



REPUBLIQUE ISLAMIQUE DE MAURITANIE

Honneur - Fraternité - Justice

MINISTRE DE L'EDUCATION ET DE LA
REFORME DU SYSTEME D'ENSEIGNEMENT
INSTITUT PEDAGOGIQUE NATIONAL

Mathématiques

5^{ème} SN

Réalisé par :

Mohamed Ahmed Mahmoud Ebety
Professeur de l'enseignement
secondaire

Chrifa Sraba
Professeur de l'enseignement
secondaire

Révisé par :

Yesleck bamba Tiyyib
Professeur de l'enseignement
secondaire

Meymouna Hayin
Professeur de l'enseignement
secondaire

Maquettiste

Oumry Ahmed Bebb

2026

IPN

PREFACE

Dans le cadre de la mise en œuvre des orientations nationales visant l'amélioration de la qualité de l'enseignement et l'adaptation des apprentissages aux exigences du développement, l'Institut Pédagogique National a le plaisir de mettre à la disposition des enseignants et des élèves cette nouvelle collection de manuels scolaires scientifiques destinés au second cycle de l'enseignement secondaire.

Ces ouvrages couvrent l'ensemble des filières du lycée, aussi bien scientifiques que littéraires, dans les disciplines des Mathématiques, des Sciences de la Nature, de la Physique et de la Chimie. Ils ont été élaborés conformément aux programmes officiellement en vigueur et traduisent la volonté des autorités éducatives de garantir à tous les apprenants des ressources pédagogiques de qualité, adaptées aux objectifs de formation et aux réalités de notre système éducatif.

Depuis la réécriture des programmes en 1999 jusqu'à la validation des programmes actuellement en vigueur en 2022, notre système éducatif a connu plusieurs étapes de réforme et de modernisation curriculaires. Toutefois, cette collection marque une avancée historique, puisqu'il s'agit de la première fois que les filières littéraires, notamment les Lettres Modernes (LM) et les Lettres Originelles (LO), bénéficient de manuels scolaires dans les disciplines scientifiques pour tous les niveaux du second cycle, de la 5^e à la 7^e année. Les filières LO ont, en outre, bénéficié de manuels rédigés en langue arabe afin de répondre aux spécificités linguistiques et pédagogiques de ces séries et de garantir une meilleure accessibilité des contenus scientifiques aux apprenants concernés.

Le travail réalisé dans le cadre de ce projet a consisté, d'une part, à la révision de douze titres correspondant aux manuels des disciplines de base dans les différents niveaux du lycée et, d'autre part, à la conception de vingt-deux nouveaux titres couvrant les autres. Cette entreprise éditoriale d'envergure témoigne de l'engagement des autorités éducatives à renforcer les ressources pédagogiques nationales et à accompagner efficacement la mise en œuvre des nouveaux programmes.

Conscient de l'importance stratégique du manuel scolaire dans le processus d'enseignement-apprentissage, l'Institut Pédagogique National a mobilisé les meilleures compétences nationales pour la réalisation de cette tâche. Des inspecteurs, des conseillers pédagogiques et des professeurs expérimentés, reconnus pour leur expertise scientifique et pédagogique, ont ainsi été sélectionnés afin de concevoir et de réviser des ouvrages répondant aux exigences de qualité académique, pédagogique et didactique.

Les équipes de conception se sont attachées à produire des manuels clairs, structurés et accessibles, favorisant le développement des connaissances, des compétences et de l'esprit scientifique chez les apprenants. Une attention particulière a été accordée à la cohérence des contenus, à la progressivité des apprentissages, à l'intégration des activités pratiques ainsi qu'à l'exploitation d'illustrations et de situations d'apprentissage adaptées au contexte national.

L'Institut Pédagogique National tient à exprimer sa profonde gratitude à la Banque Islamique de Développement pour l'appui précieux qu'elle a apporté à ce projet. Grâce à son financement, toutes les étapes de cette importante œuvre éducative ont pu être réalisées, depuis la rédaction et la révision des manuscrits jusqu'à leur édition, leur correction et leur impression. Cet accompagnement constitue une contribution majeure au développement de l'éducation et au renforcement de la qualité des apprentissages dans notre pays.

L'Institut Pédagogique National adresse également ses sincères remerciements à tous ceux qui ont contribué à l'aboutissement de cette œuvre : auteurs, relecteurs, inspecteurs, équipes techniques et partenaires ayant accompagné les différentes phases de conception et de production.

Nous espérons que ces manuels constitueront des outils pédagogiques efficaces au service des enseignants et des élèves et qu'ils contribueront au renforcement de l'enseignement des sciences, à l'amélioration des performances scolaires et à la formation d'une génération capable de participer activement au développement national.

Le Directeur Général de l'Institut Pédagogique National
Dr. Cheikh Mouadh Sidi Abdalla

IPN

Avant-Propos

Chers collègues Professeurs,

Chers élèves,

Au regard des programmes innovés au niveau de l'enseignement secondaire, l'Institut Pédagogique National (IPN), au prix d'importants efforts déployés sous le sceau de l'urgence, a le plaisir de mettre à votre disposition ce manuel intitulé : **Mathématiques – 5^e SN**. L'institut vise ainsi à servir le professeur et l'apprenant à la fois.

En effet, avec ce document, à défaut de prétendre bénéficier d'un cours préparé, le professeur dispose au moins d'un canevas précis et détaillé lui permettant de conduire les apprentissages. Quant à l'apprenant, il a un support qui, en plus de la revue des cours et des applications, lui fournit des opportunités de perfectionnement à travers de nombreux exercices de consolidation ; il pourra ainsi assimiler plus facilement le programme.

Il va sans dire que bien qu'il soit la déclinaison du programme officiel, ce manuel n'en est pas pour autant le support exclusif. Loin s'en faut ! Il est d'ailleurs conseillé voire souhaité que vous consultiez d'autres documents pour varier, enrichir et renforcer vos connaissances.

De la composition du manuel

De par son contenu, ce manuel comprend quinze chapitres que voici :

1. <i>Calcul dans $\mathbb{R}$</i>	7. <i>Angles orientés-Trigonométrie</i>
2. <i>Polynômes</i>	8. <i>Généralités sur les fonctions</i>
3. <i>Calcul vectoriel</i>	9. <i>Produit scalaire</i>
4. <i>Géométrie analytique</i>	10. <i>Applications</i>
5. <i>Equations et inéquations</i>	11. <i>Dénombrement</i>
6. <i>Barycentre</i>	12. <i>Statistiques</i>

De la méthodologie

Chaque chapitre renferme l'ensemble des savoirs énoncés dans le programme. Notre démarche a consisté à dégager ces savoirs à partir :

- De l'étude d'exemples ;
- Des descriptions de situations tirées de différents documents et adaptés à nos réalités.

De la composition d'un chapitre

Le chapitre est organisé selon le dispositif suivant :

- ❖ Rappel des notions de base essentiels sur les savoirs à faire acquérir ;
- ❖ Série d'exercices dont :
 - Quelques exemples accompagnés de leurs solutions qui servent d'exemples et d'application ;
 - Plusieurs autres appelés « Exercices généraux » donnés pour la consolidation des acquis.

La réalité du terrain, à travers l'exécution d'un programme dans les classes, révèle souvent que bien des aspects n'ont pas été pris en compte lors de sa conception. C'est pour cela que nous prêtons une oreille très attentive aux remarques et suggestions qui permettront sans doute, dans les futures éditions, d'améliorer ce manuel tant dans le fond que dans la forme

Les auteurs

Mohamed/ Ahmed Mahmoud / Ebety

Professeur de l'Enseignement Secondaire

Chrifa / Sraba

Professeur de l'Enseignement Secondaire

Révisé par :

Yesleck Bamba Tiyib

Professeur de l'Enseignement Secondaire

Meymouna Hayin

Professeur de l'Enseignement Secondaire

IPN

Table des matières

CHPITRE 1	
<i>Calcul dans $\mathbb{R}$</i>	9
CHPITRE 2	
<i>Polynômes</i>	17
CHPITRE 3	
<i>Calcul vectoriel</i>	21
CHPITRE 4	
<i>Géométrie analytique</i>	27
CHPITRE 5	
<i>Equations et inéquations</i>	35
CHPITRE 6	
<i>Barycentre</i>	47
CHPITRE 7	
<i>Angles orientés-Trigonométrie</i>	53
CHPITRE 8	
<i>Généralités sur les fonctions</i>	61
CHPITRE 9	
<i>Produit scalaire</i>	79
CHPITRE 10	
<i>Applications</i>	85
CHPITRE 11	
<i>Dénombrement</i>	89
CHPITRE 12	
<i>Statistiques</i>	95

IPN

1) Rappel sur les ensembles de nombres

Activité :

a) Trouver la nature de chaque nombre en spécifiant le plus petit ensemble de nombres $\mathbb{N}$; $\mathbb{Z}$; $\mathbb{D}$; $\mathbb{Q}$; $\mathbb{R}$ auquel il appartient : $5\sqrt{36}$; $\frac{7\pi}{4\pi}$; $11 - 13$; $\frac{4+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$; $1 - 11,45$; $\frac{17}{7}$; $\frac{-5}{0,25}$ et 10^{-3} .

b) Y a-t-il des nombres égaux dans cette liste ?

Solution :

a)

	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{D}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$	Le plus petit ensemble auquel il appartient
$5\sqrt{36} = 5 \times 6 = 30$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\mathbb{N}$
$\frac{7\pi}{4\pi} = \frac{7}{4} = 1,75$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	$\mathbb{D}$
$11 - 13 = -2$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\mathbb{Z}$
$\frac{4 + \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\mathbb{R}$
$1 - 11,45 = -10,45$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	$\mathbb{D}$
$\frac{17}{7}$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\mathbb{Q}$
$\frac{-5}{0,25} = -20$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\mathbb{Z}$
$10^{-3} = 0,001$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	$\mathbb{D}$

b) Il n'y a pas de nombres égaux dans cette liste

Résumé de cours :

a) $\mathbb{N}$ est l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 10; 11; 12; \dots\}$

L'ensemble $\mathbb{N} - \{0\}$ est l'ensemble des entiers naturels, non nuls et se note $\mathbb{N}^*$

b) $\mathbb{Z}$ est l'ensemble des entiers relatifs : $\mathbb{Z} = \{\dots; -2; -1; 0; +1; +2; \dots\}$

Avec ;

$\square \mathbb{Z}_+$ L'ensemble des entiers relatifs positifs : $\mathbb{Z}_+ = \{0; +1; +2; +3; \dots\}$

$\square \mathbb{Z}_-$ L'ensemble des entiers relatifs négatifs : $\mathbb{Z}_- = \{\dots; -3; -2; -1; 0\}$

Et ; $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_+ \cup \mathbb{Z}_-$ et $\mathbb{Z}_+ \cap \mathbb{Z}_- = \{0\}$

$\square$ L'ensemble $\mathbb{Z} - \{0\}$ est l'ensemble des entiers relatifs, non nuls et se note $\mathbb{Z}^*$

$\square \mathbb{Z}_+^*$ est l'ensemble $\mathbb{Z}_+ - \{0\}$ des entiers relatifs strictement positifs.

$\square \mathbb{Z}_-^*$ est l'ensemble $\mathbb{Z}_- - \{0\}$ des entiers relatifs strictement négatifs.

c) $\mathbb{D}$ est l'ensemble des décimaux relatifs :

$$\mathbb{D} = \{\dots; -5,48; \dots; 0; \dots; 2,127; \dots; 3,4; \dots\} \text{ ou } \mathbb{D} = \{a \times 10^n; \text{ tel que } a \text{ et } n \in \mathbb{Z}\}$$

Avec ;

$\square \mathbb{D}_+$ L'ensemble des décimaux relatifs positifs : $\mathbb{D}_+ = \{a \times 10^n; \text{ tel que } a \in \mathbb{Z}_+ \text{ et } n \in \mathbb{Z}\}$

$\square \mathbb{D}_-$ L'ensemble des décimaux relatifs négatifs : $\mathbb{D}_- = \{a \times 10^n; \text{ tel que } a \in \mathbb{Z}_- \text{ et } n \in \mathbb{Z}\}$

Et ;

$$\mathbb{D} = \mathbb{D}_+ \cup \mathbb{D}_- \text{ et } \mathbb{D}_+ \cap \mathbb{D}_- = \{0\}$$

$\square$ L'ensemble $\mathbb{D} - \{0\}$ est l'ensemble des décimaux relatifs, non nuls et se note $\mathbb{D}^*$

$\square \mathbb{D}_+^*$ est l'ensemble $\mathbb{D}_+ - \{0\}$ des décimaux relatifs strictement positifs.

$\square \mathbb{D}_-^*$ est l'ensemble $\mathbb{D}_- - \{0\}$ des décimaux relatifs strictement négatifs.

d) $\mathbb{Q}$ est l'ensemble des rationnels relatifs :

$$\mathbb{Q} = \{a/p \text{ tel que } a \in \mathbb{Z} \text{ et } p \in \mathbb{Z}^*\}$$

Avec ;

$\square \mathbb{Q}_+$ L'ensemble des nombres rationnels relatifs positifs : $\mathbb{Q}_+ = \{a/p; \text{ tel que } a \in \mathbb{Z}, p \in \mathbb{Z}^* \text{ et } a \times p \geq 0\}$

$\square \mathbb{Q}_-$ L'ensemble des nombres rationnels relatifs négatifs : $\mathbb{Q}_- = \{a/p; \text{ tel que } a \in \mathbb{Z}, p \in \mathbb{Z}^* \text{ et } a \times p \leq 0\}$

Et ;

$$\mathbb{Q} = \mathbb{Q}_+ \cup \mathbb{Q}_- \text{ et } \mathbb{Q}_+ \cap \mathbb{Q}_- = \{0\}$$

$\square$ L'ensemble $\mathbb{Q} - \{0\}$ est l'ensemble des rationnels relatifs, non nuls et se note $\mathbb{Q}^*$

$\square \mathbb{Q}_+^*$ est l'ensemble $\mathbb{Q}_+ - \{0\}$ des nombres rationnels relatifs strictement positifs.

$\square \mathbb{Q}_-^*$ est l'ensemble $\mathbb{Q}_- - \{0\}$ des nombres rationnels relatifs strictement négatifs.

Caractéristique

Les nombres rationnels qui ne sont pas des décimaux ont une écriture de décimale périodique.

Exemple 1

$$\frac{13}{7} \in \mathbb{Q} \text{ et } ; \frac{13}{7} = 1,857142857142 \dots = \overline{1,857142}$$

e) $\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres réels ;

Les rationnels et les irrationnels constituent l'ensemble des nombres réels

et ;

⊆ $\mathbb{R}_+$ = l'ensemble des réels positifs

⊆ $\mathbb{R}_-$ = l'ensemble des réels négatifs

Et ;

$$\mathbb{R} = \mathbb{R}_+ \cup \mathbb{R}_- \text{ et } \mathbb{R}_+ \cap \mathbb{R}_- = \{0\}$$

⊆ L'ensemble $\mathbb{R} - \{0\}$ est l'ensemble des nombres réels, non nuls et se note $\mathbb{R}^*$

⊆ $\mathbb{R}_+^*$ est l'ensemble $\mathbb{R}_+ - \{0\}$ des nombres réels strictement positifs.

⊆ $\mathbb{R}_-^*$ est l'ensemble $\mathbb{R}_- - \{0\}$ des nombres réels strictement négatifs.

Remarque

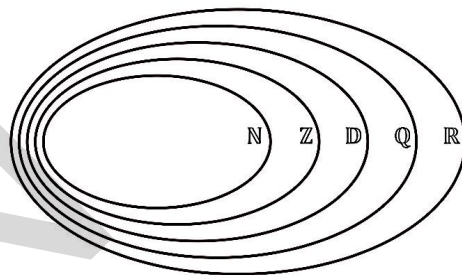
Les nombres réels n'appartenant pas à $\mathbb{Q}$ sont appelés nombres irrationnels.

Exemple 2

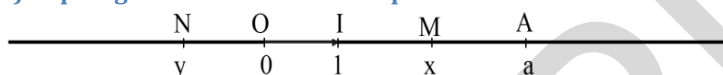
Soit $a = 17,122333444455555666666 \dots \in \mathbb{R}$; a est irrationnel car on voit qu'il n'est pas périodique.

Et $b = -12,01001000100001000001 \dots \in \mathbb{R}$; b est irrationnel car on voit qu'il n'est pas périodique.

On a ; $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ (le symbole $\subset$ signifie inclus dans... ou sous-ensemble de...).



f) Repérage sur la droite numérique



Soit la droite (D) munie du repère ($O; I$). L'ensemble des nombres réels permet de repérer la totalité des points de la droite (D). Autrement dit ; il existe une correspondance exacte appelée bijection, entre chaque point d'une droite graduée et un nombre réel unique. Ainsi, on peut donc définir $\mathbb{R}$ comme l'ensemble des abscisses des points d'une droite graduée.

Exemple 3

Soit les nombres rationnels ; $x = 4, \overline{735}$ et $y = -0, \overline{1928}$.

Donner l'écriture fractionnaire de x et y .

Solution

$$x = 4, \overline{735} \Rightarrow 1000x = 4735, \overline{735} = 4731 + 4, \overline{735} = 4731 + x \Rightarrow 1000x - x = 4731$$

$$\Rightarrow 999x = 4731 \Rightarrow x = 4731 \div 999 \Rightarrow x = \frac{1577}{333}$$

$$y = -0, \overline{1928} \Rightarrow 10\,000y = -1\,928, \overline{1928} = -1\,928 + (-0, \overline{1928}) = -1\,928 + y$$

$$\Rightarrow 10000y - y = -1928 \Rightarrow 9999y = -1928 \Rightarrow y = -1928 \div 9999 \Rightarrow y = -\frac{1928}{9999}$$

2) Avec les racines carrées :

Définition

Soit a un nombre réel positif, on note $\sqrt{a}$ le seul nombre réel positif tel que : $(\sqrt{a})^2 = a$

a) Règles de calcul

Pour tout réels positifs a et b , on a ;

$$\square \sqrt{a^2} = (\sqrt{a})^2 = a \text{ et } \sqrt{a^n} = (\sqrt{a})^n \text{ (n entier)}$$

$$\square \sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$$

$$\square \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}, (b \neq 0)$$

$$\square \sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

$$\square \sqrt{a^2} = |a| \text{ (pour tout } a \in \mathbb{R})$$

b) Expression conjuguée

Exemple 4

L'expression conjuguée de : $\sqrt{2} + 1$ est $\sqrt{2} - 1$

L'expression conjuguée de : $3 - 4\sqrt{5}$ est $3 + 4\sqrt{5}$

L'expression conjuguée de : $\sqrt{5} + \sqrt{7}$ est $\sqrt{5} - \sqrt{7}$

L'expression conjuguée de : $5\sqrt{3} - 3\sqrt{2}$ est $5\sqrt{3} + 3\sqrt{2}$

c) L'équation $x^2 = a$

Si $a > 0$; il y a 2 solutions ; $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$

Si $a = 0$; il y a 1 solution ; 0

Si $a < 0$; il n'y a pas de solution.

Exemple 5

1°) Simplifier : $S_1 = 5\sqrt{45} - \sqrt{80} + 2\sqrt{180}$; $S_2 = 5\sqrt{48} - 2\sqrt{75} + \sqrt{27}$.

2°) Ecrire sans radicaux aux dénominateurs :

$$A = \frac{1}{\sqrt{3} + 2} ; \quad B = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7} - \sqrt{3}} ; \quad C = \frac{4\sqrt{2} - 3}{5\sqrt{2} + 3}$$

Solution

$$1^\circ) S_1 = 5\sqrt{45} - \sqrt{80} + 2\sqrt{180} = 5\sqrt{9 \times 5} - \sqrt{16 \times 5} + 2\sqrt{36 \times 5} = 5 \times 3\sqrt{5} - 4\sqrt{5} + 2 \times 6\sqrt{5} \\ = 15\sqrt{5} - 4\sqrt{5} + 12\sqrt{5} = (15 - 4 + 12)\sqrt{5} = 23\sqrt{5}$$

$$S_2 = 5\sqrt{48} - 2\sqrt{75} + \sqrt{27} = 5\sqrt{16 \times 3} - 2\sqrt{25 \times 3} + \sqrt{9 \times 3} = 5 \times 4\sqrt{3} - 2 \times 5\sqrt{3} + 3\sqrt{3} \\ = 20\sqrt{3} - 10\sqrt{3} + 3\sqrt{3} = (20 - 10 + 3)\sqrt{3} = 13\sqrt{3}$$

2°) Je multiplie le numérateur et le dénominateur par le conjugué du dénominateur

$$A = \frac{1}{\sqrt{3} + 2} = \frac{\sqrt{3} - 2}{(\sqrt{3} + 2)(\sqrt{3} - 2)} = \frac{\sqrt{3} - 2}{3 - 4} = 2 - \sqrt{3}$$

$$B = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7} - \sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}(\sqrt{7} + \sqrt{3})}{(\sqrt{7} - \sqrt{3})(\sqrt{7} + \sqrt{3})} = \frac{2\sqrt{21} + 6}{7 - 3} = \frac{2\sqrt{21} + 6}{4} = \frac{\sqrt{21} + 3}{2}$$

$$C = \frac{4\sqrt{2} - 3}{5\sqrt{2} + 3} = \frac{(4\sqrt{2} - 3)(5\sqrt{2} - 3)}{(5\sqrt{2} + 3)(5\sqrt{2} - 3)} = \frac{40 - 12\sqrt{2} - 15\sqrt{2} + 9}{50 - 9} = \frac{49 - 27\sqrt{2}}{41}$$

3) Intervalles et encadrements :

Définition

Soit a et b deux réels tels que $a \leq b$;

Un intervalle est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ caractérisé par des inégalités

Inégalité	Représentation	Intervalle
$a \leq x \leq b$		$x \in [a ; b]$
$a \leq x < b$		$x \in [a ; b[$
$a < x \leq b$		$x \in]a ; b]$
$a < x < b$		$x \in]a ; b[$
$x \geq a$		$x \in [a ; +\infty[$
$x > a$		$x \in]a ; +\infty[$
$x < a$		$x \in]-\infty ; a[$
$x \leq a$		$x \in]-\infty ; a]$
$x \in \mathbb{R}$		$x \in]-\infty ; +\infty[$

Exemple 6

Ecrire à l'aide d'intervalles, les inégalités suivantes :

a) $1 \leq x \leq 6$; b) $-5 < x < -3$; c) $-2 < x < 5$; d) $-11 < x < -1$; e) $-7 \leq x \leq 8$; f) $5 \leq x \leq 16$.

Solution

a) $1 \leq x \leq 6 \Leftrightarrow x \in [1; 6]$; b) $-5 \leq x \leq -3 \Leftrightarrow x \in [-5; -3]$; c) $-2 < x < 5 \Leftrightarrow x \in]-2; 5[$
d) $-11 < x < -1 \Leftrightarrow x \in]-11; -1[$, e) $-7 \leq x \leq 8 \Leftrightarrow x \in [-7; 8]$; f) $5 \leq x \leq 16 \Leftrightarrow x \in [5; 16]$.

4) Ordre :

a) Ordre dans $\mathbb{R}$

Définitions

Soit a et b deux nombres réels.

$a \leq b$ Signifie que $b - a \geq 0$ ($b - a$ est un réel positif).

$a < b$ Signifie que $b - a > 0$ ($b - a$ est un réel strictement positif).

$a \geq b$ Signifie que $b - a \leq 0$ ($b - a$ est un réel négatif).

$a > b$ Signifie que $b - a < 0$ ($b - a$ est un réel strictement négatif).

b) Propriétés Ordre et opérations

Pour tous réels a, b, c, x et y , on a :

$\square a \leq b \text{ et } b \leq a \Leftrightarrow a = b$	$\square x \leq y \Leftrightarrow x \div a \geq y \div a \text{ (} a < 0 \text{)}$
$\square a \leq b \text{ et } b \leq c \Leftrightarrow a \leq c$	$\square 0 \leq x \leq y \text{ et } 0 \leq a \leq b \Rightarrow 0 \leq ax \leq by$
$\square a \leq 0 \text{ et } 0 \leq b \Rightarrow a \leq b$	$\square a \leq b \Leftrightarrow -b \leq -a$
$\square x \leq y \Leftrightarrow x + a \leq y + a \text{ (} a \in \mathbb{R} \text{)}$	$\square 0 \leq a \leq b \Leftrightarrow 0 \leq \frac{1}{b} \leq \frac{1}{a}$
$\square x \leq y \Leftrightarrow x - a \leq y - a \text{ (} a \in \mathbb{R} \text{)}$	$\square 0 \leq x \leq y \Leftrightarrow 0 \leq x^2 \leq y^2$
$\square x \leq y \Leftrightarrow x \times a \leq y \times a \text{ (} a > 0 \text{)}$	$\square x \leq y \leq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq y^2 \geq 0$
$\square x \leq y \Leftrightarrow x \times a \geq y \times a \text{ (} a < 0 \text{)}$	$\square 0 \leq x \leq y \Leftrightarrow 0 \leq \sqrt{x} \leq \sqrt{y}$
$\square x \leq y \Leftrightarrow x \div a \leq y \div a \text{ (} a > 0 \text{)}$	

5) Avec la valeur absolue :

a) Définition

Soit x un nombre réel :

$$\square |x| = x ; \text{ si } x \geq 0$$

$$\square |x| = -x ; \text{ si } x \leq 0$$

b) Règles de calcul

Soit x et y deux réels, et a et b deux valeurs réelles positifs :

$\square x \geq 0$	$\square \left \frac{x}{y} \right = \frac{ x }{ y }$
$\square x \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$	$\square x = a \Leftrightarrow x = a \text{ ou } x = -a ;$
$\square x \geq a \Leftrightarrow x \leq -a \text{ ou } x \geq a$	$\square x = y \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ \text{ou} \\ x = -y \end{cases}$
$\square x - a \leq b \Leftrightarrow a - b \leq x \leq a + b$	
$\square x \times y = x \times y $	

Exemple 7

Trouver à chaque fois le ou les réel(s) x tel(s) que :

a) $|x| = 7$; b) $|x| = -4$; c) $|x - 4| = 1$; d) $|1 - 2x| = 3$; e) $|x - 5| < 2$; f) $|x + 1| \geq 7$.

Solution

a) $|x| = 7 \Leftrightarrow (x = -7 \text{ ou } x = 7) \Rightarrow S = \{-7; 7\}$

b) $|x| = -4 \Rightarrow S = \Phi$ (il n'existe pas de solutions).

c) $|x - 4| = 1 \Leftrightarrow (x - 4 = -1 \text{ ou } x - 4 = 1)$ d'où, $x = 3$ ou $x = 5 \Rightarrow S = \{3; 5\}$

d) $|1 - 2x| = 3 \Leftrightarrow (1 - 2x = -3 \text{ ou } 1 - 2x = 3)$ d'où, $x = 2$ ou $x = -1 \Rightarrow S = \{-1; 2\}$

e) $|x - 5| < 2 \Leftrightarrow (-2 < x - 5 < 2)$ d'où, $3 < x < 7 \Rightarrow S =]3; 7[$

f) $|x + 1| \geq 7 \Leftrightarrow (x + 1 \leq -7 \text{ ou } x + 1 \geq 7)$ d'où, $x \leq -8$ ou $x \geq 6 \Rightarrow S =]-\infty; -8] \cup [6; +\infty[$.

Exemple 8

Ecrire sans la valeur absolue les nombres suivants : $|3 - \sqrt{13}|$; $\left| \frac{\sqrt{12}-4}{5-\sqrt{24}} \right|$ et $|6 - \sqrt{10}|$

Solution

Comme ; $3 < \sqrt{13} \Rightarrow 3 - \sqrt{13} < 0$

Comme on a ; $\text{opp}(3 - \sqrt{13}) = \sqrt{13} - 3 > 0 \Rightarrow |3 - \sqrt{13}| = \sqrt{13} - 3$

Comme ; $\sqrt{12} - 4 < 0$ et $5 - \sqrt{24} > 0 \Rightarrow |\sqrt{12} - 4| = 4 - \sqrt{12}$ et $|5 - \sqrt{24}| = 5 - \sqrt{24}$

$$\Rightarrow \left| \frac{\sqrt{12}-4}{5-\sqrt{24}} \right| = \frac{|\sqrt{12}-4|}{|5-\sqrt{24}|} = \frac{4-\sqrt{12}}{5-\sqrt{24}}$$

Comme ; $6 > \sqrt{10} \Rightarrow 6 - \sqrt{10} > 0 \Rightarrow |6 - \sqrt{10}| = 6 - \sqrt{10}$.

6) Identités remarquables

Les identités remarquables sont des égalités qui permettent de développer ou de factoriser facilement une expression littérale.

Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

Exemple 9

1) Développer et réduire les expressions suivantes :

$$A = (2x + 3)^2 - (5 - x)^2 ; B = (x - 5)^3 - (3 + x)^3 \text{ et } C = (2x - 4)^3 - (3x + 7)(3x - 7).$$

2) Utiliser les identités remarquables pour calculer les expressions numériques suivantes :

$$999^2 - 1 ; 197^2 + 6 \times 197 + 9 \text{ et } 95 \times (10000 + 5 \times 100 + 25).$$

Solution

1) Développement

$$A = (2x + 3)^2 - (5 - x)^2 = 4x^2 + 12x + 9 - 25 + 10x - x^2 = 3x^2 + 22x - 16.$$

$$B = (x - 5)^3 - (3 + x)^3 = x^3 - 15x^2 + 75x - 125 - (27 + 27x + 9x^2 + x^3)$$

$$B = x^3 - 15x^2 + 75x - 125 - 27 - 27x - 9x^2 - x^3 = -24x^2 + 48x - 152$$

$$C = (2x - 4)^3 - (3x + 7)(3x - 7) = 8x^3 - 48x^2 + 96x - 64 - (9x^2 - 49)$$

$$C = 8x^3 - 48x^2 + 96x - 64 - 9x^2 + 49 = 8x^3 - 57x^2 + 96x - 15$$

2) Calcul

$$999^2 - 1 = 999^2 - 1^2 = (999 - 1)(999 + 1) = 998 \times 1000 = 998\,000$$

$$197^2 + 6 \times 197 + 9 = 197^2 + 2 \times 3 \times 197 + 3^2 = (197 + 3)^2 = 200^2 = 40\,000$$

$$95 \times (10000 + 5 \times 100 + 25) = (100 - 5)(100^2 + 5 \times 100 + 5^2) = 100^3 - 5^3 = 1\,000\,000 - 125 = 999\,875$$

Exemple 10

Factoriser les expressions suivantes :

$$A = (4x + 7)^3 - 8 ; B = (3x - 5)^3 + 1 ; C = x^3 - 27 + x^2(x - 3) ; C = 125x^3 + 64 + (2x - 3)(5x + 4)$$

$$\text{et } D = 27x^3 + 54x^2 + 36x + 8 + 7x(3x + 2)$$

Solution

$$A = (4x + 7)^3 - 8 = (4x + 7)^3 - 2^3 = (4x + 7 - 2)((4x + 7)^2 + 2(4x + 7) + 2^2)$$

$$A = (4x + 5)(16x^2 + 56x + 49 + 8x + 14 + 4) \Rightarrow A = (4x + 5)(16x^2 + 64x + 67)$$

$$B = (3x - 5)^3 + 1 = (3x - 5)^3 + 1^3 = (3x - 5 + 1)((3x - 5)^2 - 1(3x - 5) + 1^2)$$

$$B = (3x - 4)(9x^2 - 30x + 25 - 3x + 5 + 1) \Rightarrow B = (3x - 4)(9x^2 - 33x + 31)$$

$$C = 125x^3 + 64 + (2x - 3)(5x + 4) = (5x)^3 + 4^3 + (2x - 3)(5x + 4)$$

$$C = (5x + 4)((5x)^2 - 4 \times 5x + 4^2) + (2x - 3)(5x + 4) = (5x + 4)(25x^2 - 20x + 16) + (2x - 3)(5x + 4)$$

$$C = (5x + 4)[(25x^2 - 20x + 16 + 2x - 3)] \Rightarrow C = (5x + 4)(25x^2 - 18x + 13)$$

$$D = 27x^3 + 54x^2 + 36x + 8 + 7x(3x + 2) = (3x)^3 + 3 \times (3x)^2 \times 2 + 3 \times 3x \times 2^2 + 2^3 + 7x(3x + 2)$$

$$D = (3x + 2)^3 + 7x(3x + 2) = (3x + 2)[(3x + 2)^2 + 7x] = (3x + 2)[9x^2 + 12x + 4 + 7x]$$

$$\Rightarrow D = (3x + 2)(9x^2 + 19x + 4)$$

Exemple 11

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $1000x^3 - 27 - (10x - 3)(90x^2 + 27x - 13) = 0$

b) $x^3 + 8 + (x + 2)(-x^2 + x + 7) = 0$.

c) $(x - 5)(x^2 + 5x + 25) - x^3 + x^2 + 100 = 0$

Solution

a) $1000x^3 - 27 - (10x - 3)(90x^2 + 27x - 13) = 0$

$$\Leftrightarrow (10x)^3 - 3^3 - (10x - 3)(90x^2 + 27x - 13) = 0$$

$$\Leftrightarrow (10x - 3)(100x^2 + 30x + 9) - (10x - 3)(90x^2 + 27x - 13) = 0$$

$$\Leftrightarrow (10x - 3)(100x^2 + 30x + 9 - 90x^2 - 27x + 13) = 0$$

$$\Leftrightarrow (10x - 3)(10x^2 + 3x + 22) = 0$$

Soit $10x - 3 = 0$	ou $10x^2 + 3x + 22 = 0$
$x = \frac{3}{10}$	$\Delta = 9 - 4 \times 10 \times 22 = -871 < 0$

Donc $S = \left\{ \frac{3}{10} \right\}$

b) $x^3 + 8 + (x + 2)(-x^2 + x + 7) = 0$

$$\Leftrightarrow x^3 + 2^3 + (x + 2)(-x^2 + x + 7) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 2)(x^2 - 2x + 4) + (x + 2)(-x^2 + x + 7) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 2)(x^2 - 2x + 4 - x^2 + x + 7) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 2)(-x + 11) = 0$$

Soit $x = -2$ ou $x = 11$

Donc $S = \{-2; 11\}$

c) $(x - 5)(x^2 + 5x + 25) - x^3 + x^2 + 100 = 0$

$$(x - 5)(x^2 + 5x + 5^2) - x^3 + x^2 + 100 = 0$$

$$x^3 - 5^3 - x^3 + x^2 + 100 = 0$$

$$x^3 - 125 - x^3 + x^2 + 100 = 0$$

$$x^2 - 25 = 0 \Rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow x = 5 \text{ ou } x = -5$$

Donc $S = \{-5; 5\}$

Exercices Généraux

Ensembles de nombres

1.a) Les nombres rationnels suivants sont-ils décimaux ?

$$\frac{21}{14} ; \frac{216}{72} ; \frac{497}{17} ; 4 \times \left(\frac{17}{16} + \frac{1}{4}\right)$$

b) Donner dans chaque cas, si la réponse est négative, l'écriture sous forme de fractions irréductibles

2. Les nombres réels suivants sont-ils rationnels ? Décimaux ? Entiers relatifs ? Entiers naturels ?

$$\sqrt{\frac{4}{25}} ; 10\sqrt{0,09} ; \frac{3\pi}{10} ; \frac{\sqrt{50}}{\sqrt{8}} ; (\sqrt{2}-1)^2 ; \frac{5}{\sqrt{0,01}}$$

Calcul sur les puissances

3. On pose a, b, c des réels non nuls. Simplifier :

$$\frac{a^{-2}a^{-3}a^5}{a^{-4}a^3a^2} ; (a^3b^3)(a^2b)^{-1} ; \frac{a^{-2}b^{-5}}{a^3a^{-2}} ; \frac{a^5}{a^8} \left(\frac{a^{-2}}{a^{-4}}\right)^{-2} ; \frac{(a^2b)^3b^2c^3}{a^2c(bc^2)^3}$$

Mettre les résultats sous la forme a^n , $a^n b^p$ ou $a^n b^p c^q$.

4. Calculer et simplifier :

$$x = \left(\frac{11}{7} + \frac{7}{11}\right)^2 - \left(\frac{11}{7} - \frac{7}{11}\right)^2$$

5. Sans calculatrice, simplifier :

$$A = \left(\frac{2}{3}\right)^{11} \times 1,5^{10} ; B = \left(\frac{1}{20}\right)^3 \times \frac{(4 \times 10^{-3})^2}{0,02^5}$$

6. Effectuer les calculs suivants en donnant les résultats sous forme de produits de puissances de nombres premiers, simplifiés :

$$A = \frac{4^3}{(-2)^5} ; B = \frac{8^3 \times (-45)^7}{(-15)^6 \times 10^3} ; C = \frac{2^2 \times 3^{-5} \times 25}{10 \times 3^2 \times 5^{-3}} ;$$

$$D = \left(\frac{1}{3} - \frac{3}{4}\right) \times \frac{1}{15} ; E = \frac{16 \times 10^{-8} \times 81 \times 10^{-5}}{2,43 \times 10^3 \times 256 \times 10^{-12}}$$

Écriture scientifique

7. Donner l'écriture scientifique des nombres :

$$593,7 ; -0,051 ; 35 \times 10^{-4} ; -73,000$$

Identités remarquables et équations

8.1°) Montrer que :

$$\frac{2}{3} \text{ est une solution de l'équation } 3x^2 + x - 2 = 0,$$

ya-t-il une autre solution pour cette équation ?

2°) Résoudre dans $\mathbb{R}$: a) $x^2 = 5$; b) $x^2 = -3$;

3°) Résoudre dans $\mathbb{R}$: $4(2x-1)^2 = 25(5-x)^2$;

4°) Résoudre dans $\mathbb{R}$: $(x+1)(3-x) = x+1$.

9.1°) a et b sont des réels, développer :

$$A = (2a+3)^3 ; B = (5b-4)^3$$

2°) x et y sont des réels, factoriser :

$$C = x^3 + 8 ; D = y^3 - 27$$

3°) x et y sont des réels, factoriser :

$$E = 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1 ; F = 27y^3 - 54y^2 + 36y - 8.$$

Développement - Réduction - Factorisation - équations produit-nul

10. 1°) Développer et réduire :

$$A = 4(3-2x)^2 - (2x-7)(1-5x)$$

2°) Calculer la valeur exacte de : $B = -x^2 + 4x - 1$ pour $x = 2 - \sqrt{3}$

3°) Soit : $C = -2x^2 + 11x - 5$, montrer que :

$$C = (2x-1)(5-x)$$

4°) Montrer que : $x^2 - x - 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}$

11. Factoriser puis résoudre l'équation dans chaque cas :

$$(2x+3)(x-4) - 3(2x+3)(3x+5) = 0 ;$$

$$64x^3 - 125 = 0$$

$$(2x-1)(-4x+3) - 3(2x-1)^2 = 0$$

$$4x^2 - 9(5x-2)^2 = 0$$

$$(x+1)^3 - 16(x+1) = 0 ;$$

$$x^2 - 4 + (x-2)(3-5x) = 0$$

$$3x^2 - x = 0$$

$$x^3 + 27 - x^2(x+3) = 0$$

Forme adaptée au problème posé

12. On donne $P(x) = 5(x^2 - 9) - (x-5)(6-2x)$.

1°) Développer et réduire $P(x)$.

2°) Factoriser $P(x)$.

3°) Trouver la forme convenable pour résoudre les équations : a) $P(x) = 0$; b) $P(x) = -15$; c) $P(x) = 7x + 5$.

13. Soit $A = -x^2 + 4x + 21$ (forme 1).

1°) Montrer que pour tout x , $A = (7-x)(x+3)$ (forme 2).

2°) Montrer que pour tout x , $A = -(x-2)^2 + 25$ (forme 3).

3°) En choisissant la bonne écriture de A :

a) Calculer la valeur exacte de A pour $x = 2 + \sqrt{2}$.

b) Résoudre $A = 0$.

c) Résoudre $A = 21$.

e) Résoudre $A = 7 - x$.

Calcul avec les quotients

14. Simplifier :

$$\frac{3}{2} - \frac{5}{6} ; \frac{1}{\frac{1}{4} + \frac{1}{3}} ; \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}} ; \frac{4 - \frac{2}{3}}{4}$$

15. Simplifier :

$$\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x^2-1}$$

16. Donner l'écriture fractionnaire de $A = \frac{x+2}{3-x} + \frac{5+x}{x+1}$

17. Donner la fraction correspondante au quotient rationnel dans chaque cas :

$$x = 2, \overline{25} ; y = 0, \overline{463} ; z = 45, \overline{8473}$$

Calcul sur les racines carrées

18. Simplifier :

$$\text{a) } (\sqrt{2}-3)(\sqrt{2}+3) ; \text{ b) } (\sqrt{5}-1)^2$$

$$\text{c) } \sqrt{32} + \sqrt{42} ; \text{ d) } \sqrt{\sqrt{2}+1} \times \sqrt{\sqrt{2}-1} ;$$

$$\text{e) } \frac{\sqrt{2^{2018}} + 2^{2019} + 2^{2020}}{2^{1008}} ; \text{ f) } \left(\frac{\sqrt{54} + 3\sqrt{150}}{3\sqrt{12}}\right)^2 \text{ et}$$

$$\text{g) } \left(\sqrt{10} + 2\sqrt{2}\right)^3$$

19. a) Ecrire sans radicaux au dénominateur la fraction :

$$\frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$$

b) En déduire une expression simple de la somme :

$$N = \frac{1}{1} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{100} + \sqrt{99}}$$

20. Ecrire chacun des nombres suivants sans radicaux aux dénominateurs :

$$A = \frac{2}{\sqrt{5}}; B = \frac{1}{\sqrt{2}-1}; C = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{5\sqrt{3} + 3\sqrt{2}}$$

Valeur absolue

21. On donne les nombres suivants

$$A = \left| \frac{3}{5} - \frac{1}{3} \right| + \left| \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right| \text{ et } B = \left| \frac{5}{4} + \frac{1}{2} \right| - \left| \frac{1}{5} - \frac{2}{3} \right|$$

1) Calculer chacun des nombres suivants :

Et donner le résultat sous forme d'une fraction.

2) Comparer les nombres A et B.

22. Ecrire sans valeur absolue les réels suivants :

$$a = \left| \frac{3}{7} - \frac{2}{5} \right|; b = |10^{-1}|; c = |1,7 - \sqrt{3}|$$

$$d = |\pi^2 - 10|; e = \left| \left(\frac{5}{2} - \sqrt{5} \right) (-3) \right|$$

23. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$\text{a)} |x+2| = 5; \text{ b)} |x+2| = -5$$

$$\text{c)} |2x-1| = 3; \text{ d)} |2x+1| = |x+3|$$

24. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$$\text{a)} |x| \leq 3; \text{ b)} |5x-1| \leq 3$$

$$\text{c)} |x| \geq 3; \text{ d)} \left| 2 - \frac{1}{3}x \right| > 1$$

25. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :

$$\text{a)} |4x+3| = 2; \text{ b)} |-x-1| = -2; \text{ c)} \left| \frac{2x+3}{3x-5} \right| = \frac{3}{11}$$

26. Représenter graphiquement et écrire sous forme d'intervalles ou de réunion d'intervalles, l'ensemble des réels x vérifiant :

$$\text{a)} |x-2| \leq 3; \text{ b)} |2x-1| \leq 2; \text{ c)} |x+2| \geq 1; \text{ d)} |x| > 1; \text{ e)} |2x-3| \geq 5; \text{ f)} 1 < |3x+1| < 3$$

Calcul sur les intervalles

27. A l'aide d'un schéma adéquat, déterminer l'intersection et la réunion des deux intervalles donnés :

$$\text{a)} I =]-\infty; 1[\text{ et } J = [-3; +\infty[$$

$$\text{b)} I =]-\infty; +\infty[\text{ et } J = [4; +\infty[$$

$$\text{c)} I =]-\infty; 1[\text{ et } J =]1; +\infty[$$

$$\text{d)} I =]-7; +\infty[\text{ et } J = [-7; 1[$$

28. Dans chacun des cas suivants, représenter les intervalles I et J sur une droite graduée.

Déterminer ensuite $I \cap J$ et $I \cup J$:

$$\text{a)} I =]-5; 1[\text{ et } J = \left[-\frac{5}{7}; 6 \right[$$

$$\text{b)} I = \left] -2; -\frac{2}{3} \right[\text{ et } J = [-2; +\infty[$$

$$\text{c)} I =]-\infty; \sqrt{2}[\text{ et } J =]1,413; 1,415[$$

$$\text{d)} I =]2; +\infty[\text{ et } J = [5; 11[$$

29. Ecrire sous forme d'intervalles chacun des ensembles suivants :

$$\text{a)} \text{ L'ensemble } I_1 \text{ des } x \text{ tels que } 3 \geq x \geq -5$$

$$\text{b)} \text{ L'ensemble } I_2 \text{ des } x \text{ tels que } 0 < x < 51$$

$$\text{d)} \text{ L'ensemble } I_3 \text{ des } x \text{ tels que } 2 \leq x$$

$$\text{e)} \text{ L'ensemble } I_4 \text{ des } x \text{ tels que } x > -3$$

$$\text{f)} \text{ L'ensemble } I_5 \text{ des } x \text{ tels que } -4 \geq x$$

30. On appelle intersection de deux intervalles I et J

l'ensemble des réels qui appartiennent à I et à J . On la note $I \cap J$.

On appelle la réunion de deux intervalles I et J l'ensemble des réels qui appartiennent à I ou à J . On la note $I \cup J$.

1°) Soit $I =]-5; 4]$ et $J = [2; 7[$. Déterminer $I \cap J$ et $I \cup J$.

2°) Soit $K =]-\infty; 3[$ et $L = [4; +\infty[$. Déterminer $K \cap L$ et $K \cup L$.

Ordre dans $\mathbb{R}$

31. Comparer les nombres réels suivants :

$$\text{a)} \frac{23}{99} \text{ et } \frac{231}{990}; \text{ b)} \frac{99}{23} \text{ et } \frac{990}{231}; \text{ c)} \frac{23}{99} \text{ et } \frac{239}{999}$$

$$\text{d)} 3^{11} \text{ et } 9^5; \text{ e)} 2\sqrt{3} \text{ et } 3\sqrt{2}; \text{ f)} (\sqrt{5})^7 \text{ et } 5^5$$

$$\text{g)} \sqrt{3} - \sqrt{2} \text{ et } \sqrt{2} - \sqrt{3}; \text{ h)} \sqrt{13} - \sqrt{8} \text{ et } \sqrt{14} + \sqrt{7}$$

$$\text{i)} \frac{1}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} \text{ et } \frac{1}{2 - \sqrt{3}}; \text{ j)} 7 - 3\sqrt{5} \text{ et } \sqrt{14} + \sqrt{7}$$

Calcul approché

32. Soit $A(x) = 2x - 5$. Encadrer $A(\sqrt{2})$ sachant que : $1,41 < \sqrt{2} < 1,42$.

33. Dans chacun des cas suivants, déterminer des encadrements de :

$$x+y; x-y; xy; x^2; \frac{1}{x}; \frac{x}{y}$$

$$\text{a)} 2,1 < x < 2,2 \text{ et } 3,3 < y < 3,4;$$

$$\text{b)} -1,5 < x < -1,4 \text{ et } 5 < y < 5,1;$$

$$\text{c)} -4,1 < x < -4 \text{ et } -0,9 < y < -0,8.$$

34. On donne $1,732 < \sqrt{3} < 1,733$ et $2,236 < \sqrt{5} < 2,237$

Donner les meilleurs encadrements possibles de :

$$A = \sqrt{5} + 2\sqrt{3}; B = \frac{2\sqrt{5} - 3\sqrt{3}}{2} \text{ et}$$

35. Sachant que $1 < x < 2$, encadrer les nombres

$$\text{suivants : } A = 7x - 4; B = -3x^2 + 13; C = 1,5(x - 3)^2;$$

$$D = \frac{5A - B + 2C}{4} \text{ et } E = (2x - 5)(1 - x)$$

36. Sachant que $1 \leq \frac{6}{10-x} \leq 6$, encadrer les nombres

$$\text{suivants : } A = \sqrt{x}; B = -x^2 + 5 \text{ et } C = 10(x + 3)^2.$$

1) Les fonctions monômes

Définition

On appelle une fonction monôme (ou un monôme), toute fonction de la forme :

$$F(x) = ax^n \text{ avec } a \in \mathbb{R} \text{ et } n \in \mathbb{N}$$

a est appelé coefficient du monôme et n le degré du monôme.

Exemple 1

$$A(x) = 5x^2, \quad B(x) = -\sqrt{3}x, \quad C(x) = -\frac{5}{7}x^4;$$

$$D(x) = 13, \quad E(x) = -8x^7, \quad F(x) = 4,85x^3.$$

Les monômes sont de degrés respectifs : 2 ; 1 ; 4 ; 0 ; 7 ; 3

2) Les fonctions polynômes

Définition

On considère comme fonction polynôme (ou un polynôme), toute somme algébrique de fonctions monômes.

Exemple 2

$$F(x) = -7x^4 + 5x^3 - 2x^2 + \frac{5}{9}x + \sqrt{3} - 5x^5$$

$$H(x) = 3x^2 - 8 + 2x^3 - \frac{2}{3}x - 5\sqrt{2}x^9$$

Simplification des fonctions polynômes

Pour simplifier une fonction polynôme, on additionne tous ses monômes de mêmes degrés entre eux.

Exemple 3

Soit la fonction polynôme :

$$P(x) = -12x^2 + 8 - 7x - 5x^3 + 4x^2 + 8x - 16 + x^3 - 2x^5$$

Simplifier et ranger par ordre croissant P .

Solution

$$P(x) = 8 - 16 - 7x + 8x - 12x^2 + 4x^2 - 5x^3 + x^3 - 2x^5 = 8 - 16 + (-7 + 8)x + (-12 + 4)x^2 + (-5 + 1)x^3 - 2x^5 \\ = -8 + x - 8x^2 - 4x^3 - 2x^5 \Rightarrow P(x) = -8 + x - 8x^2 - 4x^3 - 2x^5$$

3) Polynôme simplifié et ordonné

a) La forme générale d'une fonction polynôme réduite et rangée dans l'ordre croissant de ses puissances est :

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n \quad \text{où ; } a_i (0 \leq i \leq n) \in \mathbb{R} \text{ et } n \in \mathbb{N}.$$

Exemple 4

Dans l'exemple 2, les polynômes F et H réduits et rangés dans l'ordre croissant de leurs puissances sont :

$$F(x) = \sqrt{3} + \frac{5}{9}x - 2x^2 + 5x^3 - 7x^4 - 5x^5 \text{ et } H(x) = -8 - \frac{2}{3}x + 3x^2 + 2x^3 - 5\sqrt{2}x^9$$

b) La forme générale d'une fonction polynôme réduite et rangée dans l'ordre décroissant de ses puissances est :

$$P(x) = a_nx^n + \dots + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \quad \text{où ; } a_i (0 \leq i \leq n) \in \mathbb{R} \text{ et } n \in \mathbb{N}.$$

Exemple 5

Dans l'exemple 2, les polynômes F et H réduits et rangés dans l'ordre décroissant de leurs puissances sont :

$$F(x) = -5x^5 - 7x^4 + 5x^3 - 2x^2 + \frac{5}{9}x + \sqrt{3} \text{ et } H(x) = -5\sqrt{2}x^9 + 2x^3 + 3x^2 - \frac{2}{3}x - 8$$

Exemple 6

Soit la fonction polynôme : $F(x) = -7x + 3x^2 - 8 + 21x^5 - 11x + 5 - 7x^2 + 2x^4 - 6x^5$

Simplifier le polynôme F et ranger-le dans l'ordre croissant puis décroissant des degrés de ses monômes.

