مقلوب كسر	PPCM	المضاعف المشترك الأدنى	Somme	جمع
Isocèle	متساوي الساقين	Prioritédes opérations	سبقية العمليات	Sommet	قمة
Linéaire	خطي	Prismedroit	موشور قائم	Soustraction	طرح، نقص
Losange	معين	Production	الإنتاج	Sphère	كرة
Maquette	تصميم	Produit	جداء	Statistique	إحصاء
Médiatrice	واسط	Programme de construction	برنامج إنشاء	Supérieur, Plus grand	أكبر
Mesure	قياس	Projection	إسقاط	Surface	سطح، مساحة
Milieu	منتصف	Proportionnalité	التناسبية	Symétrie axiale	تناظر محوري
Mode	منوال	Protection	حماية	Symétrie centrale	تناظر مركزي
Moyenne	متوسط	Puissance	قوة	Symétrique	تناظر
Multiple	مضاعف	Pyramide	هرم	Système	نظام
Nombrecomposé	عدد مركب	Quatrième proportionnel	الرابع التناسبي	Tableau	جدول
Nombredécimal	عدد عشري	Quotient	الحاصل	Tangente	تماس
Nombreentier naturel	عدد طبيعي	Racine	جذر	Taux	نسبة
Nombre entier relatif	عدد صحيح	Radian	رديان	Tracer	أرسم
Nombrefractionnaire	عدد كسري	Rayon	شعاع	Traduire	ترجم
Nombreimpair	عدد فردي	Réciproque	عكسي	Transformation	تحويل
Nombre irrationnel	عدد لانسبي	Reconnaitre	تعرف على	Translation	إزاحة
Nombrepair	عدد زوجي	Rectangle	مستطيل	Trapèze	شبه منحرف
Nombrepremier	عدد أولي	Rédiger	أنشئ (حرر)	Triangle	مثلث
Nombre rationnel	عدد نسبي	Réduction	اختصار	Triangle équilatéral	مثلثمتساوي الأضلاع
Nombreréel	عدد حقيقي	Réduire	اختصر	Triangle isocèle	مثلث متساوي الساقين
Numérateur	بسط	Relation	علاقة	Triangle rectangle	مثلث قائم
Opération	عملية	Repère	مرجع	Trigonométrique	مثلثاتية
Opposé	نظير	Représentation	مثل	Troncature	قطع
Ordonné	رتيب	Reproduire	أعد	Unité	وحدة
Ordre	رتبة، ترتيب	Réunion	اتحاد	Valeur approchée	قيمة تقريبية
Parallélisme	متوازي	Orthogonalité	تعامد	Volume	حجم

NB : **** Ce lexique est tiré des programmes de Mathématiques version 2016.***