Solution

Simplification :

$$F(x) = -7x + 3x^2 - 8 + 21x^5 - 11x + 5 - 7x^2 + 2x^4 - 6x^5 = -8 + 5 - 7x - 11x + 3x^2 - 7x^2 + 2x^4 + 21x^5 - 6x^5.$$

$$\text{Ordre croissant : } F(x) = -3 - 18x - 4x^2 + 2x^4 + 15x^5$$

$$\text{Ordre décroissant : } F(x) = 15x^5 + 2x^4 - 4x^2 - 18x - 3$$

4) Cas particuliers

- $P(x) = 0$ (Monôme nul de degré non défini).
- $P(x) = a$ ($a \neq 0$) (Forme particulière d'un monôme constant de degré 0).
- $P(x) = ax$ ($a \neq 0$) (Forme particulière d'un monôme du 1er degré).
- $P(x) = ax + b$ ($a \neq 0$) ($b \neq 0$) (Forme particulière d'un binôme du 1er degré).
- $P(x) = ax^2$ ($a \neq 0$) (Forme particulière d'un monôme du 2ième degré).
- $P(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) (Forme générale d'un trinôme du 2ième degré).
- $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) (Forme générale d'un quadrinôme du 3ième degré).

Exemples 7

$$A(x) = \frac{2\sqrt{5}}{3} ; B(x) = \frac{-5}{\sqrt{2}}x ; C(x) = -3x + 7 ; D(x) = -4x^2 ; E(x) = -2\sqrt{3}x^2 + 7$$

$$F(x) = 5,3x^2 - \frac{4}{3}x ; G(x) = \frac{1}{\sqrt{5}}x^2 - 2x + 2 ; H(x) = 2x^3 + x^2 - 5x + 3$$

5) Les coefficients d'un polynôme (ou sa suite caractéristique)

Définition

Dans un polynôme de degré n réduit et rangé suivant l'ordre croissant de ses puissances :

$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n$. La suite ordonnée des coefficients : $(a_0 ; a_1 ; a_2 ; a_3 ; \dots ; a_n)$ est appelée la suite caractéristique des coefficients du polynôme P .

Remarque 1

Les coefficients des puissances qui n'apparaissent pas dans l'écriture d'un polynôme sont considérés comme étant des zéros dans sa suite caractéristique.

Exemple 8

Soit le polynôme : $P(x) = -1 + 5x - \frac{2}{3}x^3 + 4\sqrt{3}x^5 - x^6 - 2x^7$

L'écriture complète de ce polynôme est en fait ; $P(x) = -1 + 5x + 0 \times x^2 - \frac{2}{3}x^3 + 0 \times x^4 + 4\sqrt{3}x^5 - x^6 - 2x^7$;

Et sa suite caractéristique est par conséquent : $(-1; 5; 0; -\frac{2}{3}; 0; 4\sqrt{3}; -1; -2)$

6) Opérations sur les polynômes

a) Somme et différence

La somme algébrique (ou la différence) de deux polynômes $A(x)$ et $B(x)$ est un polynôme. Il est obtenu par l'addition (ou la soustraction) des monômes de mêmes degrés dans $A(x)$ et dans $B(x)$.

Exemple 9

Soit les deux polynômes : $F(x) = \sqrt{3} + \frac{5}{9}x - 2x^2 + 5x^3 - 7x^4 - 5x^5$ et $P(x) = -8 - \frac{2}{3}x + 3x^2 + 2x^3 - 5\sqrt{2}x^9$

Soit H le polynôme tel que : $H(x) = F(x) + P(x)$. Déterminer $H(x)$?

Solution

$$\begin{aligned} H(x) &= F(x) + P(x) = \left(\sqrt{3} + \frac{5}{9}x - 2x^2 + 5x^3 - 7x^4 - 5x^5 \right) + \left(-8 - \frac{2}{3}x + 3x^2 + 2x^3 - 5\sqrt{2}x^9 \right) \\ &= \sqrt{3} + \frac{5}{9}x - 2x^2 + 5x^3 - 7x^4 - 5x^5 - 8 - \frac{2}{3}x + 3x^2 + 2x^3 - 5\sqrt{2}x^9 \\ &= (\sqrt{3} - 8) + \left(\frac{5}{9} - \frac{2}{3} \right)x + (-2 + 3)x^2 + (5 + 2)x^3 - 7x^4 - 5x^5 - 5\sqrt{2}x^9 \\ &= (\sqrt{3} - 8) - \frac{1}{9}x + x^2 + 7x^3 - 7x^4 - 5x^5 - 5\sqrt{2}x^9 \end{aligned}$$

$$H(x) = F(x) + P(x) = (\sqrt{3} - 8) - \frac{1}{9}x + x^2 + 7x^3 - 7x^4 - 5x^5 - 5\sqrt{2}x^9$$

Remarque 2

On peut aussi utiliser les suites caractéristiques de deux polynômes pour les additionner ou les soustraire, et obtenir ainsi la suite caractéristique du polynôme somme (ou différence).

Remarque 3

Le degré de la somme ou de la différence de deux polynômes de degrés différents, est celui du polynôme ayant le plus grand degré.

Remarque 4

Le degré de la somme ou la différence de deux polynômes de même degré, est inférieur ou égal au degré des polynômes.

Remarque 5

Deux polynômes sont égaux, si et seulement si leurs suites caractéristiques sont égales.

Remarque 6

Un polynôme est nul, si et seulement si sa suite caractéristique est constituée de zéros.

b) Produit algébrique de deux polynômes

Soit P et R deux polynômes, et soit Q le polynôme tel que $Q(x) = P(x) \times R(x)$. Pour obtenir l'expression du polynôme produit $Q(x)$, on multiplie chacun des monômes de $P(x)$ par chacun des monômes de $R(x)$, on simplifie ensuite en additionnant entre eux, tous les monômes de mêmes degrés obtenus.

Exemple 10

Soit les deux polynômes $R(x) = -5 + 4x + 7x^2 + 2x^3$ et $Q(x) = 1 - 4x + 3x^2 - 6x^3 + 9x^4$.

Calculer le polynôme $P(x)$ tel que : $P(x) = R(x) \times Q(x)$.

Solution

$$\begin{aligned} P(x) &= R(x) \times Q(x) = (-5 + 4x + 7x^2 + 2x^3) \times (1 - 4x + 3x^2 - 6x^3 + 9x^4) \\ &= -5(1 - 4x + 3x^2 - 6x^3 + 9x^4) + 4x(1 - 4x + 3x^2 - 6x^3 + 9x^4) + 7x^2(1 - 4x + 3x^2 - 6x^3 + 9x^4) \\ &\quad + 2x^3(1 - 4x + 3x^2 - 6x^3 + 9x^4) \\ &= -5 \times 1 - 5 \times -4x - 5 \times 3x^2 + 5 \times 6x^3 - 5 \times 9x^4 + 4x \times 1 - 4x \times 4x + 4x \times 3x^2 - 4x \times 6x^3 + 4x \times 9x^4 + 7x^2 \times 1 \\ &\quad - 7x^2 \times 4x + 7x^2 \times 3x^2 - 7x^2 \times 6x^3 + 7x^2 \times 9x^4 + 2x^3 \times 1 - 2x^3 \times 4x + 2x^3 \times 3x^2 - 2x^3 \times 6x^3 + 2x^3 \times 9x^4 \end{aligned}$$

$$= -5 + 20x - 15x^2 + 30x^3 - 45x^4 + 4x - 16x^2 + 12x^3 - 24x^4 + 36x^5 + 7x^2 - 28x^3 + 21x^4 - 42x^5 + 63x^6 + 2x^3 - 8x^4 + 6x^5 - 12x^6 + 18x^7$$

$$P(x) = R(x) \times Q(x) = -5 + 24x - 24x^2 + 16x^3 - 56x^4 + 51x^6 + 18x^7.$$

Remarque 7

Le degré du polynôme produit de deux polynômes est égal à la somme des degrés des deux polynômes.

Remarque 8

Un polynôme peut être donné sous une forme développée réduite ou non, mais il peut également se présenter sous une forme factorisée.

Exemple 11

$$P(x) = (-5 + 12x - 6x^2)(15x^2 - 3x^5) ; Q(x) = (7 - 9x^2 - 4x^3)(x + x^3 - 4x^4)$$

7) Le zéro d'un polynôme – Factorisation

a) Le zéro d'un polynôme

Soit P un polynôme. On appelle le zéro (ou la racine) du polynôme P , tout nombre réel α tel que $P(\alpha) = 0$.

Déterminer les racines (ou les zéros) d'un polynôme P , revient à résoudre l'équation $P(x) = 0$.

b) Factorisation

Remarque 9

Si α est une racine d'un polynôme P de degré $n \geq 1$, alors $P(x)$ est divisible par le facteur $x - \alpha$, et il existe un polynôme R de degré $n - 1$ tel que $P(x) = (x - \alpha) \times R(x)$.

Remarque 10

Si $\alpha_0 ; \alpha_1 ; \alpha_2 ; \alpha_3 ; \dots ; \alpha_{n-1}$ sont les n racines d'un polynôme $P(x)$; alors celui-ci est de degré supérieur ou égal à n .

Remarque 11

Si P est un polynôme de degré n ($P(x) = a_0x^n + \dots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n$), et si $\alpha_0 ; \alpha_1 ; \alpha_2 ; \alpha_3 ; \dots ; \alpha_{n-1}$ sont les n racines de $P(x)$, alors $P(x)$ se factorise de façon unique de la manière suivante : $P(x) = a_0(x - \alpha_0)(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_{n-1})$

Exemple 12

Soit P le polynôme défini par : $P(x) = x^3 - 3x - 18$

1. En calculant $P(3)$, montrer que $x = 3$ est une racine de P .
2. Déterminer les réels a et b tels que : $P(x) = (x - 3)(x^2 + ax + b)$

Solution

1. $P(3) = 3^3 - 3(3) - 18 = 27 - 9 - 18 = 27 - 27 = 0$. Donc ; 3 est une racine de P .
2. Détermination des réels a et b :

A°/ Méthode 1 (La division euclidienne)

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 3x - 18 & x - 3 \\ \hline \mp x^3 + 3x^2 & x^2 + 3x + 6 \\ \hline 3x^2 - 3x - 18 & \\ \mp 3x^2 + 9x & \\ \hline 6x - 18 & \\ \mp 6x + 18 & \\ \hline 0 & \end{array} \Rightarrow P(x) = (x - 3)(x^2 + 3x + 6)$$

B°/ Méthode 2 (Identification)

$$\begin{aligned} P(x) &= (x - 3)(x^2 + ax + b) \\ &= x^3 + ax^2 + bx - 3x^2 - 3ax - 3b = x^3 + (a - 3)x^2 + (b - 3a)x - 3b = x^3 - 3x - 18 \\ &\Rightarrow \begin{cases} 1 = 1 \\ a - 3 = 0 \Rightarrow a = 3 \\ b - 3a = -3 \Rightarrow b - 9 = -3 \Rightarrow b = 6 \\ -3b = -18 \Rightarrow -3 \times 6 = -18 \end{cases} \Rightarrow P(x) = (x - 3)(x^2 + 3x + 6) \end{aligned}$$

C°/ Méthode 3 (Coefficient de Hörner)

$P(x) = x^3 - 3x - 18 = 1x^3 + 0x^2 - 3x - 18$ et $P(3) = 0$		1	0	-3	-18	
	3		3	9	18	
$P(x) = (x - 3)(x^2 + 3x + 6)$		1	3	6	0	

Exercices Généraux

1. Justifier que les fonctions suivantes sont des fonctions polynômes du troisième degré.

$$f(x) = (4x + 3)(-2x + 3)^2$$

$$g(x) = -3(x + 7)(x - 2)(x - 1)$$

$$h(x) = 2(x - 1)(x - 1)^2$$

2. Soit les quotients réels :

$$Q(x) = \frac{3x + 7}{x + 2}$$

$$R(x) = \frac{5x^2 - 7x + 4}{x - 1}$$

En utilisant les méthodes de l'identification, de la division euclidienne et du tableau de Hörner déterminer

□ Les réels a et b tels que :

$$Q(x) = a + \frac{b}{x + 2}$$

□ Les réels a , b et c tels que :

$$R(x) = ax + b + \frac{c}{x - 1}$$

3. On considère le polynôme :

$$P(x) = 9x^2 - 25 + (3x + 5)(x - 2)$$

1°/ Factoriser $9x^2 - 25$, puis factoriser $P(x)$

2°/ Résoudre l'équation $P(x) = 0$

3°/ a) Développer et réduire $P(x)$

b) Retrouver les solutions de l'équation $P(x) = 0$.

4. On considère le polynôme $P(x)$ tel que :

$$P(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$$

1°) Calculer $P(-1)$

2°) Déterminer les réels a et b tels que

$$P(x) = (x + 1)(x^2 + ax + b)$$

3°) Factoriser $P(x)$.

5. Développer, réduire et ordonner les polynômes

$$P(x) = (x - 1)(1 + x + x^2 + x^3)$$

$$h(x) = (4x + 3)(-x^2 + 3x - 6)$$

$$f(x) = (5x^2 - 4)(2x^2 - x + 8)$$

6. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = 3x^3 - 4x^2 - 25x + 42$$

1) Développer, réduire et ordonner

$$(x + 3)(ax^2 + bx + c)$$

2) Déterminer trois réels a , b et c tels que :

$$g(x) = (x + 3)(ax^2 + bx + c) \text{ pour tout réel } x.$$

3) Résoudre l'équation $f(x) = 0$.

7. Soit la fonction irrationnelle $h(x) = \sqrt{2x - 7}$.

Déterminer les valeurs réelles pour lesquelles h existe.

8. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^3 + 5x^2 - 12x + 6$$

1) Montrer que 1 est solution de l'équation $f(x) = 0$

2) Déterminer trois réels a , b et c tels que :

$$f(x) = (x - 1)(ax^2 + bx + c) \text{ pour tout réel } x.$$

3) En déduire le signe de $f(x)$.

9. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^3 + 5x^2 - 12x + 6$$

1) Montrer que 1 est solution de l'équation $f(x) = 0$

2) Déterminer trois réels a , b et c tels que :

$$f(x) = (x - 1)(ax^2 + bx + c) \text{ pour tout réel } x.$$

3) En déduire le signe de $f(x)$.

10. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^2 - ax + 3 \text{ où } a \text{ est un nombre réel.}$$

1) Déterminer les valeurs de a pour lesquelles f admet deux racines distinctes.

2) Déterminer les valeurs de a pour lesquelles f admet une racine double.

3) Déterminer les valeurs de a pour lesquelles f n'admet pas de racine.

4) Déterminer les valeurs de a pour lesquelles le minimum de f est strictement inférieur à -1 .

11. On donne l'encadrement :

$$5,23 < x < 5,24;$$

Et on donne :

$$y = \frac{7x + 3}{9 - x} \text{ et } z = \frac{2x^2 - 3x + 8}{x - 3}$$

Ecrire y sous la forme :

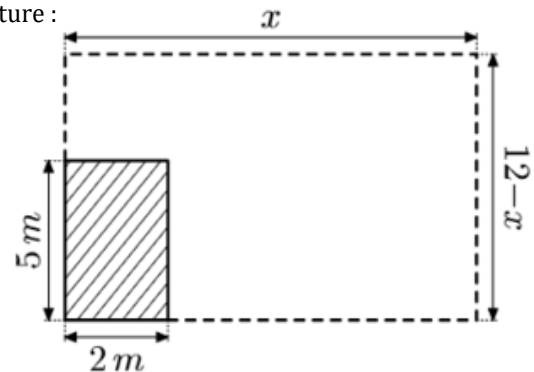
$$y = a + \frac{b}{9 - x}$$

Ecrire z sous la forme :

$$z = ax + b + \frac{c}{x - 3}$$

En déduire des encadrements pour y et z .

12. Dans son champ, un agriculteur possède un poulailler de forme rectangulaire et de dimensions 5 m et 2 m . Il souhaite construire un enclos (représenté en pointillée) comme l'indique la figure ci-dessous avec 17 m de clôture :



Le poulailler est représenté par la partie hachurée, la clôture est représentée en pointillés et la partie extérieure dédiée aux poules est représentée par la partie blanche.

On note A l'aire la partie extérieure

Justifier que l'aire A de l'espace extérieur a pour expression : $A(x) = -x^2 + 12x - 10$.

13. Soit $P(x) = x^3 + (t + 3)x^2 + (3t - 4)x - 4t$

Déterminer tous les polynômes de degré 3 ayant pour racines -1 ; 2 et 3 .

1) Notion de vecteur

Définition

Un vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ est déterminé par ;

- Une longueur ; celle du segment $[AB]$ appelée norme de $\vec{u}$;
- Une direction ; celle de la droite (AB) ;
- Un sens ; celui de A vers B .

Remarque 1

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, sont égaux s'ils ont :

- La même longueur ;
- Le même sens ;
- La même direction.

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont opposés s'ils ont :

- La même longueur ;
- La même direction ;
- Deux sens contraires.

2) Relations vectorielles

Pour tout point A du plan $\mathcal{P}$, on a : $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$ (Vecteur nul).

Pour tous points A et B du plan $\mathcal{P}$, on a : $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$ ($\overrightarrow{BA}$ est l'opposé de $\overrightarrow{AB}$).

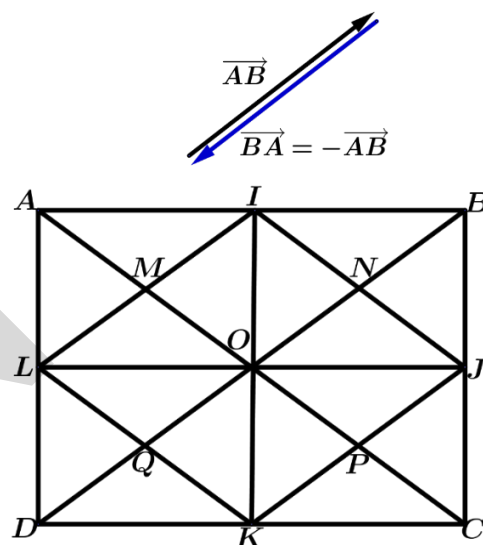
Exemple 1

Sur la figure ci-dessus, donner ;

- Tous les vecteurs égaux au vecteur $\overrightarrow{AM}$;
- Tous les vecteurs égaux au vecteur $\overrightarrow{AI}$;
- Tous les vecteurs opposés au vecteur $\overrightarrow{AL}$.

Solution

- $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MO} = \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{IN} = \overrightarrow{NJ} = \overrightarrow{LQ} = \overrightarrow{QK}$;
- $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{LO} = \overrightarrow{OJ} = \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{DK} = \overrightarrow{KC}$;
- Vecteurs opposés à $\overrightarrow{AL}$:
 $-\overrightarrow{AL} = \overrightarrow{LA} = \overrightarrow{DL} = \overrightarrow{QM} = \overrightarrow{KO}$
 $= \overrightarrow{OI} = \overrightarrow{PN}$
 $= \overrightarrow{CJ} = \overrightarrow{JB}$



3) Somme de vecteurs

Pour additionner des vecteurs, on utilise la relation de Chasles.

Pour tous points A, B et C du plan $\mathcal{P}$, on a : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.

(Relation de Chasles).

La relation de Chasles peut aussi s'écrire ;

Pour tous points A, B et C du plan $\mathcal{P}$, et pour tout point $M \in \mathcal{P}$, on a $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MA}$. En particulier ; $O \in \mathcal{P} \Rightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}$.

Exemple 2

ABC est un triangle non aplati, P et Q sont deux points du plan définis par :

$$3\overrightarrow{PA} - 2\overrightarrow{BC} = 4\overrightarrow{BP} \text{ et } 2\overrightarrow{QA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} - 4\overrightarrow{BQ} = \vec{0}.$$

En utilisant la relation de Chasles, déterminer les coordonnées de P et Q dans le repère $(B ; \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$

Solution

$$\begin{aligned} 3\overrightarrow{PA} - 2\overrightarrow{BC} = 4\overrightarrow{BP} &\Rightarrow 3\overrightarrow{PB} + 3\overrightarrow{BA} - 2\overrightarrow{BC} = 4\overrightarrow{BP} \Rightarrow -3\overrightarrow{BP} - 4\overrightarrow{BP} = -3\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{BC} \\ &\Rightarrow -7\overrightarrow{BP} = -3\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{BC} \Rightarrow \overrightarrow{BP} = \frac{3}{7}\overrightarrow{BA} - \frac{2}{7}\overrightarrow{BC} \Rightarrow P\left(\frac{3}{7}; -\frac{2}{7}\right) \\ 2\overrightarrow{QA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} - 4\overrightarrow{BQ} = \vec{0} &\Rightarrow 2\overrightarrow{QB} + 2\overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} - 4\overrightarrow{BQ} = \vec{0} \Rightarrow -2\overrightarrow{BQ} - 4\overrightarrow{BQ} = -2\overrightarrow{BA} - \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} \\ &\Rightarrow -6\overrightarrow{BQ} = -2\overrightarrow{BA} - \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} \Rightarrow \overrightarrow{BQ} = \frac{2}{6}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{18}\overrightarrow{BC} \Rightarrow Q\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{18}\right) \end{aligned}$$

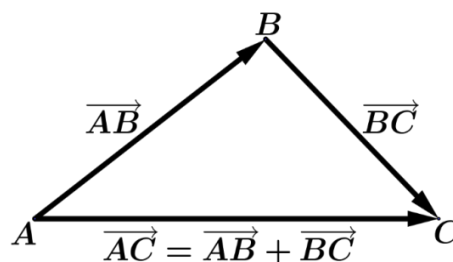
Exemple 3

Soit ABC trois points distincts, et soit M un point quelconque du plan tel que ; $5\overrightarrow{MA} = -2\overrightarrow{MB} + 7\overrightarrow{MC}$.

En utilisant la relation de Chasles, montrer que les points A, B et C sont alignés.

Solution

$$\begin{aligned} 5\overrightarrow{MA} = -2\overrightarrow{MB} + 7\overrightarrow{MC} &\Rightarrow 5\overrightarrow{MA} = -2\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{AB} + 7\overrightarrow{MA} + 7\overrightarrow{AC} \Rightarrow 5\overrightarrow{MA} = -2\overrightarrow{MA} + 7\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{AB} + 7\overrightarrow{AC} \\ &\Rightarrow 5\overrightarrow{MA} = 5\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{AB} + 7\overrightarrow{AC} \Rightarrow 5\overrightarrow{MA} - 5\overrightarrow{MA} = 2\overrightarrow{AB} + 7\overrightarrow{AC} \Rightarrow 2\overrightarrow{AB} + 7\overrightarrow{AC} = \vec{0} \\ &\Rightarrow 2\overrightarrow{AB} = -7\overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = -\frac{7}{2}\overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AC} \text{ colinéaire} \Rightarrow A, B \text{ et } C \text{ alignés.} \end{aligned}$$



4) Egalités vectorielles et configurations de base

a- Milieu et vecteurs

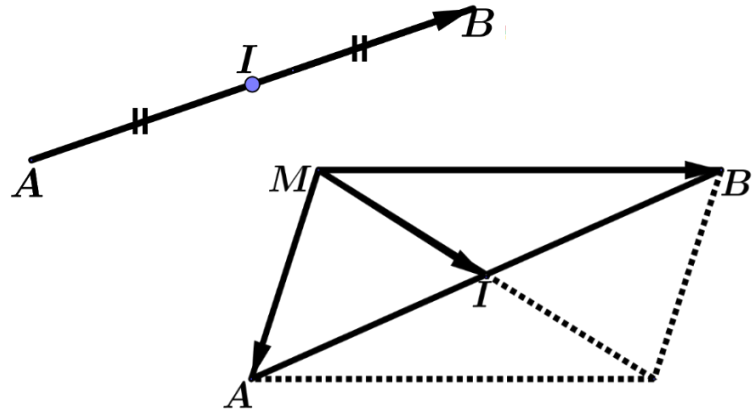
■ Milieu d'un segment et vecteurs

Soit $[AB]$ un segment de milieu I , on a :

- $\vec{AI} = \vec{IB} = \frac{1}{2}\vec{AB}$;
- $\vec{AB} = 2\vec{AI} = 2\vec{IB}$.
- $\vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0}$.

Pour tout point M du plan $\mathcal{P}$, on a :

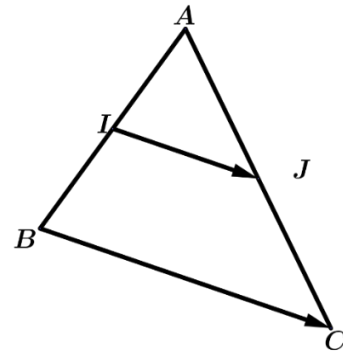
- $\vec{MA} + \vec{MB} = 2\vec{MI}$;
- $\vec{MI} = \frac{1}{2}(\vec{MA} + \vec{MB})$



■ Milieux des côtés d'un triangle et vecteurs

Soit ABC un triangle. I et J les milieux respectifs de $[AB]$ et $[AC]$, alors :

- $\vec{IJ} = \frac{1}{2}\vec{BC}$;
- $\vec{BC} = 2\vec{IJ}$

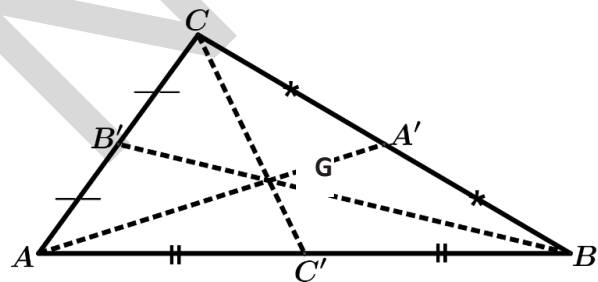


b- Centre de gravité et vecteurs

Soit ABC un triangle de centre de gravité G .

Et soit A' le milieu de $[BC]$, alors :

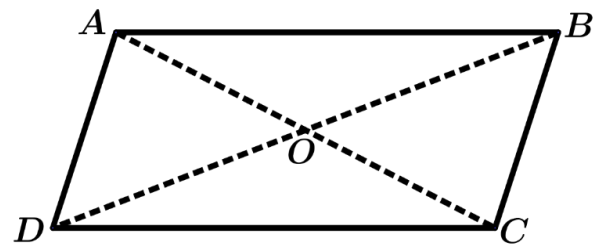
- $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$ [1] ;
- $\vec{GA} = -2\vec{GA'}$ [2] ;
- $\vec{GA'} = -\frac{1}{2}\vec{GA}$ [3] ;
- $\vec{AG} = \frac{2}{3}\vec{AA'}$ [4] ;
- $\forall M \in \mathcal{P} \Rightarrow \vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = 3\vec{MG}$ [5]



c- Parallélogramme et vecteurs

$ABCD$ est un parallélogramme de centre O ;

- $\Leftrightarrow \vec{AB} = \vec{DC}$ et $\vec{AD} = \vec{BC}$;
- $\Leftrightarrow \vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AD} + \vec{DC}$;
- $\Leftrightarrow \vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AD}$;
- $\Leftrightarrow \vec{AO} = \vec{OC}$ et $\vec{DO} = \vec{OB}$.



Exemple 4

Soit $ABCD$ un quadrilatère. I ; J ; K ; L ; M ; N les milieux respectifs de $[AB]$; $[BC]$; $[CD]$; $[DA]$; $[AC]$; $[BD]$.

1°) Démontrer que les segments $[IK]$; $[JL]$ et $[MN]$ ont le même milieu G .

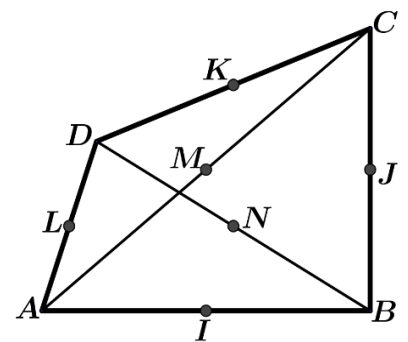
2°) Démontrer que $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} + \vec{GD} = \vec{0}$.

Solution

1°) Dans le triangle ABC , on a : $\vec{IJ} = \frac{1}{2}\vec{AC}$ et dans le triangle ACD , on a : $\vec{LK} = \frac{1}{2}\vec{AC}$;
donc $\vec{IJ} = \vec{LK}$. Alors $IJKL$ est un parallélogramme. D'où $[IK]$ et $[JL]$ ont le même milieu.

Dans le triangle ACD , on a : $\vec{LM} = \frac{1}{2}\vec{DC}$ et dans le triangle BCD , on a : $\vec{NJ} = \frac{1}{2}\vec{DC}$,
donc $\vec{LM} = \vec{NJ}$; alors $LMJN$ est un parallélogramme. D'où $[JL]$ et $[MN]$ ont le même milieu. Par conséquent les segments $[IK]$; $[JL]$ et $[MN]$ ont le même milieu G .

2°) On a $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} + \vec{GD} = (\vec{GA} + \vec{GB}) + (\vec{GC} + \vec{GD})$
 $= 2\vec{GI} + 2\vec{GK} = 2(\vec{GI} + \vec{GK}) = 2(\vec{0}) = \vec{0}$. Donc, $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} + \vec{GD} = \vec{0}$.



Exemple 5

Soit ABC un triangle. M un point n'appartenant ni à (AB) , ni à (AC) , ni à (BC) .

1°) Construire les points A' ; B' ; C' tels que $MABA'$; $MBCB'$; $MCAC'$ soient des parallélogrammes.

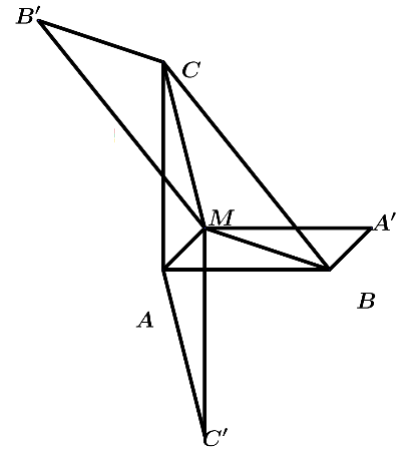
2°) Démontrer que M est le centre de gravité du triangle $A'B'C'$.

Solution

1°) Construction

2°) On a : $\overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{MB'} + \overrightarrow{MC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$

Donc, M est le centre de gravité du triangle $A'B'C'$.



Exemple 6

Soit ABC un triangle quelconque. A' le milieu de $[BC]$, G le centre de gravité du triangle ABC , D et E les points tels que ;

$$\overrightarrow{CD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{BE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}.$$

On note I le milieu de $[DE]$.

1°) Faire une figure illustrant les données précédentes.

2°) a) Montrer que $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

b) Exprimer $\overrightarrow{AA'}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

3°) a) Démontrer que les points A , A' et I sont alignés.

b) Démontrer que le point G est le milieu de $[AI]$.

4°) Prouver que les droites (BC) et (ED) sont parallèles.

Solution

2° a) Calculons $\overrightarrow{AI}$ par deux chemins :

$$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EI} \text{ et } \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DI} \Rightarrow 2\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BE} + \underbrace{\overrightarrow{EI} + \overrightarrow{DI}}_{\vec{0}}$$

$$\Rightarrow 2\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} \Rightarrow 2\overrightarrow{AI} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{4}{3}\overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{4}{3}\overrightarrow{AC}\right) \Rightarrow \overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$$

$$\text{b) } \overrightarrow{AA'} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$$

$$3^\circ \text{a) } \overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \Rightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AI} \quad [1]$$

$$\overrightarrow{AA'} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \Rightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AA'} \quad [2]$$

De [1] et [2] on a ; $\frac{3}{2}\overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{AA'} \Rightarrow \overrightarrow{AI} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AA'} \Rightarrow \overrightarrow{AA'}$ et $\overrightarrow{AI}$ sont colinéaires $\Rightarrow A, A'$ et I sont alignés.

b) G est le centre de gravité du triangle ABC et A' est le milieu de $[BC] \Rightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'} \Rightarrow \overrightarrow{AA'} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AG}$

$$\text{comme on a déjà } \overrightarrow{AI} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AA'} \Rightarrow \overrightarrow{AA'} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AI} \Rightarrow \frac{3}{2}\overrightarrow{AG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AI} \Rightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AI} \Rightarrow G = A * I$$

4° on a ; $\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{BC}$

$$= \frac{1}{3}\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BC} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} = \left(1 - \frac{1}{3}\right)\overrightarrow{BC} \Rightarrow \overrightarrow{ED} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} \Rightarrow \overrightarrow{ED} \text{ et } \overrightarrow{BC} \text{ sont colinéaires } \Rightarrow (BC) // (ED)$$

d- Configuration de Thalès et vecteurs

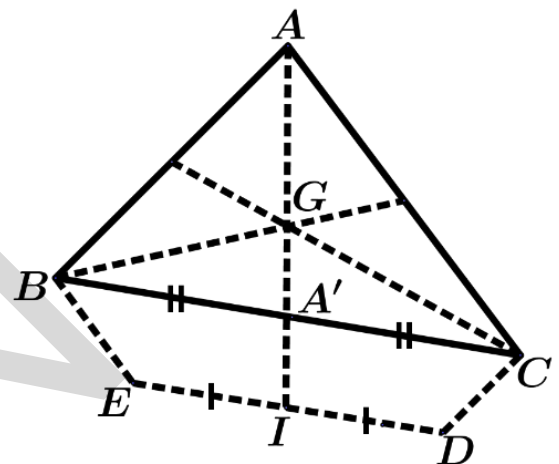
■ Première version Thalès

Dans le plan $\mathcal{P}$, on donne les deux droites (AA') et (BB') sécante en O de sorte que ; $\overrightarrow{OA'} = x \cdot \overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB'} = y \cdot \overrightarrow{OB}$
Alors ; les coefficients de colinéarité x et y sont égaux si et seulement si les droites (AB) et $(A'B')$ sont parallèles.

Dans ce cas ; $\overrightarrow{A'B'} = x \cdot \overrightarrow{AB}$

Remarque

1°) Si les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OA'}$ d'une part, $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OB'}$ d'autre part, sont de même sens, on a ; $x = \frac{OA'}{OA}$ et $y = \frac{OB'}{OB}$



Sous ces conditions, on pourra énoncer : $\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} \Leftrightarrow (AB) // (A'B')$

2°) De même, lorsque les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OA'}$ sont de sens contraires, ainsi que $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OB'}$; $x = -\frac{OA'}{OA}$ et $y = -\frac{OB'}{OB}$

Sous ces conditions, on pourra énoncer : $\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} \Leftrightarrow (AB) // (A'B')$

5) Produit d'un vecteur par un réel

$$* \forall \vec{u} \in \mathcal{V} \Rightarrow \begin{cases} 0 \cdot \vec{u} = \vec{0} \\ 1 \cdot \vec{u} = \vec{u} \\ -1 \cdot \vec{u} = -\vec{u} \end{cases} \quad * \forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{V}, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} \alpha(\beta \vec{u}) = (\alpha\beta) \vec{u} \\ (\alpha + \beta) \vec{u} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{u} \\ \alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha \vec{u} + \alpha \vec{v} \end{cases}$$

Exemple 7

1°) Sur la figure ci-contre, compléter ;

$$\overrightarrow{AL} + \overrightarrow{AM} = \dots ; \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{DP} = \dots ; \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{PC} = \dots ;$$

$$\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{JN} = \dots ; \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AI} = \dots ; \overrightarrow{KJ} + \overrightarrow{KL} = \dots ; \overrightarrow{CJ} + \overrightarrow{PM} = \dots .$$

2°) Compléter :

$$\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BN} = \dots ; \overrightarrow{AN} + \dots = \overrightarrow{AC} ,$$

$$\dots + \overrightarrow{IN} = \overrightarrow{QJ} ; \overrightarrow{C} \dots + \dots \overrightarrow{O} = \overrightarrow{DA} .$$

3°) Compléter par le nombre qui convient ;

$$\overrightarrow{DQ} = \dots \overrightarrow{DB} ; \overrightarrow{AO} = \dots \overrightarrow{AP} ; \overrightarrow{BQ} = \dots \overrightarrow{BO} ; \overrightarrow{DB} = \dots \overrightarrow{DN} ; \overrightarrow{CP} = \dots \overrightarrow{AO} .$$

Solution

1°)

$$\overrightarrow{AL} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AL} + \overrightarrow{LQ} = \overrightarrow{AQ} ; \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{DP} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MO} = \overrightarrow{AO} ; \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{JN} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0} ;$$

$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DK} = \overrightarrow{AK} ; \overrightarrow{KJ} + \overrightarrow{KL} = \overrightarrow{KJ} + \overrightarrow{JL} = \overrightarrow{KL} ; \overrightarrow{CJ} + \overrightarrow{PM} = \overrightarrow{CJ} + \overrightarrow{JI} = \overrightarrow{CI} .$$

2°)

$$\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{AJ} \Rightarrow \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IM} = \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{NJ} ; \overrightarrow{AN} + \dots = \overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AC} ; \dots + \overrightarrow{IN} = \overrightarrow{QJ} \Rightarrow \overrightarrow{QN} + \overrightarrow{IN} = \overrightarrow{QJ} ;$$

$$\overrightarrow{C} \dots + \dots \overrightarrow{O} = \overrightarrow{DA} \Rightarrow \overrightarrow{CJ} + \overrightarrow{KO} = \overrightarrow{DA} .$$

3°)

$$\overrightarrow{DQ} = \frac{1}{4} \overrightarrow{DB} ; \overrightarrow{AO} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AP} ; \overrightarrow{BQ} = \frac{3}{2} \overrightarrow{BO} ; \overrightarrow{DB} = \frac{4}{3} \overrightarrow{DN} ; \overrightarrow{CP} = -\frac{1}{2} \overrightarrow{AO} .$$

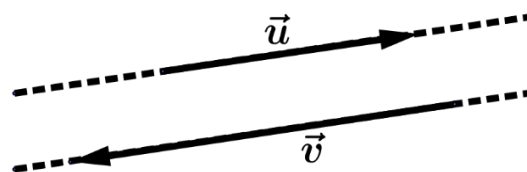
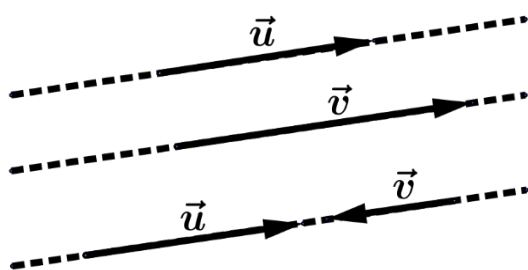
6) Vecteurs colinéaires

Définition

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires lorsqu'ils ont la même direction. C'est-à-dire, lorsqu'ils sont portés par deux droites parallèles ou par une même droite.

Autrement dit ; deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si, et seulement si ; $\vec{v} = k \cdot \vec{u} (k \in \mathbb{R})$.

On a	Si et seulement si
$\vec{v} = k \vec{u}$ ($k \in \mathbb{R}_+$)	$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de même sens
$\vec{v} = k \vec{u}$ ($k \in \mathbb{R}_-$)	$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de sens contraires





Remarque 1

Pour tout vecteur $\vec{u}$, on a $0 \cdot \vec{u} = \vec{0}$. Le vecteur nul ($\vec{0}$) est colinéaire à tout vecteur.

On dit que le vecteur nul ($\vec{0}$) a toutes les directions.

Remarque 2

Si deux vecteurs sont colinéaires, alors tout vecteur colinéaire à l'un est aussi colinéaire à l'autre.

a-Combinaison linéaire

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs quelconques de $\mathcal{V}$ et soit α et β deux réels.

Le vecteur $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$ est appelé combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ou α et β sont les coefficients respectifs de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$.

b-Norme d'un vecteur

On appelle norme d'un vecteur $\vec{u}$, et on la note $\|\vec{u}\|$, la distance entre deux points pris pour origine et extrémité correspondant au vecteur $\vec{u}$.

C'est-à-dire que, si A et B sont deux points du plan tels que

$\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, alors ;

$$\|\vec{u}\| = \|\overrightarrow{AB}\| = AB = d(A, B).$$

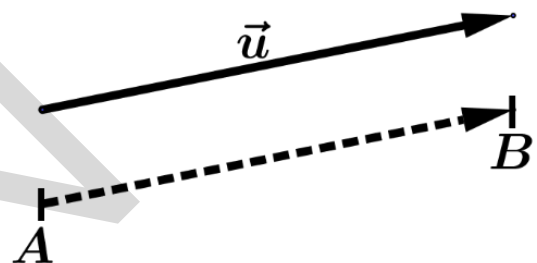
Pour tout vecteur $\vec{u}$ on a ;

$$\|\vec{u}\| \geq 0 ; \|\vec{0}\| = 0 \text{ et } \|\vec{u}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}.$$

$$\|\vec{u}\| = \|-\vec{u}\| ; \|\overrightarrow{AB}\| = AB \text{ et en particulier } \|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{BA}\|.$$

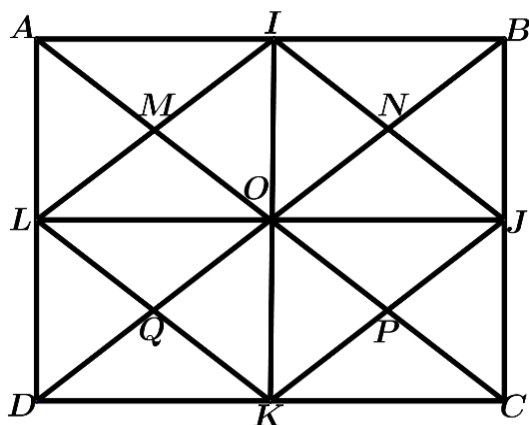
Pour tout vecteur $\vec{u}$ et tout réel k on a ; $\|k \cdot \vec{u}\| = |k| \|\vec{u}\|$.

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ on a ; $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$.



Exercices Généraux

1. Sur la figure ci-dessous, donner ;



- Tous les vecteurs égaux au vecteur $\overrightarrow{AM}$;
- Tous les vecteurs égaux au vecteur $\overrightarrow{AI}$;
- Tous les vecteurs opposés au vecteur $\overrightarrow{AL}$.

2. ABC est un triangle non aplati, P et Q sont deux points du plan définis par :

$$3\overrightarrow{PA} - 2\overrightarrow{BC} = 4\overrightarrow{BP} \text{ et } 2\overrightarrow{QA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} - 4\overrightarrow{BQ} = \vec{0}$$

En utilisant la relation de Chasles, déterminer les coordonnées de P et Q dans le repère $(B; \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$

3. Soit ABC un triangle non aplati, et soit M un point quelconque du plan tel que $5\overrightarrow{MA} = -2\overrightarrow{MB} + 7\overrightarrow{MC}$

En utilisant la relation de Chasles, montrer que les points A, B et C sont alignés.

4. Soit $ABCD$ un parallélogramme non aplati et I le milieu de $[BC]$. On désigne par E le point d'intersection de (AI) et (CD) .

Montrer que C est le milieu de $[DE]$.

5. 1°) Sur la figure ci-dessous, compléter ;

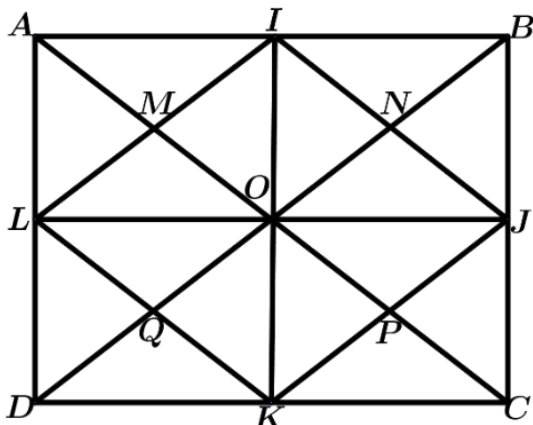
$$\begin{aligned} \overrightarrow{DL} + \overrightarrow{BN} &= \dots ; \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CQ} = \dots ; \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{QK} = \dots ; \\ \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{LM} &= \dots ; \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BI} = \dots ; \overrightarrow{KL} + \overrightarrow{KJ} = \dots ; \overrightarrow{DJ} + \overrightarrow{QN} = \dots \end{aligned}$$

2°) Compléter :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{AM} &= \dots \overrightarrow{N}, \overrightarrow{BM} + \dots = \overrightarrow{BD}, \\ \dots + \overrightarrow{IM} &= \overrightarrow{PL}, \overrightarrow{D} \dots + \dots \overrightarrow{O} = \overrightarrow{CB}. \end{aligned}$$

3°) Compléter par le nombre qui convient ;

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CP} &= \dots \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BO} = \dots \overrightarrow{BQ}, \overrightarrow{AP} = \dots \overrightarrow{AO}, \overrightarrow{CA} = \dots \\ \overrightarrow{CM}, \overrightarrow{DQ} &= \dots \overrightarrow{BO}. \end{aligned}$$



6. Dans une base $(\vec{i}, \vec{j})$ de $\mathcal{V}$, soit $\vec{u} \begin{pmatrix} 6 \\ -7 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$, calculer $\det(\vec{u}, \vec{v})$.

7. Dans une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$ de $\mathcal{V}$ on donne les deux vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -12 \\ 21 \end{pmatrix}$.

Vérifier que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

8. Dans une base $(\vec{i}, \vec{j})$ de $\mathcal{V}$, on donne les deux vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{v} \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

1°) Montrer que $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base de $\mathcal{V}$

2°) Donner les coordonnées de $\vec{i}$ et $\vec{j}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$

3°) Donner les coordonnées de $\vec{w}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$

9. On considère un triangle ABC et les points D, E, F et G tels que ; et G milieu de $\overline{CD} = \overline{AB}$; $\overline{EA} + \overline{EB} = \vec{0}$;

$$\overline{BF} = \frac{1}{2} \overline{BC} \text{ et } G \text{ milieu de } [BD].$$

1) Faire une figure.

2) Montrer que $EBGF$ est un parallélogramme.

10. ABC est un triangle. Placer les points M et N tels que

$$\overline{BM} = \frac{1}{3} \overline{BA} \text{ et } \overline{BN} = 3\overline{BC}$$

Montrer que $(MC) // (AN)$

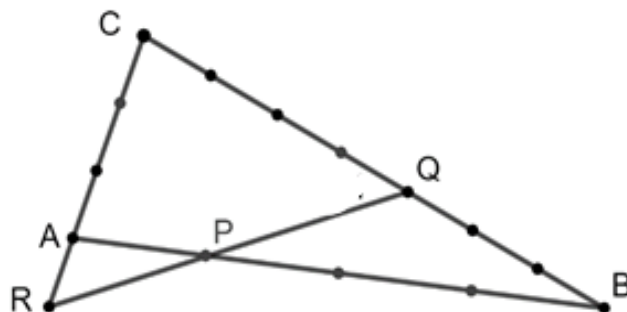
11. $ABCD$ est un parallélogramme. Construire les points

$$M, N, Q \text{ et } P \text{ définis par } \overline{AM} = \frac{3}{5} \overline{AB} ; \overline{BN} = \frac{3}{5} \overline{BC},$$

$$\overline{CP} = \frac{3}{5} \overline{CD} \text{ et } \overline{DQ} = \frac{3}{5} \overline{DA}.$$

Montrer que $MNPQ$ est un parallélogramme.

12. Sur la figure ci-dessous, ABC est un triangle ; P est un point de (AB) , Q est un point de (BC) et R est un point de (AC) disposés comme sur le dessin. (Les graduations sur les droites sont régulières).



1) Donner les valeurs des réels x, y et z tels que :

$$\overline{AP} = x \cdot \overline{AB} ; \overline{AR} = y \cdot \overline{AC} \text{ et } \overline{BQ} = z \cdot \overline{BC}.$$

2) Exprimer $\overline{PR}$ en fonction de $\overline{AB}$ et $\overline{AC}$.

$$3) \text{ Démontrer que } \overline{PQ} = \frac{9}{28} \overline{AB} + \frac{3}{7} \overline{AC}.$$

Chapitre 4 GEOMETRIE ANALYTIQUE

1) Coordonnées d'un vecteur dans une base

Etant donné une base vectorielle $(\vec{u}, \vec{v})$ de $\mathcal{V}$ et un vecteur $\vec{w}$, il existe un seul couple (x, y) de réels appelés coordonnées de $\vec{w}$ tels que ; $\vec{w} = x \cdot \vec{u} + y \cdot \vec{v}$.

Les deux réels x et y sont les coordonnées ou composantes du vecteur $\vec{w}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$ et on note ; $\vec{w} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ou

$$\vec{w} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{(\vec{u}, \vec{v})} \text{ ou } \vec{w}(x, y) \text{ ou } \vec{w} \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix}$$

Propriétés

Dans une base $(\vec{i}, \vec{j})$ de $\mathcal{V}$, soit $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ des vecteurs de $\mathcal{V}$, et α et β deux réels, on a les propriétés suivantes :

$$\boxtimes \vec{i} = 1 \cdot \vec{i} + 0 \cdot \vec{j} \Leftrightarrow \vec{i} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} ;$$

$$\boxtimes \vec{j} = 0 \cdot \vec{i} + 1 \cdot \vec{j} \Leftrightarrow \vec{j} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} ;$$

$$\boxtimes -\vec{i} = -1 \cdot \vec{i} + 0 \cdot \vec{j} \Leftrightarrow -\vec{i} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} ;$$

$$\boxtimes -\vec{j} = 0 \cdot \vec{i} - 1 \cdot \vec{j} \Leftrightarrow -\vec{j} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} ;$$

$$\boxtimes \vec{0} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow x = 0 \text{ et } y = 0 ;$$

$$\boxtimes \vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow x = x' \text{ et } y = y' ;$$

$$\boxtimes -\vec{u} \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix} ;$$

$$\boxtimes \vec{u} + \vec{v} \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix} ;$$

$$\boxtimes \alpha \vec{u} \begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \end{pmatrix} ;$$

$$\boxtimes \alpha \vec{u} + \beta \vec{v} \begin{pmatrix} \alpha x + \beta x' \\ \alpha y + \beta y' \end{pmatrix}.$$

2) Déterminant de deux vecteurs

Définition

Dans une base $(\vec{i}, \vec{j})$ de $\mathcal{V}$, on appelle déterminant de deux vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ et on note $\det(\vec{u}, \vec{v})$ le réel défini par ;

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y.$$

Exemple 1

Dans une base $(\vec{i}, \vec{j})$ de $\mathcal{V}$, soit $\vec{u} \begin{pmatrix} 6 \\ -7 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$, calculer $\det(\vec{u}, \vec{v})$.

Solution

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} 6 & -5 \\ -7 & 3 \end{vmatrix} = 6 \times 3 - (-7) \times (-5) = 18 - 35 \Rightarrow \det(\vec{u}, \vec{v}) = -17.$$

Propriété

Deux vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont colinéaires si, et seulement si, $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$.

Exemple 2

Dans une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$ de $\mathcal{V}$, on donne les deux vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -12 \\ 21 \end{pmatrix}$.

Vérifier que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Solution

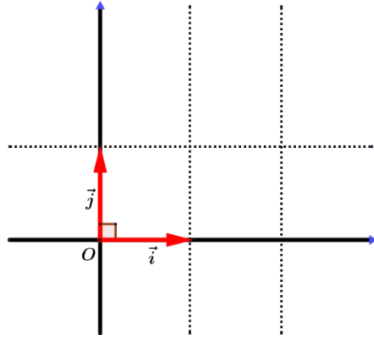
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$.

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} 4 & -12 \\ -7 & 21 \end{vmatrix} = (4 \times 21) - ((-7) \times (-12)) = 84 - 84 = 0 \Rightarrow \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont donc colinéaires.}$$

3) Base orthogonale, base orthonormale

Définition

La base $(\vec{i}, \vec{j})$ est dite orthogonale si les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont orthogonaux (de directions perpendiculaires).



La base $(\vec{i}, \vec{j})$ est dite orthonormée ou orthonormale si les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont orthogonaux et unitaires.

C'est-à-dire ; $\vec{i} \perp \vec{j}$ et $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$.

Norme dans une base orthonormale

Dans une base orthonormale $(\vec{i}, \vec{j})$, soit le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ la norme de $\vec{u}$ est alors donné par ; $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

4) Repère du plan

Définition

Soit O un point quelconque du plan. Et soit $(\vec{i}, \vec{j})$ une base de $\mathcal{V}$. Le triplet $(O; \vec{i}, \vec{j})$ est appelé un repère du plan. O est appelé point origine du repère.

Soient A, B et C trois points non alignés. Le triplet $(A; B, C)$ ou $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ forment un repère du plan.

a) Coordonnées d'un point dans un repère

Définition

Le point $M(x, y)$ dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ signifie ; $\overrightarrow{OM} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$; $\Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

Exercice d'application

Soit $ABCD$ un rectangle. On suppose que $AB = 7$ et $BC = 4$. Soient E, F, G et H les points définis par :

$$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{7}\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{BF} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{GD} = \frac{6}{7}\overrightarrow{CD}; \overrightarrow{DH} = \frac{1}{3}\overrightarrow{HA}.$$

Partie I : Outil analytique

1°) Démontrer que $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ est un repère du plan $\mathcal{P}$.

2°) Donner les coordonnées des points A, B, C, D, E, F, G et H dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$.

3°) Donner les composantes des vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{HG}$, puis conclure sur la nature du quadrilatère $EFGH$.

Partie II : Outil vectoriel

1°) Exprimer $\overrightarrow{EF}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

2°) Exprimer $\overrightarrow{HG}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

3°) En déduire la nature du quadrilatère $EFGH$.

Solution

Partie I : Outil analytique

1°) $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ constitue un repère du plan $\mathcal{P}$, si $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ constitue une base de $\mathcal{V}$, ce qui est le cas puisque $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont non nuls et non colinéaires.

2°) Les coordonnées des points dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$:

$$A(0, 0), \quad B(1, 0), \quad C(1, 1), \quad D(0, 1), \\ E\left(\frac{1}{7}, 0\right), \quad F\left(1, \frac{1}{4}\right), \quad G\left(\frac{6}{7}, 1\right), \quad H\left(0, \frac{3}{4}\right)$$

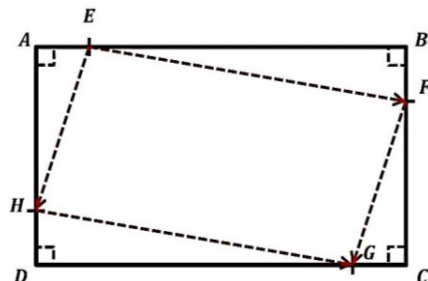
3°) Les composantes des vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{HG}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$:

$$\overrightarrow{EF} \begin{pmatrix} \frac{6}{7} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{HG} \begin{pmatrix} \frac{7}{7} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG}$$

On en conclut que le quadrilatère $EFGH$ est un parallélogramme.

Partie II : Outil vectoriel

$$1^\circ) \overrightarrow{EF} \begin{pmatrix} \frac{3}{4} - \frac{1}{6} \\ \frac{1}{12} - 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{EF} \begin{pmatrix} \frac{7}{12} \\ \frac{1}{12} \end{pmatrix}$$



$$2^\circ) \overrightarrow{HG} \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} - \left(-\frac{3}{4}\right) \\ 1 - \frac{3}{4} \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{HG} \begin{pmatrix} \frac{7}{12} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

3°) Donc $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG}$ Le quadrilatère $EFGH$ est un parallélogramme.

Remarque

Les trois points A, B et C sont alignés si, et seulement si ; $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0$.

b) Coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$

Soit $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ deux points donnés dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont données dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ par l'expression ; $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$.

Exemple 3

Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, sont donnés les points $A(-4, 6)$ et $B(1, -5)$. Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Solution

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - (-4) \\ -5 - 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 5 \\ -11 \end{pmatrix}.$$

c) Coordonnées du milieu I d'un segment $[AB]$

Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, soit $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ et I est le milieu de $[AB]$, les coordonnées du point I sont données dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ par l'expression ; $I \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right)$

Exemple 4

Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on donne les points $A(-5, -4)$ et $B(9, -3)$.

Calculer les coordonnées du point I milieu de $[AB]$.

Solution

Les coordonnées du milieu I d'un segment sont données par la relation ;

$$I \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right) = \left(\frac{-5 + 9}{2}, \frac{-4 + (-3)}{2} \right) = \left(\frac{4}{2}, \frac{-7}{2} \right) \Rightarrow I \left(2, \frac{-7}{2} \right)$$

d) Coordonnées du centre de gravité d'un triangle

Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, soit $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ et $C(x_C, y_C)$ et soit G le centre de gravité de ABC , montrer qu'alors les coordonnées du point G sont données dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ par l'expression ; $G \left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \right)$

Exemple 5

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ on donne les points $A(-4, 12)$, $B(-9, -5)$ et $C(6, 11)$.

Calculer les coordonnées du point G centre de gravité du triangle ABC .

Solution

Les coordonnées du point G sont données par la formule ;

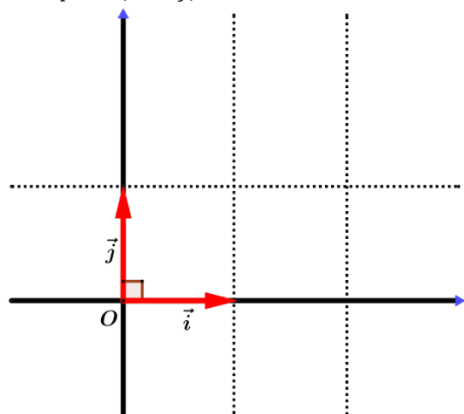
$$\begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_G = \frac{(-4) + (-9) + 6}{3} = -\frac{7}{3} \\ y_G = \frac{12 + (-5) + 11}{3} = \frac{18}{3} \end{cases} \Rightarrow G \left(-\frac{7}{3}, \frac{18}{3} \right).$$

e) Repère orthogonal, repère orthonormé

Le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ est dit orthogonal si la base $(\vec{i}, \vec{j})$ est orthogonale.

Soit O est un point quelconque du plan $\mathcal{P}$ et $(\vec{i}, \vec{j})$ une base de $\mathcal{V}$.

Le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ est dit orthonormé ou orthonormal si la base $(\vec{i}, \vec{j})$ est orthonormale.



f) Distance entre deux points A et B

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, soit deux points $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$, la distance entre A et B est donnée par l'expression ; $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

Exemple 6

Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ de $\mathcal{V}$ soit les points $A(-13, 4)$ et $B(-7, 9)$, calculer AB.

Solution

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{((-7) - (-13))^2 + (9 - 4)^2} = \sqrt{6^2 + 5^2} = \sqrt{36 + 25} \Rightarrow AB = \sqrt{61}$$

g) Vecteurs orthogonaux dans une base

Dans une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$, soit les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si ; $xx' + yy' = 0$.

Exemple 7

Dans une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$ de $\mathcal{V}$ on donne les deux vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} -12 \\ -6 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 5 \\ -10 \end{pmatrix}$. Montrer que $\vec{u} \perp \vec{v}$.

Solution

$\vec{u} \perp \vec{v}$ si $xx' + yy' = 0$. $-12 \times 5 + (-6) \times (-10) = -60 + 60 = 0$. Donc, $\vec{u} \perp \vec{v}$.

5) Droites

a) Vecteur directeur

Définition

Soit une droite (D) , tout vecteur non nul ayant la direction de (D) , est un vecteur directeur de (D) .

b) Droites parallèles, droites perpendiculaires

Soit deux droite (D) et (D') de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

$(D) // (D')$ si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

$(D) \perp (D')$ si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

c) Point appartenant à une droite

Soit (D) une droite de vecteur directeur $\vec{u}$ et soit A un point de (D) , $M \in (D)$ si, et seulement si $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

Soient A et B deux points distincts du plan ;

$$M \in [AB] \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB} ; k \in [0, 1].$$

$$M \in (AB) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB} ; k \in \mathbb{R}.$$

$$M \in [AB) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB} ; k \in \mathbb{R}_+.$$

d) Equation cartésienne d'une droite dans un repère

(D) est une droite si, et seulement si, elle admet une équation cartésienne dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, de la forme : $ax + by + c = 0$; avec a, b et c des réels tels que $(a, b) \neq (0, 0)$.

Exemple 8

Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, soit la droite (D) passant par le point $A(6, -7)$ et de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Donner une équation cartésienne de (D) .

Solution

$M(x, y)$ est un point quelconque de (D) , signifie que $\overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x-6 \\ y+7 \end{pmatrix}$ et $\vec{u} \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ sont colinéaires ; donc

$$\det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) = \begin{vmatrix} x-6 & -3 \\ y+7 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow 4(x-6) + 3(y+7) = 0$$

$$\Rightarrow 4x - 24 + 3y + 21 = 0 \Rightarrow 4x + 3y - 3 = 0 \Rightarrow (D): 4x + 3y - 3 = 0.$$

Exemple 9

Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, soit la droite (D) passant par les points $A(5, 7)$ et $B(-6, 9)$. Donner une équation cartésienne de (D) .

Solution

$M(x, y)$ est un point général de (D) , signifie que ; $\overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x-5 \\ y-7 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -11 \\ 2 \end{pmatrix}$ sont colinéaires

$$\Rightarrow 2(x-5) + 11(y-7) = 0$$

$$\Rightarrow 2x - 10 + 11y - 77 = 0 \Rightarrow D: 2x + 11y - 87 = 0.$$

e) Coordonnées du vecteur directeur d'une droite à partir de son équation cartésienne

La droite $(D) : ax + by + c = 0$ a pour vecteur directeur ; $\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.

Exemple 10

La droite $(\Delta) : 5x + 6y - 1 = 0$ a pour vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \end{pmatrix}$.

f) Forme réduite de l'équation d'une droite

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, l'équation réduite d'une droite est de la forme ; $(D) : y = mx + p$.

- m est appelé coefficient directeur de (D) .
- p est appelé ordonnée à l'origine.
- $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (D) .

g) Propriété

Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, soit deux droites d'équations réduites ; $\begin{cases} (D) : y = mx + p \\ (D') : y = m'x + p' \end{cases}$

- $(D) // (D')$ si, et seulement si ; $m = m'$.
- $(D) \perp (D')$ si, et seulement si ; $m \cdot m' = -1$.

Exemple 11

Dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on donne les équations cartésiennes des deux droites ; $(D) : 4x - 2y + 6 = 0$ et $(D') : x + 2y - 4 = 0$.

1°) Donner les formes réduites des équations des deux droites ;

2°) Donner les coefficients directeurs de ces deux droites ;

3°) En déduire les positions relatives des deux droites ;

4°) Soit (D'') une troisième droite d'équation réduite : $(D'') : y = -\frac{1}{2}x - 2$.

Montrer que $(D') // (D'')$;

5°) Dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, représenter cette situation.

Solution

1°) $(D) : 4x - 2y + 6 = 0 \Rightarrow 2y = 4x + 6$

$$\Rightarrow y = \frac{4x + 6}{2} = \frac{4x}{2} + \frac{6}{2} = 2x + 3$$

$$\Rightarrow (D) : y = 2x + 3$$

$(D') : x + 2y - 4 = 0 \Rightarrow 2y = -x + 4$

$$\Rightarrow y = \frac{-x + 4}{2} = \frac{-x}{2} + \frac{4}{2} = -\frac{1}{2}x + 2$$

$$\Rightarrow (D') : y = -\frac{1}{2}x + 2$$

2°) Les coefficients directeurs de (D) et (D') sont : $m = 2$; $m' = -\frac{1}{2}$

3°) On a ; $m \times m' = 2 \times -\frac{1}{2} = -1$

$$\Rightarrow (D) \perp (D')$$

4°) $(D'') : y = -\frac{1}{2}x - 2 \Rightarrow m'' = -\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow m' = m'' = -\frac{1}{2} \Rightarrow (D') // (D'')$$

5°) Représentation de la situation

La droite (D) a pour vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et passe par le point $A(0, 3)$. La droite (D') a pour vecteur directeur $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ -0,5 \end{pmatrix}$ et passe par le point $B(0, 2)$.

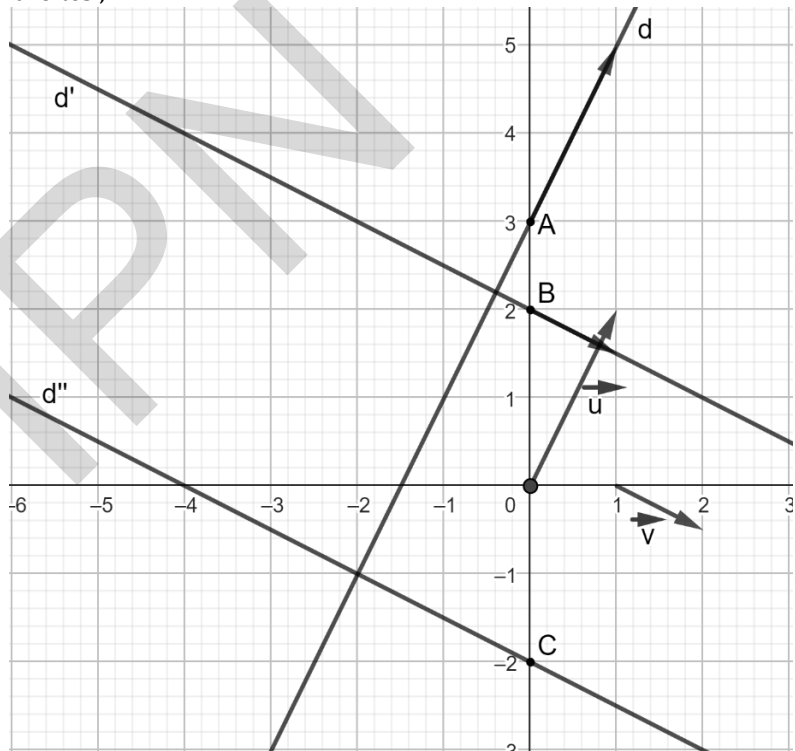
La droite (D'') a pour vecteur directeur $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ -0,5 \end{pmatrix}$ et passe par le point $C(0, -2)$.

i) Représentation paramétrique d'une droite

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ la droite (D) passant par le point $A(x_0, y_0)$ et de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Le point

$M(x, y)$ appartient à (D) si, et seulement si il existe un réel t tel que ; $\overrightarrow{AM} = t \cdot \vec{u} \Rightarrow \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} at \\ bt \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - x_0 = at \\ y - y_0 = bt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}$$



Le système $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases} t \in \mathbb{R}$ est appelé une représentation paramétrique de la droite (D) passant par le point $A(x_0, y_0)$ et de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

Exemple 12

Soit la droite $D(A; \vec{u})$ tels que $A(-5, 7)$ et $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$, donner une représentation paramétrique de D .

Solution

Soit le paramètre $t \in \mathbb{R}$ on a la représentation paramétrique de D : $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases} ; t \in \mathbb{R} \Rightarrow D: \begin{cases} x = -5 + 2t \\ y = 7 - 4t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$

j) Le vecteur normal

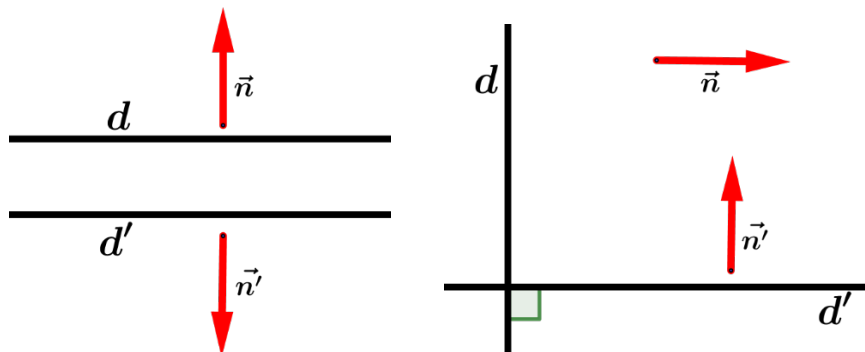
Définition

Soit une droite (D) . On appelle un vecteur normal à (D) tout vecteur non nul dont la direction est perpendiculaire à (D) .

a- Propriétés

Soit (D) et (D') deux droites de vecteurs normaux respectifs $\vec{n}$ et $\vec{n}'$;

- $(D) // (D')$ si, et seulement si, $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont colinéaires.
- $(D) \perp (D')$ si, et seulement si, $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont orthogonaux.



b- Propriété

Le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, soit (D) une droite de vecteur normal $\vec{n}$, et soit A un point de (D) , alors ; Un point $M \in (D)$ si, et seulement si $\vec{AM}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux.

Remarque

Le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, la droite $(D) : ax + by + c = 0$ a pour vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

Exemple 13

Dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, soit les droites d'équations cartésiennes :

$$(D) : -4x - 7y + 3 = 0 ; (D') : 12x + 21y - 5 = 0 ; (D'') : 7x - 4y + 1 = 0.$$

1°) Donner les vecteurs $\vec{n}$, $\vec{n}'$ et $\vec{n}''$ normaux respectivement aux droites (D) , (D') et (D'')

2°) A partir de ces vecteurs normaux montrer que $(D) // (D')$ et que $(D) \perp (D'')$.

Solution

$$\vec{n} \begin{pmatrix} -4 \\ -7 \end{pmatrix} ; \vec{n}' \begin{pmatrix} 12 \\ 21 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{n}'' \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \end{pmatrix}$$

On a ; $(-4) \times 21 - (-7) \times 12 = 84 - 84 = 0 \Rightarrow \vec{n}; \vec{n}'$ sont colinéaires, donc $(D) // (D')$.

On a ; $(-4) \times 7 + (-7) \times (-4) = -28 + 28 = 0 \Rightarrow \vec{n}; \vec{n}''$ sont de directions orthogonales, donc $(D) \perp (D'')$.

6) Le cercle dans le plan

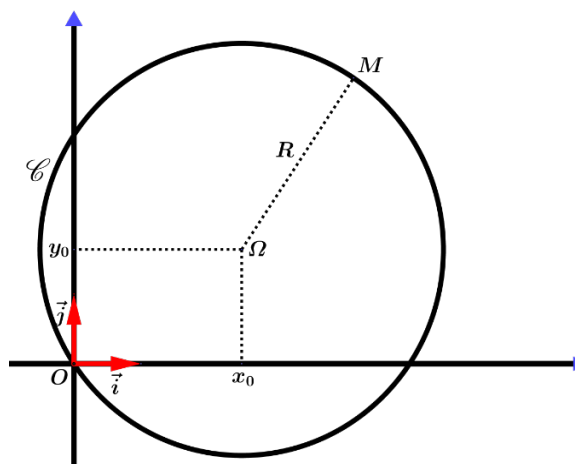
Le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Soit $\Omega(x_0, y_0)$ un point donné, et soit R un nombre réel positif donné. Une équation cartésienne de cercle $\mathcal{C}$ de centre Ω et de rayon R est : $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$.

✧ $\mathcal{C} : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$ est le cercle de centre $\Omega(x_0, y_0)$ et de rayon R .

✧ $\mathcal{C} : x^2 + y^2 = R^2$ est le cercle de centre l'origine $O(0, 0)$ et de rayon R .

✧ $\mathcal{C} : x^2 + y^2 = 1$ est le cercle de centre l'origine $O(0, 0)$ et de rayon 1.



Exemple 14

1) Soit $(\vec{i}; \vec{j})$ une base de $\mathcal{V}$.

Soit $\vec{u} = 2\vec{i}$ et $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j}$.

a) Déterminer les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans la base $(\vec{i}; \vec{j})$.

b) Calculer $\det(\vec{u}; \vec{v})$ dans la base $(\vec{i}; \vec{j})$. $(\vec{u}; \vec{v})$ est-elle une base de $\mathcal{V}$? Justifier.

2) On suppose que $(\vec{i}; \vec{j})$ est une base orthonormale et $\mathcal{V}$ le plan rapporté au repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Soit Γ l'ensemble des points $M(x; y)$ du plan tels que : $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$.

a) Déterminer et construire l'ensemble Γ .

b) Donner une équation cartésienne de Γ dans le repère orthonormal $(\Omega; \vec{i}; \vec{j})$ où $\Omega(1; 0)$ dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Solution

1) a) $\vec{u} = 2\vec{i} = 2\vec{i} + 0\vec{j}$; donc $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j} = 1\vec{i} + 1\vec{j}$; donc $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $\det(\vec{u}; \vec{v}) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2(1) - (0)(1) = 2$. Comme $\det(\vec{u}; \vec{v}) \neq 0$;

donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, par conséquent, $(\vec{u}; \vec{v})$ est une base de $\mathcal{V}$.

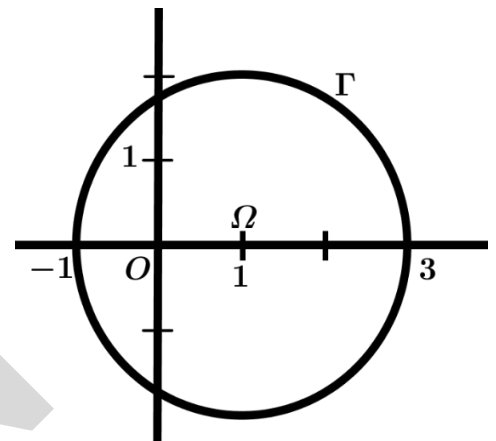
2) a) $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 - 1 + y^2 - 3 = 0$
 $\Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 = 4 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-0)^2 = (2)^2$.

Donc, Γ est le cercle de centre le point $\Omega(1; 0)$ et de rayon 2.

b) $\Gamma : (x-1)^2 + (y-0)^2 = 4$.

$M(x; y)$ dans $(O; \vec{i}; \vec{j})$; $M(X; Y)$ dans $(\Omega; \vec{i}; \vec{j})$; Donc $\begin{cases} X = x - 1 \\ Y = y \end{cases}$;

d'où, l'équation cartésienne de Γ dans le repère $(\Omega; \vec{i}; \vec{j})$ est $X^2 + Y^2 = 4$.



7) Changement d'un repère

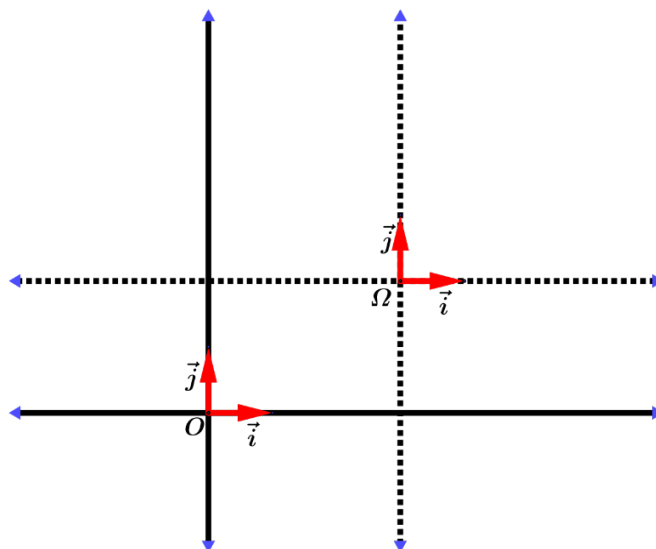
Changement de l'origine seulement

Dans ce repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ de $\mathcal{P}$, soit $\Omega(x_0, y_0)$ un point donné de $\mathcal{P}$.

$M(x, y)$ dans $(O; \vec{i}, \vec{j}) \Leftrightarrow M(X, Y)$ dans $(\Omega; \vec{i}, \vec{j})$ avec ;

$$\begin{cases} X = x - x_0 \\ Y = y - y_0 \end{cases}$$

En effet ; $\vec{\Omega M} = \vec{OM} - \vec{O\Omega}$.



Exercices Généraux

1. Dans une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$ de $\mathcal{V}$ on donne les deux vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} -12 \\ -6 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 5 \\ -10 \end{pmatrix}$.

Montrer que $\vec{u} \perp \vec{v}$.

2. Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, soit la droite (D) passant par le point $A(6, -7)$ et de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Donner une équation cartésienne de (D) .

3. Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, soit la droite (D) passant par les points $A(5, 7)$ et $B(-6, 9)$.

Donner une équation cartésienne de (D) .

4. Soit la droite $(\Delta) : 5x + 6y - 1 = 0$.

Donner son vecteur directeur.

5. Dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on donne les équations cartésiennes des deux droites ;
 $(D) : 4x - 2y + 6 = 0$
 $(D') : x + 2y - 4 = 0$

$(D') : x + 2y - 4 = 0$

1°) Donner les formes réduites des équations des deux droites ;

2°) Donner les coefficients directeurs de ces deux droites ;

3°) En déduire les positions relatives des deux droites ;

4°) Soit (D'') une troisième droite d'équation réduite :

$$(D'') : y = -\frac{1}{2}x - 5. \text{ Montrer que } (D') // (D'') ;$$

5°) Dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, représenter cette situation.

6. Soit la droite $D(A; \vec{u})$ tels que $A(-5, 7)$ et $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$, donner une représentation paramétrique de D .

7. Dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, soit les droites d'équations cartésiennes :

$$(D) : -4x - 7y + 3 = 0 ; \quad (D') : 12x + 21y - 5 = 0 ; \\ (D'') : 7x - 4y + 1 = 0.$$

1°) Donner les vecteurs $\vec{n}$, $\vec{n}'$ et $\vec{n}''$ normaux respectivement aux droites (D) , (D') et (D'')

2°) A partir de ces vecteurs normaux montrer que $(D) // (D')$ et que $(D) \perp (D'')$.

8. Soit $(O; \vec{i}; \vec{j})$ un repère du plan. Soit D la droite d'équation : $2x - 3y + 1 = 0$.

1°) Les points suivants appartiennent-ils à D .

$$A(1; 1) ; B\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right) ; C\left(0; \frac{1}{3}\right) ; D(-1; 3).$$

2°) Donner :

- $\vec{u}$ vecteur directeur de D .
- l'équation réduite de D .
- une droite D' parallèle à D .

9. Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Soit D la droite d'équation $y = 3x - 2$.

1°) Donner :

- le coefficient directeur de D .
- un vecteur directeur de D .

2°) Donner :

a) une équation de la droite D' parallèle à D et passant par le point $A(0; 4)$.

b) une équation de la droite D'' perpendiculaire à D et passant par le point $B(0; 1)$.

3°) Tracer D ; D' et D'' .

10. Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1°) Placer les points $A(3; 2)$; $B(0; 3)$; $C(-2; 0)$.

2°) Déterminer les coordonnées du point D tel que $ABCD$ est un parallélogramme, puis donner les coordonnées de son centre I .

3°) Soit G et H les centres de gravités respectifs des triangles ABC et ACD .

a°) Déterminer les coordonnées de G et H .

b) Montrer que I est milieu de $[GH]$.

11. Le plan est rapporté à un repère orthogonal $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1°) Placer les points suivants :

$$A(2; 0); B(-1; \sqrt{3}) \text{ et } C(-1; -\sqrt{3}).$$

2°) Démontrer que le triangle ABC est équilatéral de centre O .

12. Soit $(O; \vec{i}; \vec{j})$ un repère du plan. Déterminer les équations des droites suivantes puis représente ces droites.

1°) la droite D_1 est la droite (AB) avec $A(1; 2)$; $B(-2; 1)$.

2°) la droite D_2 est la droite (AC) avec $A(1; 2)$; $C(1; -2)$.

3°) la droite D_3 passe par $A(1; 2)$ et est dirigée par $\vec{u} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

4°) la droite D_4 passe par $A(1; 2)$ et est dirigée par $\vec{i}$.

5°) la droite D_5 passe par $A(1; 2)$ et est dirigée par $\vec{j}$.

13. La droite D a pour équation $2x + 3y - 1 = 0$ dans un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Donner, pour D , les précisions suivantes :

- un vecteur directeur
- un vecteur directeur dont la première coordonnée est 1.
- un vecteur directeur dont la seconde coordonnée est -3.
- deux points
- l'équation réduite.
- le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine

14. 1) Soit Γ l'ensemble des points $M(x; y)$ du plan tels que : $x^2 + y^2 - 2x + 8y - 8 = 0$.

a) Déterminer et construire l'ensemble Γ .

b) Donner une équation cartésienne de Γ dans le repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$ où $\Omega(1; -4)$ dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

2) Soit D la droite d'équation $y = x$, Montrer que D coupe Γ en deux points puis calculer ses coordonnées.

Chapitre 5 EQUATIONS ET INEQUATIONS

] Equations

1) Définition

Une équation est une relation d'égalité qui existe entre deux expressions algébriques en fonction de certaines valeurs de variables (*inconnues*)

Il existe des équations à une ou plusieurs inconnues, de degré 1 ou plus.

La résolution d'une équation est la détermination de l'ensemble des solutions (*ici nombres réels*) qui vérifient cette équation.

2) Equations du premier degré à une inconnue

a) Forme générale

Définition

On appelle équation du premier degré à une inconnue, toute équation dont la forme générale est :

$ax + b = 0$ (Où b est un réel et a un réel différent de 0, et x est l'inconnue).

b) Méthode de résolution

La méthode de résolution est la suivante ;

$$ax + b = 0 \Leftrightarrow ax = -b \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a} \quad (a \neq 0).$$

Si	Alors l'ensemble des solutions est
$a = 0$ et $b = 0$	$\mathbb{R}$
$a = 0$ et $b \neq 0$	$\emptyset$
$a \neq 0$	$\left\{-\frac{b}{a}\right\}$

Remarque 1

Une équation du premier degré peut également se présenter sous différentes écritures qui nécessitent d'être développées et simplifiées avant de retrouver l'une des formes générales ; $ax + b = 0$ ou ; $ax = b$ (avec $a \neq 0$).

Exemple 1

Actuellement, un père a 35 ans et son fils 7 ans

a) Dans combien d'années l'âge du père sera-t-il le double de celui de son fils ?

b) Sera-t-il possible que l'âge du père soit égal à 8 fois celui de son fils ?

Solution

On désigne par x le nombre d'années, cherché ($x \in \mathbb{N}$) ; $35 + x$ et $7 + x$ seront les âges respectifs du père et du fils après x années.

a) $35 + x = 2(7 + x) \Leftrightarrow 35 + x = 14 + 2x \Leftrightarrow 2x - x = 35 - 14 \Leftrightarrow x = 21$.

Donc au bout de 21 ans l'âge du père sera le double de celui de son fils.

b) $35 + x = 8(7 + x) \Leftrightarrow 35 + x = 56 + 8x \Leftrightarrow 8x - x = 35 - 56 \Leftrightarrow 7x = -21 \Leftrightarrow x = \frac{-21}{7}$

$x = -3$ (à rejeter car $x \in \mathbb{N}$)

Donc, il est impossible que l'âge du père soit égale à 8 fois celui de son fils.

Exemple 2

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

(A) : $2x + 3 = 5 - 4x$; (B) : $5(3x - 2) = 7(6x + 1)$; (C) : $3(4 - 5x) + 12(2x + 3) = 7(1 - 3x) - 6(x + 2)$.

Solution

(A) : $2x + 3 = 5 - 4x \Rightarrow 2x + 4x = 5 - 3 \Rightarrow 6x = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \Rightarrow S = \left\{\frac{1}{3}\right\}$

(B) : $5(3x - 2) = 7(6x + 1) \Rightarrow 15x - 10 = 42x + 7 \Rightarrow 15x - 42x = 10 + 7 \Rightarrow -27x = 17 \Rightarrow x = \frac{17}{-27} \Rightarrow S = \left\{-\frac{17}{27}\right\}$

(C) : $3(4 - 5x) + 12(2x + 3) = 7(1 - 3x) - 6(x + 2) \Rightarrow 12 - 15x + 24x + 36 = 7 - 21x - 6x - 12$
 $\Rightarrow -15x + 24x + 21x + 6x = 7 - 12 - 12 - 36 \Rightarrow (-15 + 24 + 21 + 6)x = -53$
 $\Rightarrow 36x = -53 \Rightarrow x = \frac{-53}{36} \Rightarrow S = \left\{\frac{-53}{36}\right\}$

3) Equations du second degré à une inconnue (Equations trinômes)

a) Forme générale

Définition

On appelle équation du deuxième degré à une inconnue, toute équation dont la forme générale est :

$ax^2 + bx + c = 0$ (où $a \neq 0$, b et c sont des réels et x est l'inconnue)

b) Cas particuliers

Une équation du deuxième degré peut être aussi de la forme ;

$ax^2 = 0$ (Lorsque $b = 0$ et $c = 0$) ; $ax^2 + c = 0$ (Lorsque $b = 0$) ou $ax^2 + bx = 0$ (Lorsque $c = 0$)

c) Méthodes de résolution

1°) Les cas particuliers

a- Les équations de la forme $ax^2 = 0$ ($a \neq 0$)

Elles ont une seule solution qui est 0, quelle que soit la valeur de a .

b- Les équations de la forme $ax^2 + c = 0$ ($a \neq 0, c \neq 0$)

Elles ont ;

$$\text{Deux solutions : } \begin{cases} x_1 = \sqrt{\frac{-c}{a}} \\ \text{et} \\ x_2 = -\sqrt{\frac{-c}{a}} \end{cases} \quad (\text{lorsque } a \text{ et } c \text{ sont de signes contraires})$$

Elles n'ont pas de solution lorsque a et c ont le même signe.

c- Les équations de la forme $ax^2 + bx = 0$ ($a \neq 0, b \neq 0$)

$$ax^2 + bx = 0 \Leftrightarrow x(ax + b) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ \text{et} \\ x_2 = \frac{-b}{a} \end{cases}$$

Plus généralement, l'équation $x^2 = k$ où k est un réel donné.

Si	Alors l'ensemble des solutions est
$k < 0$	$\emptyset$
$k = 0$	$\{0\}$
$k > 0$	$\{-\sqrt{k}; \sqrt{k}\}$

2°) Le cas général $ax^2 + bx + c = 0$

Pour résoudre cette forme d'équation, on utilise la méthode générale du discriminant Δ qui peut être aussi appliquée aux cas particuliers précédents. Le discriminant de cette équation est soit le nombre Δ , soit le nombre Δ' tel que $\Delta = b^2 - 4ac$ et

$$\Delta' = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac ; \text{ mais d'où vient-il ?}$$

Si on revient à la forme canonique, on a :

$$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow a \left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right] = 0 \quad a \neq 0 \Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0 \Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \begin{cases} \sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}} = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \\ \text{ou} \\ -\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}} = -\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases} \quad (\Delta = b^2 - 4ac) \Rightarrow \begin{cases} \text{si } \Delta > 0 \Rightarrow x = \begin{cases} -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ \text{ou} \\ -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases} \\ \text{si } \Delta = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{2a} \\ \text{si } \Delta < 0 \Rightarrow \text{pas de solution} \end{cases}$$

En conclusion :

$$\begin{cases} \text{Si } \Delta > 0 ; \text{ il existe deux solutions } \begin{cases} x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \\ x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases} \\ \text{Si } \Delta = 0 ; \text{ il existe une solution double } x_0 = \frac{-b}{2a} \\ \text{Si } \Delta < 0 ; \text{ il n'existe aucune solution dans } \mathbb{R} \end{cases}$$

Si	Alors l'ensemble des solutions est
$\Delta < 0$ ($\Delta' < 0$)	$\emptyset$
$\Delta = 0$ ($\Delta' = 0$)	$\left\{\frac{-b}{2a}\right\}$
$\Delta > 0$ ($\Delta' > 0$)	$\{x_1; x_2\}$ avec $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ ou $x_1 = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a}$ et $x_2 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a}$ avec $b' = \frac{b}{2}$

Remarque 2

Dans une équation $ax^2 + bx + c = 0$ (où $a \neq 0$)

Lorsque $a + b + c = 0$, alors l'équation admet comme solutions : $x_1 = 1$ et $x_2 = -\frac{c}{a}$

Remarque 3

Dans une équation $ax^2 + bx + c = 0$, (où $a \neq 0$)

Lorsque $a - b + c = 0$, alors l'équation admet comme solutions : $x_1 = -1$ et $x_2 = -\frac{c}{a}$

Exemple 3

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :

a) $x^2 - 6x + 5 = 0$; b) $x^2 - 2x - 1 = 0$; c) $x^2 - 5x + 6 = 0$;

Solution

Méthode 1

a) $x^2 - 6x + 5 = 0$

Comme $a + b + c = 1 + (-6) + 5 = 0$ alors : $x_1 = 1$ et $x_2 = \frac{5}{1} = 5 \Rightarrow S = \{1; 5\}$

Méthode 2

$x^2 - 6x + 5 = 0 \Leftrightarrow (x - 3)^2 - 9 + 5 = 0 \Leftrightarrow (x - 3)^2 = 4 \Leftrightarrow x - 3 = -\sqrt{4}$ ou $x - 3 = \sqrt{4} \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = 5$
 $S = \{1; 5\}$

Méthode 3

$\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4(1)(5) = 36 - 20 = 16 ; \sqrt{\Delta} = 4 ; x_1 = \frac{6-4}{2}$ et $x_2 = \frac{6+4}{2} \Rightarrow S = \{1; 5\}$

b) $x^2 - 2x - 1 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4(1)(-1) = 8 ; \sqrt{\Delta} = 2\sqrt{2} ; x_1 = \frac{2-2\sqrt{2}}{2}$ et $x_2 = \frac{2+2\sqrt{2}}{2} \Rightarrow S = \{1 - \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2}\}$

c) $x^2 - 5x + 6 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4(1)(6) = 1 ; \sqrt{\Delta} = 1 ; x_1 = \frac{5-1}{2}$ et $x_2 = \frac{5+1}{2} \Rightarrow S = \{2; 3\}$

3°) Somme et produit des racines d'un polynôme

Lorsque l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) admet deux racines x_1 et x_2 , alors ;

$$\begin{cases} s = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} ; p = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} & [1] \\ \text{et} \\ ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) = 0 & [2] \end{cases}$$

Si	Alors
$x_1 ; x_2$ sont les solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$	$s = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} ; p = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$
$a + b + c = 0$	L'ensemble des solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ est $\left\{1 ; \frac{c}{a}\right\}$
$a - b + c = 0$	L'ensemble des solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ est $\left\{-1 ; -\frac{c}{a}\right\}$
$\begin{cases} x + y = S \\ xy = P \end{cases}$ où S et P sont deux réels donnés	Les nombres x et y (s'ils existent) sont les solutions de l'équation du second degré d'inconnue X : $X^2 - SX + P = 0$

Soit l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, tels que $a \neq 0$ et $\Delta > 0$, on a :

$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \Rightarrow x^2 - sx + p = 0$

Exemple 4

Déterminer les dimensions d'un rectangle d'aire 15 et de périmètre 16.

Solution

On désigne par x et y les dimensions, on a : $\begin{cases} x + y = \frac{16}{2} = 8 ; \\ xy = 15 \end{cases}$

Donc x et y sont les solutions de l'équation $t^2 - 8t + 15 = 0$

$\Delta = (-8)^2 - 4(1)(15) = 4 ; \sqrt{\Delta} = 2 ; t_1 = \frac{8-2}{2} = 3$ et $t_2 = \frac{8+2}{2} = 5$, donc les dimensions sont 3 et 5.

Remarque 4

Lorsque l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) admet une seule solution double x_0 , alors :
 $ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$

Lorsque l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'admet aucune solution, alors le trinôme n'est pas factorisable.

Exemple 5

$$\square \quad 2x^2 - 4x + 2 = 2(x - 1)^2$$

$$\square \quad 2x^2 + 4x + 3 = 0 \text{ n'est pas factorisable.}$$

4) Les équations du premier degré à deux inconnues

a) Forme générale

Forme générale : $ax + by + c = 0$ ($a; b$) $\neq (0; 0)$

Exemple 6

$$5x - 3y + 11 = 0; x - 7y = 8; 4x - 9y = 0; x = -3y + 1; y = \frac{2}{9}x - 7\sqrt{3}$$

b) Méthode de résolution

Une équation du premier degré à deux inconnues, a une infinité de solutions.

Pour chaque valeur qu'on donne à x , on obtient une valeur correspondante pour y , et inversement.

Exemple 7

A l'équation $5x - 3y + 11 = 0$, si on donne $x = 4$, on a ; $5 \times 4 - 3y + 11 = 0$

$$\Rightarrow 20 - 3y + 11 = 0 \Rightarrow -3y + 31 = 0 \Rightarrow 3y = 31 \Rightarrow y = \frac{31}{3}$$

Le couple ordonné $\left(4; \frac{31}{3}\right)$ est une solution de l'équation $5x - 3y + 11 = 0$,

5) Système linéaire de deux équations à deux inconnues

a) Forme générale

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 & [1] \\ a'x + b'y + c' = 0 & [2] \end{cases}$$

Où ; a, b, c, a', b' et c' sont des nombres réels.

Définition

On appelle système linéaire de deux équations du premier degré à deux inconnues, toute paire d'équations du premier degré à deux inconnues qu'on se doit de résoudre simultanément.

C'est-à-dire, trouver la solution qui satisfait aux deux équations en même temps.

b) Méthodes de résolution

Il existe quatre méthodes de résolution d'un système linéaire.

a- Méthode de combinaison

b- Méthode de substitution

c- Méthode graphique

d- Méthode des déterminants (Cramer)

Soit le système :

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$

On définit les déterminants suivants : $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b$

Si $\Delta \neq 0$, le système a une solution. Si $\Delta = 0$, le système peut avoir une infinité de solutions, comme il peut n'en avoir aucune.

Si $\Delta \neq 0$, on calcule :

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix} = bc' - b'c \quad \text{et} \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} c & a \\ c' & a' \end{vmatrix} = ca' - c'a$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}} = \frac{bc' - b'c}{ab' - a'b} \quad \text{et}$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} c & a \\ c' & a' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}} = \frac{ca' - c'a}{ab' - a'b}$$

Si	alors
$\Delta \neq 0$	Le système a une solution unique. On la détermine par l'une des méthodes déjà expliquées.
$\Delta = 0$	Le système peut ne pas avoir de solution ou en avoir une infinité

Un système d'équations peut être résolu aussi par méthode graphique lorsque les équations sont relativement simples. La solution simultanée lorsqu'elle existe, est l'intersection des deux droites caractérisées par les équations du système.

Exemple 8

Résoudre par les trois méthodes (combinaison, substitution et déterminant) le système suivant :

$$\begin{cases} 5x + 3y - 4 = 0 & [1] \\ 2x - 7y + 11 = 0 & [2] \end{cases}$$

Solution

a) Méthode de combinaison

$$7 \times [1] + 3 \times [2] \Rightarrow \begin{cases} 35x + 21y - 28 = 0 & [1'] \\ 6x - 21y + 33 = 0 & [2'] \end{cases} \Rightarrow 41x + 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{-5}{41}$$

$$2 \times [1] - 5 \times [2] \Rightarrow \begin{cases} 10x + 6y - 8 = 0 & [1''] \\ -10x + 35y - 55 = 0 & [2''] \end{cases} \Rightarrow 41y - 63 = 0 \Rightarrow y = \frac{63}{41}$$

On peut aussi remplacer avec la valeur de x dans l'une des deux équations pour avoir la valeur de y .

$$5 \times \frac{-5}{41} + 3y - 4 = 0 \Rightarrow \frac{-25}{41} + 3y - 4 = 0 \Rightarrow 3y = \frac{25}{41} + 4 \Rightarrow 3y = \frac{25}{41} + \frac{164}{41} = \frac{189}{41} \Rightarrow y = \frac{189}{41} \div 3 \Rightarrow y = \frac{63}{41}$$

$$\Rightarrow S = \left\{ \left(\frac{-5}{41}; \frac{63}{41} \right) \right\}$$

b) Méthode de substitution

$$\begin{cases} 5x + 3y - 4 = 0 & [1] \\ 2x - 7y + 11 = 0 & [2] \end{cases} \Rightarrow \text{de } [1]: 5x = -3y + 4$$

$$\Rightarrow x = \frac{-3y + 4}{5} \Rightarrow 2 \times \frac{-3y + 4}{5} - 7y + 11 = 0 \Rightarrow \frac{-6y + 8}{5} - \frac{35y}{5} + \frac{55}{5} = 0 \Rightarrow \frac{-6y + 8 - 35y + 55}{5} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{-41y + 63}{5} = 0 \Rightarrow -41y + 63 = 0 \Rightarrow 41y = 63 \Rightarrow y = \frac{63}{41} \Rightarrow \text{de } [1]: 3y = -5x + 4 \Rightarrow y = \frac{-5x + 4}{3}$$

$$\text{de } [2] \Rightarrow 2x - 7 \times \frac{-5x + 4}{3} + 11 = 0 \Rightarrow \frac{6x}{3} - \frac{-35x + 28}{3} + \frac{33}{3} = 0 \Rightarrow \frac{6x + 35x - 28 + 33}{3} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{41x + 5}{3} = 0 \Rightarrow 41x + 5 = 0 \Rightarrow 41x = -5 \Rightarrow x = \frac{-5}{41}$$

On pouvait aussi remplacer dans l'expression de x pour avoir sa valeur directement.

$$\Rightarrow x = \frac{-3 \times \frac{63}{41} + 4}{5} \Rightarrow x = \frac{\frac{-189 + 164}{41}}{5} \Rightarrow x = \frac{-25}{41} = \frac{-25}{41} \div 5 = \frac{-25}{41} \times \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-5}{41} \Rightarrow S = \left\{ \left(\frac{-5}{41}; \frac{63}{41} \right) \right\}$$

c) Méthode du déterminant

$$\begin{cases} 5x + 3y - 4 = 0 \\ 2x - 7y + 11 = 0 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & -7 \end{vmatrix} = 5 \times (-7) - 2 \times 3 = -35 - 6 = -41$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -7 & 11 \end{vmatrix} = 3 \times 11 - (-7 \times -4) = 33 - 28 = 5$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} -4 & 5 \\ 11 & 2 \end{vmatrix} = -4 \times 2 - 11 \times 5 = -8 - 55 = -63$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{5}{-41} = \frac{-5}{41}; y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-63}{-41} = \frac{63}{41} \Rightarrow S = \left\{ \left(\frac{-5}{41}; \frac{63}{41} \right) \right\}$$

Exemple 9

Résoudre par la méthode graphique le système :

$$\begin{cases} 3x + 4y - 10 = 0 \\ 2x + y - 5 = 0 \end{cases}$$

Il suffit de remarquer que la solution simultanée du système, ce sont les coordonnées du point d'intersection des deux droites (D) et (D') d'équations.

$(D) : 3x + 4y - 10 = 0$ et $(D') : 2x + y - 5 = 0$, point dont les coordonnées $(x_0 ; y_0)$ vérifient les deux équations à la fois. On pose : $y_0 = \frac{-3x_0 + 10}{4}$ et

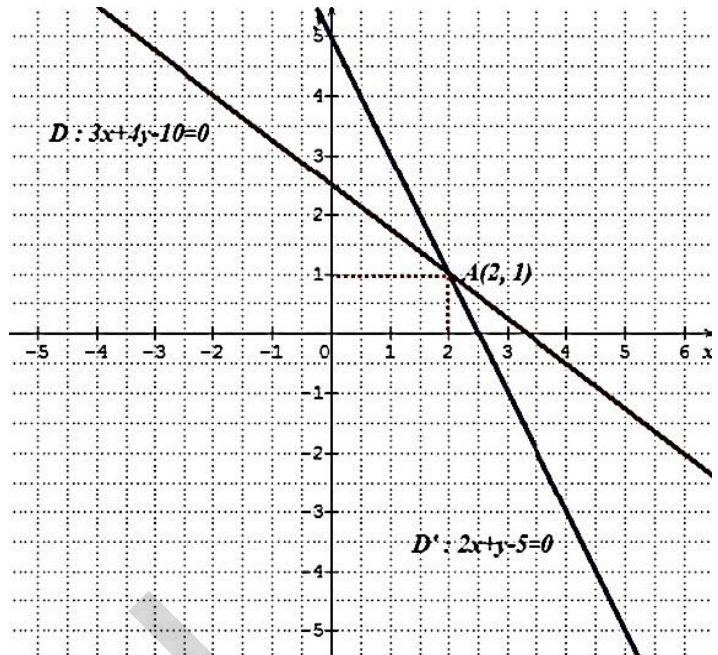
$$y_0 = -2x_0 + 5$$

En égalisant y_0 avec y_0 on obtient

$$\frac{-3x_0 + 10}{4} = -2x_0 + 5 \Rightarrow x_0 = 2$$

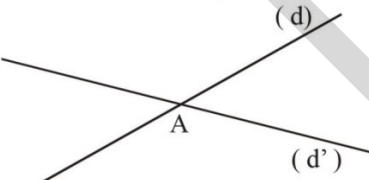
En remplaçant dans l'une des deux équations, on obtient $y_0 = 1$

En représentant ces deux équations de droite dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on remarque que les deux droites sont concourantes. Les coordonnées de leur point d'intersection $(x_0 = 2 ; y_0 = 1)$ constituent donc la solution du système.



d- Solutions possibles d'un système linéaire donné Interprétation graphique

Soit (d) et (d') les deux droites d'équations cartésiennes $ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c' = 0$ dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

Si	alors
(d) et (d') sont sécantes ($\Delta \neq 0$) 	Le système a un couple solution unique qui est le couple des coordonnées du point A commun à (d) et (d').
(d) et (d') sont strictement parallèles ($\Delta = 0$). (d) _____ (d') _____ Les droites n'ont pas de points communs	Le système n'a pas de solution.
(d) et (d') sont confondues ($\Delta = 0$). (d) = (d') Les droites ont une infinité de points communs	Le système a une infinité de solution qui sont tous les couples de coordonnées des points de (d) (ou de d').

Exemple 10

On se propose ici de trouver les ensembles de solutions (s'ils existent) des trois systèmes suivants :

I. $\begin{cases} 3x + 5y - 7 = 0 \\ 4x - 6y - 12 = 0 \end{cases}$; II. $\begin{cases} 4x + 2y - 5 = 0 \\ -8x - 4y + 13 = 0 \end{cases}$; III. $\begin{cases} 3x - 5y + 6 = 0 \\ -12x + 20y - 24 = 0 \end{cases}$

On utilisera au choix l'une des méthodes précédentes pour résoudre les systèmes.

$$I. \begin{cases} 3x + 5y - 7 = 0 & [1] \\ 4x - 6y - 12 = 0 & [2] \end{cases}$$

$$6 \times [1] + 5 \times [2] \Rightarrow \begin{cases} 18x + 30y - 42 = 0 & [1'] \\ 20x - 30y - 60 = 0 & [2'] \end{cases} \Rightarrow 38x - 102 = 0 \Rightarrow x = \frac{102}{38} \Rightarrow x = \frac{51}{19}$$

$$3 \times \frac{51}{19} + 5y - 7 = 0 \Rightarrow \frac{153}{19} + 5y - 7 = 0 \Rightarrow 5y + \frac{153}{19} - \frac{133}{19} = 0 \Rightarrow 5y + \frac{20}{19} = 0 \\ \Rightarrow 5y = -\frac{20}{19} \Rightarrow y = -\frac{20}{19} \div 5 \Rightarrow y = -\frac{20}{19} \times \frac{1}{5} \Rightarrow y = -\frac{4}{19} \Rightarrow S \left\{ \left(\frac{51}{19} ; -\frac{4}{19} \right) \right\}$$

Le système a donc une solution unique.

Le système correspond à deux équations de droites concourantes (ayant un point commun).

$$II. \begin{cases} 4x + 2y - 5 = 0 & [1] \\ -8x - 4y + 13 = 0 & [2] \end{cases} \Rightarrow 2 \times [1] + [2] \Rightarrow \begin{cases} 8x + 4y - 10 = 0 & [1'] \\ -8x - 4y + 13 = 0 & [2'] \end{cases} \Rightarrow 3 = 0, \text{ c'est impossible}$$

D'où le système n'a pas de solution, $S = \emptyset$.

Le système correspond à deux équations de droites parallèles (n'ayant aucun point commun).

$$III. \begin{cases} 3x - 5y + 6 = 0 & [1] \\ -12x + 20y - 24 = 0 & [2] \end{cases} \Rightarrow 4 \times [1] + [2] \Rightarrow \begin{cases} 12x - 20y + 24 = 0 & [1'] \\ -12x + 20y - 24 = 0 & [2'] \end{cases} \Rightarrow 0 = 0, \text{ toujours possible.}$$

Le système a une infinité de solutions. Toute solution à la première équation est aussi solution à la deuxième, et inversement.

Le système correspond à deux équations de droites confondues (ayant tous les points communs).

II) Inéquations :

1) Définition

Une **inéquation** est une expression algébrique qui fait intervenir une relation d'inégalité ($<$; $\leq$; $>$ ou $\geq$) et une ou plusieurs variables (inconnues) de degré 1 ou plus.

La résolution d'une inéquation est la détermination de l'ensemble des nombres réels vérifiant cette inéquation.

2) Les inéquations du premier degré à une inconnue

a) Formes générales

La forme générale d'une inéquation du premier degré à une inconnue développée et réduite est :

$$ax + b < 0 ; ax + b \leq 0 ; ax + b > 0 \text{ ou } ax + b \geq 0 \quad (a \neq 0)$$

b) Méthode de résolution :

$$ax + b < 0 \Rightarrow ax < -b \Rightarrow \begin{cases} x < \frac{-b}{a} \text{ si } a > 0 \\ x > \frac{-b}{a} \text{ si } a < 0 \end{cases}$$

On a déjà vu le tableau de l'étude des signes du polynôme $P(x) = ax + b$ il est ainsi :

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax + b$	$-\text{signe de } a$	0	$\text{signe de } a$

$$\text{Si } a > 0 \Rightarrow S = \left] -\infty ; \frac{-b}{a} \right[. \quad \text{Si } a < 0 \Rightarrow S = \left] \frac{-b}{a} ; +\infty \right[$$

Exemple 11

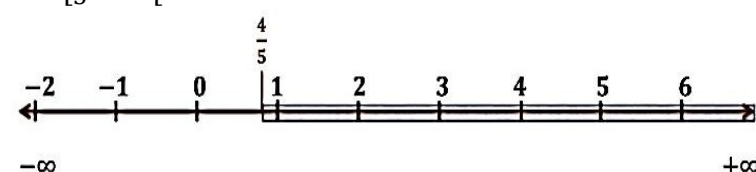
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $5x - 4 \geq 0$

Solution

$5x - 4 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{4}{5}$. Le tableau de l'étude des signes donne ;

x	$-\infty$	$\frac{4}{5}$	$+\infty$
$5x - 4$	$-$	0	$+$

$$S = \left[\frac{4}{5} ; +\infty \right[$$



Exemple 12Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $-33 \leq 4x + 7 < 27$ **Solution**

$$\begin{aligned} -33 \leq 4x + 7 < 27 &\Rightarrow -33 - 7 \leq 4x + 7 - 7 < 27 - 7 \Rightarrow -40 \leq 4x < 20 \\ &\Rightarrow -40 \div 4 \leq 4x \div 4 < 20 \div 4 \Rightarrow -10 \leq x < 5 \Rightarrow \mathcal{S} = \{x / -10 \leq x < 5\} = [-10; 5[\end{aligned}$$

3) Les inéquations du deuxième degré à une inconnue**a) Formes générales**

La forme générale d'une inéquation du deuxième degré à une inconnue développée et réduite est ;

$$ax^2 + bx + c \geq 0 \text{ (ou } > \text{ ou } \leq \text{ ou } <) \text{ Avec } (a \neq 0)$$

Cas particuliers

1) $ax^2 < 0$ (ou $>$ ou $\leq$ ou $\geq$) Avec $(a \neq 0)$

2) $ax^2 + c > 0$ (ou $<$ ou $\leq$ ou $\geq$) Avec $(a \neq 0)$

3) $ax^2 + bx \leq 0$ (ou $>$ ou $<$ ou $\geq$) Avec $(a \neq 0)$

b) Méthode de résolution**a-** Tableau de l'étude des signes du polynôme : $P(x) = ax^2 + c$ 1°) Si a et c sont du même signe

x	$-\infty$	$+\infty$
$ax^2 + c$	<i>signe de a</i>	

2°) Si a et c sont de signes contraires

x	$-\infty$	$-\sqrt{\frac{-c}{a}}$	$\sqrt{\frac{-c}{a}}$	$+\infty$	
$ax^2 + c$	<i>signe de a</i>	0	$-\text{signe } a$	0	<i>signe de a</i>

b- Tableau de l'étude des signes du polynôme : $p(x) = ax^2 + bx$ 1°) Si $\frac{-b}{a} < 0$

x	$-\infty$	$\frac{-b}{a}$	0	$+\infty$	
x	$-$	$ $	$-$	0	$+$
$ax + b$	$-\text{signe de } a$	0	$\text{signe } a$	$ $	$\text{signe de } a$
$ax^2 + bx$	$\text{signe de } a$	0	$-\text{signe } a$	0	$\text{signe de } a$

2°) Si $\frac{-b}{a} > 0$

x	$-\infty$	0	$\frac{-b}{a}$	$+\infty$	
x	$-$	0	$+$	$ $	$+$
$ax + b$	$-\text{signe de } a$	$ $	$-\text{signe } a$	0	$\text{signe de } a$
$ax^2 + bx$	$\text{signe de } a$	0	$-\text{signe } a$	0	$\text{signe de } a$

c- Tableau de l'étude des signes du polynôme : $p(x) = ax^2 + bx + c$

1° Si $\Delta > 0$	x	$-\infty$	$\inf(x_1; x_2)$	$\sup(x_1; x_2)$	$+\infty$
	$ax^2 + bx + c$	$\text{signe de } a \quad 0 \quad -\text{signe } a \quad 0 \quad \text{signe de } a$			
2° Si $\Delta = 0$	x	$-\infty$	x_0	$+\infty$	
	$ax^2 + bx + c$	$\text{signe de } a$		0	$\text{signe de } a$
3° Si $\Delta < 0$	x	$-\infty$	$+\infty$		
	$ax^2 + bx + c$	$\text{signe de } a$			

Exemple 13Soit l'inéquation : $2x^2 - 5x + 2 \leq 0$

Chercher l'ensemble des solutions de l'inéquation.

Solution

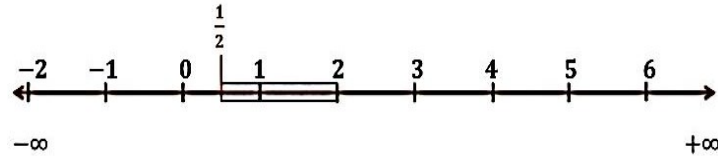
Cherchons d'abord à résoudre l'équation associée à l'inéquation : $2x^2 - 5x + 2 = 0$

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \times 2 \times 2 = 25 - 16 = 9 \Rightarrow \Delta > 0 \text{ et } \sqrt{\Delta} = 3 \Rightarrow x_1 = \frac{5-3}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \text{ et } x_2 = \frac{5+3}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

Le tableau de l'étude des signes donne :

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	2	$+\infty$	
$2x^2 - 5x + 2$	$+$	0	$-$	0	$+$

L'ensemble des solutions de l'inéquation : $2x^2 - 5x + 2 \leq 0$ est donc $\mathcal{S} = \left[\frac{1}{2}; 2\right]$

**Exemple 14**

Soit l'inéquation : $-2x^2 + 6x - \frac{9}{2} > 0$ Chercher l'ensemble des solutions de l'inéquation.

Solution

Cherchons d'abord à résoudre l'équation associée à l'inéquation :

$$-2x^2 + 6x - \frac{9}{2} = 0 \Rightarrow \Delta = 6^2 - 4 \times -2 \times \frac{-9}{2} = 36 - 36 = 0 \Rightarrow \Delta = 0 \Rightarrow x = \frac{-6}{4} = -\frac{3}{2}$$

Le tableau de l'étude des signes donne :

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	$+\infty$
$-2x^2 + 6x - \frac{9}{2}$		$-$	0

L'ensemble des solutions de l'inéquation :

$$-2x^2 + 6x - \frac{9}{2} > 0 \text{ est donc } \mathcal{S} = \emptyset$$

Exemple 15

Soit l'inéquation : $3x^2 - 4x + 12 \geq 0$

Chercher l'ensemble des solutions de l'inéquation.

Solution

Cherchons d'abord à résoudre l'équation associée à l'inéquation :

$$3x^2 - 4x + 12 = 0 \Rightarrow \Delta = (-4)^2 - 4 \times 3 \times 12 = 16 - 144 = -128 \Rightarrow \Delta < 0 \text{ pas de solution dans } \mathbb{R}$$

Le tableau de l'étude des signes donne :

x	$-\infty$	$+\infty$
$3x^2 - 4x + 12$		$+$

L'ensemble de solutions de l'inéquation : $3x^2 - 4x + 12 > 0$ est donc $\mathcal{S} = \mathbb{R}$

**4) Inéquation produit – Inéquation quotient****a) Inéquation produit****Définition**

On appelle inéquation produit, toute inéquation composée d'un produit de deux polynômes ou plus.

Méthode de résolution

Pour résoudre une inéquation produite, on commence par résoudre son équation associée. En fonction des racines obtenues pour l'équation associée, on dresse ensuite un tableau d'étude de signes.

Le résultat de l'étude des signes nous permet alors de déterminer le ou les intervalle(s) de réels qui sont solution de l'inéquation.

b) Inéquation quotient**Définition**

On appelle inéquation rationnelle ou inéquation quotient, toute inéquation caractérisée par un quotient de deux ou plusieurs polynômes.

Méthode de résolution

Pour résoudre une inéquation rationnelle, on commence par résoudre ses équations associées dans le numérateur et dans le dénominateur, en excluant les éventuelles valeurs qui annulent le dénominateur.

En fonction des racines obtenues pour les équations associées, on dresse un tableau d'étude des signes.

Le résultat de l'étude des signes nous permet alors de déterminer le ou les intervalle(s) de réels qui sont solution de l'inéquation.

Exemple 16

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations : 1) $(2x - 1)(x + 1) \geq 0$; 2) $x^2 - 4x + 3 < 0$; 3) $(x^2 + x + 1)(1 - x^2) > 0$.

Solution

1)

x	$-\infty$	-1	$\frac{1}{2}$	$+\infty$	
$2x - 1$	-	-	0	+	
$x + 1$	-	0	+	+	
$(2x - 1)(x + 1)$	+	0	-	0	+

$$S =]-\infty ; -1] \cup [\frac{1}{2} ; +\infty [$$

2)

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$	
$x^2 - 4x + 3$	+	0	-	0	+

$$S =]1 ; 3[.$$

3)

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$x^2 + x + 1$	+	+	+	+	
$1 - x^2$	-	0	+	0	-
$(x^2 + x + 1)(1 - x^2)$	-	0	+	0	-

$$S =]-1 ; 1[.$$

5) Système de deux inéquations à deux inconnues

Méthode de résolution

Pour résoudre un système de deux inéquations à deux inconnues, on utilise la méthode graphique comme expliqué précédemment pour chaque équation. Ensuite, on cherche l'intersection des deux demi-plans solutions.

Exemple 17

Soit l'inéquation : $5x - 3y + 15 \leq 0$

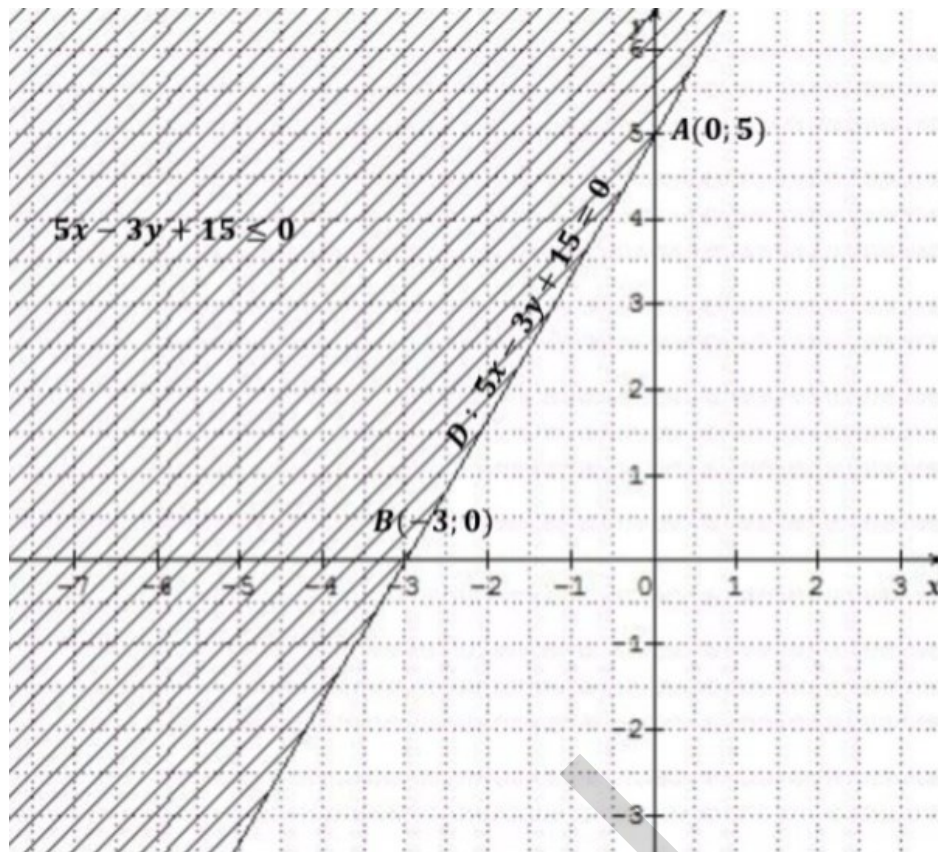
Les coordonnées des points $A(0, 5)$ et $B(-3, 0)$ sont deux solutions de l'équation associée.

Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan, la droite (AB) partage le plan en deux demi-plans.

Pour déterminer celui qui est la solution de l'inéquation, on remplace par les coordonnées de $O(0, 0)$, On a :

$5 \times 0 - 3 \times 0 + 15 = 15$. Donc ; le point O appartient au demi-plan qui n'est pas solution de l'inéquation.

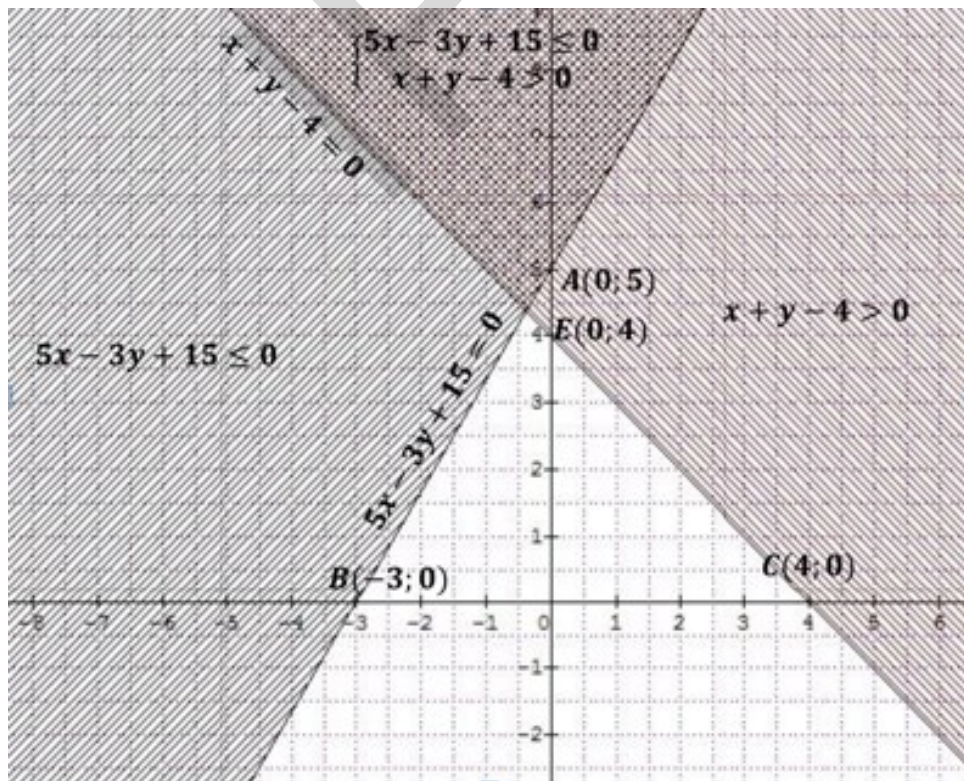
La solution de l'inéquation $5x - 3y + 15 \leq 0$ est le demi-plan fermé de frontière la droite (AB) et ne contenant pas l'origine.



Exemple 18

Soit le système :
$$\begin{cases} 5x - 3y + 15 \leq 0 \\ x + y - 4 > 0 \end{cases}$$

La solution de ce système est la zone du plan doublement hachurée, fermée du côté de la droite (AB) , et ouverte du côté de la droite (CE) .



Exercices Généraux

1. Une personne dépense dans un premier magasin le quart de la somme dont elle dispose.

Dans un second magasin, elle dépense la moitié du reste. Et après avoir ensuite acheté un objet à 300 UM, il lui reste 400 UM. De quelle somme disposait-elle au départ ?

2. Trouver les dimensions d'un champ rectangulaire d'aire 1200 m², sachant que sa longueur dépasse sa largeur de 10 m.

3. Un producteur de spectacle loue une salle à 53170 UM pour organiser un spectacle.

Chaque billet d'entrée est vendu 300 UM. A partir de quel nombre de spectateurs aura-t-il un bénéfice ?

4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$x^2 - 4x + 3 = 0; \quad x^2 + x + 1 = 0; \quad x^2 + 1 = 0;$$

$$x^2 + 3x - 4 = 0; \quad x^2 - 2x - 2 = 0; \quad x^4 - 4x^2 + 3 = 0;$$

$$x^2 - 3x - 4 = 0; \quad x^2 - 1 = 0; \quad x^2 - 2x - 2 = 0;$$

$$x^4 - 4x^2 + 3; \quad x + 3\sqrt{x} + 1 = 0; \quad 2x^2 - x - 1 = 0;$$

$$(x - 1)(x + 3) = 0; \quad (2x + 1)^2 - 3(2x + 1) - 4 = 0;$$

$$1 - 4x^2 = 0; \quad (1 - 2x)^2(1 + x) = 0; \quad x(1 - x^2) = 0.$$

5. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations :

$$x + 1 \geq 0; \quad 2x - 1 \leq 0; \quad \frac{1}{3}x + 1 \geq 0;$$

$$x^2 - 4x + 3 > 0; \quad x^2 + x + 1 < 0$$

$$2x^2 - x - 1 < 0; \quad x^2 - 1 \geq 0;$$

$$(x - 1)(x + 3) \leq 0; \quad (1 - 2x)^2(1 + x) < 0$$

6.1) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$, le système :

$$\begin{cases} 5a + 2b = 26 \\ 2a - 3b = -1 \end{cases}$$

2) Dédire de la question précédente, la résolution, dans $\mathbb{R}^2$, des systèmes suivants :

$$\begin{cases} 5x^2 + 2y^2 = 26 \\ 2x^2 - 3y^2 = -1 \end{cases}; \quad \begin{cases} 5\sqrt{x} + 2\sqrt{y} = 26 \\ 2\sqrt{x} - 3\sqrt{y} = -1 \end{cases}; \quad \begin{cases} \frac{5}{x} + \frac{2}{y} = 26 \\ \frac{2}{x} - \frac{3}{y} = -1 \end{cases}$$

7. Le plan est rapporté à un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$

Déterminer l'intersection des droites (d) et (d') données par leurs équations :

1) $(d) \ 4x + 5y - 1 = 0 \ (d') \ 3x + 4y - 2 = 0$

2) $(d) \ 2x - 10y - 4 = 0 \ (d') \ -3x + 15y + 6 = 0$

3) $(d) \ 4x - 2y - 1 = 0 \ (d') \ y = 2x + 1$

8. Dans chacun des cas suivants, où P est un polynôme de degré 2.

Mettre $P(x)$ sous la forme canonique.

Déterminer les racines éventuelles de P

Etudier le signe de $P(x)$.

1°) $P(x) = x^2 + 2x - 1$ 2°) $P(x) = -x^2 + x - 1$

3°) $P(x) = x^2 - 7x + 6$ 4°) $P(x) = -5x^2 + x + 1$

5°) $P(x) = x^2 + 2x + 2$ 6°) $P(x) = \frac{1}{2}x^2 + 5x - 1$

7°) $P(x) = 3x^2 + 5x - 1$ 8°) $P(x) = 169x^2 + 13x - 1$

9. On donne un polynôme P et un nombre réel a . Dans chacun des cas suivants :

Vérifier que $P(x)$ est factorisable par $x - a$.

Déterminer le quotient de $P(x)$ par $x - a$.

Factoriser, si possible, ce quotient.

Etudier le signe de $P(x)$.

1°) $P(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$ et $a = 2$

2°) $P(x) = -2x^3 + 7x^2 - 12x + 9$ et $a = \frac{3}{2}$.

3°) $P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 9$ et $a = -3$

4°) $P(x) = -3x^3 + 2x^2 + 9x - 6$ et $a = \sqrt{3}$.

10. Développer, simplifier, transposer les inconnues et des valeurs constantes, puis résoudre les équations suivantes :

$$2x + 3 = 5 - 4x; \quad 5(3x - 2) = 7(6x + 1);$$

$$3(4 - 5x) + 12(2x + 3) = 7(1 - 3x) - 6(x + 2).$$

11. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $4x^2 = 0$. b) $2x^2 + 32 = 0$. c) $3x^2 - 27 = 0$

d) $-2x^2 + 8 = 0$. e) $-7x^2 - 21 = 0$. f) $4x^2 + 3x = 0$

12. Chercher les solutions des trois équations suivantes :

a) $3x^2 - 5x - 2 = 0$; b) $x^2 + 2x + 1 = 0$

c) $5x^2 + 3x + 4 = 0$

13. Déterminer deux nombres réels dont la somme est 7 et le produit est 6, puis vérifier le résultat.

14. Trouver les deux nombres réels x et y tels que :

$$x + y = 6 \text{ et } xy = 8$$

15. Trouver deux nombres x et y ayant pour somme 25 et pour produit 144.

16. Résoudre les systèmes homogènes :

$$\begin{cases} x + y = -1 \\ xy = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} x - y = 2 \\ xy = 35 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} = 0 \\ xy = -1 \end{cases}$$

17. Soit le polynôme : $P(x) = 2x^3 - 14x - 12$

1° Calculer $P(-1)$

2° Résoudre l'équation $P(x) = 0$

a) En factorisant $P(x)$

b) Par la méthode euclidienne.

18. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$\frac{3x - 2}{2x + 5} = \frac{2x + 5}{3x - 2}; \quad \frac{9x^2 + 6x}{3x + 2} = -5;$$

$$\frac{-12}{7x - 3} = \frac{5}{2x + 9}; \quad \frac{3x^2 - 2x}{x - 9} = 0.$$

1) Barycentre d'un système de deux points

Physiquement, on appelle barycentre G d'un ensemble de points pesants, le point d'équilibre de cet ensemble de points. Mathématiquement, la notion est étendue à des coefficients qui peuvent être négatifs.

a) Point pondéré

Définition

Soit A un point du plan $\mathcal{P}$, et soit α un nombre réel. La notation $A(\alpha)$ ou $(A; \alpha)$ signifie que le point A est affecté du coefficient α , ou que le point pondéré A est affecté de la masse α .

Exemple 1

$(A, 5)$; $(B, -3)$; $(C, 2)$; $(D, -\frac{3}{4})$; $(E, 0)$; $(F, \sqrt{2})$ sont des points pondérés.

b) Barycentre de deux points

Définition

Soient A et B deux points du plan $\mathcal{P}$. Soient α et β deux nombres réels tels que $\alpha + \beta \neq 0$.

Il existe un point unique G vérifiant $\alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{GB} = \vec{0}$

Le point G est appelé barycentre des deux points A et B affectés respectivement des coefficients α et β .

On peut aussi dire que G est le barycentre du système des deux points pondérés $A(\alpha)$; $B(\beta)$ ou $\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$.

c) Propriété

Le point G est le barycentre de deux points A et B affectés respectivement des deux coefficients α et β si et seulement si $\alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{GB} = \vec{0}$.

d) Notations

G est barycentre de A et B affectés respectivement des deux coefficients α et β se note $G = \text{bar}\{(A; \alpha), (B; \beta)\}$,

ou encore $G = \text{bar}$

A	B
α	β

Exemple 2

Soit $G = \text{bar}$

A	B
3	2

 $\Leftrightarrow 3\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} = \vec{0}$

e) Construction du barycentre G de deux points

$G = \text{bar}$

A	B
α	β

 $\Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta} \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{BG} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \overrightarrow{BA}$

Remarque

Dans le repère $(A; \overrightarrow{AB})$, le point G a pour abscisse $G(\frac{\beta}{\alpha + \beta})$. Dans le repère $(B; \overrightarrow{BA})$, le point G a pour abscisse $G(\frac{\alpha}{\alpha + \beta})$.

Exemple 3

A et B sont deux points distincts. Soit $F = \text{bar}$

A	B
5	7

. Donner l'abscisse du point F dans le repère $(A; \overrightarrow{AB})$.

Solution

$F = \text{bar}$

A	B
5	7

 $\Leftrightarrow \overrightarrow{AF} = \frac{7}{5+7} \overrightarrow{AB} = \frac{7}{12} \overrightarrow{AB} \Rightarrow F(\frac{7}{12})$

Exemple 4

A et B sont deux points distincts. Donner les abscisses des points E , F et G dans le repère $(A; \overrightarrow{AB})$, sachant que ;

$E = \text{bar}$

A	B
4	5

 $F = \text{bar}$

A	B
-10	-6

 $G = \text{bar}$

A	B
-8	1

Solution

$E = \text{bar}$

A	B
4	5

 $\Leftrightarrow \overrightarrow{AE} = \frac{5}{9} \overrightarrow{AB} \Rightarrow E(\frac{5}{9})$

$F = \text{bar}$

A	B
-10	-6

 $\Leftrightarrow \overrightarrow{AF} = \frac{-6}{-10-6} \overrightarrow{AB} = \frac{3}{8} \overrightarrow{AB} \Rightarrow F(\frac{3}{8})$

$G = \text{bar}$

A	B
-8	1

 $\Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{1}{-7} \overrightarrow{AB} \Rightarrow G(-\frac{1}{7})$

Exemple 5

A et B sont deux points distincts. Donner les abscisses des points F , G et H dans le repère $(A; \overrightarrow{AB})$, tels que ;

$F = \text{bar}$

A	B
3	2

 ; $G = \text{bar}$

A	B
-5	4

 ; $H = \text{bar}$

A	B
11	-6

Solution

$F = \text{bar}$

A	B
3	2

 $\Leftrightarrow \overrightarrow{AF} = \frac{2}{5} \overrightarrow{AB} \Rightarrow F(\frac{2}{5})$

$G = \text{bar}$

A	B
-5	4

 $\Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{4}{-1} \overrightarrow{AB} \Rightarrow G(-4)$

$$H = \text{bar} \begin{array}{|c|c|} \hline A & B \\ \hline 11 & -6 \\ \hline \end{array} \Leftrightarrow \overrightarrow{AH} = \frac{-6}{5} \overrightarrow{AB} \Rightarrow H \left(-\frac{6}{5} \right)$$

f) Méthodes de construction du barycentre de deux points

a- Méthode de l'abscisse

$$G = \text{bar} \begin{array}{|c|c|} \hline A & B \\ \hline \alpha & \beta \\ \hline \end{array} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta} \overrightarrow{AB} \Rightarrow G \in (AB), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow G \text{ a pour abscisse } \frac{\beta}{\alpha + \beta} \text{ dans le repère } (A; \overrightarrow{AB})$$

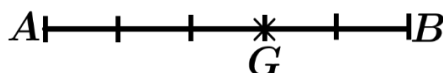
Exemple 6

Construisons le point $G = \text{bar}$

A	B
2	3

Solution

$$\Rightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{3}{2+3} \overrightarrow{AB} = \frac{3}{5} \overrightarrow{AB}$$



b- Méthode du parallélogramme

$$\text{Soit } G = \text{bar} \begin{array}{|c|c|} \hline A & B \\ \hline \alpha & \beta \\ \hline \end{array}$$

et soit P un point du plan $\mathcal{P}$ tel que ; $P \notin (AB)$ on définit les points P_1 et P_2 par ; $\overrightarrow{PP_1} = \alpha \overrightarrow{PA}$ et $\overrightarrow{PP_2} = \beta \overrightarrow{PB}$

Soit S le point tel que $\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{PP_1} + \overrightarrow{PP_2}$ et PP_1SP_2 est un parallélogramme. $\overrightarrow{PS} = \alpha \overrightarrow{PA} + \beta \overrightarrow{PB} = (\alpha + \beta) \overrightarrow{PG} \Rightarrow G \in (PS)$

Or, $G \in (AB) \Rightarrow G = (AB) \cap (PS)$

Exemple 7

Soit $[AB]$ un segment.

1°) Construire le point $G = \text{bar} \begin{array}{|c|c|} \hline A & B \\ \hline 3 & 2 \\ \hline \end{array}$

2°) En utilisant la méthode du parallélogramme, construire le point G

Solution

$$1^\circ) G = \text{bar} \begin{array}{|c|c|} \hline A & B \\ \hline 3 & 2 \\ \hline \end{array} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{2}{5} \overrightarrow{AB}.$$



2°) Soit P un point non situé sur la droite (AB) . P_1 et P_2 les points tels que :

$$\overrightarrow{PP_1} = 3\overrightarrow{PA} \text{ et } \overrightarrow{PP_2} = 2\overrightarrow{PB}.$$

S le point tel que PP_1SP_2 est un parallélogramme. G est le point d'intersection des

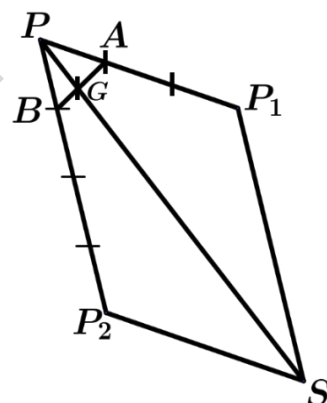
droites (AB) et (PS) .

$$G = \text{bar} \begin{array}{|c|c|} \hline A & B \\ \hline 3 & 2 \\ \hline \end{array}; \text{ donc } G \in (AB).$$

$$\text{Or, } \overrightarrow{PS} = \overrightarrow{PP_1} + \overrightarrow{PP_2} = 3\overrightarrow{PA} + 2\overrightarrow{PB} = 5\overrightarrow{PG}.$$

Donc, le point $G \in (PS)$.

D'où G est le point d'intersection des droites (AB) et (PS) .

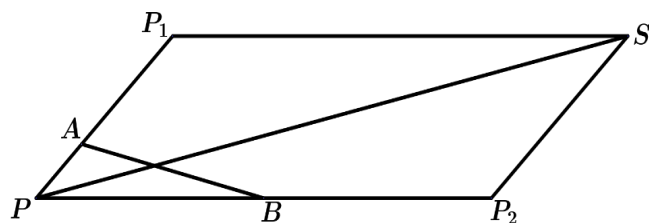


c- Méthode des parallèles

Cette méthode consiste à ;

- Tracer le segment $[AB]$,
- Choisir un vecteur unité $\vec{u}$,
- Sur les droites $d_1(A, \vec{u})$ et $d_2(B, \vec{u})$, tracer les deux vecteurs $\beta \vec{u}$ et $-\alpha \vec{u}$ respectivement à partir des points A et B ,
- Joindre les deux extrémités des deux vecteurs $-\alpha \vec{u}$ et $\beta \vec{u}$, soit P_1 et P_2 leurs extrémités respectives.

Le point de concours des deux droites (AB) et (P_1P_2) est le point G barycentre du système



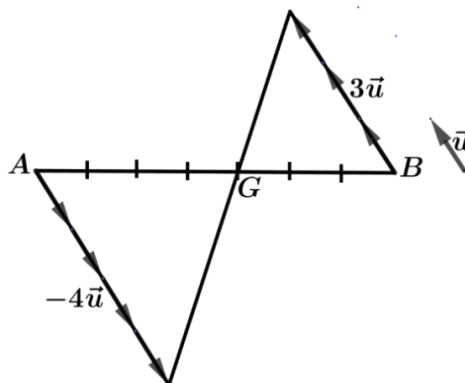
Exemple 8

Construire le point $G = \text{bar}$

A	B
3	4

Solution

Voir figure ci-contre.



g) Existence et unicité de G

Le point $G = \text{bar} \begin{array}{|c|c|} \hline A & B \\ \hline \alpha & \beta \\ \hline \end{array}$ existe si, et seulement si ; $\alpha + \beta \neq 0$.

La relation ; $\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta} \overrightarrow{AB}$ établit l'existence et l'unicité de G .

h) Opérations conservant le barycentre G

Théorème de l'homogénéité (Proportionnalité du barycentre)

En multipliant ou en divisant les coefficients α et β par un même nombre réel non nul, le barycentre G est conservé ;

$$G = \text{bar} \begin{array}{|c|c|} \hline A & B \\ \hline \alpha & \beta \\ \hline \end{array} \Leftrightarrow G = \text{bar} \begin{array}{|c|c|} \hline A & B \\ \hline k \cdot \alpha & k \cdot \beta \\ \hline \end{array} \quad \boxed{1} \Leftrightarrow G = \text{bar} \begin{array}{|c|c|} \hline A & B \\ \hline \frac{\alpha}{k} & \frac{\beta}{k} \\ \hline \end{array} \quad \boxed{2}$$

Exemple 9

$$G = \text{bar} \begin{array}{|c|c|} \hline A & B \\ \hline 3 & 2 \\ \hline \end{array} = \text{bar} \begin{array}{|c|c|} \hline A & B \\ \hline 9 & 6 \\ \hline \end{array} = \text{bar} \begin{array}{|c|c|} \hline A & B \\ \hline \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \hline \end{array}$$

Propriété

$$G = \text{bar} \begin{array}{|c|c|} \hline A & B \\ \hline \alpha & \beta \\ \hline \end{array} = \text{bar} \begin{array}{|c|c|} \hline A & B \\ \hline \alpha' & \beta' \\ \hline \end{array} \quad (\text{avec } \alpha, \beta) \neq (0, 0) \Leftrightarrow \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{\beta'}{\beta}.$$

i) Isobarycentre de deux points

On définit l'isobarycentre de deux points comme le barycentre de deux points affectés du même coefficient non nul, c'est-à-dire ;

$$G = \text{bar} \begin{array}{|c|c|} \hline A & B \\ \hline \alpha & \alpha \\ \hline \end{array} ; (\text{avec } \alpha \neq 0) \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{\alpha}{2\alpha} \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow G = A * B$$

G est isobarycentre de A et B si, et seulement si ;

$$G = \text{bar} \begin{array}{|c|c|} \hline A & B \\ \hline 1 & 1 \\ \hline \end{array} \Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow G \text{ est le milieu de } [AB]$$

$$[AB] \text{ a pour milieu } I \Leftrightarrow I = \text{bar} \begin{array}{|c|c|} \hline A & B \\ \hline 1 & 1 \\ \hline \end{array} \Leftrightarrow A = \text{bar} \begin{array}{|c|c|} \hline I & B \\ \hline 2 & -1 \\ \hline \end{array} \Leftrightarrow B = \text{bar} \begin{array}{|c|c|} \hline I & A \\ \hline 2 & -1 \\ \hline \end{array}$$



2) Barycentre d'un système de trois points

a) Définition

Soient A, B et C trois points du plan $\mathcal{P}$. Et soient α, β et γ trois nombres réels tels que ; $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$.

Il existe un point unique G vérifiant ; $\alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{GB} + \gamma \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

Le point G est appelé barycentre des trois points A, B et C affectés respectivement des trois coefficients α, β et γ .

b) Propriété

Le point G est le barycentre des trois points A, B et C affectés respectivement des trois coefficients α, β et γ si et seulement si ; $\alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{GB} + \gamma \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

Remarque

On peut aussi dire que ; G est le barycentre du système de points pondérés $A(\alpha); B(\beta); C(\gamma)$ ou $\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$.

c) Notations

G est barycentre du système $(A, \alpha); (B, \beta)$ et (C, γ) se note ; $G = \text{bar}\{(A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma)\}$,

$$\text{Ou encore ; } G = \text{bar} \begin{array}{|c|c|c|} \hline A & B & C \\ \hline \alpha & \beta & \gamma \\ \hline \end{array}$$

Exemple 10

$$\text{Soit } G = \text{bar} \begin{array}{|c|c|c|} \hline A & B & C \\ \hline 8 & 4 & -5 \\ \hline \end{array} \Leftrightarrow 8\overrightarrow{GA} + 4\overrightarrow{GB} - 5\overrightarrow{GC} = \vec{0}.$$

d) Comment construire le barycentre G de trois points

a-Méthode des coordonnées

$$\begin{aligned} G = \text{bar} \begin{array}{|c|c|c|} \hline A & B & C \\ \hline \alpha & \beta & \gamma \\ \hline \end{array} & \Leftrightarrow \alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{GB} + \gamma \overrightarrow{GC} = \vec{0} \\ & \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta + \gamma} \overrightarrow{AB} + \frac{\gamma}{\alpha + \beta + \gamma} \overrightarrow{AC} \\ & \Leftrightarrow \overrightarrow{BG} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta + \gamma} \overrightarrow{BA} + \frac{\gamma}{\alpha + \beta + \gamma} \overrightarrow{BC} \\ & \Leftrightarrow \overrightarrow{CG} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta + \gamma} \overrightarrow{CA} + \frac{\beta}{\alpha + \beta + \gamma} \overrightarrow{CB} \end{aligned}$$

Exemple 11

ABC est un triangle non aplati. En utilisant la méthode des coordonnées, construire les points E et F tels que ;

$$E = \text{bar} \begin{array}{|c|c|c|} \hline A & B & C \\ \hline 3 & 2 & 1 \\ \hline \end{array} ;$$

$$F = \text{bar} \begin{array}{|c|c|c|} \hline A & B & C \\ \hline -2 & 3 & 1 \\ \hline \end{array}$$

Solution

$$E = \text{bar} \begin{array}{|c|c|c|} \hline A & B & C \\ \hline 3 & 2 & 1 \\ \hline \end{array} \Leftrightarrow \overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC} ;$$

$$F = \text{bar} \begin{array}{|c|c|c|} \hline A & B & C \\ \hline -2 & 3 & 1 \\ \hline \end{array} \Leftrightarrow \overrightarrow{AF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

Construction

Voir la figure ci-contre

Remarque

Dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, G a pour coordonnées ; $G\left(\frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}, \frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\right)$

b-Méthode du barycentre partiel (Associativité du barycentre)

G est conservé lorsqu'on remplace deux points par leur barycentre affecté de la somme de leurs coefficients.

$$G = \text{bar} \begin{array}{|c|c|c|} \hline A & B & C \\ \hline \alpha & \beta & \gamma \\ \hline \end{array} \Leftrightarrow G = \text{bar} \begin{array}{|c|c|} \hline H & C \\ \hline \alpha + \beta & \gamma \\ \hline \end{array} ; \text{ avec } \alpha + \beta \neq 0 \text{ et } H = \text{bar} \begin{array}{|c|c|} \hline A & B \\ \hline \alpha & \beta \\ \hline \end{array}$$

Exemple 12

Soit $G = \text{bar} \begin{array}{|c|c|c|} \hline A & B & C \\ \hline 4 & 5 & 3 \\ \hline \end{array}$. Construire le barycentre G .

Solution

$$\text{Soit } F = \text{bar} \begin{array}{|c|c|} \hline A & B \\ \hline 4 & 5 \\ \hline \end{array} \Rightarrow G = \text{bar} \begin{array}{|c|c|} \hline F & C \\ \hline 9 & 3 \\ \hline \end{array}$$

e) Existence et unicité de G

Le point $G = \text{bar} \begin{array}{|c|c|c|} \hline A & B & C \\ \hline \alpha & \beta & \gamma \\ \hline \end{array}$ existe si, et seulement si ; $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$.

L'égalité : $\overrightarrow{CG} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{CA} + \frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{CB}$ établit l'existence et l'unicité du barycentre G .

f) Théorème de l'homogénéité (Proportionnalité du barycentre)

En multipliant ou en divisant les coefficients α, β et γ par un même nombre réel non nul k , le centre de gravité G est conservé ;

$$G = \text{bar} \begin{array}{|c|c|c|} \hline A & B & C \\ \hline \alpha & \beta & \gamma \\ \hline \end{array} \Leftrightarrow G = \text{bar} \begin{array}{|c|c|c|} \hline A & B & C \\ \hline k.\alpha & k.\beta & k.\gamma \\ \hline \end{array} \Leftrightarrow G = \text{bar} \begin{array}{|c|c|c|} \hline A & B & C \\ \hline \frac{\alpha}{k} & \frac{\beta}{k} & \frac{\gamma}{k} \\ \hline \end{array}$$

Propriété

$$\text{bar} \begin{array}{|c|c|c|} \hline A & B & C \\ \hline \alpha & \beta & \gamma \\ \hline \end{array} = \text{bar} \begin{array}{|c|c|c|} \hline A & B & C \\ \hline \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \hline \end{array} \text{ avec } (\alpha, \beta, \gamma) \neq (0, 0, 0) \Leftrightarrow \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{\beta'}{\beta} = \frac{\gamma'}{\gamma}.$$

g) Isobarycentre de trois points**Définition**

$G = \text{bar} \begin{array}{|c|c|c|} \hline A & B & C \\ \hline \alpha & \alpha & \alpha \\ \hline \end{array}$ ($\alpha \neq 0$) G est l'isobarycentre des points A, B, C appelé aussi centre de gravité du triangle ABC .

Propriété

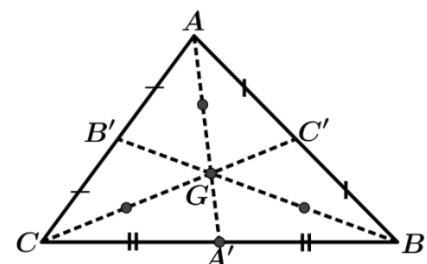
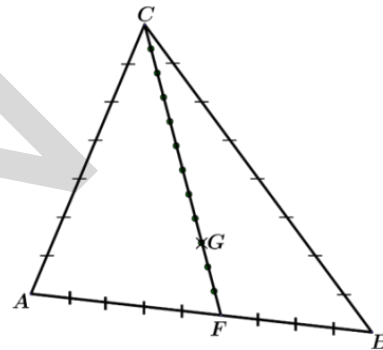
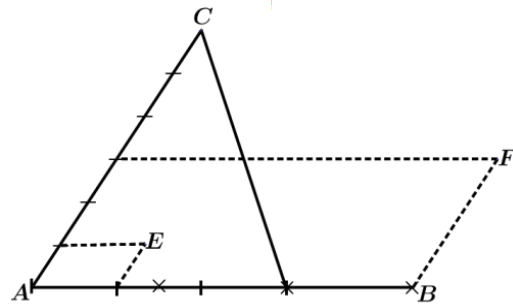
G est centre de gravité de ABC si, et seulement si ;

$$G = \text{bar} \begin{array}{|c|c|c|} \hline A & B & C \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BB'} \Leftrightarrow \overrightarrow{CG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CC'}$$

Tels que ; $A' = B * C$, $B' = A * C$ et $C' = A * B$

$$\Leftrightarrow G = \text{bar} \begin{array}{|c|c|} \hline A & A' \\ \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array} = \text{bar} \begin{array}{|c|c|} \hline B & B' \\ \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array} = \text{bar} \begin{array}{|c|c|} \hline C & C' \\ \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array}$$



h) Droites concourantes

Exemple 13

ABCD un tétraèdre. $G_1; G_2; G_3; G_4$ les centres de gravité respectifs des triangles ABC ; ABD ; ACD ; BCD. Démontrer que les droites (G_1D) ; (G_2C) ; (G_3B) ; (G_4A) sont concourantes.

Solution

On a : $G_1 = \text{bar} \begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \hline 1 & 1 & 1 \end{array}$; $G_2 = \text{bar} \begin{array}{c|c|c} A & B & D \\ \hline 1 & 1 & 1 \end{array}$; $G_3 = \text{bar} \begin{array}{c|c|c} A & C & D \\ \hline 1 & 1 & 1 \end{array}$; $G_4 = \text{bar} \begin{array}{c|c|c} B & C & D \\ \hline 1 & 1 & 1 \end{array}$. Soit $G = \text{bar} \begin{array}{c|c|c|c} A & B & C & D \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}$

On a : $G = \text{bar} \begin{array}{c|c} G_1 & D \\ \hline 3 & 1 \end{array}$; $G = \text{bar} \begin{array}{c|c} G_2 & C \\ \hline 3 & 1 \end{array}$; $G = \text{bar} \begin{array}{c|c} G_3 & B \\ \hline 3 & 1 \end{array}$; $G = \text{bar} \begin{array}{c|c} G_4 & A \\ \hline 3 & 1 \end{array}$

Donc ; $G \in (G_1D)$; $G \in (G_2C)$; $G \in (G_3B)$; $G \in (G_4A)$.

Donc, les droites (G_1D) ; (G_2C) ; (G_3B) ; (G_4A) sont concourantes en G.

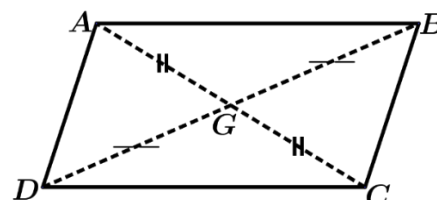
i) Sommets d'un parallélogramme et barycentre

ABCD est un parallélogramme si, et seulement si ;

$$A = \text{bar} \begin{array}{c|c|c} B & C & D \\ \hline 1 & -1 & 1 \end{array} \quad B = \text{bar} \begin{array}{c|c|c} A & C & D \\ \hline 1 & 1 & -1 \end{array}$$

$$C = \text{bar} \begin{array}{c|c|c} A & B & D \\ \hline -1 & 1 & 1 \end{array} \quad D = \text{bar} \begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \hline 1 & -1 & 1 \end{array}$$

$$G = \text{bar} \begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \hline 1 & 1 & -1 \end{array} \Leftrightarrow A, B, C \text{ et } G \text{ sont les sommets d'un parallélogramme, } G \text{ et } C \text{ en sont des sommets opposés.}$$



j) Barycentre et géométrie analytique

Coordonnées du barycentre dans un repère

a- De deux points

Dans le plan $\mathcal{P}$ rapporté à un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$; Si $G = \text{bar} \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline \alpha & \beta \end{array}$ ($\alpha + \beta \neq 0$) ; alors
$$\begin{cases} x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B}{\alpha + \beta} \\ y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B}{\alpha + \beta} \end{cases}$$

(Moyenne pondérée des coordonnées de A et B)

Exemple 14

Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ de $\mathcal{P}$, on a $A(5; -7)$ et $B(3; 4)$ tels que ; $G = \text{bar} \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 3 & 4 \end{array}$. Calculer les coordonnées de G.

Solution

$$\begin{cases} x_G = \frac{3 \times 5 + 4 \times 3}{3 + 4} = \frac{27}{7} \\ y_G = \frac{3 \times (-7) + 4 \times 4}{3 + 4} = \frac{-5}{7} \end{cases} \Rightarrow G\left(\frac{27}{7}; \frac{-5}{7}\right)$$

b- De trois points

Dans le plan $\mathcal{P}$ rapporté à un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$; Si $G = \text{bar} \begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \hline \alpha & \beta & \gamma \end{array}$ ($\alpha + \beta + \gamma \neq 0$) ; $\Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C}{\alpha + \beta + \gamma} \\ y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B + \gamma y_C}{\alpha + \beta + \gamma} \end{cases}$

(Moyenne pondérée des coordonnées de A, B et C)

Exemple 15

Dans le plan $\mathcal{P}$ rapporté à un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on donne les points $A(2; -3)$, $B(-4; -5)$ et $C(6; -2)$ tels que ;

Si $G = \text{bar} \begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \hline 7 & -8 & 10 \end{array}$ ($\alpha + \beta + \gamma \neq 0$) ; Calculer les coordonnées de G

Solution

$$\begin{cases} x_G = \frac{7 \times 2 - 8 \times (-4) + 10 \times 6}{7 - 8 + 10} = \frac{106}{9} \\ y_G = \frac{7 \times (-3) - 8 \times (-5) + 10 \times (-2)}{7 - 8 + 10} = \frac{-1}{9} \end{cases} \Rightarrow G\left(\frac{106}{9}; \frac{-1}{9}\right)$$

Remarque

Pour montrer que trois points distincts sont alignés, il suffit de montrer que l'un d'eux peut s'écrire comme barycentre des deux autres.

Exercices Généraux

1. Construire le point $G = \text{bar}$

A	B
3	-2

2. A et B sont deux points distincts.

Soit $F = \text{bar}$

A	B
2	1

Donner l'abscisse du point F dans le repère $(A; \overrightarrow{AB})$.

3. A et B sont deux points distincts.

Donner les abscisses des points F et G dans le repère $(A; \overrightarrow{AB})$, sachant que ;

$F = \text{bar}$

A	B
-2	-3

$G = \text{bar}$

A	B
-2	3

4. A et B sont deux points distincts.

Donner les abscisses des points G et H dans le repère $(A; \overrightarrow{AB})$, tels que ;

$G = \text{bar}$

A	B
2	5

$H = \text{bar}$

A	B	C
-3	5	-1
3	5	3

5. Construire le point $G = \text{bar}$

A	B
-3	2

6. Soit le triangle ABC.

On considère $G = \text{bar}$

A	B	C
1	1	2

Construire G

7. ABC est un triangle non aplati.

$G = \text{bar}$

A	B	C
1	2	3

Construire G en utilisant la méthode des coordonnées de G dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, puis en utilisant la méthode de l'associativité (*barycentre partiel*).

8. Soit ABC un triangle non aplati. En utilisant la méthode des barycentres partiels, construire le barycentre G du système $\{(A, 3); (B, 4); (C, 5)\}$.

9. Soit A et B deux points du plan. Construire les points suivants :

$$G_1 = \text{bar} \frac{A|B}{1|2}; \quad G_2 = \text{bar} \frac{A|B}{-3|2}; \quad G_3 = \text{bar} \frac{A|B}{1|-3}$$

10. Exprimer le point G comme barycentre des points A et B dans chacun des cas :

$$1) \overrightarrow{AG} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AB}; \quad 4) \overrightarrow{BG} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}; \quad 7) \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG} = \vec{0}$$

$$2) \overrightarrow{AG} = -\overrightarrow{AB}; \quad 5) \overrightarrow{AG} = \frac{1}{3} \overrightarrow{BA}; \quad 8) 3\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{AG} = \vec{0}$$

$$3) \overrightarrow{AG} = -\frac{2}{5} \overrightarrow{AB}; \quad 6) \overrightarrow{AG} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AB}; \quad 9) -2\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{AG} = \vec{0}$$

11. Dans les cas suivants exprimer G comme barycentre des points A et B.



12. ABC un triangle, I, J, K les points tels que :

$$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AB}; \quad \overrightarrow{BJ} = -\frac{4}{5} \overrightarrow{BC}; \quad \overrightarrow{CK} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AC}.$$

1°) Faire une figure.

2°) Compléter les tableaux :

$$I = \text{bar} \frac{A|B}{1|1}; \quad J = \text{bar} \frac{B|C}{1|2}; \quad K = \text{bar} \frac{A|C}{1|1}$$

13. ABC un triangle ; I milieu de [AB].

$$H = \text{bar} \frac{A|B|C}{1|1|2}; \quad Z = \text{bar} \frac{A|B|C}{1|1|-1}$$

1°) Faire une figure.

2°) Soit G le centre de gravité du triangle ZAH.

Exprimer G comme barycentre des points A ; B ; C

Problème d'alignement

14. ABC est un triangle non aplati. I, J et K sont des points tels que ; $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{CJ} = \frac{1}{4} \overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{CK} = \frac{2}{5} \overrightarrow{CA}$.

1°) Faire une figure ;

2°) Démontrer que les droites (AJ), (BK) et (CI) sont concourantes.

15. Soit ABC un triangle non aplati.

et soit $I = \text{bar}$

A	B
1	2

$K = \text{bar}$

A	C
1	-6

1°) Placer les points I, J et K ;

2°) Montrer que (IC), (AJ) et (BK) sont concourantes.

16. ABC est un triangle non aplati. D, E et F sont des points définis par les relations ;

$$\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AB}; \quad \overrightarrow{AE} = -3\overrightarrow{AC}; \quad \overrightarrow{CF} = 2\overrightarrow{CB}.$$

1°) a) Exprimer D, E et F sous forme de barycentres ;

b) Placer D, E et F sur la figure ;

2°) a) Montrer que D, E et F sont alignés ;

b) Exprimer $\overrightarrow{ED}$ et $\overrightarrow{EF}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$;

c) En utilisant le résultat $3\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{CE} + 2\overrightarrow{CD}$,

Montrer que ; $B = \text{bar}$

C	D	E
3	2	1

3°) (EB) coupe (CD) en G, préciser la position de G sur (CD).

Problème de concours de droites

17. ABC est un triangle non aplati, les points P, Q et R sont tels que ; $\overrightarrow{AP} = \frac{3}{5} \overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BQ} = \frac{2}{7} \overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AR} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AC}$.

Montrer que les droites (AQ), (BR) et (CP) sont concourantes.

18. Etant donné un triangle ABC non aplati, construire les points I, J et K définis par ;

- I est le barycentre de $(A; 2)$ et $(C; 1)$;
- J est le barycentre de $(A; 1)$ et $(C; 2)$;
- K est le barycentre de $(C; 1)$ et $(B; -4)$.

1°) Démontrer que B est le barycentre de $(K; 3)$ et $(C; 1)$.

2°) Quel est le barycentre de $(A; 2)$, $(K; 3)$ et $(C; 1)$?

3°) Dédurre du 2° que I, J, K sont alignés et que J est le milieu de [IK].

4°) L étant le milieu de [CI], et M celui de [KC], démontrer que IJML est un parallélogramme dont le centre G est l'isobarycentre de A, B, C.

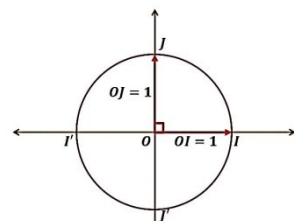
Chapitre 7 TRIGONOMETRIE– ANGLES ORIENTES

I. 1) Cercle trigonométrique

Définition

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé tel que $\vec{OI}$ et $\vec{OJ}$ sont deux vecteurs unitaires.

Le cercle trigonométrique (Γ) est le cercle de centre O (origine du repère) et de rayon $OI = OJ = 1$.



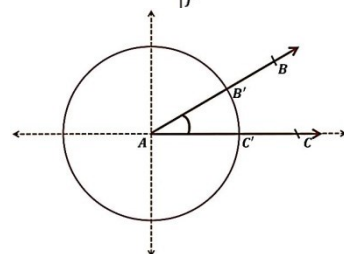
2) Mesure d'un angle en radian

Soit un angle géométrique $\widehat{BAC}$ (mesuré en degré).

Le cercle trigonométrique de centre A , est de périmètre 2π .

Il coupe les demi-droites $[AB)$ et $[AC)$ respectivement en C' et B' .

La mesure en radian de l'angle $\widehat{BAC}$ est égale à la longueur de l'arc $\widehat{B'C'}$.



Le tableau suivant donne la correspondance entre différentes unités de mesures angulaires.

Mesure en degré (°)	180	90	60	45	30	0	x
Mesure en radian	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0	y
Mesure en grade	200	100	$\frac{200}{3}$	50	$\frac{100}{3}$	0	z

Il s'agit d'un tableau de proportionnalité : $y = \frac{\pi}{180}x$ et $z = \frac{10}{9}x$

Exemple 1

Compléter le tableau

Mesure en degré	75		
Mesure en radian		$\frac{\pi}{12}$	
Mesure en grade			40

Solution

Comme ce tableau présente un tableau de proportionnalité, on a : $y = \frac{\pi}{180}x$ et $z = \frac{10}{9}x$

Avec $x = 75$, on a $y = \frac{\pi}{180}(75) = \frac{5\pi}{12}$;

$z = \frac{10}{9}(75) = \frac{250}{3}$

Avec $y = \frac{\pi}{12}$, on a $x = \frac{180}{\pi} \frac{\pi}{12} = 15$;

$z = \frac{10}{9}(15) = \frac{50}{3}$

Avec $z = 40$, on a $x = \frac{9}{10}(40) = 36$;

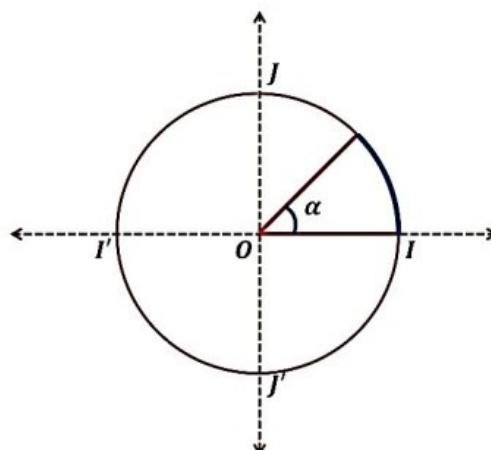
$y = \frac{\pi}{180}(36) = \frac{\pi}{5}$

Mesure en degré	75	15	36
Mesure en radian	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{5}$
Mesure en grade	$\frac{250}{3}$	$\frac{50}{3}$	40

Dans la suite de ce chapitre sauf précision contraire, les mesures des angles seront données en radian.

Sur un cercle de rayon R , la longueur de l'arc $\widehat{AB}$ intercepté par un angle au centre de mesure α (en radian) est $R\alpha$.

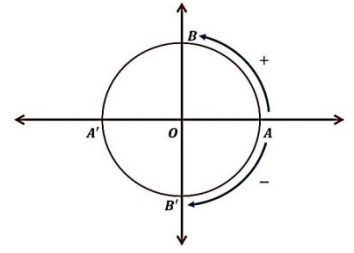
Le périmètre du cercle est $2\pi R$.



3) Le plan orienté:

Un plan est orienté lorsqu'on distingue deux sens de parcours sur chacun de ses cercles.

- ⊞ Un sens positif ou direct qui est le sens contraire à la rotation des aiguilles d'une montre (*sens antihoraire*).
- ⊞ Un sens négatif ou indirect qui est le sens de la rotation des aiguilles d'une montre (*sens horaire*).



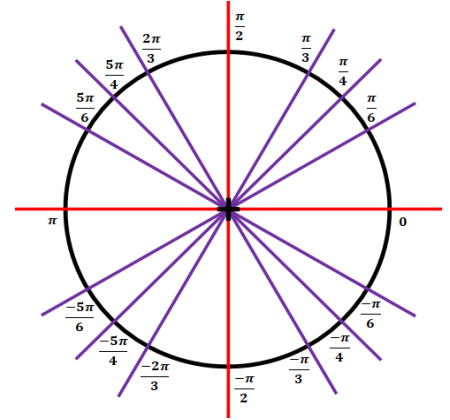
4) Mesure principale de l'angle orienté

Définition

Soit α un nombre réel et $\hat{A}$ un angle orienté de mesure α . On considère x comme mesure principale de l'angle orienté $\hat{A}$ si :

$$\alpha = x [2\pi] \\ \text{ou} \\ \alpha = x + 2k\pi \quad (\text{avec } k \in \mathbb{Z})$$

tel que : $-\pi < x \leq \pi$ ou $-180^\circ < x \leq 180^\circ$
(x comprise entre -180° et 180° ou entre $-\pi$ et π radians).



Exemple 2

Donner les mesures principales des angles orientés suivants :

$$\frac{25\pi}{2} ; \frac{-31\pi}{5} ; \frac{7\pi}{4} ; -\frac{121\pi}{3}$$

Solution

$$\begin{aligned} \square \frac{25\pi}{2} &= \frac{24\pi + \pi}{2} = \frac{24\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = 12\pi + \frac{\pi}{2} = 6 \times (2\pi) + \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{25\pi}{2} = \frac{\pi}{2} [2\pi] \\ \square \frac{-31\pi}{5} &= \frac{-30\pi - \pi}{5} = \frac{-30\pi}{5} + \frac{-\pi}{5} = -6\pi + \frac{-\pi}{5} \Rightarrow \frac{-31\pi}{5} = \frac{-\pi}{5} [2\pi] \\ \square \frac{7\pi}{4} &= \pi + \frac{3\pi}{4} \Rightarrow \frac{7\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} [2\pi] \\ \square -\frac{121\pi}{3} &= \frac{-120\pi - \pi}{3} = \frac{-120\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = -40\pi - \frac{\pi}{3} \Rightarrow -\frac{121\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} [2\pi] \end{aligned}$$

Exemple 3

$$\text{Sachant que } (\vec{u}; \vec{v}) = \frac{200\pi}{3}$$

Déterminer la mesure principale α de l'angle $(\vec{u}; \vec{v})$

Solution

$$\begin{aligned} \text{On a : } \alpha &= \frac{200\pi}{3} + 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}, \text{ et } -\pi < \alpha \leq \pi, \text{ donc } -\pi < \frac{200\pi}{3} + 2k\pi \leq \pi \\ &\Leftrightarrow -1 - \frac{200}{3} < 2k \leq 1 - \frac{200}{3} \Leftrightarrow \frac{-203}{6} < k \leq \frac{-197}{6} \Leftrightarrow -33,8 < k \leq -32,8 \text{ or } k \in \mathbb{Z}, \text{ donc } k = -33 \\ \text{D'où } \alpha &= \frac{200\pi}{3} + 2(-33)\pi = \frac{200\pi}{3} - 66\pi = \frac{200\pi - 198\pi}{3} ; \alpha = \frac{2\pi}{3} \end{aligned}$$

5) Cosinus et sinus d'un réel

Soit x un réel et M le point du cercle trigonométrique tel que :

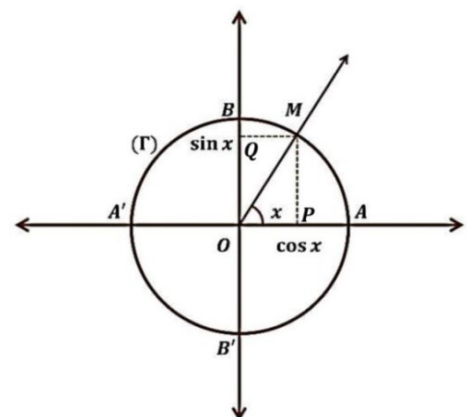
$$(\vec{OA}; \vec{OM}) = x$$

Dans le repère orthonormal direct $(O; A; B)$, on a :

- ⊞ $\cos x$ est l'abscisse du point M .
- ⊞ $\sin x$ est l'ordonnée du point M .

Avec P et Q projetés orthogonaux de M respectivement sur (OA) et (OB) .

$$\text{On a : } \cos x = \overline{OP} \text{ et } \sin x = \overline{OQ}.$$



a) Propriétés

- ⊞ Des réels x et y vérifient $\begin{cases} \cos x = \cos y \\ \sin x = \sin y \end{cases}$ si et seulement si il existe un entier relatif k tel que : $x = y + 2k\pi$.
- ⊞ Pour tout réel x , on a : $-1 \leq \cos x \leq 1$; $-1 \leq \sin x \leq 1$; $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.
- ⊞ $\forall x \in [0; \frac{\pi}{2}]$; $\cos x \geq 0$ et $\sin x \geq 0$
- ⊞ $\forall x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$; $\cos x \geq 0$
- ⊞ $\forall x \in [0; \pi]$; $\sin x \geq 0$.

b) Angles associés – Angles remarquables

Soit $\hat{A}$ un angle orienté de mesure α :

Les angles : $-\alpha$, $\pi - \alpha$, $\pi + \alpha$, $\frac{\pi}{2} + \alpha$, $\frac{\pi}{2} - \alpha$; sont habituellement appelés angles associés à $\hat{A}$.

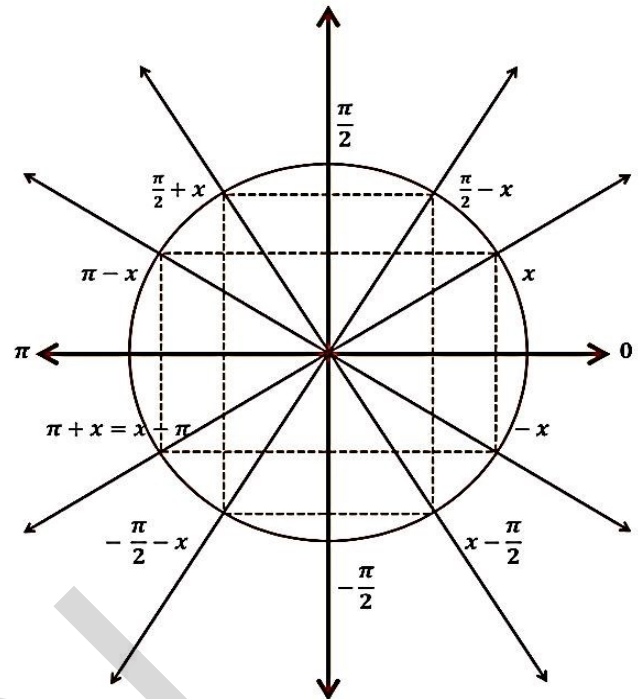
c) Propriétés

Pour tout réel x (fig. ci-contre) on a :

- $\cos(-x) = \cos(x)$, et $\sin(-x) = -\sin(x)$.
- $\cos(\pi + x) = -\cos x$, et $\sin(\pi + x) = -\sin x$.
- $\cos(\pi - x) = -\cos x$, et $\sin(\pi - x) = \sin x$.

Pour tout réel x (fig. ci-contre) on a :

- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$, et $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$.
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$, et $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$.



Remarque

Les tangentes des angles associés se déduisent des formules précédentes :

$$\text{Ainsi : } \tan(\pi - \alpha) = \frac{\sin(\pi - \alpha)}{\cos(\pi - \alpha)} = \frac{\sin \alpha}{-\cos \alpha} = -\tan \alpha.$$

Exemple 4

Sachant que : $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, calculer ?

- 1) $\cos \frac{5\pi}{6}$ et $\sin \frac{5\pi}{6}$; 2) $\cos \frac{7\pi}{6}$ et $\sin \frac{7\pi}{6}$; 3) $\cos \frac{\pi}{3}$ et $\sin \frac{\pi}{3}$; 4) $\cos \frac{2\pi}{3}$ et $\sin \frac{2\pi}{3}$

Solution

- 1) $\cos \frac{5\pi}{6} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin \frac{5\pi}{6} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$
 2) $\cos \frac{7\pi}{6} = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin \frac{7\pi}{6} = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$
 3) $\cos \frac{\pi}{3} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ et $\sin \frac{\pi}{3} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
 4) $\cos \frac{2\pi}{3} = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$ et $\sin \frac{2\pi}{3} = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Exemple 5

1°) Pour les mesures principales directes positives

α en radian	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	π
cos x	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1
sin x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0
tan x	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	⊠	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	0
cotan x	⊠	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	⊠

2°) Pour les mesures principales indirectes négatives

α en radian	0	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{2\pi}{3}$	$-\pi$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1
$\sin x$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0
$\tan x$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	$\boxtimes$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	0
$\cotan x$	$\boxtimes$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\boxtimes$

6) Equations trigonométriques

1°) Type $\sin x = a$, avec $-1 \leq a \leq 1$

On distingue les cas suivants :

□ Si $a < -1$ ou $a > 1$, pas de solution, car, pour tout nombre réel x , on a : $-1 \leq \sin x \leq 1$.

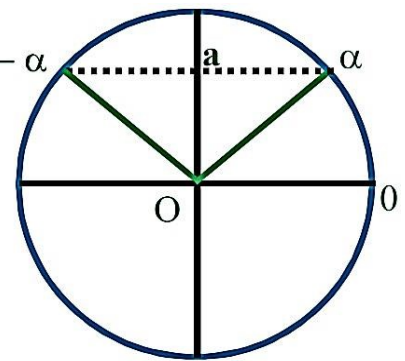
□ Si $a \in [-1; 1]$, il existe un nombre réel α tel que $\sin \alpha = a$.

C.-à-d. si $a \notin [-1; 1]$, alors l'ensemble des solutions de l'équation $\sin x = a$ est $S = \emptyset$

Si $a \in [-1; 1]$, alors il existe un réel α tel que $\sin \alpha = a$. On a donc ;

$$\sin x = a \Leftrightarrow \sin x = \sin \alpha \Leftrightarrow x \equiv \alpha [2\pi] \text{ ou } x \equiv \pi - \alpha [2\pi],$$

$$\text{c'est-à-dire : } \begin{cases} x = \alpha + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \pi - \alpha + 2k\pi \end{cases}$$



Exemple 6

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :

$$1^\circ) \sqrt{3} \sin x = \frac{3}{2} \quad 2^\circ) 3 \sin 2x = 0 \quad 3^\circ) 5 \sin \left(3x + \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{\frac{75}{4}}$$

Solution

$$1^\circ) \sqrt{3} \sin x = \frac{3}{2} \Rightarrow \sin x = \frac{3}{2} \times \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sin x = \sin \frac{\pi}{3} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + 2k_1\pi \\ \text{ou} \\ x = \frac{2\pi}{3} + 2k_2\pi \end{cases}$$

$$\Rightarrow S = \left\{ \frac{\pi}{3} + 2k_1\pi ; \frac{2\pi}{3} + 2k_2\pi / k_1, k_2 \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$2^\circ) 3 \sin 2x = 0 \Rightarrow \sin 2x = \sin 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k_1\pi \\ \text{ou} \\ 2x = (2k_2 + 1)\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2k_1\pi}{2} = k\pi \\ \text{ou} \\ x = \frac{(2k_2 + 1)\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow S = \left\{ k_1\pi \text{ ou } \frac{(2k_2 + 1)\pi}{2} / k_1, k_2 \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$3^\circ) 5 \sin \left(3x + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{5\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sin \left(3x + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sin \left(3x + \frac{\pi}{4} \right) = \sin \frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{3} + 2k_1\pi \\ \text{ou} \\ 3x + \frac{\pi}{4} = \frac{2\pi}{3} + 2k_2\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} + 2k_1\pi \\ \text{ou} \\ 3x = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4} + 2k_2\pi \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x = \frac{\pi}{12} + 2k_1\pi \\ \text{ou} \\ 3x = \frac{5\pi}{12} + 2k_2\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{36} + \frac{2k_1\pi}{3} \\ \text{ou} \\ x = \frac{5\pi}{36} + \frac{2k_2\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow S = \left\{ \frac{\pi}{36} + \frac{2k_1\pi}{3} ; \frac{5\pi}{36} + \frac{2k_2\pi}{3} / k_1, k_2 \in \mathbb{Z} \right\}$$

Exemple 7

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$(E_1) : \sin x = -\frac{1}{2} \quad ; \quad (E_2) : \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad ; \quad (E_3) : \sin x = \frac{\pi}{3} \quad ;$$

Solution

$$(E_1) : \sin x = -\frac{1}{2}, \quad -\frac{1}{2} \in [-1; 1], \quad \text{et} \quad \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Donc,} \quad \sin x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + 2k_1\pi \\ \text{ou} \\ x = -\frac{5\pi}{6} + 2k_2\pi \end{cases}$$

$$\Rightarrow S = \left\{ -\frac{\pi}{6} + 2k_1\pi ; -\frac{5\pi}{6} + 2k_2\pi / k_1, k_2 \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$(E_2) : \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \in [-1; 1], \quad \text{et} \quad \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Donc,} \quad \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin x = \sin\frac{\pi}{4} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + 2k_1\pi \\ \text{ou} \\ x = \frac{3\pi}{4} + 2k_2\pi \end{cases} \Rightarrow S = \left\{ \frac{\pi}{4} + 2k_1\pi ; \frac{3\pi}{4} + 2k_2\pi / k_1, k_2 \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$(E_3) : \sin x = \frac{\pi}{3}$$

Comme $\frac{\pi}{3} \approx 3,14 > 1 \Rightarrow \frac{\pi}{3} > 1 \Rightarrow \frac{\pi}{3} \notin [-1; 1]$ Donc, la solution (E_3) dans $\mathbb{R}$ est $\emptyset$

2°) Type $\cos x = a$, avec $-1 \leq a \leq 1$

On distingue les cas suivants :

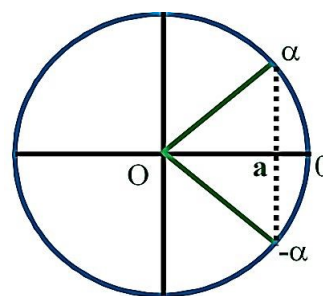
□ Si $a < -1$ ou $a > 1$, pas de solution, car, pour tout nombre réel x , on a :
 $-1 \leq \cos x \leq 1$.

□ Si $a \in [-1; 1]$, il existe un nombre réel α tel que $\cos \alpha = a$.

C.-à-d. si $a \notin [-1; 1]$, alors l'ensemble des solutions de l'équation $\cos x = a$ est $S = \emptyset$

Si $a \in [-1; 1]$, alors il existe un réel α tel que $\cos \alpha = a$. On a donc ;

$$\cos x = a \Leftrightarrow \cos x = \cos \alpha \Leftrightarrow x \equiv \alpha [2\pi] \text{ ou } x \equiv -\alpha [2\pi], \text{ c'est-à-dire : } \begin{cases} x = \alpha + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = -\alpha + 2k\pi \end{cases}$$



Exemple 8

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$(E_1) : \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad ; \quad (E_2) : \cos x = \frac{1}{2} \quad ; \quad (E_3) : \cos x = 3 - \sqrt{2}$$

Solution

$$(E_1) : \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad -\frac{\sqrt{3}}{2} \in [-1; 1], \quad \text{et} \quad \cos\frac{5\pi}{6} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ Donc, } \cos\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \cos x = \cos \frac{5\pi}{6} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{5\pi}{6} + 2k_1\pi \\ \text{ou} \\ x = -\frac{5\pi}{6} + 2k_2\pi \end{cases} \Rightarrow S = \left\{ \frac{5\pi}{6} + 2k_1\pi ; -\frac{5\pi}{6} + 2k_2\pi / k_1, k_2 \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$(E_2) : \cos x = \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2} \in [-1; 1], \quad \text{et } \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}. \quad \Rightarrow \cos x = \cos \frac{\pi}{3} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + 2k_1\pi \\ \text{ou} \\ x = -\frac{\pi}{3} + 2k_2\pi \end{cases} (k_1, k_2 \in \mathbb{Z})$$

$$(E_3) : \cos x = 3 - \sqrt{2}$$

Comme : $1 < \sqrt{2} < 2 \Rightarrow -2 < -\sqrt{2} < -1 \Rightarrow 1 < 3 - \sqrt{2} < 2 \Rightarrow 3 - \sqrt{2} \notin [-1; 1]$

Donc, l'ensemble des solutions de (E_3) dans $\mathbb{R}$ est donc $\emptyset$.

Exemple 9

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :

$$1^\circ) \sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}; \quad 2^\circ) \cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Solution

$$1) \sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{\pi}{6} \Rightarrow \begin{cases} 3x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{6} + 2k_1\pi \\ \text{ou} \\ 3x + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{6} + 2k_2\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} + 2k_1\pi \\ \text{ou} \\ 3x = \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{4} + 2k_2\pi \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x = \frac{-\pi}{12} + 2k_1\pi \\ \text{ou} \\ 3x = \frac{7\pi}{12} + 2k_2\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-\pi}{36} + \frac{2k_1\pi}{3} \\ \text{ou} \\ x = \frac{7\pi}{36} + \frac{2k_2\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow S = \left\{ \frac{-\pi}{36} + \frac{2k_1\pi}{3} ; \frac{7\pi}{36} + \frac{2k_2\pi}{3} / k_1, k_2 \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$2) \cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) = \cos \frac{\pi}{6} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{3} - 2x = \frac{\pi}{6} + 2k_1\pi \\ \text{ou} \\ \frac{\pi}{3} - 2x = -\frac{\pi}{6} + 2k_2\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} + 2k_1\pi \\ \text{ou} \\ -2x = -\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} + 2k_2\pi \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{6} + 2k_1\pi \\ \text{ou} \\ 2x = \frac{\pi}{2} + 2k_2\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + k_1\pi \\ \text{ou} \\ x = \frac{\pi}{4} + k_2\pi \end{cases} \Rightarrow S = \left\{ \frac{\pi}{12} + k_1\pi ; \frac{\pi}{4} + k_2\pi / k_1, k_2 \in \mathbb{Z} \right\}.$$

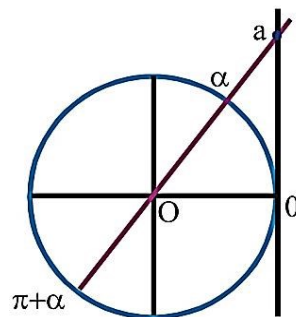
3°) Equation type $\tan x = a$

La fonction tangente prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$

Donc pour tout nombre réel a , il existe un nombre réel α tel que : $\tan \alpha = a$.

$$\tan x = a \Leftrightarrow \tan x = \tan \alpha \Leftrightarrow x \equiv \alpha [2\pi] \text{ ou } x \equiv \pi + \alpha [2\pi].$$

$$\text{C-à-d.} \begin{cases} x = \alpha + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \pi + \alpha + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi ; k \in \mathbb{Z}.$$



Exemple 10

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations : $(E_1) : \tan x = \sqrt{3}$; $(E_2) : \sqrt{3} \tan x = -1$

Solution

$$(E_1) : \tan x = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \tan x = \tan \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + 2k_1\pi \\ \text{ou} \\ x = \frac{-\pi}{3} + 2k_2\pi \end{cases} (k_1, k_2 \in \mathbb{Z}) \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow S = \left\{ \frac{\pi}{3} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$(E_2) : \sqrt{3} \tan x = -1$$

$$\Rightarrow \sqrt{3} \tan x = -1 \Rightarrow \tan x = \frac{-1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \tan x = \tan\left(\frac{-\pi}{6}\right) \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-\pi}{6} + 2k_1\pi \\ \text{ou} \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2k_2\pi \end{cases} (k_1, k_2 \in \mathbb{Z})$$

$$\Rightarrow x = \frac{-\pi}{6} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow S = \left\{ \frac{-\pi}{6} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$$

II.1) Angles orientés et vecteurs

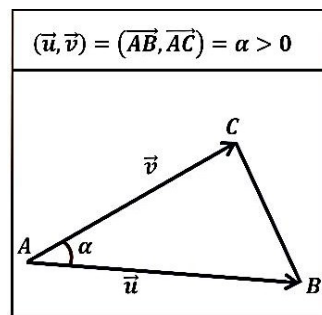
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls. On désigne par l'écriture $(\vec{u}; \vec{v})$, l'angle orienté déterminé par les deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

La mesure principale de l'angle orienté $(\vec{u}; \vec{v})$, sera notée $(\widehat{\vec{u}; \vec{v}})$. On a :

- $(\vec{u}; \vec{v}) = 0$. Si, et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de même sens (angle orienté nul).
- $(\vec{u}; \vec{v}) = \pi$. Si, et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de sens contraires (angle orienté plat).

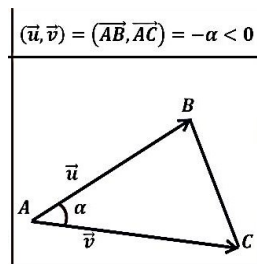
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls et non colinéaires. Soit A un point donné du plan orienté, alors il existe un seul point B tel que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, et il existe un seul point C tel que $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$; $(\vec{u}; \vec{v}) = (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$.

Soit α la mesure de l'angle géométrique $\hat{A}$ du triangle ABC (On rappelle que $\alpha \in]0; \pi[$).



2) Propriétés

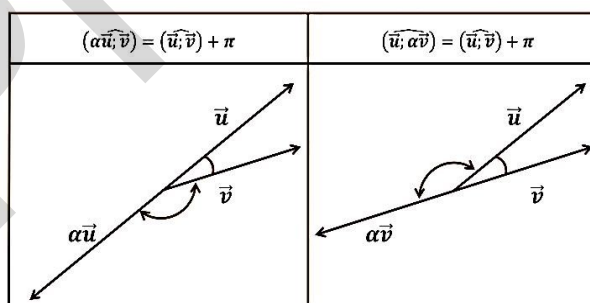
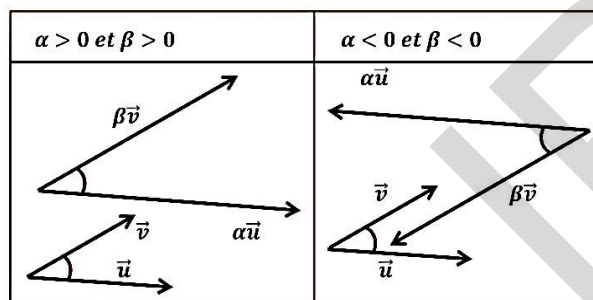
- La mesure principale de l'angle orienté associé à deux vecteurs non nuls, appartient à l'intervalle $]-\pi; \pi]$.
- Pour tous deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$; $(\vec{u}; \vec{v}) = -(\vec{v}; \vec{u})$.
 $(\vec{u}; \vec{v})$ et $(\vec{v}; \vec{u})$ sont deux angles orientés opposés
- Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$; $(\vec{u}; \vec{v}) = (\vec{u}; \vec{w}) + (\vec{w}; \vec{v})$ (Relation de Chasles).
- Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls, soient α et β deux réels non nuls et de même signe ($\alpha > 0$ et $\beta > 0$ ou $\alpha < 0$ et $\beta < 0$)



L'angle $(\vec{u}; \vec{v})$ et l'angle $(\alpha\vec{u}; \beta\vec{v})$ sont de la même orientation (Tous les deux directs, ou tous les deux indirects).

- Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls, soient α et β deux réels non nuls de signes contraires ($\alpha > 0$ et $\beta < 0$ ou $\alpha < 0$ et $\beta > 0$)

L'angle $(\vec{u}; \vec{v})$ et l'angle $(\alpha\vec{u}; \beta\vec{v})$ sont d'orientation contraire (si $(\vec{u}; \vec{v})$ est direct, $(\alpha\vec{u}; \beta\vec{v})$ est indirect, et si $(\vec{u}; \vec{v})$ est indirect, $(\alpha\vec{u}; \beta\vec{v})$ est direct).



Remarque

Si $\alpha < 0$

- $(\alpha\vec{u}; \vec{v}) + (\vec{v}; \vec{u}) = \pi \Rightarrow (\alpha\vec{u}; \vec{v}) = \pi - (\vec{v}; \vec{u}) \Rightarrow (\alpha\vec{u}; \vec{v}) = (\vec{u}; \vec{v}) + \pi$
- $(\vec{v}; \vec{u}) + (\vec{u}; \alpha\vec{v}) = \pi \Rightarrow (\vec{u}; \alpha\vec{v}) = \pi - (\vec{v}; \vec{u}) \Rightarrow (\vec{u}; \alpha\vec{v}) = (\vec{u}; \vec{v}) + \pi$

ABC est un triangle rectangle en A , direct, tel que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow (\vec{u}; \vec{v}) = \frac{\pi}{2}$ (Angle orienté droit).

ABC est un triangle rectangle en A , indirect, tel que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow (\vec{u}; \vec{v}) = -\frac{\pi}{2}$ (Angle orienté droit).

Exemple 11

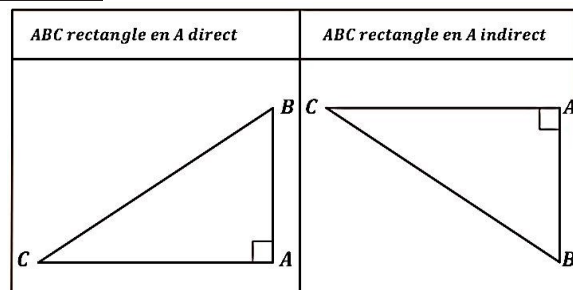
ABC est un triangle tel que ; $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{4}$, et $(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC}) = \frac{-2\pi}{3}$
 I et J étant les points tels que : $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. Calculer $(\overrightarrow{AI}; \overrightarrow{AJ})$, puis montrer que : $(\overrightarrow{AI}; \overrightarrow{AJ}) = \frac{\pi}{4}$

Solution

On a : $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CB}) = \pi$ Or, $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{4}$ et $(\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BA}) = -(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC}) = \frac{2\pi}{3}$;

Donc ; $\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3} + (\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CB}) = \pi$; Donc $(\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CB}) = \pi - \frac{11\pi}{12} = \frac{\pi}{12}$.

On a : $(\overrightarrow{AI}; \overrightarrow{AJ}) = (\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}; \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{4}$.



Exercices Généraux

1. Calculer le sinus, le cosinus et la tangente de chacun des nombres réels suivants :

$$\frac{-5\pi}{2} ; \frac{-121\pi}{6} ; \frac{-1999\pi}{6} ; \frac{29\pi}{4}$$

$$\frac{175\pi}{12} ; \frac{5111\pi}{25} ; \frac{28,5\pi}{4} ; \frac{-6006\pi}{51}.$$

2. Calculer en fonction de $\cos x$ et $\sin x$, les expressions suivantes :

$$A = \cos(\pi + x) + \cos(\pi - x) + \cos(-x)$$

$$B = \sin(\pi + x) + \sin(\pi - x) + \sin(-x)$$

$$C = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)$$

$$D = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + 2\sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) + \sin\left(x + \frac{5\pi}{2}\right).$$

3.1) Quels sont les réels x de $[0 ; 2\pi[$ vérifiant :

$$\cos x = \frac{1}{2} ?$$

2) Même question pour x de $]-\pi ; \pi]$.

3) Quels sont les réels x vérifiant $\cos x = \frac{1}{2} ?$

4.1°) Quels sont les réels x de $[0 ; 2\pi[$ vérifiant

$$\sin x = -\frac{1}{2} ?$$

2°) Même question pour x de $]-\pi ; \pi]$.

5. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes et représenter les images de leurs solutions sur le cercle trigonométrique.

a) $4 \sin^2 x - 3 = 0.$

b) $4 \cos^2 x - 1 = 0.$

c) $5 \sin^2 x + 1 = 0.$

6. On considère un nombre réel x de l'intervalle

$$\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right] \text{ tel que } \sin(x) = \frac{1}{4}.$$

1) Déterminer la valeur exacte de $\cos(x)$.

2) Déterminer la valeur exacte de $\tan(x)$.

7. 1) Déterminer la valeur exacte de $\sin(x)$ avec x un nombre réel de l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2} ; 0\right]$ tel que :

$$\cos(x) = 0,8.$$

2) Déterminer la valeur exacte de $\tan(x)$.

8. Résoudre dans $[0 ; \pi]$ les équations suivantes

a) $\sin(3x - 5\pi) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$

b) $\cos\left(5x - \frac{3\pi}{2}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

c) $\tan(10x - \pi) = \tan\left(7x + \frac{\pi}{3}\right)$

b) $\cos\left(x - \frac{5\pi}{12}\right) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$

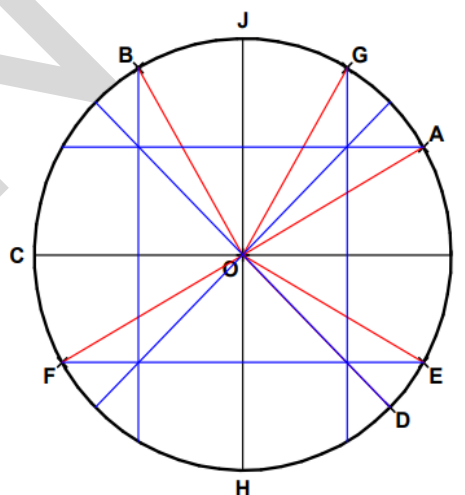
9. Soit $(\mathcal{C})$ un cercle de centre A et B un point de $(\mathcal{C})$ 1) Construire les points C, D, E et F du cercle $(\mathcal{C})$ tels que : $(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}$; $(\overrightarrow{AD} ; \overrightarrow{AB}) = \frac{3\pi}{4}$;

$$(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AE}) = \frac{7\pi}{6} ; (\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AF}) = \frac{-3\pi}{4}$$

2) Déterminer une mesure puis la mesure principale de chacun des angles orientés suivants :

$$(\overrightarrow{AC} ; \overrightarrow{AE}) ; (\overrightarrow{AD} ; \overrightarrow{AE}) ; (\overrightarrow{AF} ; \overrightarrow{AC}) ; (\overrightarrow{AF} ; \overrightarrow{AE}).$$

10. Sur le cercle trigonométrique ci-dessous, déterminer les réels associés aux points A, B, C, D, E, F, G, H, I et J.



11. 1) Construire un triangle direct ABC rectangle en A tel que $BC = 2 AC$

2) Construire deux triangles équilatéraux direct ACD et ABE

3) Donner une mesure en radian des angles orientés suivants :

$$(\overrightarrow{CA} ; \overrightarrow{CB}) ; (\overrightarrow{AD} ; \overrightarrow{AE}) ; (\overrightarrow{AD} ; \overrightarrow{CB}) ; (\overrightarrow{AE} ; \overrightarrow{CB}).$$

12. Sachant que $(\vec{u} ; \vec{v}) = \frac{-3\pi}{4} [2\pi]$, déterminer la mesure principale de $(-2\vec{u} ; 3\vec{v})$; $(12\vec{u} ; -7\vec{v})$; $(-8\vec{v} ; -13\vec{u})$ et $(52\vec{u} ; 44\vec{v})$.

13. Sachant que $(\vec{u} ; \vec{v}) = \frac{-\pi}{7} [2\pi]$ et

$$(\vec{u} ; \vec{w}) = \frac{-\pi}{4} [2\pi].$$

Déterminer la mesure principale de $(-\vec{u} ; \vec{v})$; $(\vec{v} ; \vec{w})$ et $(-\vec{w} ; \vec{v})$.

Chapitre 8 GENERALITES SUR LES FONCTIONS

1) Notion de fonction

a) Définition

Soit $\mathcal{D}$ une partie de $\mathbb{R}$. f est une fonction de la variable réelle x définie sur $\mathcal{D}$, signifie que f est un procédé qui permet d'associer à tout réel $x \in \mathcal{D}$, un réel unique y noté $f(x)$.

b) Notations et expressions

On note ; $f : x \mapsto y = f(x)$ ou $f(x) = y$. On lit " y est l'image de x par f " ou, " f associe à le réel y ".
 y est appelé image de x , x est appelé antécédent y .

Exemple 1

A. Dans cet exercice on demande de traduire les phrases suivantes par des égalités du type $f(a) = b$.

- Un antécédent de 5 par f est -2.
- L'image de 3 par f est nulle.
- La courbe C_f passe par le point $A(1 ; 4)$.
- La courbe C_f coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse -3.

B. Soit $f(x) = -x^2 + 2x - 1$ et $g(x) = \frac{2x-3}{x-1}$.

- Pour chacune des deux fonctions, calculer l'image de 0, de -2 et de $\sqrt{2}$.
- Peut-on calculer l'image de 1 pour les deux fonctions ?
- Déterminer le ou les antécédents de 1 pour chaque fonction.

Solution

A. $f(-2) = 5$; $f(3) = 0$; $f(1) = 4$; $f(-3) = 0$;

B. a. $f(0) = -0^2 + 2 \times 0 - 1 = -1$; $f(-2) = -2^2 + 2 \times (-2) - 1 = -4 - 4 - 1 = -9$;

$$f(\sqrt{2}) = -(\sqrt{2})^2 + 2 \times (\sqrt{2}) - 1 = -2 - 2\sqrt{2} - 1 = -3 - 2\sqrt{2}.$$

$$g(0) = \frac{2 \times 0 - 3}{0 - 1} = \frac{-3}{-1} = 3 ; g(-2) = \frac{2 \times (-2) - 3}{(-2) - 1} = \frac{-7}{-3} = \frac{7}{3} ;$$

$$g(\sqrt{2}) = \frac{2\sqrt{2} - 3}{\sqrt{2} - 1} = \frac{(2\sqrt{2} - 3)(\sqrt{2} + 1)}{(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1)} = \frac{(4 + 2\sqrt{2} - 3\sqrt{2} - 3)}{(2 - 1)} = 1 - \sqrt{2}$$

b. $f(1) = -1^2 + 2 \times 1 - 1 = -1 + 2 - 1 = 0$; donc 1 est un élément de D_f .

Par contre, on ne peut pas calculer $g(1)$, car $g(1)$ n'existe pas et par conséquent 1 n'est pas un élément de D_g .

c. Il suffit de résoudre les équations $f(x) = 1$ et $g(x) = 1$.

$f(x) = 1 \Leftrightarrow -x^2 + 2x - 1 = 1 \Leftrightarrow -(x^2 - 2x + 1) = 1 \Leftrightarrow (x^2 - 2x + 1) = -1 \Leftrightarrow (x - 1)^2 = -1$, cette dernière égalité est impossible, donc 1 n'a pas d'antécédent par f .

$g(x) = 1 \Leftrightarrow \frac{2x-3}{x-1} = 1 \Leftrightarrow 2x - 3 = x - 1 \Leftrightarrow x = -4$, donc les antécédents de 1 par g sont l'élément du singleton $\{-4\}$.

Le sous-ensemble $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}$ est appelé l'ensemble de définition de f ou domaine de définition de f noté aussi D_f .

On peut noter ; $f : \begin{cases} \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) \end{cases}$

N.B. : Pour des raisons pratiques, dans tout ce chapitre, nous dirons fonction lorsqu'il s'agit de fonctions numériques à variables réelles.

Fonctions linéaires. Fonctions affines

Définitions

A. Fonction affine

On appelle fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ toute fonction : $f : x \mapsto ax + b$, a et b étant des réels donnés.

B. cas particuliers

- si $b = 0$, f est une fonction linéaire.
- si $a = 0$, f est une constante.
- si $a = b = 0$, f est une fonction nulle.

Propriétés

A. Sens de variation

- Si $a > 0$, la fonction affine : $x \mapsto ax + b$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et l'on a le tableau de variation suivant :

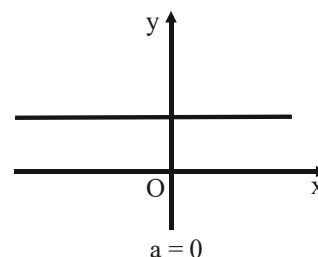
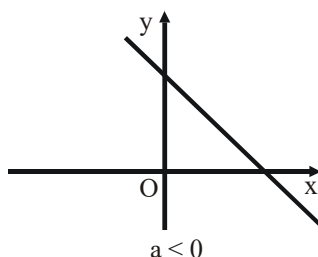
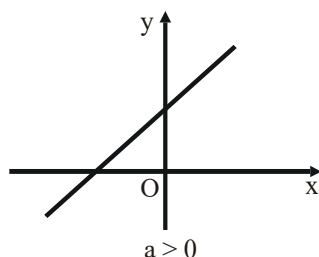
x	$-\infty$	$+\infty$
ax + b		

Si $a < 0$, la fonction affine : $x \mapsto ax + b$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ et l'on a le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	$+\infty$
ax + b		

B. Représentation graphique

La représentation graphique de f est une droite qui sera déterminée par la construction de deux de ses points (par exemples, les points d'intersection avec les axes de coordonnées si ces points existent).



- a est le coefficient directeur de la droite. b est l'ordonnée à l'origine.

$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}; \quad b = f(0).$$

C. Fonction affine et proportionnalité

- Cas des fonctions linéaires : $f(x) = ax$.
 $f(x)$ est proportionnelle à x . le coefficient de proportionnalité est a .
- Cas des fonctions affines : $f(x) = ax + b$.

Pour tous réels x_1 et x_2 distincts : $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = a$.

L'accroissement $f(x_2) - f(x_1)$ est proportionnel à l'accroissement $x_2 - x_1$.

On dit que l'accroissement de l'image est proportionnel à l'accroissement de la variable.

Le coefficient de proportionnalité est a .

Exemple 2

Soit f la fonction définie sur $[-1; 4]$ par : $\begin{cases} \text{si } -1 \leq x \leq 0, \text{ alors } f(x) = -2x \\ \text{si } 0 \leq x \leq 4, \text{ alors } f(x) = x \end{cases}$

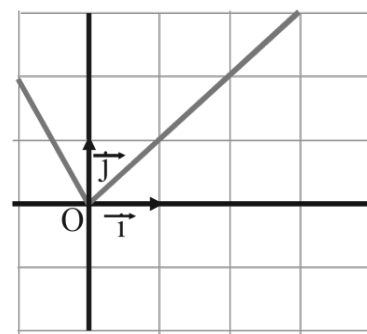
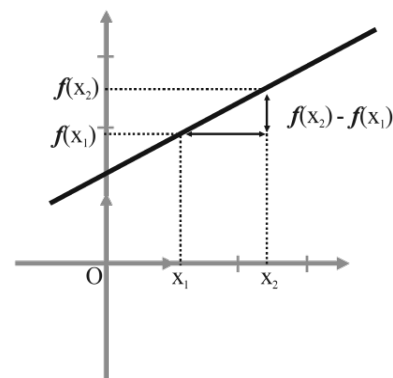
- Résoudre $f(x) = 1$.
- Résoudre $f(x) = 3$.
- Vérifier graphiquement les résultats.

Solution

a) $f(x) = 1 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = -\frac{1}{2}$;

b) $f(x) = 3 \Leftrightarrow x = 3$.

c) On observe ces solutions sur la représentation ci-dessus.



Remarque

L'ensemble de définition d'une fonction f est en général donné par un énoncé de la forme ;

« Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0; 1]$ par : $f(x) = x^2$ ».

Cet énoncé impose $\mathcal{D} = [0; 1]$ comme ensemble de définition pour la fonction $f : x \mapsto x^2$.

Si l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ n'est pas explicité, alors $\mathcal{D}$ est l'ensemble des réels x pour lesquels $f(x)$ existe.

Exemple 3

La fonction ; $f : x \mapsto x^3 + 5$ est définie sur $\mathbb{R}$.

La fonction ; $g : x \mapsto \frac{x-7}{x+3}$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$. La fonction ; $h : x \mapsto \sqrt{x}$ est définie sur $[0; +\infty[$.

Exemple 4

Donner les ensembles de définition de chacune des fonctions suivantes :

$$f(x) = \frac{-5x^2 + 4x + 1}{x(x-3)(x+2)}; \quad g(x) = \sqrt{3x^2 + 5x - 2}.$$

Solution

$f(x) = \frac{-5x^2 + 4x + 1}{x(x-3)(x+2)}$ est définie pour $x(x-3)(x+2) \neq 0$.

C'est-à-dire pour ; $x \neq 0, x \neq -2$ et $x \neq 3 \Rightarrow \mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-2; 0; 3\}$

$g(x) = \sqrt{3x^2 + 5x - 2}$ est définie pour $3x^2 + 5x - 2 \geq 0$. On résout l'équation : $3x^2 + 5x - 2 = 0$.

$$\Delta = 25 - 4 \times 3 \times (-2) = 49 \Rightarrow \Delta > 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 7 \quad x_1 = \frac{-5-7}{2 \times 3} = \frac{-12}{6} = -2; \quad x_2 = \frac{-5+7}{2 \times 3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

x	$-\infty$	-2	$\frac{1}{3}$	$+\infty$	
$3x^2 + 5x - 2$	+	0	-	0	+

A partir du tableau de l'étude des signes, on a : $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus]-2; \frac{1}{3}[$

Exemple 5

Indiquer l'ensemble de définition D de chacune des fonctions suivantes :

a) $x \mapsto 2x^2 + \frac{1}{x^2}$; $x \mapsto x + \frac{1}{x}$; $x \mapsto x^2 + \frac{1}{x}$; $x \mapsto \frac{x^2+1}{x^3-x}$; $x \mapsto 2x^2 + \frac{|x|}{x^2+1}$.

b) $x \mapsto \sqrt{-x}$; $x \mapsto \sqrt{x} \times \sqrt{3x+1}$; $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{|x|}}$; $x \mapsto \sqrt{1-x}$; $x \mapsto \frac{2x}{\sqrt{3x+7}}$; $(3-2x)(5x+1)$.

Solution

La fonction	Son ensemble de définition	La fonction	Son ensemble de définition
$x \mapsto 2x^2 + \frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$	$x \mapsto \sqrt{-x}$	$\mathbb{R}_-$
$x \mapsto x + \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$x \mapsto \sqrt{x} \times \sqrt{3x+1}$	$\mathbb{R}_+ \cap \left[\frac{-1}{3}; +\infty \right[= \mathbb{R}_+$
$x \mapsto x^2 + \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{ x }}$	$\mathbb{R}^*$
$x \mapsto \frac{x^2+1}{x^3-x}$	$\mathbb{R} \setminus \{-1; 0; 1\}$	$x \mapsto \sqrt{1-x}$	$] -\infty; 1]$
$x \mapsto 2x^2 + \frac{ x }{x^2+1}$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{2x}{\sqrt{3x+7}}$	$\left] \frac{-7}{3}; +\infty \right[$
		$x \mapsto (3-2x)(5x+1)$	$\mathbb{R}$

2) La représentation graphique d'une fonction

Soit $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan $\mathcal{P}$.

Soit f une fonction définie sur un ensemble $\mathcal{D}$.

La représentation graphique $\mathcal{C}$ de f est l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que $x \in \mathcal{D}$ et $y = f(x)$.

$\mathcal{C}$ est appelée la courbe représentative de f dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

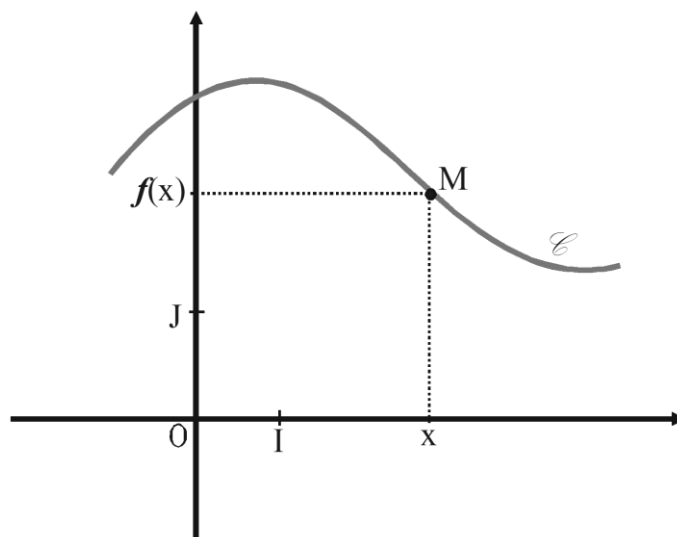
Notation

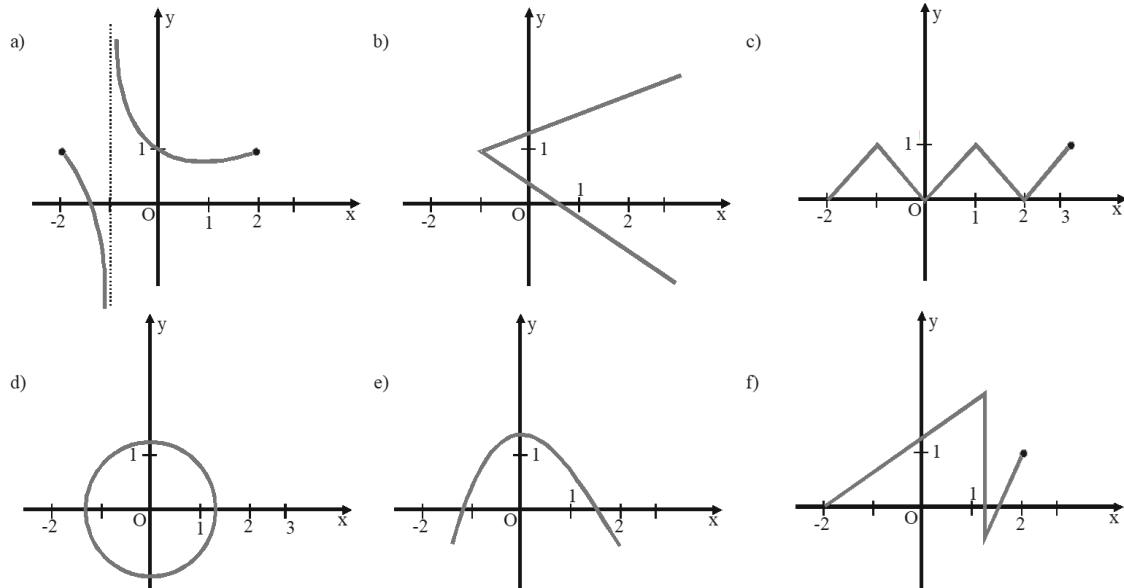
La courbe $\mathcal{C}$ de f est notée $\mathcal{C}_f$;

$$\mathcal{C}_f = \{M(x, y) / x \in \mathcal{D}_f \text{ et } y = f(x)\}$$

Exemple 6

Reconnaître les courbes représentant des fonctions, puis donner l'ensemble de définition des fonctions suivantes.





Solution

Courbes définissant des fonctions	Ensembles de définition associés
a)	$[-2 ; 2] \setminus \{-1\}$
c)	$[-2 ; 3]$
e)	$\mathbb{R}$

3) Éléments de symétrie d'une courbe :

a) Courbe symétrique par rapport à un point

Soit $A(a; b)$ un point du plan

A est le centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$, si et seulement si pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $2a - x \in \mathcal{D}_f$ et $f(2a - x) + f(x) = 2b$

Si O (origine du repère) est le centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$, alors, on a ;

$$f(2 \times 0 - x) + f(x) = 2 \times 0 \Rightarrow f(-x) + f(x) = 0 \Rightarrow f(-x) = -f(x)$$

Définition

Une fonction f est dite impaire si, et seulement si elle admet O (le point d'origine) comme centre de symétrie.

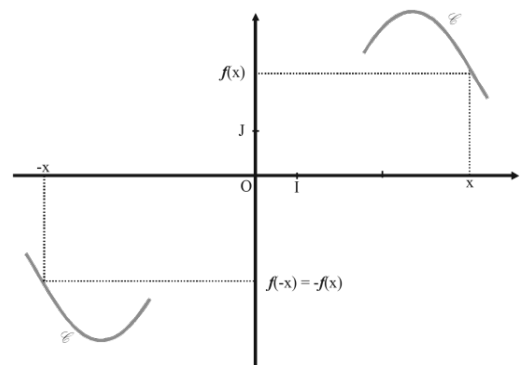
C'est -à-dire si f une fonction définie sur un ensemble D de réels.

f est impaire si, et seulement si :

pour tout $x \in D$, $-x \in D$ et $f(-x) = -f(x)$.

Remarque

Dans un repère $(O; I; J)$, la courbe représentative $\mathcal{C}$ d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine du repère



Exemple 7

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$ est impaire.

La fonction g définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g(x) = \frac{1}{x}$ est impaire.

b) Courbe symétrique par rapport à un axe vertical

Soit Δ une droite d'équation $x = a$

Δ est l'axe de symétrie de $\mathcal{C}_f$, si et seulement si pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $2a - x \in \mathcal{D}_f$ et $f(2a - x) = f(x)$

Si la droite d'équation $x = 0$

(axe des ordonnées) est l'axe de symétrie de $\mathcal{C}_f$, alors, on a ;

$$f(2 \times 0 - x) = f(x) \Rightarrow f(-x) = f(x) \Rightarrow f(-x) = f(x)$$

Définition

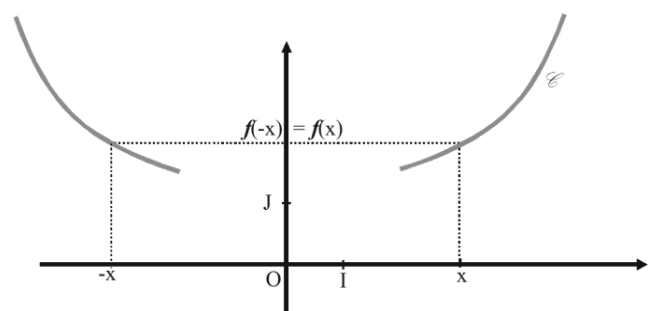
Une fonction f est dite paire si, et seulement si elle admet

yOy' (axe des ordonnées) comme axe de symétrie.

C'est -à-dire si ; Soit f une fonction définie sur un ensemble D de réels.

f est paire si, et seulement si : pour tout

$x \in D$, $-x \in D$ et $f(-x) = f(x)$.



Exemple 8

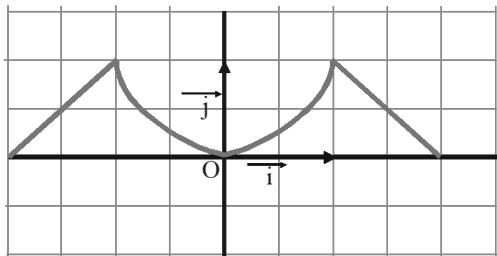
La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ est paire.

La fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 3x^4 - x^2 + 1$ est paire.

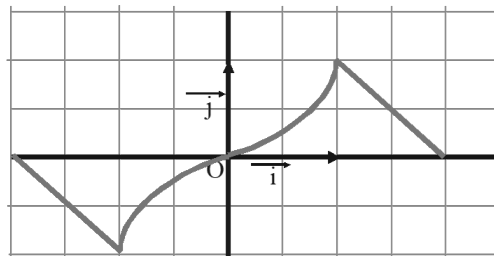
Dans un repère $(O; I; J)$, la courbe représentative C d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Conclusion :

Si f est paire, alors
sa courbe est symétrique par rapport
à l'axe des ordonnées.



Si f est impaire, alors
sa courbe est symétrique par rapport
à l'origine du repère.



Exemple 9

Etudier la parité des fonctions données dans l'exemple 5..

Solution

Parmi les fonctions données dans l'exemple 5. Le tableau suivant donne la parité de ceux qui sont paires ou impaires

La fonction	Type de parité	La fonction	Type de parité
$x \mapsto 2x^2 + \frac{1}{x^2}$	Paire	$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{ x }}$	Paire
$x \mapsto x + \frac{1}{x}$	Impaire	$x \mapsto \frac{x^2 + 1}{x^3 - x}$	Impaire
$x \mapsto 2x^2 + \frac{ x }{x^2 + 1}$	Paire		

4) Fonctions périodiques et période d'une fonction

Définition

Une fonction f est dite périodique, s'il existe $T \in \mathbb{R}_+$ tel que ;

$$\forall x \in \mathcal{D}_f \text{ et } x + T \in \mathcal{D}_f \text{ et } f(x + T) = f(x)$$

T est appelée la période de f .

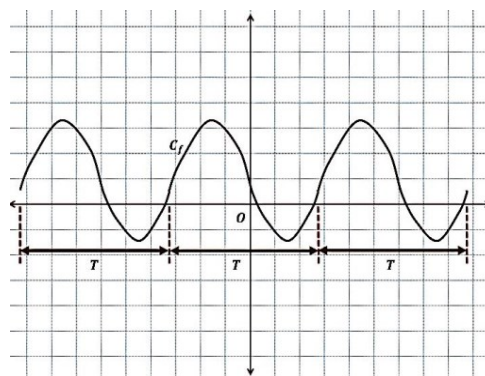
Exemple 10

On considère les fonctions trigonométriques ;

$$f(x) = \sin x \Rightarrow T = 2\pi$$

$$f(x) = \cos x \Rightarrow T = 2\pi$$

$$f(x) = \tan x \Rightarrow T = \pi$$



Expression de langage

Lorsqu'une fonction f est de période π , on dit que f est π -périodique ;

Lorsqu'une fonction f est de période 2π , on dit que f est 2π -périodique, etc.

5) Domaine d'étude d'une fonction

1° Lorsqu'une fonction est paire et définie sur $\mathbb{R}$, alors sa courbe graphique présente une symétrie par rapport à l'axe des ordonnées. Il suffit donc de l'étudier sur la moitié de son domaine de définition $[0; +\infty[$ et compléter la courbe en procédant par symétrie autour de (yOy') .

2° Lorsqu'une fonction est impaire et définie sur $\mathbb{R}$, alors sa courbe graphique présente une symétrie par rapport à l'origine. Il suffit donc de l'étudier sur la moitié de son domaine de définition $[0; +\infty[$ et compléter la courbe en procédant par symétrie autour de O .

3° Lorsqu'une fonction est périodique, alors sa courbe graphique présente une répétition sur chaque période.

Il suffit donc de l'étudier sur une période $[0; T[$ de son domaine de définition et compléter la courbe en procédant par reproduction, ou translations successives de vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} kT \\ 0 \end{pmatrix}$, où $k \in \mathbb{Z}$.

6) Variation d'une fonction et extrémums

a) Sens de variations

a- Croissance d'une fonction

On dit qu'une fonction f est croissante sur un intervalle I de son domaine de définition $\mathcal{D}$, lorsque ;

La fonction f fait correspondre à des valeurs (*antécédents*) de plus en plus grandes, des images de plus en plus grandes.

C'est-à-dire ; f est croissante sur I si ; $\forall x_1; x_2 \in I$ tels que $x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

Ou encore ; $x_2 - x_1 \geq 0 \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) \geq 0$

On dit qu'une fonction f est strictement croissante sur un intervalle I de son domaine de définition $\mathcal{D}$, lorsque ;

$\forall x_1; x_2 \in I$ tels que $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ Ou encore ; $x_2 - x_1 > 0 \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) > 0$

b- Décroissance d'une fonction

On dit qu'une fonction f est décroissante sur un intervalle I de son domaine de définition $\mathcal{D}$, lorsque ;

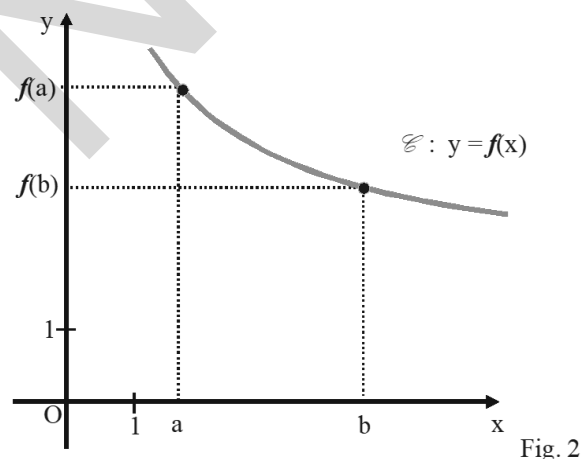
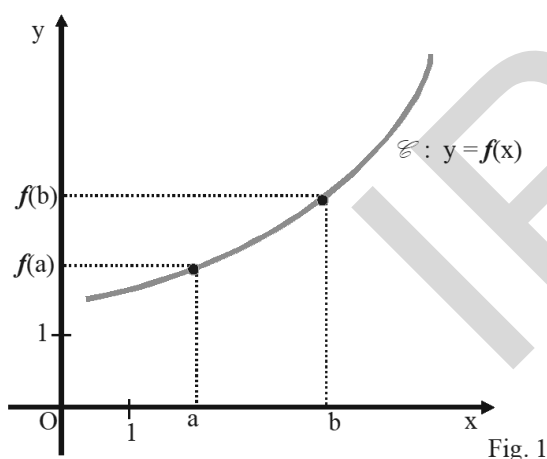
La fonction f fait correspondre à des valeurs (*antécédents*) de plus en plus grandes, des images de plus en plus petites.

C'est-à-dire ; f est décroissante sur I si ; $\forall x_1; x_2 \in I$ tels que $x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

Ou encore ; $x_2 - x_1 \geq 0 \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) \leq 0$

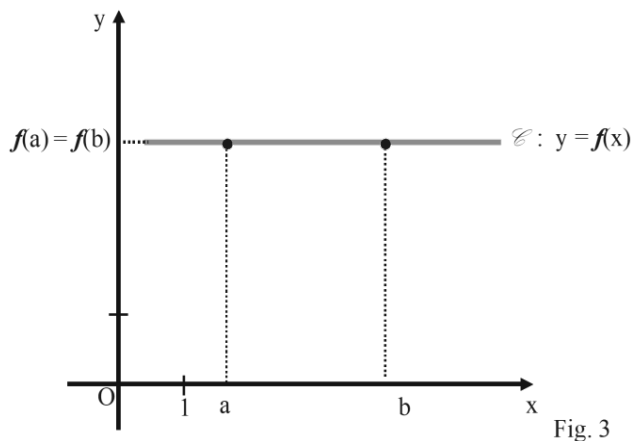
On dit qu'une fonction f est strictement décroissante sur un intervalle I de son domaine de définition $\mathcal{D}$, lorsque ;

$\forall x_1; x_2 \in I$ tels que $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ Ou encore ; $x_2 - x_1 > 0 \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) < 0$



On dit qu'une fonction f est **constante** sur un intervalle I de son domaine de définition $\mathcal{D}$, lorsque ;

$\forall x_1; x_2 \in I$ tels que $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$ Ou encore ; $x_2 - x_1 > 0 \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) = 0$.



Résumé

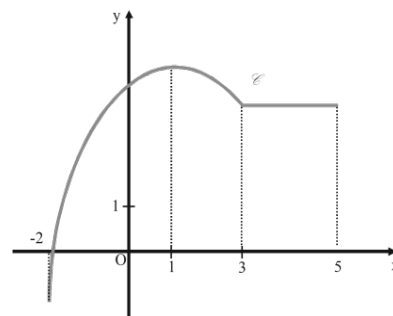
Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

- f est strictement croissante sur I si, et seulement si : Pour tous a et b éléments de I , si $a < b$ alors $f(a) < f(b)$ (fig. 1)
- f est croissante sur I si, et seulement si : Pour tous a et b éléments de I , si $a \leq b$ alors $f(a) \leq f(b)$.
- f est strictement décroissante sur I si, et seulement si : Pour tous a et b éléments de I , si $a < b$ alors $f(a) > f(b)$. (fig. 2)
- f est décroissante sur I si, et seulement si : Pour tous a et b éléments de I , si $a \leq b$ alors $f(a) \geq f(b)$,
- f est constante sur I si, et seulement si : Pour tous a et b éléments de I , $f(a) = f(b)$, (fig. 3)

Exemple 11

La courbe C de la figure ci-contre est la courbe représentative d'une fonction f qui est :

- strictement croissante sur $[-2; 1]$;
- strictement décroissante sur $[1; 3]$;
- constante sur $[3; 5]$.



Exemple 12

Soit f la fonction dont le tableau de variation est donné ci-dessous.

x	-2	2	5	10
$f(x)$	2	5	0	6

- Décrire les variations de f .
- Préciser, s'ils existent, les extremums de f sur son ensemble de définition.

Solution

1°) f est croissante sur $[-2; 2]$; décroissante sur $[2; 5]$; croissante sur $[5; 10]$.

2°) f admet les nombres 5 et 6 en tant que maximums relatifs aux intervalles $[-2; 2]$ et $[5; 10]$.

Elle admet aussi 2 et 0 en tant que minimums relatifs aux intervalles $[-2; 2]$ et $[5; 10]$.

c- Etude des graphiques de fonctions

Quand on connaît l'écriture d'une fonction, on peut préciser son ensemble de définition et déterminer son sens de variation. On complète ensuite un tableau de valeurs pour faire sa représentation graphique.

Réciproquement, on peut partir de la représentation graphique d'une fonction pour trouver son ensemble de définition et déduire son tableau de variation.

On peut également utiliser les représentations graphiques de fonctions pour résoudre des équations ou des inéquations.

Lire les images et les antécédents d'un nombre sur une courbe de fonction

Exemple 13

Ici le tableau de valeurs de la fonction : $f(x) = x^2 - 4x - 4$

Chaque couple $(x; f(x))$ de ce tableau est représenté par un point sur la courbe.

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$y = f(x)$	8	1	-4	-7	-8	-7	-4	1	8

Nous avons la courbe représentative de f , définie par ;

$f(x) = x^2 - 4x - 4$ Représentée dans un repère orthonormé.

Cette fonction est un polynôme du second degré, et sa courbe est une parabole

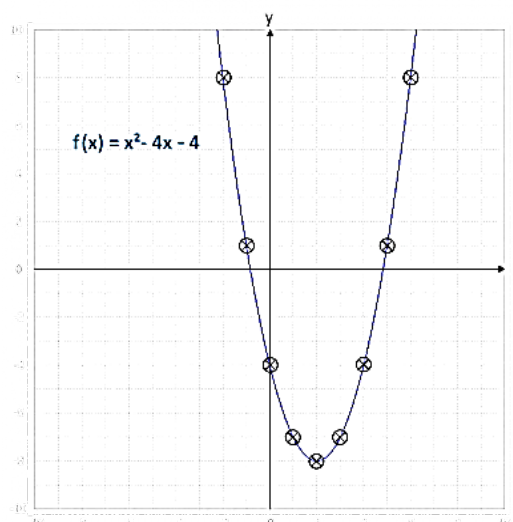
8 est l'image de -2 par f . -4 est l'image de 4 par f . 2 est

l'antécédent de -8 par f . -2 et 6 sont les antécédents de 8 par f

Lire l'ensemble de définition sur la courbe d'une fonction

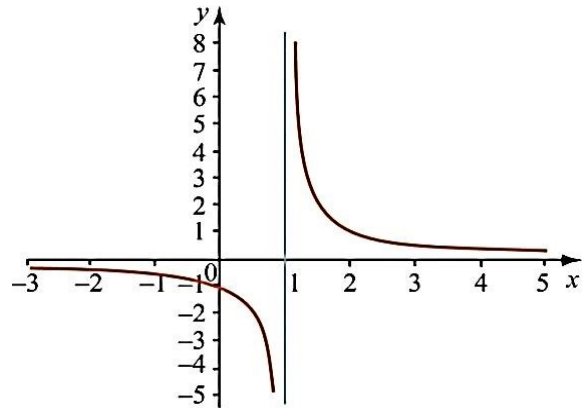
Sur l'axe horizontal, on lit les abscisses des points de la courbe.

L'ensemble de définition est l'ensemble de ces abscisses. Il s'écrit sous la forme d'un intervalle ou d'une réunion d'intervalles.



Exemple 14

La représentation graphique ci-contre est formée de points dont l'abscisse est comprise entre -3 et 5 , le nombre 1 étant exclu. Elle représente une fonction définie sur la réunion des intervalles : $]-3; 1[\cup]1; 5[$.



Etablir le tableau de variation d'une fonction à partir de sa courbe

Une fonction est croissante sur un intervalle I , si, en parcourant la courbe de gauche à droite, les images en ordonnées augmentent.

Une fonction est décroissante sur un intervalle I , si, en parcourant la courbe de gauche à droite, les images en ordonnées diminuent.

Une fonction est constante sur un intervalle I lorsque sa représentation graphique est un segment horizontal.

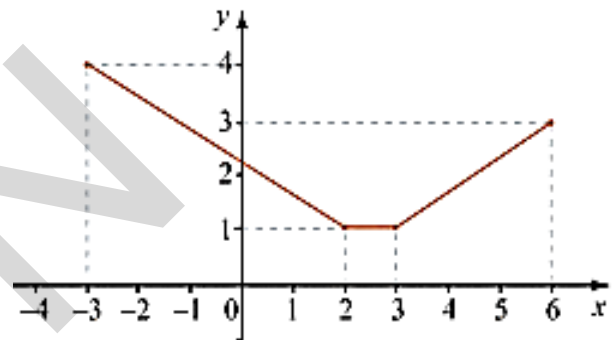
Exemple 15

La ligne brisée ci-contre représente une fonction f :

- décroissante sur l'intervalle ; $[-3; 2]$;
- constante sur l'intervalle ; $[2; 3]$;
- croissante sur l'intervalle ; $[3; 6]$.

Elle atteint son minimum 1 sur l'intervalle ; $[2; 3]$.

On résume ces informations dans un tableau de variation :



x	-3	2	3	6
<i>sens de variation de f</i>	4	1	1	3

Lire les solutions d'une équation sur une courbe de fonction

- Les solutions de l'équation $f(x) = k$ sont les abscisses des points d'intersection de la courbe représentant la fonction f avec la droite horizontale d'équation $y = k$.

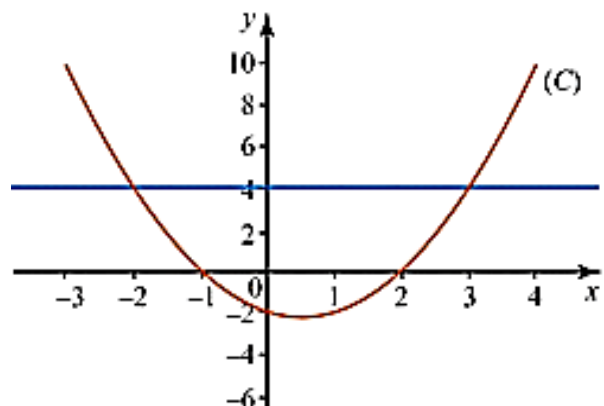
Dans le cas particulier de l'équation $f(x) = 0$, les solutions sont les abscisses des points d'intersection de la courbe avec l'axe des abscisses.

Exemple 16

La courbe (C) ci-contre représente une fonction f .

L'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = 4$ est : $S = \{-2; 3\}$.

L'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = 0$ est : $S = \{-1; 2\}$.



b) Le taux d'accroissement (de variations) d'une fonction

Définition

Soit $\mathcal{D}_f$ le domaine de définition d'une fonction numérique f , soit $I \subset \mathcal{D}_f$, et $x_1, x_2 \in I$ tels que $x_1 \neq x_2$, on appelle taux d'accroissement de la fonction f sur l'intervalle I que l'on note Δf ou T , le nombre réel défini par ;

$$T = \Delta f = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$$

Si $\Delta f > 0$ alors f est croissante sur I ,

Si $\Delta f < 0$ alors f est décroissante sur I ,

Si $\Delta f = 0$ alors f est constante sur I ,

Remarque

Une fonction est dite strictement croissante lorsque ; $\forall x_1, x_2 \in \mathcal{D}_f \Rightarrow \Delta f > 0$

Une fonction est dite strictement décroissante lorsque ; $\forall x_1, x_2 \in \mathcal{D}_f \Rightarrow \Delta f < 0$

Une fonction est dite constante lorsque ; $\forall x_1, x_2 \in \mathcal{D}_f \Rightarrow \Delta f = 0$

c) Extrémum et extremum relatif (local)

a- Maximum

Définition

Soit f une fonction numérique et $\mathcal{D}_f$ son domaine de définition, et soit $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) = M$.

On dit que M est le maximum de f sur $\mathcal{D}_f$ lorsque ; $\forall x \in \mathcal{D}_f \Rightarrow f(x) \leq M$

b- Maximum relatif ou local

Définition

Soit f une fonction numérique et $\mathcal{D}_f$ son domaine de définition, et soit $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) = M_1$.

On dit que M_1 est un maximum relatif de f sur un intervalle I de son domaine de définition $\mathcal{D}_f$

lorsque ; $\forall x \in I \Rightarrow f(x) \leq M_1$

c- Minimum

Définition

Soit f une fonction numérique et $\mathcal{D}_f$ son domaine de définition, et soit $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) = m$.

On dit que m est le minimum de f sur $\mathcal{D}_f$ lorsque ; $\forall x \in \mathcal{D}_f \Rightarrow f(x) \geq m$

d- Minimum relatif ou local

Définition

Soit f une fonction numérique et $\mathcal{D}_f$ son domaine de définition, et soit $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) = m_1$.

On dit que m_1 est un minimum relatif de f sur un intervalle I de son domaine de définition $\mathcal{D}_f$

lorsque ; $\forall x \in I \Rightarrow f(x) \geq m_1$

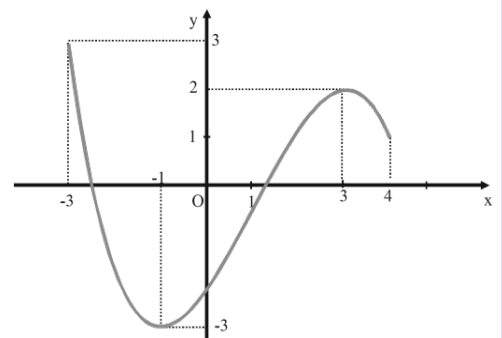
Résumé

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et soit $x_0 \in I$.

- f présente un maximum sur I en x_0 si, et seulement si, pour tout $x \in I$, $f(x) \leq f(x_0)$.
- f présente un minimum sur I en x_0 si, et seulement si, pour tout $x \in I$, $f(x) \geq f(x_0)$.

Exemple 17

Sur la figure ci-contre, $\mathcal{C}$ est la courbe représentative d'une fonction f définie sur $I = [-3 ; 4]$. Sur l'intervalle $[-3 ; 4]$, f présente : un maximum en -3, qui est égal à 3 ; un minimum en -1, qui est égal à -3 ; De plus, sur l'intervalle $[1 ; 4]$ par exemple, f présente un maximum en 3, qui est égal à 2.



7) fonctions algébriques de base

Définition

Sont appelées fonctions algébriques de base ou de référence, les fonctions suivantes :

Les fonctions linéaires c'est-à-dire, toute fonction ayant la forme ; $f(x) = ax$ ($a \in \mathbb{R}^*$).

Les fonctions "carré" c'est-à-dire, toute fonction ayant la forme ; $f(x) = x^2$

Les fonctions "cube" c'est-à-dire, toute fonction ayant la forme ; $f(x) = x^3$

Les fonctions "inverse" c'est-à-dire, toute fonction ayant la forme ; $f(x) = \frac{a}{x}$ ($a \in \mathbb{R}^*$).

a) Les étapes de l'étude et de la construction de la courbe d'une fonction

L'étude et la construction de la courbe d'une fonction comprend les étapes suivantes :

- a- Détermination de son domaine de définition.
- b- Détermination de son domaine d'étude, en étudiant sa parité et sa période.
- c- Détermination de sa variation, étape qui comprend ;
 - Le calcul de son taux d'accroissement.
 - Le dressage de son tableau de variation.
 - Détermination des extrema s'ils existent.
- d- Sa représentation graphique, étape qui comprend ;
 - L'établissement d'un tableau de valeurs de la fonction.
 - La construction de sa courbe graphique.

b) Fonction carré

Exemple 18

Soit la fonction : $f(x) = x^2$

Etude et représentation graphique de f

a- Domaine de définition

La fonction $f(x) = x^2$ est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$; $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$

b- Domaine d'étude

Parité

$$\forall x \in \mathbb{R}, -x \in \mathbb{R} \text{ et } f(-x) = (-x)^2 = (-x)(-x) = x^2 = f(x) \Rightarrow f(-x) = f(x)$$

f est paire et admet donc (yOy') comme axe de symétrie.

On peut donc l'étudier sur l'intervalle $[0; +\infty[$ et compléter sa courbe en procédant par symétrie par rapport à (yOy') .

c- Variations

• Taux d'accroissement

Quels que soient $x_1, x_2 \in \mathcal{D}_f$, on a ;

$$T = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1 - x_2} = \frac{(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)}{x_1 - x_2} = (x_1 + x_2) \Rightarrow T = x_1 + x_2$$

Si $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow T > 0 \Rightarrow f \nearrow$ sur $\mathbb{R}_+$

• Tableau de variation

x	0	$+\infty$
T		+
$f(x)$	0	$+\infty$

• Extrémums

La fonction f est symétrique par rapport à (yOy') , donc, 0 est un minimum de f .

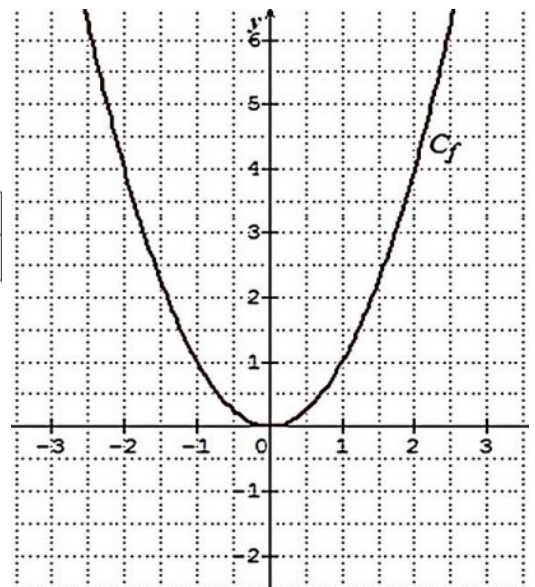
d- Représentation graphique

• Tableau de valeurs

x	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	0	1	4	9	16	25	36

• Courbe de f .

Dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, la courbe représentative de la fonction $f(x) = x^2$ est une parabole.



c) Fonction cube

Exemple 19

$$f(x) = x^3$$

Etude et représentation graphique de f

a- Domaine de définition

La fonction $f(x) = x^3$ est définie pour tout $x \in \mathbb{R} \Rightarrow \mathcal{D}_f = \mathbb{R}$

b- Domaine d'étude

Parité

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -x \in \mathbb{R} \text{ et } f(-x) = (-x)^3 = (-x)(-x)(-x) = -(x^3) = -f(x) \Rightarrow f(-x) = -f(x)$$

La fonction $f(x) = x^3$ est impaire. Sa courbe admet l'origine O comme centre de symétrie.

On peut donc l'étudier sur l'intervalle $[0; +\infty[$ et compléter sa courbe en procédant par symétrie par rapport à O .

c- Variations

• Taux d'accroissement

Quels que soient $x_1, x_2 \in \mathcal{D}_f$, on a ;

$$T = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{x_1^3 - x_2^3}{x_1 - x_2} = \frac{(x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2)}{x_1 - x_2} \Rightarrow T = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$$

Si $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow T > 0 \Rightarrow f \nearrow$ sur $\mathbb{R}_+$

• Tableau de variation

x	0	$+\infty$
T		+
$f(x)$	0	$+\infty$

• Extrémums

Comme la fonction f est strictement croissante sur son domaine de définition, elle n'a donc pas d'extrémums.

d- Représentation graphique

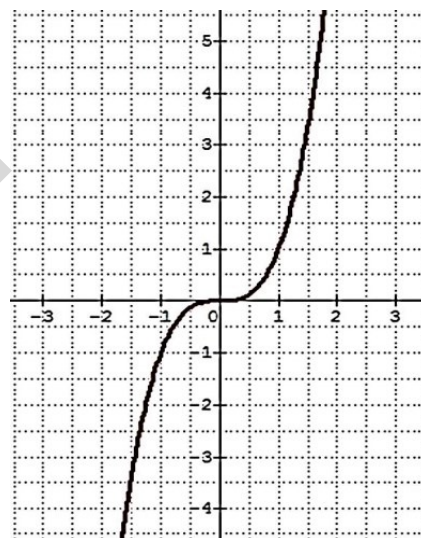
• Tableau de valeurs

x	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	0	1	8	27	64	125	216

• Courbe de f

Dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, la représentation graphique de la fonction

$f(x) = x^3$ est la courbe suivante.



d) Fonction racine carrée

Exemple 20

$$f(x) = \sqrt{x}$$

Etude et représentation graphique de f

a- Domaine de définition

La fonction $f(x) = \sqrt{x}$ est définie pour tout $x \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow \mathcal{D}_f = [0; +\infty[= \mathbb{R}_+$

b- Domaine d'étude

Parité

$$\forall x \in \mathcal{D}_f \Rightarrow -x \notin \mathcal{D}_f$$

La fonction $f(x) = \sqrt{x}$ n'est ni paire ni impaire.

Son domaine d'étude est donc égal à son domaine de définition, c'est-à-dire $\mathbb{R}_+$.

c- Variations

• Taux d'accroissement

Quels que soient $x_1, x_2 \in \mathcal{D}_f$, on a ;

$$T = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}}{x_1 - x_2} = \frac{\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}}{(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2})} = \frac{1}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}} \Rightarrow T = \frac{1}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}}$$

$x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow T > 0 \Rightarrow f \nearrow$ sur $\mathbb{R}_+$

- **Tableau de variation**

x	0	$+\infty$
T		+
$f(x)$	0	$+\infty$

- **Extrémums**

La fonction f est strictement croissante dans son domaine de définition n'a de ce ne fait pas d'extrémums.

d- Représentation graphique

- **Tableau de valeurs**

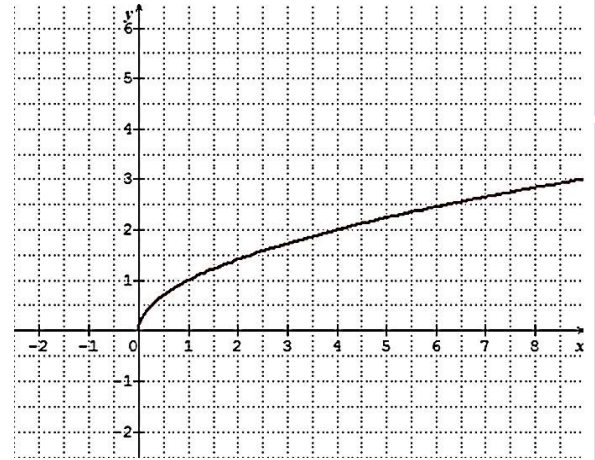
x	0	1	2	4	9	16	25	36
$f(x)$	0	1	$\sqrt{2}$	2	3	4	5	6

- **Courbe de f**

Dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, la représentation

graphique de la fonction

$f(x) = \sqrt{x}$ est une demi-parabole de direction $[Ox)$.



e) Fonction inverse

Exemple 21

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

Etude et représentation graphique de f

a- Domaine de définition

La fonction $f(x) = \frac{1}{x}$

est définie pour tout $x \in \mathbb{R}^* \Rightarrow \mathcal{D}_f = \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

b- Domaine d'étude

Parité

$$\forall x \neq 0, -x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ et } f(-x) = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x} = -\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x) \Rightarrow f(-x) = -f(x)$$

La fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ est impaire. Sa courbe représentative admet donc O comme centre de symétrie.

On peut donc l'étudier sur l'intervalle $[0; +\infty[$ et compléter sa courbe en procédant par symétrie par rapport à O .

c- Variations

- **Taux d'accroissement**

Quels que soient $x_1, x_2 \in \mathcal{D}_f$, on a ;

$$T = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}}{x_1 - x_2} = \frac{(x_2 - x_1)}{(x_1 x_2)(x_1 - x_2)} = \frac{-1}{x_1 x_2} \Rightarrow T = \frac{-1}{x_1 x_2}$$

Si $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+^* \Rightarrow T < 0 \Rightarrow f \searrow$ sur $\mathbb{R}_+^*$

- **Tableau de variation**

x	0	$+\infty$
T		-
$f(x)$	$+\infty$	0^+

- **Extrémums**

La fonction f est strictement décroissante dans son domaine de définition n'a de ce fait pas d'extrémums.

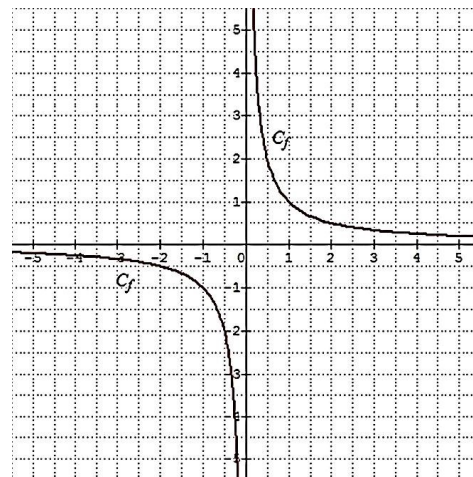
d- Représentation graphique de f

• Tableau de valeurs

x	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
$f(x)$	$\parallel$	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

• Courbe de f .

Dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, la représentation graphique de la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ est une hyperbole.



• Image d'une courbe par une translation (fonctions associées) :

Propriété

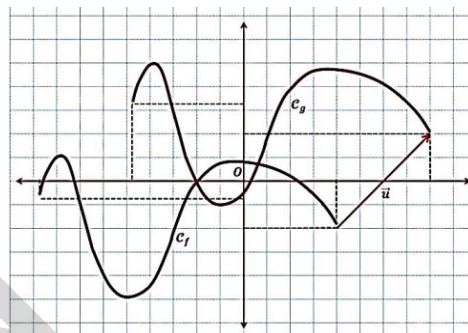
La courbe $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f est l'image de la courbe $\mathcal{C}_g$ d'une fonction g par la translation de vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, si et seulement si ;

$$\forall x \in \mathcal{D}_f, x - a \in \mathcal{D}_g \text{ et } f(x) = b + g(x - a).$$

Cas particuliers

$b = 0 \Rightarrow \vec{u} \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow g(x) = f(x - a) \Leftrightarrow t_{\vec{u}}$ est une translation horizontale.

$a = 0 \Rightarrow \vec{u} \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} \Rightarrow g(x) = b + f(x) \Leftrightarrow t_{\vec{u}}$ est une translation verticale.



8) Les fonctions trigonométriques :

a) La fonction $f(x) = \sin x$

a-Domaine de définition

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.

b- Domaine d'étude

• Périodicité

La fonction f a pour période 2π c'est-à-dire que $\forall x \in \mathbb{R} : f(x + 2\pi) = \sin(x + 2\pi) = \sin x$.

• Parité

La fonction f est impaire car, $f(-x) = \sin(-x) = -\sin x = -f(x)$

Compte-tenu de ce qui précède le domaine d'étude de f est l'intervalle $[0; \pi]$. On étudie f sur la moitié de sa période, puis on complète son graphique sur sa période en opérant par symétrie par rapport à O . On obtient ensuite toute la courbe en procédant à la reproduction de la courbe obtenue, ou par translations répétitives de vecteurs ;

$$\vec{u}_k \begin{pmatrix} 2k\pi \\ 0 \end{pmatrix} \text{ tel } k \in \mathbb{Z}$$

c- Variations

• Croissance et décroissance

Si $0 \leq a \leq b \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin a \leq \sin b \Rightarrow f$ est $\nearrow$ sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

Si $\frac{\pi}{2} \leq a \leq b \leq \pi \Rightarrow \sin a \geq \sin b \Rightarrow f$ est $\searrow$ sur $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

• Tableau de variation sur $[0; \pi]$

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$f(x)$	0	1	0

• Extrémums

Du fait que $-1 \leq \sin x \leq 1$, la fonction f admet un minimum $m = -1$ et un maximum $M = 1$.

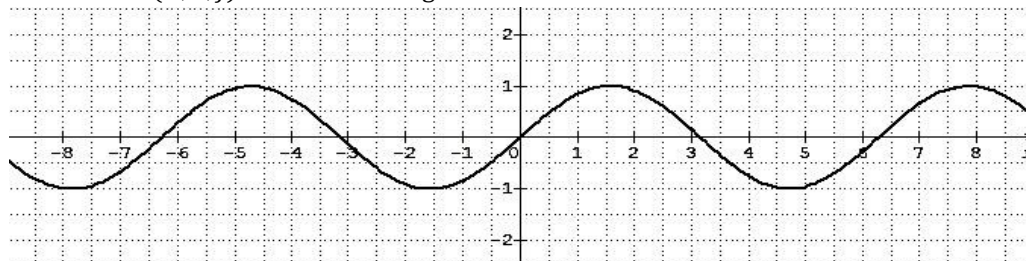
d- Représentation graphique

• Tableau de valeurs

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$f(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

• Courbe de f

On peut tracer la courbe représentative ($\mathcal{C}$) de $\sin x$, point par point sur son ensemble de définition $\mathbb{R}$ dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ et obtenir à la figure ci-dessous.



b) La fonction $f(x) = \cos x$

a-Domaine de définition

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.

b- Domaine d'étude

• Périodicité

La fonction f a pour période 2π c'est-à-dire que $\forall x \in \mathbb{R} : f(x + 2\pi) = \cos(x + 2\pi) = \cos x$.

• Parité

La fonction f est paire car $f(-x) = \cos(-x) = \cos x = f(x)$

Compte-tenu de ce qui précède le domaine d'étude de f est l'intervalle $[0; \pi]$. On étudie f sur la moitié de sa période, puis on complète son graphique sur sa période en opérant par symétrie par rapport à O . On obtient ensuite toute la courbe en procédant à la reproduction de la courbe obtenue, ou par translations répétitives de vecteurs ;

$$\vec{u}_k \begin{pmatrix} 2k\pi \\ 0 \end{pmatrix} \text{ tel } k \in \mathbb{Z}$$

c- Variations

• Croissance et décroissance

Si $0 \leq a \leq b \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos a \geq \cos b \Rightarrow f$ est $\searrow$ sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

Si $\frac{\pi}{2} \leq a \leq b \leq \pi \Rightarrow \cos a \geq \cos b \Rightarrow f$ est $\searrow$ sur $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$

• Tableau de variation sur $[0; \pi]$

x	0	π
$f(x)$	0	-1

• Extrémums

Du fait que $-1 \leq \cos x \leq 1$, la fonction f admet un minimum $m = -1$ et un maximum $M = 1$.

d- Représentation graphique

• Tableau de valeurs

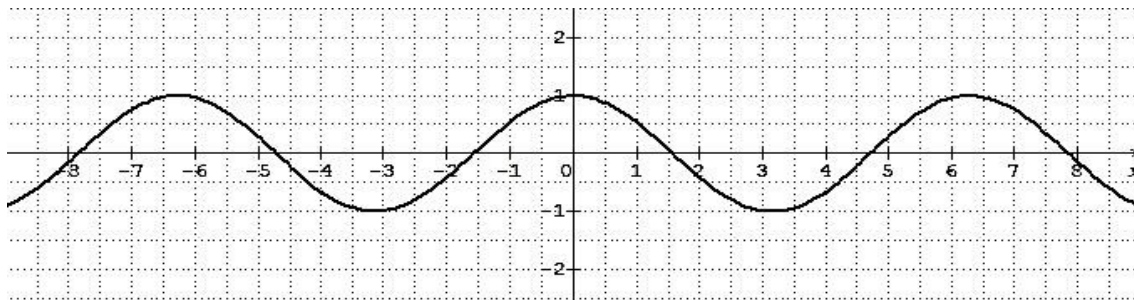
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$f(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1

• Courbe de f

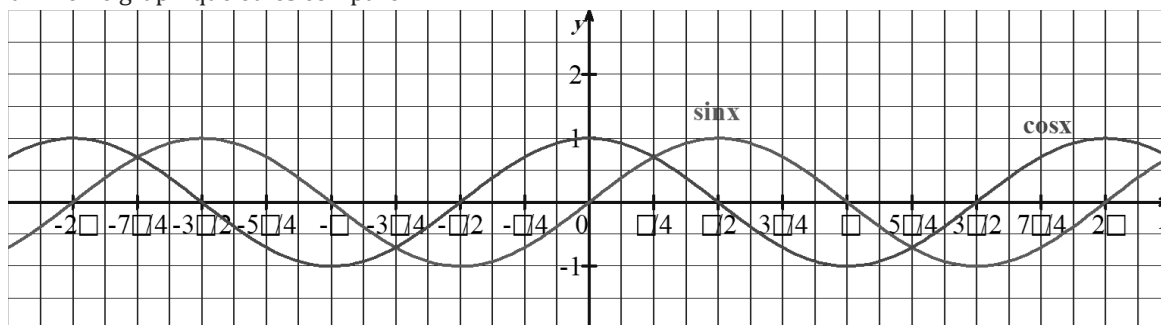
On peut tracer la courbe représentative ($\mathcal{C}'$) de $\cos x$, point par point sur son ensemble de définition $\mathbb{R}$ dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ et obtenir à la figure suivante.

On peut démontrer que la translation de vecteur $\frac{\pi}{2} \vec{i}$ transforme ($\mathcal{C}$) en ($\mathcal{C}'$) .

Donc ($\mathcal{C}'$) est une sinusoïde.



Les fonctions $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \cos x$ sont des fonctions périodiques de période 2π comme nous l'avons vu. Pour vérifier que les deux courbes correspondent à une sinusoïde, on peut représenter graphiquement leurs courbes sur un même graphique et les comparer.



c) La fonction $f(x) = \tan x$

a- Domaine de définition

$$f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

La fonction f est définie pour $\cos x \neq 0$; c'est-à-dire si :

$$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ tel que } k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ tel que } k \in \mathbb{Z} \right\}$$

b- Domaine d'étude

• Périodicité

La fonction f a pour période π c'est-à-dire que

$$\forall x \in \mathbb{R} : f(x + \pi) = \tan(x + \pi) = \frac{\sin(x + \pi)}{\cos(x + \pi)} = \frac{-\sin x}{-\cos x} = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x = f(x)$$

• Parité

$$\text{La fonction } f \text{ est impaire car, } f(-x) = \tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) = -\tan x = -f(x)$$

Compte-tenu de ce qui précède le domaine d'étude de f est l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. On étudie f sur la moitié de sa période, puis, on complète son graphique sur sa période en opérant par symétrie par rapport à O . On obtient ensuite toute la courbe en procédant à la reproduction de la courbe obtenue, ou par translations répétitives de vecteurs ;

$$\vec{u}_k \begin{pmatrix} k\pi \\ 0 \end{pmatrix} \text{ tel } k \in \mathbb{Z}$$

c- Variations

• Croissance et décroissance

$$\text{Si } 0 \leq a \leq b \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 \leq \sin a \leq \sin b, \text{ et } \cos a \geq \cos b$$

$$0 \leq \frac{1}{\cos a} \leq \frac{1}{\cos b} \Rightarrow 0 \leq \frac{\sin a}{\cos a} \leq \frac{\sin b}{\cos b} \Rightarrow 0 \leq \tan a \leq \tan b \Rightarrow f \text{ est } \nearrow \text{ sur } \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$$

• Tableau de variation sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

x	0	$\frac{\pi}{2}$
$\tan x$	0	$+\infty$

d- Représentation graphique

• Tableau de valeurs

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$f(x)$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	

• Courbe de f

La courbe représentative ($\mathcal{C}''$) de $\tan x$, dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ est donnée par la figure suivante.

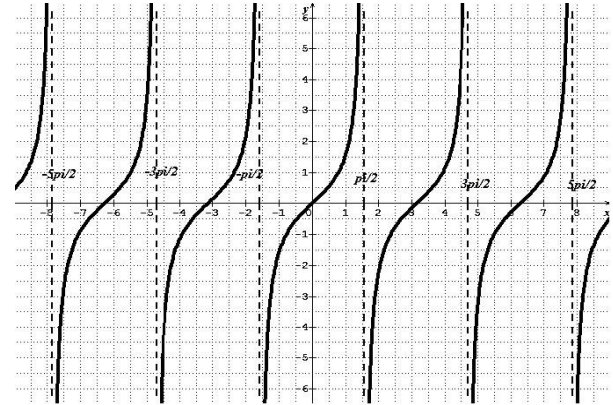
Propriété

Les périodes des fonctions des formes ;

$$f(x) = \sin ax, g(x) = \cos ax \text{ est : } T = \frac{2\pi}{a}$$

Les fonctions des formes ; $h(x) = \tan ax$ sont

périodiques et leurs périodes est : $T = \frac{\pi}{a}$



Remarque

Les fonctions associées par translations ont même sens de variations

9) Fonctions affines sur intervalles

Exemple 22 (fonction partie entière) :

Soit f la fonction partie entière de x définie par ; $E(x)$ d'un nombre réel x c'est le nombre entier n tel que $n \leq x < n + 1$.

$f(x) = E(x) = n$ telle que ; $n \leq x < n + 1$

($E(x)$ est le plus grand entier inférieur ou égal à x , appelée également fonction en escalier).

Etude et représentation graphique de f

$$x \in [-4; -3[\Rightarrow f(x) = -4$$

$$x \in [-3; -2[\Rightarrow f(x) = -3$$

$$x \in [-2; -1[\Rightarrow f(x) = -2$$

$$x \in [-1; 0[\Rightarrow f(x) = -1$$

$$x \in [0; 1[\Rightarrow f(x) = 0$$

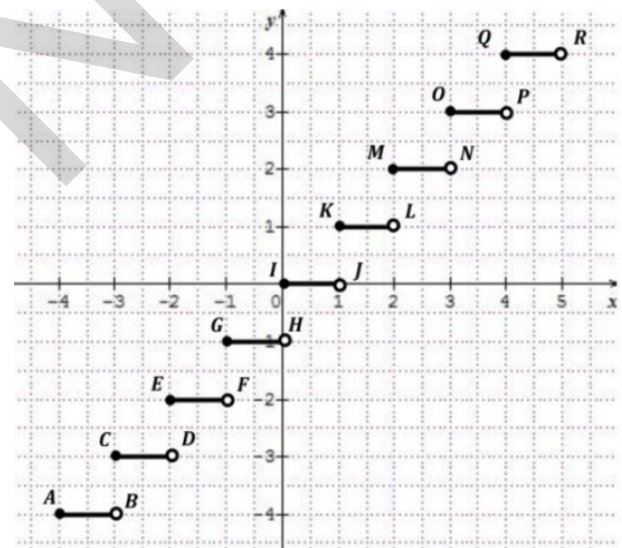
$$x \in [1; 2[\Rightarrow f(x) = 1$$

$$x \in [2; 3[\Rightarrow f(x) = 2$$

$$x \in [3; 4[\Rightarrow f(x) = 3$$

La courbe C_f de f est la réunion des segments de droites :

$$C_f = \dots \cup [AB[\cup [CD[\cup [EF[\cup [GH[\cup [IJ[\cup [KL[\cup [MN[\cup [PO[\cup \dots$$



Exercices Généraux

1. Donner les ensembles de définition de chacune des fonctions suivantes :

$$h(x) = \sqrt{|x|}; \quad j(x) = \sqrt{3x^2 + 4|x|}; \quad l(x) = \sqrt{2|x| - 5}$$

$$p(x) = \frac{2x+1}{\sqrt{|x|-5|}-2}; \quad s(x) = \sqrt{|x^2-4|-8|-1};$$

$$m(x) = \frac{2x+5}{\sqrt{x^2-4}}; \quad n(x) = \frac{3x-7}{\sqrt{3|x|+8}}; \quad q(x) = \sqrt{3x^3 + |x|};$$

$$t(x) = \frac{4x+1}{\sqrt{|x^2-2|-7|}}$$

2. Pour chacune des fonctions rationnelles suivantes, déterminer l'ensemble de définition et simplifier si possible l'expression :

$$A(x) = \frac{x^2}{x^3 + 2x^2}; \quad C(x) = \frac{2}{(x-1)(x-3)} - \frac{1}{(x-2)(x-3)}$$

$$D(x) = \frac{(2x-3)(x-1)^2 - 4(2x-3)}{(x+1)^2(x-3)};$$

$$E(x) = \frac{3}{x} + \frac{5}{x+2} - \frac{1}{x-2} + \frac{4}{x^2-4};$$

$$G(x) = \frac{x + \frac{1}{x} - 1}{\frac{1}{x} - 1} \times \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1};$$

$$B(x) = \frac{6-2x}{x^2-6x+9}; \quad H(x) = \left(\frac{1}{x+2} + \frac{1}{x-2} \right) \times \frac{x^2-4}{2x}$$

3. On donne les fonctions suivantes ;

$$f(x) = 3x - 7; \quad g(x) = 4x^2 + 5x - 2;$$

$$h(x) = 5x^3 - 1 \text{ et } l(x) = -4x + 6.$$

1°) Montrer que f est croissante sur $\mathbb{R}$, g est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et h est croissante sur $\mathbb{R}_-$.

2°) Montrer que l est décroissante sur $\mathbb{R}$.

4. Parmi les fonctions suivantes, quelles sont les fonctions paires, les fonctions impaires et celles qui ne sont ni paires ni impaires ;

$$f: x \mapsto x^2; \quad g: x \mapsto x^3; \quad h: x \mapsto \frac{1}{x};$$

$$j: x \mapsto x + \frac{1}{x}; \quad k: x \mapsto 2x^2 + \frac{3}{x^2};$$

$$l: x \mapsto x^2 + \frac{5}{x}; \quad m: x \mapsto \frac{x^2+1}{x^3-2x}$$

$$n: x \mapsto 2x^2 + \frac{|x|}{x^2-6}; \quad p: x \mapsto \sqrt{-x};$$

$$q: x \mapsto \sqrt{x} \times \sqrt{3x+1}; \quad r: x \mapsto \frac{3}{\sqrt{|x|}}$$

$$s: x \mapsto \sqrt{1-x}; \quad t: x \mapsto \frac{-5x}{\sqrt{3x+5}};$$

$$a: x \mapsto (3-2x)(5x+2).$$

5. Étudier la parité des fonctions suivantes

$$f(x) = \frac{-5x^2-4|x|}{(x-3)(3-x)}; \quad g(x) = \sqrt{3x^2+5x-2}; \quad h(x) = \sqrt{|x|};$$

$$j(x) = \sqrt{3x^2+4|x|}; \quad q(x) = \sqrt{3x^3-|x|};$$

$$m(x) = \frac{2|x|+5}{\sqrt{x^2-4}}; \quad n(x) = \frac{3x-7}{\sqrt{3|x|+8}}; \quad l(x) = \sqrt{2|x|-5}$$

$$k(x) = \sqrt{x^4+3x^2+5|x|}; \quad t(x) = \frac{4|x|+1}{\sqrt{|x^2-2|-7|}}$$

6. Soit f la fonction définie par le tableau :

x	-1	-0,5	0	1	1,5	3
f(x)	2	4	3,5	2	-0,5	-14

Quelles sont les images par f des nombres : 0 ; 1 et 1,5 ?

Quels nombres ont pour image par f le nombre 2 ?

7. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$.

a) Reproduire et compléter le tableau suivant :

x	-1	-0,5	0	0,5	2	4
f(x)						

b) Quels est le nombre dont l'image par f est 4 ?

8. Soit f une fonction définie pour tout réel x sauf $\frac{4}{3}$, par :

$$f(x) = \frac{2x+1}{3x-4}.$$

Déterminer les images par f de 4 ; -2 ; 7 ; 0,5 et 5.

Déterminer les antécédents par f de 2.

Soit C la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé. Déterminer, s'ils existent, les coordonnées des points d'intersections de C avec l'axe des abscisses.

9. Trouver D_f et D_g les domaines de définition f et g sont définies par : $f(x) = 2x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 5x$.

$$g(x) = \frac{2}{x^4} - \frac{3}{x^3} + \frac{4}{x^2} - \frac{5}{x}.$$

10. Dans chacun des cas suivants, déterminer l'ensemble de définition de la fonction f .

a) $f(x) = (7 - \frac{3}{2x})(5x+1);$

b) $f(x) = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{3x+7}}.$

c) $f(x) = \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x-3};$

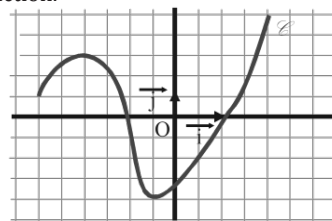
d) $f(x) = \frac{1}{(x+2)(x-3)}.$

e) $f(x) = \frac{1}{|x|+1}$

f) $f(x) = |x|-1$

11. Pourquoi la courbe $\mathcal{C}$, de la figure ci-dessous, représente-t-elle une fonction ?

Soit f cette fonction.



Déterminer ;

a) L'ordonnée du point de $\mathcal{C}$ dont l'abscisse est 1,5 ;

b) Les abscisses des points de $\mathcal{C}$ dont l'ordonnée est -1.

c) Les coordonnées des sommets de $\mathcal{C}$;

d) L'image de -1 par f ;

e) Les antécédents de 3 par f .

12. La courbe $\mathcal{C}$, ci-dessous, représente la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par

$$f(x) = \frac{2x+3}{x-2}.$$

1°) Déterminer graphiquement :

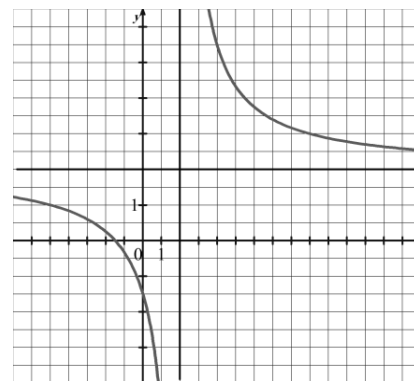
a) Les images de 1 et 11 ;

b) Les antécédents, s'ils existent, de 4, 2 et 0.

2°) a) Calculer les images de 1 et de 11.

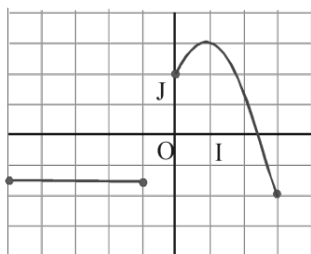
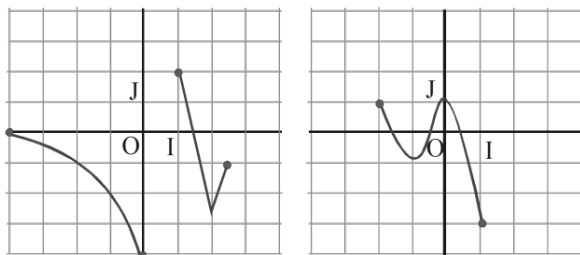
b) Calculer les antécédents de 4 ; 2 ; 0.

c) Soit m un nombre réel quelconque. Calculer les antécédents de m .



13. Les courbes ci-dessous sont des représentations graphiques de fonctions numériques.

Donner l'ensemble de définition de ces fonctions.



14. Associer les tableaux de variation aux courbes représentatives.

1.

x	-3	0	1	2
f(x)	2	0	1	-1

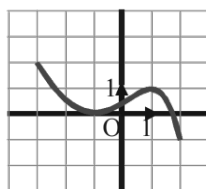
2.

x	-3	0	1	2
f(x)	2	0	1	0

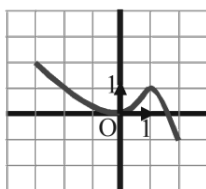
3.

x	-3	-1	1	2
f(x)	2	0	1	-1

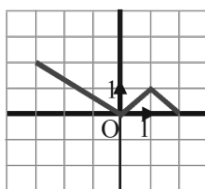
a



b)



c)



Quels nombres ont pour image par f le nombre 2 ?

15. Soit $f: x \mapsto x^2 + 2x - 1$.

Soit a et b deux réels. Démontrer que :

$$f(a) - f(b) = (a - b)(a + b + 2).$$

En déduire que f est décroissante sur $]-\infty; -1]$ et que f est croissante sur $[-1; +\infty[$.

16. Soit $f: x \mapsto \frac{-2}{x^2}$.

Montrer, en utilisant les règles sur les inégalités que la fonction f est croissante sur $]0; +\infty[$.

Parité d'une fonction

17. Etudier la parité des fonctions définies par :

1°) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = 1 + x^2$; 2°) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = 5x^3 - 2x$

3°) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = |x^3 + x|$; 4°) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = x + 1$

5°) $x \geq 2$ et $f(x) = \sqrt{x - 1}$.

18. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{2x^2 + 3}{x^2 + 1}$.

1) Exprimer $f(-x)$ puis comparer avec $f(x)$.

Soit M le point de coordonnées $(x; f(x))$ et M' celui de coordonnées $(-x; f(-x))$.

2) Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathcal{C}$ représentative de f sur $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$?

19. On considère la fonction $f: x \mapsto |x|$.

1°) Quel est son ensemble de définition ?

2°) Tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O; I; J)$.

20. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = |x + 2|.$$

1°) Exprimer $f(x)$ sans valeur absolue suivant les valeurs du réel x .

2°) Tracer la représentation graphique $\mathcal{C}$ de f .

21. Mettre les expressions suivantes sous forme canonique :

$$A(x) = x^2 - 5x + 1$$

$$B(x) = 5x^2 + 3x - 4$$

$$C(x) = 2x^2 - 6x + 5$$

22. Parmi les fonctions suivantes, lesquelles sont d'abord croissantes puis décroissantes ?

$$f(x) = x^2 - 2x + 4 \quad g(x) = -x^2 - 7x + 2$$

$$h(x) = 5x^2 - 3x + 9 \quad i(x) = 3x - x^2 + 1$$

$$j(x) = -9x^2 + 2 \quad k(x) = (x + 3)(-x + 2)$$

$$l(x) = -2x(1 - 2x) \quad m(x) = (-x + 1)^2$$

23. Parmi les fonctions suivantes, quelles sont celles dont les variations correspondent au tableau de variations suivant :

$$f(x) = x^2 + 2x - 2 \quad ; \quad g(x) = -x^2 + 5x - 3$$

$$h(x) = x^2 - 3x - 3 \quad ; \quad i(x) = 2x^2 - 6x - 3$$

$$j(x) = (x - 3)^2 \quad ; \quad k(x) = (2x - 7)(x - 3)$$

x	$-\infty$	4	$+\infty$
f(x)		1	

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f(x)		3	

24. Construire le tableau de variations de chaque fonction.

$$f(x) = \frac{x - 1}{x - 3} \quad g(x) = \frac{-4x - 1}{x + 1}$$

$$h(x) = \frac{2 + x}{x} \quad i(x) = \frac{x - 1}{3x + 4}$$

Chapitre 9 PRODUIT SCALAIRE

1) Les différentes expressions du produit scalaire

a) Expression avec un cosinus

Définition 1

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.

On appelle produit scalaire de $\vec{u}$ par $\vec{v}$, le nombre réel défini par ;

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$;
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \times \cos(\widehat{\vec{u}; \vec{v}})$ si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$.

b) Fixation par des points

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls, et soient A, B et C trois points du plan $\mathcal{P}$ tels que ; $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$

On appelle produit scalaire des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, le nombre réel défini par :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times \cos \widehat{BAC} = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$$

Remarque

$\vec{u} \cdot \vec{v}$ se lit " $\vec{u}$ scalaire $\vec{v}$ "

c) Cas particuliers

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls ;

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, il y a deux cas de figure ;

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = (\widehat{\vec{u}; \vec{v}}) = 0 \Rightarrow \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ ont même sens} \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \\ \text{ou} \\ \alpha = (\widehat{\vec{u}; \vec{v}}) = \pi \Rightarrow \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ ont sens contraires} \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = -\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \end{array} \right.$$

- Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, alors ; $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$
- Si $\vec{u} \perp \vec{v}$, alors ; $\alpha = (\widehat{\vec{u}; \vec{v}}) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Conclusion

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

d) Carré scalaire

Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan. Le réel $\vec{u} \cdot \vec{u}$ s'appelle le carré scalaire de $\vec{u}$ et se note $\vec{u}^2$

On a ; $\vec{u}^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$. En particulier, pour tous points A et B du plan $\mathcal{P}$: $\overrightarrow{AB}^2 = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = \|\overrightarrow{AB}\|^2 = AB^2$.

e) Propriétés du produit scalaire

- 1° Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\mathcal{V}$; $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- $\vec{u} \perp \vec{v} = 0 \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

f) Produit scalaire et norme

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$$

Exemple 1

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan tels que ; $\|\vec{u}\| = 5$, $\|\vec{v}\| = 4$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = -6$

- 1° Calculer $(\vec{u} + \vec{v})(3\vec{u} - \vec{v})$;
- 2° Calculer $(3\vec{u} - \vec{v})^2$, puis en déduire $\|3\vec{u} - \vec{v}\|$;
- 3° Calculer $\cos(\widehat{\vec{u}; \vec{v}})$.

Solution

$$\begin{aligned} 1^\circ (\vec{u} + \vec{v})(3\vec{u} - \vec{v}) &= \vec{u} \cdot 3\vec{u} + \vec{u} \cdot (-\vec{v}) + 3\vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot (-\vec{v}) = 3\vec{u}^2 - \vec{u} \cdot \vec{v} + 3\vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{v}^2 = 3\|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} - \|\vec{v}\|^2 \\ &= 3 \times 5^2 + 2 \times -6 - 4^2 = 75 - 12 - 16 = 47 \Rightarrow (\vec{u} + \vec{v})(3\vec{u} - \vec{v}) = 47. \end{aligned}$$

$$2^\circ) (3\vec{u} - \vec{v})^2 = (3\vec{u})^2 - 2(3\vec{u} \cdot \vec{v}) + \vec{v}^2 = 9\vec{u}^2 - 6\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2 = 9\|\vec{u}\|^2 - \vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2 = 9 \times 5^2 - 6 \times (-6) + 4^2 \\ = 225 + 36 + 16 = 277 \Rightarrow (3\vec{u} - \vec{v})^2 = 277 \Rightarrow \|3\vec{u} - \vec{v}\| = \sqrt{277}.$$

$$3^\circ) \cos(\vec{u}; \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|} = \frac{-6}{5 \times 4} = -\frac{6}{20} = -\frac{3}{10} \Rightarrow \cos(\vec{u}; \vec{v}) = -\frac{3}{10}.$$

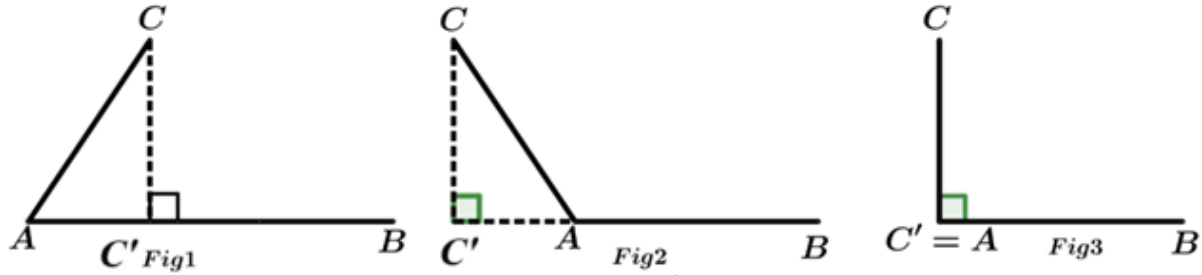
i) Expression avec des projetés orthogonaux

Définition 2

On appelle produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et on note $\vec{u} \cdot \vec{v}$, le nombre réel ; $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC'}$

Où ; $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$ et C' est le projeté orthogonal de C sur (AB) .

a- Conséquence pratique



Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul et $\vec{v}$ un vecteur. En posant $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. En notant C' le projeté orthogonal de C sur (AB) . On a ; $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC'}$. Par conséquent ;

- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC$ si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC'}$ sont de même sens.
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -AB \times AC$ si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC'}$ sont de sens contraires
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ si $C' = A$ ($\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux).

Exemple 2

Soit $ABCD$ un rectangle tel que ; $L = AB = CD = a$ et $l = AD = BC = b$. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC}$; $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$,

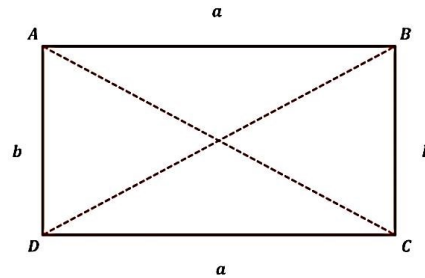
Solution

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \|\overrightarrow{AB}\| \cdot \|\overrightarrow{CD}\| \times -1 = -a \times a = -a^2$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC} = \|\overrightarrow{AB}\| \cdot \|\overrightarrow{DC}\| \times 1 = a \times a = a^2$$

$$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = \|\overrightarrow{AD}\| \cdot \|\overrightarrow{BC}\| \times 1 = b \times b = b^2$$

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \|\overrightarrow{BA}\| \cdot \|\overrightarrow{BC}\| = \|\overrightarrow{BA}\| \cdot \|\overrightarrow{BB}\| = 0$$



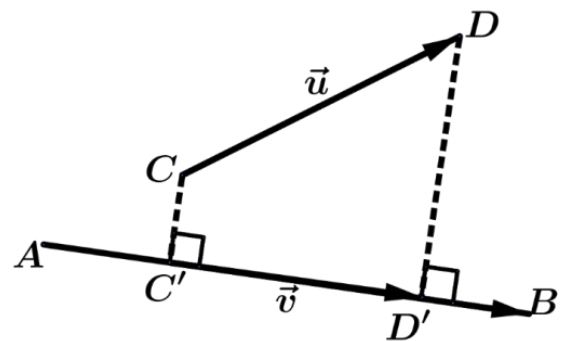
b- Produit scalaire et projection

Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul et $\vec{v}$ un vecteur.

On pose $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$. On note C' et D' les projetés orthogonaux respectifs de C et de D sur la droite (AB) .

$$\text{On a ; } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{C'D'}$$

On dit que le vecteur $\overrightarrow{C'D'}$ est le projeté orthogonal du vecteur $\overrightarrow{CD}$ sur la droite (AB) .



Exemple 3

Les carrés du quadrillage de la figure ci-contre ont des côtés de longueur 1.

Lire sur la figure les valeurs des produits scalaires.

$$\vec{u} \cdot \vec{v}; \vec{u} \cdot \vec{w}; \vec{u} \cdot \vec{t}; \vec{v} \cdot \vec{w}; \vec{t} \cdot \vec{w}$$

Solution

Sur la figure ci-contre, on place les points nécessaires à la représentation des vecteurs donnés.

Puis, on utilise l'expression des projetés orthogonaux comme suit :

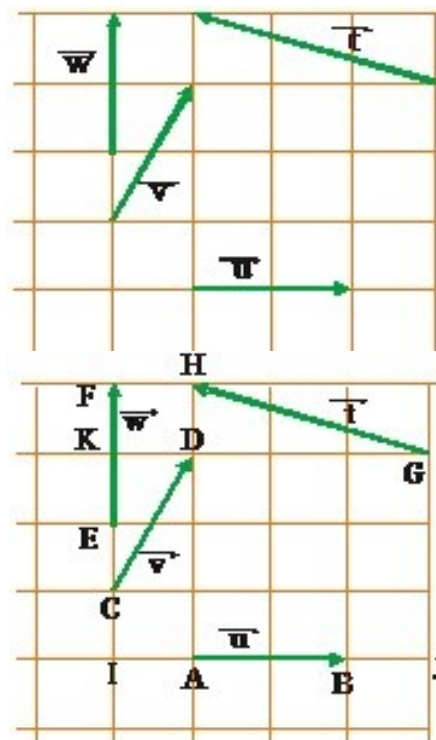
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IA} = AB \times IA = 2 \times 1 = 2$$

$$\vec{u} \cdot \vec{w} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{II} = \overrightarrow{AB} \times \vec{0} = 0$$

$$\vec{u} \cdot \vec{t} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{GH} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{JA} = -AB \times AJ = -2 \times 3 = -6$$

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{CK} \cdot \overrightarrow{EF} = CK \times EF = 2 \times 2 = 4$$

$$\vec{t} \cdot \vec{w} = \overrightarrow{GH} \cdot \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{KF} \cdot \overrightarrow{EF} = CK \times EF = 2 \times 1 = 2$$



2) Le produit scalaire en géométrie analytique

a) L'expression analytique du produit scalaire dans un repère orthonormé

a- Orthogonalité de deux vecteurs

• Rappel

Une base $(\vec{i}, \vec{j})$ de $\mathcal{V}$ est orthonormée si, et seulement si, $\vec{i} \perp \vec{j}$ et $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$

• Orthogonalité

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls sont orthogonaux si et seulement si ; Il existe deux bipoints représentant de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ portés par des droites perpendiculaires.

Remarque

Le vecteur nul $\vec{0}$ est orthogonal à tout vecteur.

• Orthogonalité et norme

Pour tout vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a ; $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}$

Cette relation permet de démontrer le théorème de Pythagore et sa réciproque ; $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$

Exemple 4

Sur la figure ci-contre, les droites $(\mathcal{D}_1)$ et $(\mathcal{D}_2)$ sont-elles perpendiculaires ?

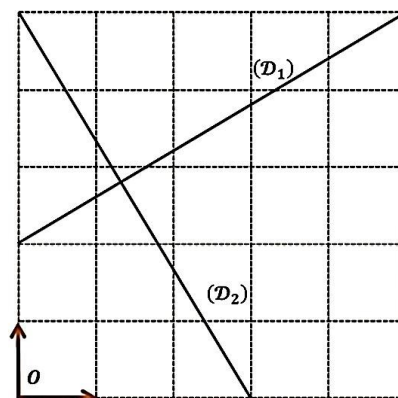
Solution

D'après la figure, les droites $(\mathcal{D}_1)$ et $(\mathcal{D}_2)$ ont respectivement

pour vecteurs directeurs ; $\vec{u} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ étant orthogonaux car, $5 \times (-3) + 3 \times 5 = -15 + 15 = 0$.

Il en résulte que $(\mathcal{D}_1)$ et $(\mathcal{D}_2)$ sont perpendiculaires.



Exemple 5

Que peut-on dire des points A, B et C lorsque ; $\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$?

Solution

$$\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})^2 = 0 \Leftrightarrow \|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\|^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\| = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}. \text{ Les points A, B et C sont soit confondus, soit alignés et A est le milieu de [BC].}$$

b- L'expression analytique du produit scalaire de deux vecteurs

Définition

Dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$, soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que ; $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

L'expression analytique du produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est donné par ; $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$

Propriété

Dans une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$ de $\mathcal{V}$, soient deux vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$. $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' = 0$

b) L'expression analytique de la norme d'un vecteur

Dans une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$ de $\mathcal{V}$, soit le vecteur ; $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$. On a ; $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Exemple 6

Dans le plan $\mathcal{P}$ rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points : $A(2, 4)$; $B(-3, -1)$; $C(4, -2)$; $D(9, 3)$

1°) Démontrer que $ABCD$ est un losange ;

2°) Evaluer $\text{mes}(\widehat{ABC})$, et $\text{mes}(\widehat{BAD})$ en degré.

Solution

$$1^\circ) \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -3-2 \\ -1-4 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \end{pmatrix}, \overrightarrow{DC} \begin{pmatrix} 4-9 \\ -2-3 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{DC} \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Donc ; $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ d'où ; $ABCD$ est un parallélogramme.

$$\text{On a d'autre part les diagonales } (AC) \text{ et } (BD) \text{ dirigées par ; } \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 4-2 \\ -2-4 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix} \overrightarrow{BD} \begin{pmatrix} 9-(-3) \\ 3-(-1) \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{BD} \begin{pmatrix} 12 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{Sont perpendiculaires car ; } \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 2 \times 12 + (-6) \times 4 = 24 - 24 = 0$$

$ABCD$ est un parallélogramme dont les diagonales sont perpendiculaires, c'est donc un losange.

$$2^\circ) \text{ On a ; } \overrightarrow{BA} \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}, \overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 4+3 \\ -2+1 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\|\overrightarrow{BA}\| = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{50} = 2\sqrt{5} = \|\overrightarrow{BC}\|, \quad \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 5 \times 7 + 5 \times (-1) = 30$$

$$\Rightarrow \cos \widehat{ABC} = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{\|\overrightarrow{BA}\| \cdot \|\overrightarrow{BC}\|} = \frac{30}{(2\sqrt{5})^2} = \frac{30}{20} = \frac{3}{2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} = 0,24 \Rightarrow \widehat{ABC} \approx 76^\circ$$

D'autre part, comme $\widehat{ABC}$ et $\widehat{BAD}$ sont deux angles voisins dans un parallélogramme, leur somme est donc égale à 180°

Une mesure approximative de $\widehat{BAD}$ est donc ; $\widehat{BAD} \approx 180^\circ - 76^\circ \approx 104^\circ$

c) Equation de cercle dans un repère orthonormé

Equation d'un cercle par l'utilisation du produit scalaire

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan $\mathcal{P}$.

On a déjà vu dans le chapitre du calcul vectoriel et de la géométrie analytique, que le cercle $\mathcal{C}$ de centre $A(x_A, y_A)$ et de rayon R est l'ensemble des points équidistants de A . Pour tout point $M(x, y) \in \mathcal{C}$ on a : $\mathcal{C} : (x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = R^2$

L'équation cartésienne peut aussi être calculée par le produit scalaire.

$[AB]$ étant un diamètre du cercle $\mathcal{C}$, pour tout point $M \in \mathcal{C}$, on a ;

$$\mathcal{C} : (x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) = 0$$

Exemple 7

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan $\mathcal{P}$, on donne les deux points $A(4; 7)$ et $B(-5; 3)$.

Donner l'équation cartésienne du cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[AB]$.

Solution

$$\text{Pour tout point } M(x; y) \text{ de } \mathcal{C}, \text{ on a : } \overrightarrow{AM} \text{ et } \overrightarrow{BM} \text{ perpendiculaire donc } \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} x-4 \\ y-7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x+5 \\ y-3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (x-4)(x+5) + (y-7)(y-3) = 0 \Rightarrow x^2 + x - 20 + y^2 - 10y + 21 = 0 \Rightarrow \mathcal{C} : x^2 + x + y^2 - 10y + 1 = 0$$

d) Equation d'une droite dans un repère orthonormé

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan $\mathcal{P}$, soit la droite $(\mathcal{D})$ passant par le point $A(x_A, y_A)$ et de vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

Pour tout point $M(x, y) \in (\mathcal{D})$, on a ; $(\mathcal{D}) : a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0$

Exemple 8

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan $\mathcal{P}$, soit la droite $(\mathcal{D})$ passant par le point $A(4, -7)$ et de vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$. Donner l'équation cartésienne de $(\mathcal{D})$.

Solution

Pour tout point $M(x, y) \in (\mathcal{D})$, on a :

$$\overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x-4 \\ y+7 \end{pmatrix} \cdot \vec{n} \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow -3(x-4) + 5(y+7) = 0 \Rightarrow -3x + 12 + 5y + 35 = 0 \Rightarrow (\mathcal{D}) : 3x - 5y - 47 = 0$$

e) Distance d'un point à une droite dans un repère orthonormé

Le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, soit (Δ) la droite d'équation cartésienne ;

$ax + by + c = 0$, le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est le vecteur normal à (Δ) , soit $A(x_0, y_0)$ un point du plan $\mathcal{P}$ et soit A' le projeté

orthogonal de A sur (Δ) . La distance de A à (Δ) est notée ; $d(A; \Delta) = AA' \Rightarrow AA' = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

Exemple 9

Le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, soit (Δ) la droite d'équation cartésienne ;

$5x - 3y + 4 = 0$, le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$ est le vecteur normal à (Δ) , soit $A(1, 2)$ un point du plan $\mathcal{P}$ et soit A' le projeté orthogonal de A sur (Δ) . Calculer $d(A; \Delta)$ la distance de A à (Δ) .

Solution

$$d(A; \Delta) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|5 \times 1 - 3 \times 2 + 4|}{\sqrt{5^2 + (-3)^2}} = \frac{|3|}{\sqrt{34}} \Rightarrow d(A; \Delta) = \frac{3}{\sqrt{34}}$$

3) Formule d'Al-Kashi (Pythagore généralisé)

Pour tous trois points non alignés A, B et C du plan $\mathcal{P}$ on a ;

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{\overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{AB}^2 - \overrightarrow{BC}^2}{2} \quad [1]$$

$$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} = \frac{\overrightarrow{BC}^2 + \overrightarrow{BA}^2 - \overrightarrow{AC}^2}{2} \quad [2]$$

$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = \frac{\overrightarrow{CA}^2 + \overrightarrow{CB}^2 - \overrightarrow{AB}^2}{2} \quad [3]$$

Exemple 10

ABC est un triangle dont les côtés mesurent ; $AB = 7$; $BC = 9$ et $AC = 5$. Calculer $\cos \hat{A}$ puis $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

Solution

D'après la propriété d'Al-Kashi ; $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos \hat{A} \Rightarrow 9^2 = 7^2 + 5^2 - 2 \cdot 7 \cdot 5 \cdot \cos \hat{A}$

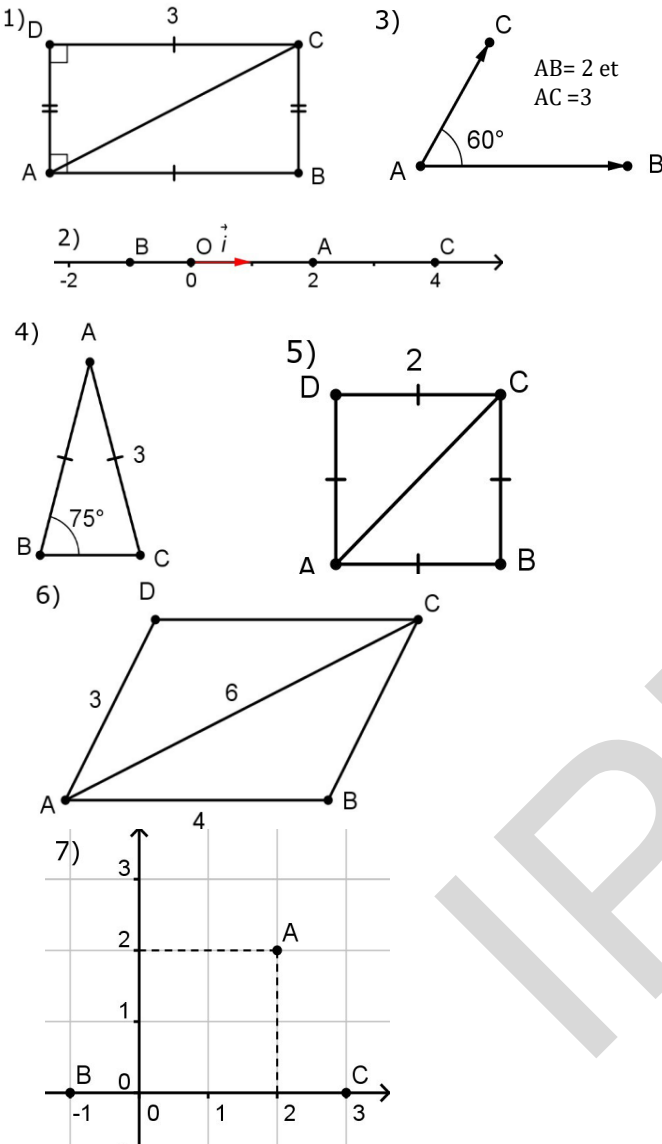
$$\Rightarrow 81 = 49 + 25 - 70 \cos \hat{A} \Rightarrow 7 = -70 \cos \hat{A} \Rightarrow \cos \hat{A} = \frac{-7}{70} = -\frac{1}{10}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 7 \times 5 \times -\frac{1}{10} = \frac{-35}{10} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -3,5$$

Exercices Généraux

1. Soient A, B et C trois points tels que ;
 $AB = 7, AC = 12, BC = 8$.
 Calculer ; $\cos \hat{A}, \cos \hat{B}, \cos \hat{C}$.

2. Pour les sept figures suivantes, calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$



3. ABC est un triangle tel que ; $AB = 8 \text{ cm}, AC = 12 \text{ m}$ et $\hat{A} = 30^\circ$

- 1°) Calculer la mesure du côté BC ;
- 2°) Soit O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC , quelle est la nature du triangle OBC ?
- 3°) En déduire la mesure du rayon du cercle circonscrit au triangle ABC .

4. ABC est un triangle tel que ;
 $AB = 6 \text{ cm}, AC = 10 \text{ cm}, BC = 12 \text{ cm}$
 Calculer les mesures des angles de ce triangle

5. Déterminer les angles $(\vec{u}; \vec{v})$ dans chacun des cas suivants :

- 1°) $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ 2\sqrt{3} \end{pmatrix}$
- 2°) $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 2\sqrt{3} \end{pmatrix}, \vec{v} \begin{pmatrix} -2\sqrt{3} \\ -2 \end{pmatrix}$
- 3°) $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{v} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$
- 4°) $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{v} \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$

6. Dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on donne la droite $(\mathcal{D})$ d'équation ;
 $(\mathcal{D}) : 5x - 4y + 7 = 0$ et le point $A(-3, 2)$
 Calculer $d(\mathcal{D}; A)$.

7. Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan $\mathcal{P}$, soit la droite $(\mathcal{D})$ passant par le point $A(2, -3)$ et de vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

- 1°) Donner une équation de $(\mathcal{D})$;
- 2°) Représenter $(\mathcal{D})$.

8. Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan $\mathcal{P}$, on donne les points $A(3, -2)$ et $B(-5, 8)$.
 Donner par deux méthodes l'équation cartésienne du cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[AB]$.

9. Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan $\mathcal{P}$, on donne les points $A(3, -4)$ et $B(-7, 2)$.
 Donner l'équation cartésienne de la médiatrice (Δ) du segment $[AB]$.

10. Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan $\mathcal{P}$, on donne les points $A(5, 2), B(-8, 7)$ et $C(-3, 1)$.
 Donner l'équation cartésienne du support (d) de la hauteur issue de A .

11. Soit ABC un triangle rectangle en A tel que ; $AB = 6 \text{ cm}, AC = 8 \text{ cm}$, H est le projeté orthogonal de A sur (BC) .

- 1°) Calculer AH, BH et CH
- 2°) Calculer $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$
- 3°) Que vaut $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ et pourquoi ?

12. Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on donne les points ;
 $A(2, 3); B(-1, 2)$ et $C(0, -1)$

- 1°) Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.
- 2°) Montrer que $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC}$.
- 3°) Calculer $\|\overrightarrow{AB}\|, \|\overrightarrow{BC}\|$.
- 4°) Représenter $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

13. $ABCD$ est un carré de côté 12 cm . M est un point de $[AB]$ tel que ; $AM = 5 \text{ cm}$, N est un point de $[AD]$ tel que ; $DN = 9 \text{ cm}$.

- 1°) Faire une figure
- 2°) Calculer $\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{MN}$, le triangle CMN est-il rectangle en M ?

14. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs tels que :

$$\|\vec{u}\| = 1; \|\vec{v}\| = 3 \text{ et } \vec{u} \cdot \vec{v} = -2$$

Calculer $(2\vec{u} + 3\vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v})$.

Déterminer un réel x tel que : $(2\vec{u} + x\vec{v})$ soit orthogonal à $\vec{u} - \vec{v}$.

$$\|\vec{u}\| = 1; \|\vec{v}\| = 3 \text{ et } \vec{u} \cdot \vec{v} = -2$$

15. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs tels que :

$$\|\vec{u}\| = 5; \|\vec{v}\| = 3 \text{ et } \cos(\vec{u}, \vec{v}) = -\frac{1}{3}. \text{ Calculer } \vec{u} \cdot \vec{v}$$

On pose $\vec{w} = \vec{u} - 2\vec{v}$ et $\vec{t} = \vec{u} + \vec{v}$.

a) Calculer $\vec{w} \cdot \vec{t}, \|\vec{w}\|$ et $\|\vec{t}\|$.

b) Vérifier que $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\sqrt{6}}{9}$.

16. Dans une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$, on considère les vecteurs $\vec{u} = 3\vec{i} + \vec{j}$ et $\vec{v} = -2\vec{i} + 2\vec{j}$.

Calculer $\|\vec{u}\|$ et $\|\vec{v}\|$.

A-t-on $\vec{u} \perp \vec{v}$?

Déterminer le réel a tel que le vecteur $\vec{w} = \vec{i} + a\vec{j}$ soit orthogonal à $\vec{u} + \vec{v}$.

17. Dans le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, soit les points $A(-2; -1), B(-1; -4)$ et $C(4; 1)$.

Montrer que le triangle ABC est rectangle en A :

- 1°) En calculant AB^2, BC^2 et CA^2 et en utilisant le théorème de Pythagore.
- 2°) En appliquant le produit scalaire de deux vecteurs.

18. Soit ABC un triangle rectangle en A tel que ;
 $AB = 13 \text{ cm}, AC = 9 \text{ cm}$, H est le projeté orthogonal de A sur (BC) .

- 1°) Calculer AH, BH et CH
- 2°) Calculer $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$
- 3°) Que vaut $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ et pourquoi ?

1) Définition et vocabulaire

a) Définition

Une application est une correspondance entre deux ensembles, un ensemble “de départ” et un ensemble “d’arrivée”, qui à tout élément de l’ensemble de départ associe un unique élément de l’ensemble d’arrivée.

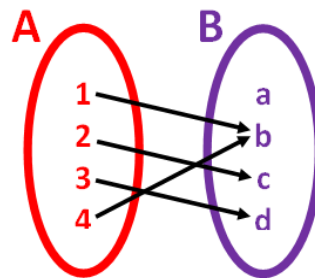
b) Représentation

Lorsque les ensembles de départ et d’arrivée sont définis par une liste exhaustive, une application peut être représentée par un diagramme sagittal, dans lequel on trace une flèche entre chaque élément de l’ensemble “de départ” et son image.

Une application peut aussi être définie par une expression, notamment dans le cadre des fonctions numériques.

Exemple 1

- ⊐ Le diagramme sagittal ci-contre représente une application car tout élément de A a une image dans B
- ⊐ L’ensemble de départ est A
- ⊐ L’ensemble d’arrivée est B
- ⊐ L’image de 1 est b
- ⊐ L’image de 3 est d
- ⊐ L’antécédent de c est 2
- ⊐ Les antécédents de b sont 1 et 4
- ⊐ L’élément a n’a pas d’antécédent.



Contre exemple

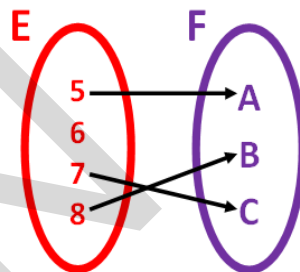
Le diagramme sagittal ci-contre ne représente pas une application car l’élément 6 n’a pas d’image

Exemple 2

On définit l’application $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto f(x) = 3x + 2$$

- ⊐ L’ensemble de départ est $\mathbb{R}$
- ⊐ L’ensemble d’arrivée est $\mathbb{R}$
- ⊐ L’image de 3 est 11
- ⊐ L’image de -2 est -4
- ⊐ L’antécédent de 5 est 1
- ⊐ L’antécédent de -7 est -3



c) Application Identité

Soit E un ensemble. L’application “identité de E ” noté Id_E , est définie par : $Id_E : E \rightarrow E$
 $x \mapsto x$

C’est l’application, qui associe à tout élément x de E l’élément x lui-même

2) Applications et fonctions

Définition

Une fonction est une correspondance entre deux ensembles, un ensemble de départ et un ensemble d’arrivée, qui à tout élément de l’ensemble de départ associe au plus un élément de l’ensemble d’arrivée.

Exemple 3

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) = \frac{1}{x-2}$$

Le nombre 2 n’a pas d’image par la fonction car $2 \notin D_f$

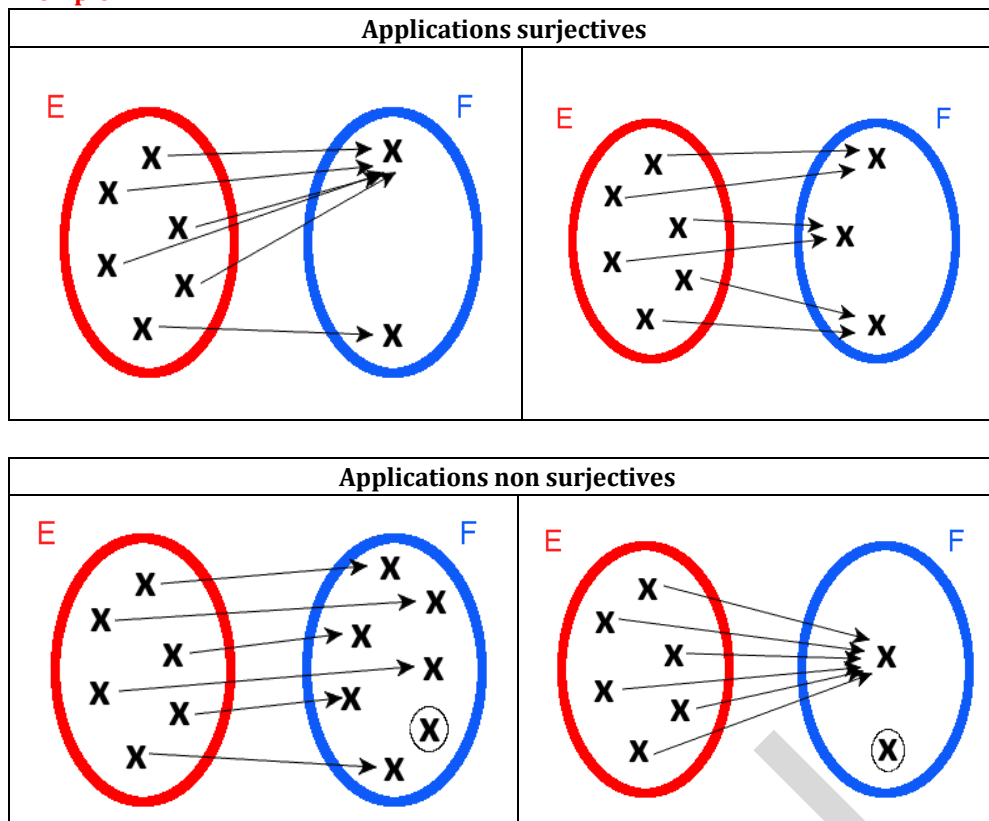
f est une fonction mais pas une application

3) Applications injectives, surjectives et bijectives

a) Surjection

L’application $f: E \rightarrow F$ est dite surjective si tout élément de l’ensemble d’arrivée F a au moins un antécédent dans E .

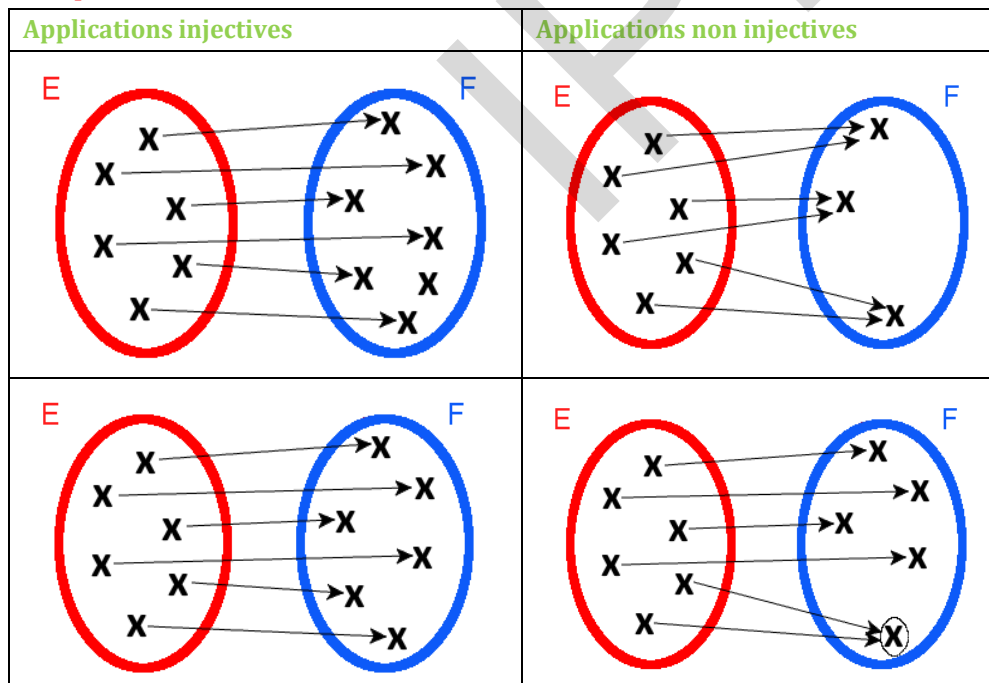
Exemple 4



b) Injection

L'application $f: E \rightarrow F$ est dite injective si tout élément de l'ensemble d'arrivée F a au plus un antécédent dans E , c'est-à-dire si deux éléments distincts de l'ensemble de départ E ont toujours deux images distinctes.

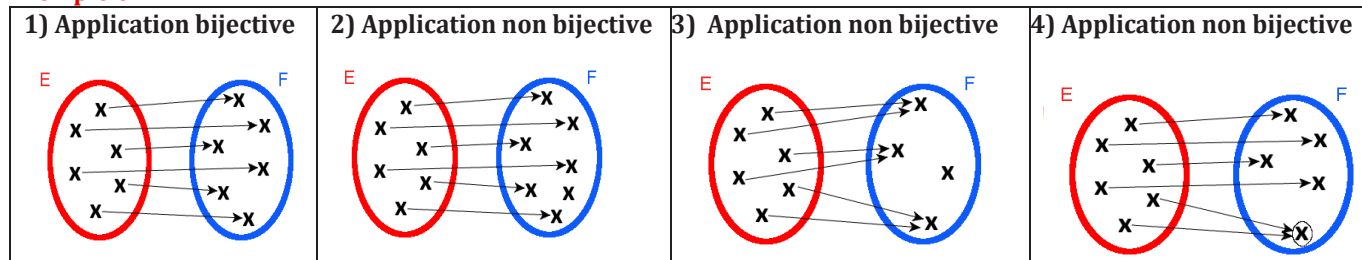
Exemple 5



c) Bijection

L'application $f: E \rightarrow F$ est dite bijective si elle est à la fois injective et surjective, c'est-à-dire si tout élément de l'ensemble d'arrivée F admet exactement un seul antécédent dans E .

Exemple 6



4) L'application réciproque

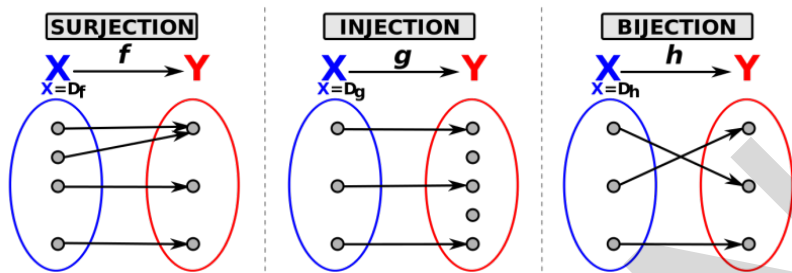
Dans le cas d'une application bijective $f: E \rightarrow F$, l'application réciproque de f , notée f^{-1} , est l'application qui à tout élément y de F associe son antécédent par f . C'est à dire que $f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$.

Exemple 7

Soit $f: E \rightarrow F$ une application *bijective* telle que $f(4) = 3$. Alors $f^{-1}(3) = 4$.

Remarques

- 1) Une application non bijective n'admet pas de réciproque.
- 2) La réciproque d'une application bijective est bijective : Si $f: E \rightarrow F$ est bijective, alors $f^{-1}: F \rightarrow E$ est bijective
- 3) Une application surjective est appelée une surjection. Une application injective est appelée une injection. Une application bijective est appelée une bijection.



Etude d'un exemple (1)

On considère l'application définie par : $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto x^2$

f n'est pas surjective car certains réels ne possèdent pas d'antécédent. Par exemple, il n'y a pas de réel x tel que $f(x) = -1$

Mais si on change la définition de f en donnant comme ensemble d'arrivée $\mathbb{R}^+$: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$
 $x \mapsto x^2$

Alors elle devient surjective car chaque réel positif y possède au moins un antécédent : 0 possède exactement un antécédent 0, et tous les réels y strictement positifs en possèdent deux : la racine carrée de y et son opposé.

Dans ce cas, l'application n'est pas injective car il y a des éléments de l'ensemble d'arrivée qui possèdent plus d'un antécédent dans l'ensemble de départ ; par exemple le nombre 4 possède deux antécédents : $f(-2) = f(2) = 4$

Mais si on change la définition de f en donnant comme ensemble de départ et d'arrivée $\mathbb{R}^+$: $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$
 $x \mapsto x^2$

Alors elle devient injective.

Comme $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ est à la fois surjective et injective, f est bijective.

Complément : Version Symbolique

L'application $f: E \rightarrow F$ est **surjective** $\Leftrightarrow \forall y \in F, \exists x \in E / f(x) = y$

L'application $f: E \rightarrow F$ est **injective** $\Leftrightarrow \forall x, y \in E, f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

L'application $f: E \rightarrow F$ est **bijective** $\Leftrightarrow \forall y \in F, \exists ! x \in E / f(x) = y$

5) Composition des applications

➤ Soient $f: E \rightarrow F$ et $g: F \rightarrow H$ deux applications.

Lorsque $F \subset G$, on peut définir l'application : $h = g \circ f$ (se lit " g rond f ") pour tout x de E par : $g \circ f(x) = g(f(x))$

L'application $h = g \circ f$ est l'application **composée** des applications g et f .

➤ Si f et g sont bijectives et si $g \circ f$ existe, alors $g \circ f$ est bijective et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ (Attention à l'ordre).

Exemple 8

Calculer $f \circ g$ et $g \circ f$ dans chacun des cas suivants : $f(x) = \sqrt{x+1}$; $g(x) = \frac{1}{x^2+1}$

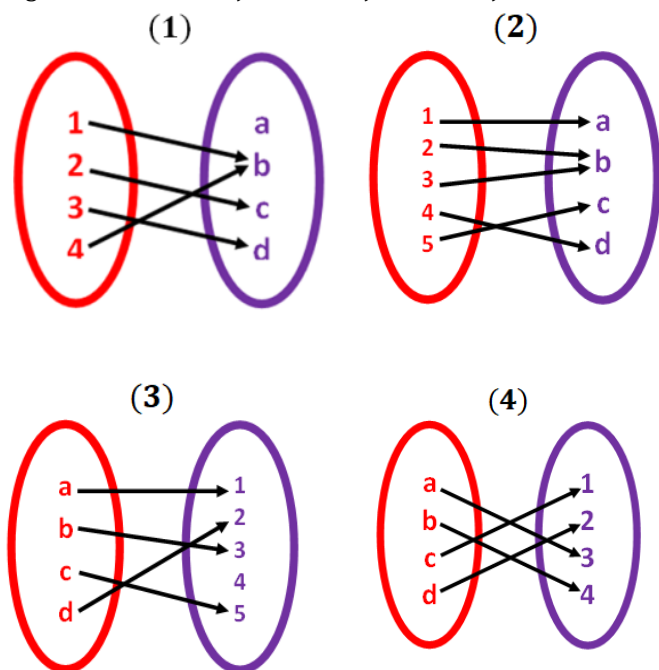
Solution

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{1}{x^2+1}\right) = \sqrt{\frac{1}{x^2+1} + 1} = \sqrt{\frac{1+x^2+1}{x^2+1}} = \sqrt{\frac{x^2+2}{x^2+1}}$$

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x+1}) = \frac{1}{(\sqrt{x+1})^2 + 1} = \frac{1}{x+1+1} = \frac{1}{x+2}$$

Exercices Généraux

1. Les applications suivantes représentées en diagramme sagittal sont-elles surjectives ? injectives ? bijectives ?



2. L'application $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ définie par $f(n) = |n - 1|$ n'est pas une bijection : pourquoi ?

3. L'application $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ définie par $f(n) = n + 1$ n'est pas une bijection : pourquoi ?

Que peut-on modifier pour que f soit bijective ?

4. Soient f et g les deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par $f(x) = 3x + 1$ et $g(x) = x^2 - 5x + 3$.

Calculer $f \circ g$ et $g \circ f$

5. Les applications suivantes sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?

1°) $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ $n \mapsto n + 1$	2°) $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ $n \mapsto 2n$	3°) $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ $n \mapsto n^2$
4°) $f: [1; +\infty[\rightarrow [0; +\infty[$ $x \mapsto x^2 - 1$	5°) $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$ $x \mapsto \frac{x+1}{x-1}$	

6. On donne $f_1(x) = |x|$, $f_2(x) = \sqrt{x}$, $f_3(x) = x^2 + 1$

f_1 , f_2 et f_3 sont-elles des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$?

7. Soient $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $f(x) = 3x + 1$ et $g(x) = x^2 - 1$. A-t-on $f \circ g = g \circ f$?

8. On considère l'application f de l'ensemble $E = \{\text{Dates de l'année 2025}\}$ sur l'ensemble $F = \{\text{Vendredi, samedi, ... ; Jeudi}\}$ qui à toute date de l'année 2025 associe le jour de la semaine correspondant.

L'application f est-elle injective, surjective, bijective ?

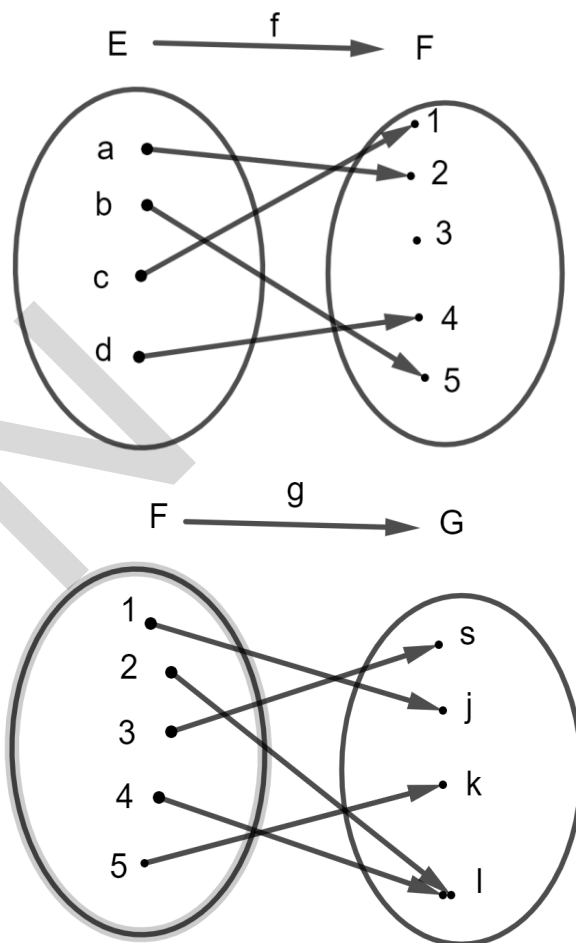
9. Soit F et G les ensembles suivants :

$$F = \{1; 2; 3\} \text{ et } G = \{m; n\}$$

Construire une application f surjective de F sur G ; puis une application g de F sur G non injective.

Peut-on construire une application surjective de F sur G .

10. On considère les fonctions f et g représentées ci-dessous. Représenter le diagramme de $g \circ f$.



11. Dans les exemples suivants, déterminer deux fonctions u et v telles que $h = u \circ v$.

$$h_1(x) = \sqrt{3x - 1} ; h_2(x) = (4x + 7)^2 ;$$

$$h_3(x) = \frac{1}{2-x} \text{ et } h_4(x) = \sin(5 - x)$$

12. Soient f et g les applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définies par

$$f(x) = 2x \text{ et } g(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{si } x \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } x \text{ est impair} \end{cases}$$

- Déterminer $f \circ g$ et $g \circ f$
- Les fonctions f et g sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?

13. Soit $f: [1; +\infty[\rightarrow [0; +\infty[$
 $x \mapsto x^2 - 1$

f est-elle injective ? surjective ? bijective ?

1) Langage des ensembles

a) Définition

Un ensemble est un groupe d'objets ou d'éléments bien définis et deux à deux distincts.

Exemple 1

- L'ensemble des chiffres décimaux,
- L'ensemble des lettres alphabétiques latines,
- L'ensemble des nombres premiers,
- L'ensemble des nombres pairs, etc...
- L'intersection de deux ensembles c'est l'ensemble des éléments communs entre eux.
- La réunion de deux ensembles c'est l'ensemble de tous les éléments des deux ensembles sans répétition.
- Le complémentaire d'un ensemble par rapport à un autre c'est l'ensemble des éléments du second n'appartenant pas au premier.

b) Cardinal d'un ensemble fini

Définition

Le cardinal d'un ensemble fini E noté $\text{card}(E)$ est le nombre des éléments de cet ensemble.

- Le cardinal de l'ensemble vide est : $\text{card}(\emptyset) = 0$
- Si E est un ensemble vide (noté $\emptyset$) ; cet ensemble n'a aucun élément, alors, $\text{card}(E) = 0$;
 $\text{card}(E) = 0 \Leftrightarrow E = \emptyset$.
- Le cardinal d'un singleton est 1.
- Le cardinal d'un ensemble contenant exactement deux éléments est 2.

c) Vocabulaire et Propriétés

Si A est une partie de Ω (un sous ensemble de Ω), on écrit $A \subset \Omega$: (A inclus dans Ω)

Alors ; $0 \leq \text{card}(A) \leq \text{card}(\Omega)$

$\emptyset$ est la partie vide de Ω et Ω est la partie pleine de Ω .

Pour toute partie A d'un ensemble non vide Ω , on a $\frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} \in [0 ; 1]$

Soit A et B deux ensembles finis ;

1°) $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$. Et si $A \cap B = \emptyset$, alors $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B)$.

2°) $\text{card}(A - B) = \text{card}(A) - \text{card}(A \cap B)$. Et si $B \subset A$, alors, $\text{card}(A - B) = \text{card}(A) - \text{card}(B)$.

3°) Si A et Ω sont deux ensembles finis tels que $A \subset \Omega$, le complémentaire de A par rapport à Ω est noté $\bar{A} = \Omega - A$, et on a ; $\text{card}(\bar{A}) = \text{card}(\Omega) - \text{card}(A)$, $\bar{A} \cap \bar{B} = \overline{A \cup B}$ et $\bar{A} \cup \bar{B} = \overline{A \cap B}$

Exemple 2

$\Omega = \{0 ; 1 ; 2 ; 3\}$, $\text{card}(\Omega) = 4$

$\Omega = \{a_1 ; a_2 ; a_3 ; a_4 ; \dots ; a_n\}$, $\text{card}(\Omega) = n$

$\Omega = \{a_0 ; a_1 ; a_2 ; a_3 ; a_4 ; \dots ; a_n\}$, $\text{card}(\Omega) = n + 1$

$\Omega = \{a_0 ; a_1 ; a_2 ; a_3 ; a_4 ; \dots ; a_{n-1}\}$, $\text{card}(\Omega) = n$

L'ensemble $E = \{0 ; 1 ; a ; b ; c ; d\}$, $\text{card}(E) = 6$

Exemple 3

Soit E l'ensemble des chiffres décimaux :

$E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$; $F = \{0, 2, 3, 5, 7\}$; $G = \{0, 1, 2, 3, 6\}$,

On a : $F \cap G = \{0, 2, 3\}$; $F \cup G = \{0, 1, 2, 3, 5, 6, 7\}$;

$\bar{F} = \{1, 4, 6, 8, 9\}$; $\bar{G} = \{4, 5, 7, 8, 9\}$; $\bar{F} \cap \bar{G} = \{4, 8, 9\}$;

$\bar{F} \cup \bar{G} = \{1, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. $\text{card}(E) = 10$; $\text{card}(F) = 5$;

$\text{card}(G) = 5$; $\text{card}(F \cap G) = 3$; $\text{card}(F \cup G) = 7$;

$\text{card}(\bar{F}) = 5$; $\text{card}(\bar{G}) = 5$; $\text{card}(\bar{F} \cap \bar{G}) = 3$; $\text{card}(\bar{F} \cup \bar{G}) = 7$.

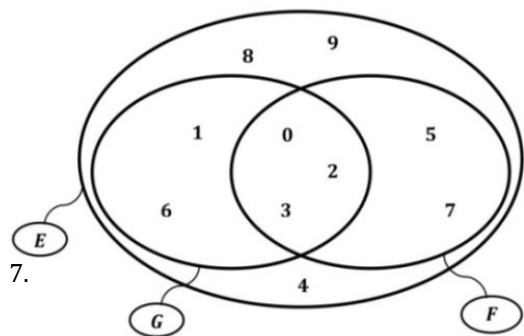


Diagramme de Venn

Exemple 4

Dans une classe, deux langues sont étudiées. 20 élèves font de l'arabe, 18 font le français et 4 élèves étudient les deux.

Sachant que tous les élèves étudient au moins une langue. Quel est le nombre total des élèves ?

Solution :

On sait qu'il y a 20 élèves qui étudient l'arabe dont 4 qui étudient les deux langues.

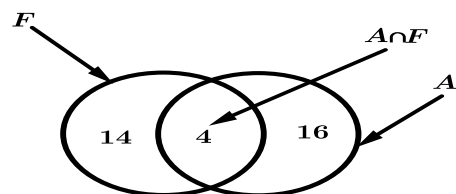
Il a donc $20 - 4 = 16$; 16 élèves étudient uniquement l'arabe.

On sait de plus qu'il y a 18 élèves qui étudient

le français dont 4 qui étudient les deux langues.

Il a donc $18 - 4 = 14$; 14 élèves étudient uniquement le français

Le nombre total d'élèves est $16 + 14 + 4$ soit 34 élèves



d) Produits cartésiens d'ensembles

Soit A et B deux ensembles ; les ensembles $A \times B$ et $B \times A$ désignent les produits cartésiens de A et B .

- $A \times B = \{(a; b)/a \in A \text{ et } b \in B\}$;

- $B \times A = \{(b; a)/b \in B \text{ et } a \in A\}$

Soit $A_1 ; A_2 ; \dots A_n (n \text{ ensembles})$

L'ensemble :

- $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ est le produit cartésien de $A_1 ; A_2 ; \dots A_n$.

et $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(a_1 \times a_2 \times \dots \times a_n) \text{ tel que } a_1 \in A_1 ; a_2 \in A_2 ; \dots ; a_n \in A_n\}$

En plus, si $A_1 ; A_2 ; \dots A_n$ sont finis, alors $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ est fini

et, $\text{card}(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n) = \text{card}(A_1) \times \text{card}(A_2) \times \dots \times \text{card}(A_n)$.

- Soit A un ensemble et $n \in \mathbb{N}^*$: A^2 désigne $A \times A$; A^n désigne $\underbrace{A \times A \times A \times \dots \times A}_{n \text{ facteur}}$;

- Soit A et B deux ensembles finis ;

Il y a	Si, et seulement si
Possibilité d'injection de A dans B	$\text{card}(A) \leq \text{card}(B)$
Possibilité de surjection de A sur B	$\text{card}(A) \geq \text{card}(B)$
Possibilité de bijection de A sur B	$\text{card}(A) = \text{card}(B)$

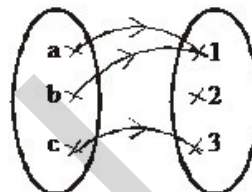
2) Les applications

Définition

Soit E et F deux ensembles, en associant à chaque élément x de E un seul élément y de F , noté $f(x)$, on définit une application f de E vers F .

$$f : E \rightarrow F$$

$$x \mapsto y$$



Exemple 5

$$E = \{a, b, c\}, F = \{1, 2, 3\}; f(a) = 1; f(b) = 1; f(c) = 3.$$

$(n \in \mathbb{N})$ Permutation (Notion de $n!$ avec (3

Définition

Soit E un ensemble fini de cardinal n , on appelle permutation de n éléments de E et on la note $n!$ (et on lit factorielle n) le nombre naturel défini par :

$$n! = n(n-1)(n-2)(n-3) \times \dots \times 2 \times 1$$

Exemple 6

$$7! = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5\,040 ; 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120 ;$$

$$2! = 1 \times 2 = 2 ; 3! = 1 \times 2 \times 3 = 6 ; 4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24.$$

Remarque

a) Par convention, $0! = 1, 1! = 1$ b) $n! = n(n-1)!$

Exemple 7

Avec combien de façons peut-on garer 5 voitures numérotées de 1 à 5 dans 5 garages numérotés de A à E ?

Solution

Le nombre de façons est égal au nombre de permutations : $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$.

Formules :

- $\forall n \in \mathbb{N}^* : \prod_{k=1}^{k=n} k = n!$

- $\forall n \in \mathbb{N} : (n+1)n! = (n+1)!$,

- $\frac{(n+1)!}{n!} = n+1,$

- $\frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}$

Exemple 8

$$5! = 5 \times 4! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 ; 4 \times 3! = 4!$$

Propriété : Soient p et q deux entiers naturels, si $p \leq q$, alors $\frac{q!}{p!}$ est un entier naturel.

Exemple 9

$$\frac{5!}{3!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{3!} = 5 \times 4 = 20 ;$$

4) Listes

Exemple 10

Soit $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5\}$ un ensemble ; on a $(1; 2; 3)$ est une liste dans Ω à 3 termes on l'appelle une 3- liste dans Ω .

$(1; 1; 2; 3)$ est une 4- liste dans Ω ;

$(1; 2; 3; 2; 1; 3)$ est une 6- liste dans Ω ;

$(1; 2; 1; 2; 3; 3; 3; 3)$ est une 8- liste dans Ω .

Définition :

- Soit n et p deux entiers naturels non nuls. Le nombre de p -liste dans un ensemble Ω ayant n éléments est n^p .
- Soit A et B deux ensembles finis non vides tels que ; $\text{Card}(A) = p$; $\text{card}(B) = n$.

Le nombre d'applications de A vers B est n^p

5) Arrangement

a) Le nombre d'arrangements avec répétition de p éléments parmi n (tirage successif avec remise de p éléments pris parmi n)

Définition

Soit E un ensemble fini de cardinal n . On appelle p -arrangement dans Ω , ou nombre d'arrangements avec répétition de p élément pris parmi n ($0 \leq p \leq n$) toute p -liste dans Ω à termes distincts deux à deux, c'est-à-dire le nombre naturel défini par n^p .

Exemple 11

Soit $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5\}$

► $(1; 2; 3)$ est un 3 - arrangement dans Ω

► $(1; 2; 5; 4; 3)$ est un 5 - arrangement dans Ω

► $(3; 2; 1)$ est un 3 - arrangement dans Ω

► Un 6 - arrangement dans Ω n'existe pas

b) Le nombre d'arrangements sans répétition de p éléments parmi n (tirage successif sans remise de p éléments pris parmi n)

Définition

Soit E un ensemble fini de cardinal n . On appelle nombre p -arrangement ou d'arrangements sans répétition de p éléments pris parmi n ($0 \leq p \leq n$) le nombre naturel défini par :

$$A_n^p = n(n-1)(n-2) \times \dots \times (n-(p-1)) = n(n-1)(n-2) \times \dots \times (n-p+1).$$

En multipliant et en divisant par $(n-p)!$, on obtient ; $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$

- Soit A et B deux ensembles tels que ; $\text{card}(A) = p$; $\text{card}(B) = n$; avec $p \leq n$. Le nombre d'injection de A dans B est A_n^p .
- Un n -arrangement dans un ensemble Ω ayant n éléments est appelé une permutation de Ω

Exemple 12

Soit $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5\}$; $(1; 2; 3; 4; 5)$; $(2; 1; 4; 3; 5)$; $(1; 3; 4; 5; 2)$ sont des permutations de Ω .

- Le nombre de permutation d'un ensemble Ω ayant n éléments est : $A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = n!$

- Soit A et B deux ensembles finis tels que : $\text{card}(A) = \text{card}(B) = n$. Le nombre de bijections de A sur B est $n!$.

Exemple 13

$$A_4^2 = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4!}{2!} = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2!} = 4 \times 3 \Rightarrow A_4^2 = 12 ; \quad A_7^3 = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7!}{4!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4!}{4!} = 7 \times 6 \times 5 \Rightarrow A_7^3 = 210$$

Propriétés

$$a) A_n^1 = \frac{n!}{(n-1)!} = \frac{n(n-1)!}{(n-1)!} = n \Rightarrow A_n^1 = n$$

$$b) A_n^0 = \frac{n!}{(n-0)!} = \frac{n!}{n!} = 1 \Rightarrow A_n^0 = 1$$

$$c) A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n! \Rightarrow A_n^n = n!$$

$$d) A_n^{n-1} = \frac{n!}{(n-(n-1))!} = \frac{n!}{1!} = \frac{n!}{1} = n! \Rightarrow A_n^{n-1} = n!$$

Exercice d'application 1

Dans un jeu de 32 cartes, on tire successivement sans remise 4 cartes. Calculer le nombre de cas donnant :

- Les cartes de la même couleur,
- Les cartes contiennent un roi,
- Les cartes de même niveau,
- Les cartes contiennent au moins une dame,
- Les cartes contiennent au plus un valet.

Solution

a) Les cartes sont de la même couleur :

$$A_{16}^4 + A_{16}^4 = \frac{16!}{(16-4)!} + \frac{16!}{(16-4)!} = 2 \times \frac{16!}{12!} = 2 \times \frac{16 \times 15 \times 14 \times 13 \times 12!}{12!} = 2 \times 16 \times 15 \times 14 \times 13 = 87\,360.$$

b) Les cartes contiennent un roi :

$$A_4^1 \times A_{28}^3 = \frac{4!}{(4-1)!} \times \frac{28!}{(28-3)!} = \frac{4!}{3!} \times \frac{28!}{25!} = 4 \times 28 \times 27 \times 26 = 78\,624.$$

c) Les cartes de même niveau :

$$8A_4^4 = 8 \times \frac{4!}{(4-4)!} = 8 \times \frac{4!}{0!} = 8 \times \frac{4!}{1} = 8 \times 4 \times 3 \times 2 = 192.$$

d) Les cartes contiennent au moins une dame :

$$\begin{aligned} & A_4^1 \times A_{28}^3 + A_4^2 \times A_{28}^2 + A_4^3 \times A_{28}^1 + A_4^4 \times A_{28}^0 \\ &= \frac{4!}{(4-1)!} \times \frac{28!}{(28-3)!} + \frac{4!}{(4-2)!} \times \frac{28!}{(28-2)!} + \frac{4!}{(4-3)!} \times \frac{28!}{(28-1)!} + \frac{4!}{(4-4)!} \times \frac{28!}{(28-0)!} \\ &= 4 \times 28 \times 27 \times 26 + 4 \times 3 \times 28 \times 27 + 4 \times 3 \times 2 \times 28 + 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 78\,624 + 9\,072 + 672 + 24 = 88\,392. \end{aligned}$$

e) Les cartes contiennent au plus un valet :

$$\begin{aligned} & A_4^1 \times A_{28}^3 + A_4^0 \times A_{28}^4 = \frac{4!}{(4-1)!} \times \frac{28!}{(28-3)!} + \frac{4!}{(4-0)!} \times \frac{28!}{(28-4)!} \\ &= 4 \times 28 \times 27 \times 26 + 1 \times 28 \times 27 \times 26 \times 25 = 78\,624 + 491\,400 = 570\,024. \end{aligned}$$

Exercice d'application 2

Une urne contient 7 jetons numérotés de 1 à 7. On tire successivement et sans remise 3 jetons de cette urne. Calculer le nombre de tirages possibles.

Solution

Le nombre de tirages possibles est :

$$A_7^3 = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7!}{4!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 7 \times 6 \times 5 = 210$$

c) Le nombre de permutations sans répétition de n éléments pris parmi n

Le nombre de permutations sans répétition de n éléments pris parmi n est : $A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n!$

Exercice d'application 3

Dans une salle il y a 10 chaises, 10 personnes entrent dans cette salle pour s'y installer. Calculer le nombre de dispositions possibles.

Solution

Le nombre de dispositions possibles est : $A_{10}^{10} = 10! = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times \dots \times 2 \times 1 = 3\,628\,800$.

6) Combinaison

Définition

Soit Ω un ensemble fini.

On appelle une combinaison dans Ω toute partie (ou sous-ensemble) de Ω .

Le nombre de combinaisons (sans répétition) de p éléments parmi n ($0 \leq p \leq n$) (nombre de parties de p éléments pris parmi n) (tirage simultané de p éléments pris parmi n)

Définition

Soit E un ensemble de cardinal n , on appelle combinaison de p ($0 \leq p \leq n$) éléments distincts (sans répétition) pris parmi n le nombre de sous-ensembles de p éléments de n défini par :

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{\frac{n!}{(n-p)!}}{\frac{p!}{1}} = \frac{n!}{(n-p)! p!}$$

Exemple 14

Soit $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5\}$

$(1; 2; 3)$ est une combinaison de 3 éléments dans Ω . $(1; 3; 4; 5)$ est une combinaison de 4 éléments dans Ω .

- ϕ (partie vide) est la combinaison dans Ω de zéro élément.
- Ω (partie pleine) est la combinaison de 5 éléments.
- Une combinaison de 6 éléments dans Ω n'existe pas.

Exemple 15

$$C_5^2 = \frac{5!}{(5-2)!2!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{3!2!} = 5 \times 2 = 10; \quad C_4^3 = \frac{4!}{(4-3)!3!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{1!3!} = 5 \times 4 = 20$$

Exercice d'application 4

Une classe de 29 élèves procède à un tirage au sort pour désigner une commission de trois membres de cette classe.

1°) Calculer le nombre de commissions possibles dans chacun des deux cas suivants :

- a) La commission est composée d'un coordinateur, d'un responsable sportif et d'un responsable culturel.
- b) La commission est composée de trois élèves sans tâche particulière.

2°) Calculer dans le deuxième cas, le nombre de commissions qui comportent exactement deux garçons sachant qu'il y a exactement 7 filles dans cette classe.

Solution

1°) a) Dans le premier cas, le nombre de commissions possible est :

$$A_{29}^3 = \frac{29!}{(29-3)!} = \frac{29!}{26!} = \frac{29 \times 28 \times 27 \times 26!}{26!} = 29 \times 28 \times 27 = 21\,924.$$

b) Dans le deuxième cas, le nombre de commissions est le nombre de combinaisons possibles :

$$C_{29}^3 = \frac{29!}{(29-3)!3!} = \frac{29 \times 28 \times 27 \times 26!}{26!3!} = 29 \times 14 \times 9 = 3\,654.$$

2°) Dans le second cas, le nombre de commissions qui comportent exactement 2 garçons est ;

$$C_{22}^2 \times C_7^1 = \frac{22!}{(22-2)!2!} \times 7 = \frac{22 \times 21 \times 20!}{20!2!} \times 7 = 11 \times 21 \times 7 = 1\,617.$$

Propriétés des combinaisons

- 1- $C_n^0 = 1, \forall n \in \mathbb{N}$;
- 2- $C_n^1 = n, \forall n \in \mathbb{N}$;
- 3- $C_n^n = 1, \forall n \in \mathbb{N}$;
- 4- $C_n^{n-1} = n, \forall n \in \mathbb{N}$;
- 5- $C_n^{n-k} = C_n^k, \forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq n$;
- 6- $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq k \leq n$.

- Soit Ω un ensemble fini ayant n éléments

Propriétés des parties de Ω	Propriétés des nombres C_n^p
Il y a une seule partie (partie ayant 0 élément c'est ϕ (la partie vide)).	$C_1^0 = 1$
Il y a une seule partie (partie ayant Ω élément c'est Ω (la partie pleine)).	$C_n^n = 1$
Il y a (n) parties ayant chacune (1) élément (les singletons de Ω).	$C_n^1 = n$
A toute partie de Ω ayant p éléments correspond une seule partie de Ω ayant $n - p$ éléments et réciproquement (ce sont des parties complémentaires dans Ω). Donc, le nombre de parties à (p) éléments est le même que le nombre de partie à $(n - p)$ éléments.	$C_n^p = C_n^{n-p}$

Type de tirage	$Card(A)$	Conditions
Successif avec remise	n^p	p quelconque
Successif sans remise	A_n^p	$p \leq n$
Simultané	C_n^p	$p \leq n$

7) Formules de développement du binôme de Newton

$$\forall a; b \in \mathbb{R}; \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad (a + b)^n = \sum_{k=0}^{k=n} C_n^k a^{n-k} b^k, \quad (a - b)^n = \sum_{k=0}^{k=n} (-1)^k C_n^k a^{n-k} b^k$$

8) Le triangle de Pascal

$C_n^p + C_n^{p+1} = C_{n+1}^{p+1}$ (Propriété de base pour la construction du triangle suivant appelé triangle de Pascal)

n ↓	p →	0	1	2	3	4	5	6
0		C_0^0						
1		C_1^0	C_1^1					
2		C_2^0	C_2^1	C_2^2				
3		C_3^0	C_3^1	C_3^2	C_3^3			
4		C_4^0	C_4^1	C_4^2	C_4^3	C_4^4		
5		C_5^0	C_5^1	C_5^2	C_5^3	C_5^4	C_5^5	
6		C_6^0	C_6^1	C_6^2	C_6^3	C_6^4	C_6^5	C_6^6

1							
1	1						
1	2	1					
1	3	3	1				
1	4	6	4	1			
1	5	10	10	5	1		
1	6	15	20	15	6	1	

Remarque

Le triangle de Pascal porte les valeurs des nombres C_n^p

Exercice d'application 5

Développer les binômes suivants : $(a + b)^2, (a + b)^3, (a + b)^4, (a + b)^5, (a + b)^6, (a - b)^4$

Solution

$$(a + b)^2 = \sum_{k=0}^2 C_2^k a^{2-k} b^k = C_2^0 a^2 b^0 + C_2^1 a^1 b^1 + C_2^2 a^0 b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a + b)^3 = \sum_{k=0}^3 C_3^k a^{3-k} b^k = C_3^0 a^3 b^0 + C_3^1 a^2 b^1 + C_3^2 a^1 b^2 + C_3^3 a^0 b^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a + b)^4 = \sum_{k=0}^4 C_4^k a^{4-k} b^k = C_4^0 a^4 b^0 + C_4^1 a^3 b^1 + C_4^2 a^2 b^2 + C_4^3 a^1 b^3 + C_4^4 a^0 b^4 = a^4 + 4a^3 b + 6a^2 b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$(a + b)^5 = \sum_{k=0}^5 C_5^k a^{5-k} b^k = C_5^0 a^5 b^0 + C_5^1 a^4 b^1 + C_5^2 a^3 b^2 + C_5^3 a^2 b^3 + C_5^4 a^1 b^4 + C_5^5 a^0 b^5$$

$$= a^5 + 5a^4 b + 10a^3 b^2 + 10a^2 b^3 + 5ab^4 + b^5$$

$$(a + b)^6 = \sum_{k=0}^6 C_6^k a^{6-k} b^k = C_6^0 a^6 b^0 + C_6^1 a^5 b^1 + C_6^2 a^4 b^2 + C_6^3 a^3 b^3 + C_6^4 a^2 b^4 + C_6^5 a^1 b^5 + C_6^6 a^0 b^6$$

$$= a^6 + 6a^5 b + 15a^4 b^2 + 20a^3 b^3 + 15a^2 b^4 + 6ab^5 + b^6$$

$$(a - b)^4 = \sum_{k=0}^4 (-1)^k C_4^k a^{4-k} b^k = C_4^0 a^4 b^0 - C_4^1 a^3 b^1 + C_4^2 a^2 b^2 - C_4^3 a^1 b^3 + C_4^4 a^0 b^4 = a^4 - 4a^3 b + 6a^2 b^2 - 4a^1 b^3 + b^4$$

$$\forall x \in \mathbb{R}; \forall n \in \mathbb{N}, \quad (1 + x)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k$$

Exercices Généraux

1. Les numéros de téléphones d'un réseau téléphonique sont des nombres entiers de 8 chiffres. Quelle est la capacité de ce réseau ?

2. On lance deux dés cubiques de couleurs différentes, un noir et un jaune. On relève dans l'ordre le numéro présenté par le dé noir, puis celui présenté par le dé jaune. Schématiser l'ensemble des résultats possibles.

Quels est le nombre de résultats possibles ?

3. Combien de façons différentes 3 personnes peuvent occuper 5 chaises ?

4. Combien de groupes de 7 élèves peut-on former dans une classe de 12 élèves ?

5. De combien de manières différentes peut-on distribuer 5 stylos à 5 élèves ?

6. 1°) 3 personnes occupent au hasard des places dans une voiture à 5 places. Quel est le nombre de façons différentes possibles ?

2°) Le chauffeur et 3 personnes occupent des places dans une voiture à 5 places, le chauffeur occupe la place de commande. Quel est le nombre de façons différentes possibles ?

7. Une caisse contient 8 boîtes dont 3 noires, 3 jaunes et 2 blanches.

1°) On tire au hasard 3 boules simultanément

a) Quel est le nombre de tirage possible ?

b) Quel est le nombre de tirage contenant 1 seule boule noire ?

c) Quel est le nombre de tirage contenant au moins une boule noire ?

2°) On tire maintenant au hasard 2 boules simultanément.

a) Quel est le nombre de tirages possibles ?

b) Quel est le nombre de tirages contenant deux boules de mêmes couleurs ?

c) Quel est le nombre de tirages contenant deux boules de couleurs différentes ?

8. Une caisse contient cinq boules numérotées 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5. On tire successivement deux boules sans remise.

1°) Quel est le nombre de tirages possibles ?

Schématiser le nombre de tirages possibles.

2°) Quel est le nombre de tirages donnant $a + b > 7$. (a et b les numéros des boules tirées).

9. Une caisse contient 4 boules numérotées de 1 à 4.

1°) On tire successivement avec remise deux boules.

a) Donner le nombre de tirages possibles, et schématiser ce nombre.

b) Quel est le nombre de tirages donnant $|a - b| = 1$ (a et b les numéros des boules tirées) ?

2°) On tire maintenant successivement sans remise deux boules.

a) Donner le nombre de tirages possibles et

schématiser ce nombre.

c) Quel est le nombre de tirages donnant :

$$|a - b| = 1.$$

3°) On tire maintenant simultanément deux boules.

a) Donner le nombre de tirages possibles et schématiser ce nombre.

b) Quel est le nombre de tirages donnant :

$$|a - b| = 1.$$

10. On lance une pièce de monnaie mauritanienne trois fois de suite. On note à chaque fois la nature de la face visible (A : pour face en Arabe et F : pour face en Français). Quel est le nombre de résultats possibles ?

11. Soit T l'ensemble des naturels formés de 3 chiffres distincts non nuls a, b, c.

a) Quel est le cardinal de T ?

b) Calculer la somme des naturels de T.

12. Un questionnaire à choix multiples, autorisant une seule réponse par question, comprend 15 questions. Pour chaque question, on propose 4 réponses possibles. De combien de façons peut-on répondre à ce questionnaire ?

13. A l'occasion d'une compétition sportive groupant 18 athlètes, on attribue une médaille d'or, une d'argent, une de bronze. Combien y-a-t-il de distributions possibles (avant la compétition, bien sûr...) ?

14. Les nombres 5, -1 et 3 constituent la solution d'un système de trois équations à trois inconnues. Donner tous les triplets différents qui peuvent être la solution de ce système

15. Un tournoi sportif compte 8 équipes engagées. Chaque équipe doit rencontrer toutes les autres une seule fois. Combien doit-on organiser de matchs ?

16. Combien peut-on former de numéros de téléphone à 8 chiffres ne comportant pas le chiffre 0 ?

17. Soit A l'ensemble des nombres de quatre chiffres, le premier étant non nul.

1) Calculer le nombre d'éléments de A.

2) Dénombrer les éléments de A :

a) composés de quatre chiffres distincts

b) composés d'au moins deux chiffres identiques

c) composés de quatre chiffres distincts autres que 5 et 7

18. Combien y-a-t-il d'anagrammes du mot MATH ?

19. Dans une classe de 32 élèves, on compte 19 garçons et 13 filles. On doit élire deux délégués 1) Quel est le nombre de choix possibles ? 2) Quel est le nombre de choix si l'on impose un garçon et fille 3) Quel est le nombre de choix si l'on impose 2 garçons ?

1) Le langage statistique

Définitions

a) Population

La population est l'ensemble sur lequel porte l'étude statistique. Ses éléments sont également appelés des individus. Un sous ensemble de la population s'appelle un échantillon.

b) Caractère

Une propriété retenue, ou un critère sur lequel porte l'étude pour analyser une population est appelé caractère.

S'il prend des valeurs chiffrées, on dit que le caractère est numérique ou quantitatif (*par exemple, la taille des élèves d'une classe...*).

Sinon, on dit que le caractère est qualitatif (*par exemple, les loisirs d'une personne, ou le métier d'une personne...*).

Notre étude portera ici exclusivement sur les caractères quantitatifs

c) Classe

Quand on répartit la population étudiée en un nombre fini de classes, pour lesquelles le caractère prend une même valeur ou un même ensemble de valeurs.

Les données doivent être suffisamment précises pour que tout individu appartienne à une classe et une seule.

d) Effectif, fréquence, pourcentage

Définitions

L'effectif n d'une classe est le nombre d'individus chez lesquels on observe cette valeur du caractère.

La fréquence f d'une classe est le quotient de l'effectif n relatif à cette valeur par l'effectif total N de la population étudiée ;

$$f = \frac{n}{N}.$$

- **La distribution des fréquences** est la liste des fréquences des valeurs du caractère.
- **Le pourcentage** p d'une classe s'obtient en multipliant sa fréquence f par 100 ; $p = 100 \times f = 100 \times \frac{n}{N}$

Remarque

Toute fréquence est comprise entre 0 et 1, tout pourcentage est compris entre 0 et 100.

Comme la somme des effectifs de toutes les classes vaut N , la somme de leurs fréquences vaut 1 et la somme de leurs pourcentage vaut 100.

e) Effectifs cumulés, fréquences cumulées

Définitions

On considère un caractère quantitatif.

- **L'effectif cumulé** correspondant à un nombre x est le nombre d'individus ayant une valeur du caractère inférieure ou égale à x (*effectif cumulé croissant*), ou supérieure ou égale à x (*effectif cumulé décroissant*).
- **La fréquence cumulée** correspondant à un réel x s'obtient en divisant l'effectif cumulé par l'effectif total N .

2) Séries statistiques à une variable

A) Les critères de la tendance centrale

a) Série statistique

Définition

On considère un caractère numérique appliqué à une population étudiée.

L'ensemble des données ainsi obtenues forme une série statistique à une variable.

Plus généralement, on appelle série statistique, tout ensemble de couples $(x_i; n_i)$.

où x_i est la valeur ou le caractère et où n_i est l'effectif avec $1 \leq i \leq n$

Si à chaque classe est associée une seule valeur du caractère ($x_i \in \mathbb{N}$), on dit que le caractère est discret.

Si à chaque classe est associé un intervalle de valeurs ($x_i \in \mathbb{D}$), on dit que le caractère est continu.

Si x_i n'est pas numérique, on dit que la série est qualitative.

Exemple 1

On a relevé le nombre de frères et de sœurs d'un groupe de 50 élèves.

On a obtenu les résultats suivants :

Nbre frères et sœurs	0	1	2	3	4
Effectifs	13	19	15	2	1

La population étudiée est le groupe de 50 élèves.

Le caractère étudié est le nombre de frères et sœurs ; c'est un caractère numérique discret.

Exemple 2

Au cours d'une visite médicale, on a pesé 60 personnes. Les résultats obtenus exprimés en *kg*, sont donnés par le tableau suivant :

Poids (<i>kg</i>)	]40; 45]	]45; 50]	]50; 55]	]55; 60]	]60; 65]	]65; 70]
Effectif	6	10	12	19	9	4

La population étudiée est le groupe de 60 personnes.

Le caractère étudié est le poids ; c'est un caractère numérique continu.

b) Caractéristiques de position ou critères de la tendance centrale

▪ Etendue

L'étendue d'une série statistique à une variable est la différence entre les valeurs extrêmes observée du caractère.

Exemple 3

Dans l'exemple 1, l'étendue est ; $4 - 0 = 4$

Dans l'exemple 2, l'étendue est ; $70 - 40 = 30$

▪ Mode ou classe modale

Si le caractère est discret, le mode est la valeur du caractère correspondant à l'effectif le plus grand (*il peut y avoir plusieurs modes*).

Exemple 4

Dans l'exemple précédent, le mode est 1 car il correspond à l'effectif maximum 20.

Si le caractère est continu, la classe modale est l'intervalle de valeurs du caractère correspondant à l'effectif le plus grand (*il peut y avoir plusieurs classes modales*).

Exemple 5

Dans l'exemple précédent, la classe modale est l'intervalle]55; 60] car il correspond à l'effectif maximum 19.

▪ Médiane

La médiane *M* d'une série statistique partage cette série en deux parties de telle sorte que :

- Au moins la moitié des valeurs sont inférieures ou égale à la médiane ;
- Au moins la moitié des valeurs sont supérieures ou égale à la médiane.

Exemple 6

La médiane de la série : 2 ; 3 ; 5 ; **10** ; 12 ; 19 ; 20 est **10**.

La médiane de la série : 2 ; 3 ; 5 ; **10** ; 12 ; 19 est $\frac{5+10}{2} = 7,5$

Calcul de la médiane

Si la série contient *n* valeurs rangées dans l'ordre croissant :

- Si *n* est impair ; la médiane est la $\frac{n+1}{2}$ ième valeur de la série.
- Si *n* est pair ; la médiane est la demi- somme des $\frac{n}{2}$ ième et $\frac{n+1}{2}$ ième valeurs de la série.

Exemple 7

Valeur	1	2	3	7
Effectif	3	5	4	9

$$n = 3 + 5 + 4 + 9 = 21 \text{ impair.}$$

$$\frac{21+1}{2} = 11$$

La médiane est la 11e valeur donc : 3.

Valeur	1	2	3	7
Effectif	3	5	4	12

$$n = 3 + 5 + 4 + 12 = 24 \text{ pair.}$$

$$\frac{n}{2} = \frac{24}{2} = 12 \quad \frac{n}{2} + 1 = 13$$

$$Me = \frac{12^{\text{e}} \text{ valeur} + 13^{\text{e}} \text{ valeur}}{2} = \frac{3+7}{2} = 5$$

Plus généralement, si le caractère est discret, une médiane est un réel *M* séparant la population étudiée en deux groupes de même effectif.

Notons *G*₁ le groupe des individus ayant une valeur du caractère inférieure ou égale à *M*.

Notons *G*₂ le groupe des individus ayant une valeur du caractère supérieure ou égale à *M*.

Dire que *M* est une médiane, signifie que *G*₁ et *G*₂ ont même effectif.

On peut remarquer que pour un caractère discret, la médiane n'est pas toujours précisément définie. C'est le cas de l'exemple 1.

■ Moyenne arithmétique

Définition

La moyenne arithmétique est la somme de toutes les valeurs divisées par le nombre de valeurs.

On considère un caractère numérique x_i . On peut présenter les données sous la forme ;

Valeur du caractère ou centre de l'intervalle	x_1	x_2	x_3	...	x_p
Effectifs	n_1	n_2	n_3	...	n_p

Soit l'effectif total ; $N = n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_p$

La moyenne arithmétique de la série est le réel noté ; $\bar{X} = \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + \dots + n_px_p}{N}$

Notons les fréquences correspondantes ; $f_1; f_2; f_3; \dots; f_p$.

On a ; $f_1 = \frac{n_1}{N}; f_2 = \frac{n_2}{N}; f_3 = \frac{n_3}{N}; \dots; f_p = \frac{n_p}{N} \Rightarrow \bar{X} = f_1 + f_2 + f_3 + \dots + f_p$

Exemple 8

On a lancé un dé 100 fois, et on a obtenu les résultats suivants :

4; 6; 1; 2; 5; 2; 1; 2; 3; 5; 4; 3; 1; 6; 6; 4; 2; 2; 3; 3; 1; 4; 6; 4; 2; 6; 4; 3; 6; 4; 6; 3; 3; 4; 4; 6; 2; 3; 1; 2; 5; 6; 5; 5; 3; 3; 5; 4; 1; 3; 1; 3; 2; 4; 5; 6; 4; 4; 6; 1; 3; 6; 2; 6; 5; 6; 3; 4; 6; 3; 4; 5; 3; 1; 5; 1; 3; 5; 2; 3; 6; 1; 5; 3; 4; 2; 2; 4; 1; 5; 1; 4; 6; 1; 2; 3; 2; 1; 3; 3.

1°) Ordonner les données ;

2°) Préciser la population et la variable étudiée ;

3°) Quelles sont les modalités ?

4°) Déterminer l'effectif et la fréquence de chaque modalité ;

5°) Le dé est-il équilibré ?

6°) Représenter ces données dans un diagramme en bâtonnets

Solution

1°) Pour ranger les résultats de lancers par ordre de façon méthodique et sûre, on peut cocher tous les « 1 », puis tous les « 2 », etc.

On vérifie bien que tous les nombres ont été cochés et que l'on a cent valeurs. On obtient donc ;

1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 2; 2; 2; 2; 2;

2; 2; 2; 2; 2; 2; 2; 2; 2; 2; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 3;

3; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 4; 4; 4; 4; 4; 4; 4; 4;

4; 4; 4; 4; 4; 4; 4; 4; 4; 4; 5; 5; 5; 5; 5; 5; 5; 5; 5; 5;

5; 5; 5; 6; 6; 6; 6; 6; 6; 6; 6; 6; 6; 6; 6; 6; 6; 6; 6; 6.

2°) La population étudiée est l'ensemble des 100 lancers du dé. La variable est le nombre qui apparaît sur la face supérieure du dé.

3°) Les modalités sont 1; 2; 3; 4; 5; 6.

4°)

Modalités	1	2	3	4	5	6
Effectifs	15	15	22	18	13	17
Fréquences	0,15	0,15	0,22	0,18	0,13	0,17

5°) Les fréquences d'apparition des différentes faces sont sensiblement différentes.

Le dé n'est pas équilibré ; On a par exemple beaucoup plus de 3 que de 5.

Exemple 9

Le tableau suivant donne les notes (sur 10) obtenues par les élèves d'une classe lors d'un test.

Notes	3	4	5	6	7	8	9
Effectifs	1	4	8	9	7	5	2

1°) Construire un tableau contenant les effectifs cumulés, les fréquences et les fréquences cumulées ;

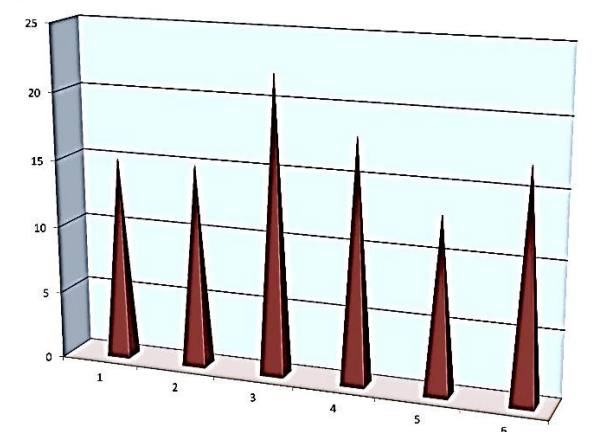
2°) Déterminer ;

a) Le nombre d'élèves ayant une note strictement inférieure à 5 ;

b) Le nombre d'élèves ayant une note supérieure à 7 ;

c) Le pourcentage des élèves qui peuvent dire « j'ai la moyenne » (c'est-à-dire une note supérieure à 6).

Pensez-vous que le terme "moyenne" soit adapté à ce sujet ?



Solution

Voici le tableau demandé

Notes	3	4	5	6	7	8	9
Effectifs	1	4	8	9	7	5	2
Effectifs cumulés	1	5	13	22	29	34	36
Fréquences	0,028	0,111	0,222	0,25	0,194	0,139	0,056
Fréquences cumulées	0,028	0,139	0,361	0,611	0,806	0,944	1

Pour calculer les fréquences cumulées, il faut diviser les effectifs cumulés par l'effectif total et éviter de cumuler les fréquences de façons à limiter les erreurs d'arrondi.

2°) a) D'après le tableau, on lit 5 élèves ont une note strictement supérieure à 5.

b) 14 élèves ont une note supérieure à 7.

c) A partir du tableau, on peut confirmer que 13,9% des élèves ont une note inférieure ou égale à 4. Donc 86,1% des élèves peuvent affirmer « j'ai la moyenne » ($86,1 = 100 - 13,9$).

Le mot moyenne est pris ici au sens scolaire du terme, (la moitié de la note maximale) et non le sens statistique.

Exemple 10

Dans une classe de 25 élèves, les notes obtenues lors d'un devoir sont les suivantes ;

14; 15; 4; 7; 11; 14; 9; 10; 12; 12; 16; 10; 18; 13; 12; 3; 11; 14; 12; 13; 13; 6; 12; 10; 7.

1°) Déterminer l'étendue et le mode de cette série ;

2°) Calculer la moyenne arithmétique ;

3°) Quel est le pourcentage d'élèves ayant une note supérieure ou égale à 10.

Solution

1°) On commence par trier les résultats, c'est-à-dire que l'on compte les effectifs correspondant à chaque note. A l'issue de ce regroupement, la série des notes peut se présenter de la façon suivante :

Notes	3	4	6	7	9	10	11	12	13	14	15	16	18
Effectifs	1	1	1	2	1	4	2	5	2	3	1	1	1

L'étendue de la série est : $18 - 3 = 15$.

Son mode vaut 12, car, c'est la note obtenue le plus de fois.

2°) La moyenne arithmétique c'est ; $\bar{X} = \frac{1}{25} (1 \times 3 + 1 \times 4 + 1 \times 6 + \dots + 18 \times 1) \Rightarrow \bar{X} = \frac{275}{25} = 11$

3°) Le nombre d'élèves ayant une note supérieure ou égale à la moyenne : $4 + 2 + 5 + 2 + 3 + 1 + 1 + 1 = 19$

Le pourcentage correspondant : $\frac{19}{25} \times 100 = 76\%$

Exemple 11

On a mesuré 60 épis de blé au centimètre près. Les résultats obtenus sont donnés par l'histogramme de la figure ci-contre :

1°) Déterminer l'étendue et la classe modale de cette série ;

2°) Calculer sa moyenne arithmétique ;

3°) Dans un lot de 140 épis, la moyenne de longueur est d'environ 8,9cm.

Quelle est la moyenne des longueurs de l'ensemble des 200 épis ?

Solution

1°) D'après la figure illustrant les données, la longueur maximale d'un épi est 13cm, et la longueur minimale est de 7cm.

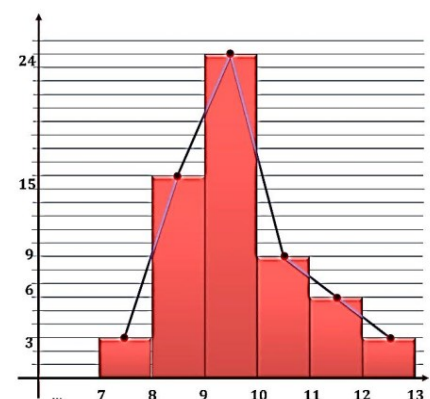
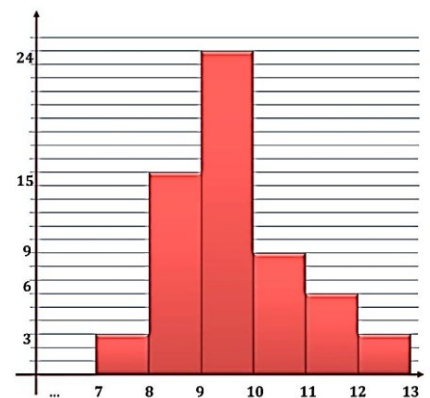
L'étendue est donc ; $13 - 7 = 6$ cm.

La classe modale est l'intervalle [9; 10], car c'est dans cette classe qu'il y a le plus d'épis de blé ; 24.

2°) Considérons le tableau suivant :

Centre de l'intervalle	7,5	8,5	9,5	10,5	11,5	12,5
Effectifs	3	15	24	9	6	3

L'effectif total est 60 épis. La moyenne arithmétique de la série vaut :



$$\bar{X} = \frac{1}{60} (3 \times 7,5 + 15 \times 8,5 + 24 \times 9,5 + 9 \times 10,5 + 6 \times 11,5 + 3 \times 12,5) = \frac{579}{60} \Rightarrow \bar{X} = 9,65 \text{ cm}$$

3°) D'après 1°, la somme des longueurs du premier lot vaut 579 cm. Dans le deuxième lot, la somme S des longueurs des 140 épis vérifie ; $\frac{S}{140} = 8,9 \text{ cm}$.

Puisque la moyenne du deuxième lot est d'environ 8,9 cm, donc, $S = 140 \times 8,9 = 1\,246 \text{ cm}$.

On en déduit que la somme de toutes les longueurs des 200 épis est environ égale à ; $1\,246 + 579 = 1\,825 \text{ cm}$

La moyenne de l'ensemble des 200 épis est ; $\frac{1\,825}{200} = 9,1 \text{ cm}$.

c) Caractéristiques ou critères de dispersion

■ Variance

Soit une série statistique ; $(x_i; n_i)_{1 \leq i \leq p}$ de moyenne $\bar{X}$. La variance est le nombre réel V défini par ;

$$V = \frac{n_1(x_1 - \bar{X})^2 + n_2(x_2 - \bar{X})^2 + \dots + n_p(x_p - \bar{X})^2}{n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_p} \Rightarrow V = \frac{\sum_{i=1}^p n_i (x_i - \bar{X})^2}{\sum_{i=1}^p n_i}$$

■ Ecart type

L'écart type est le nombre réel positif σ défini par ; $\sigma = \sqrt{V}$

B) Représentation graphique

Il existe de nombreuses façons de représenter graphiquement les données statistiques.

a) Diagramme en bâtonnets

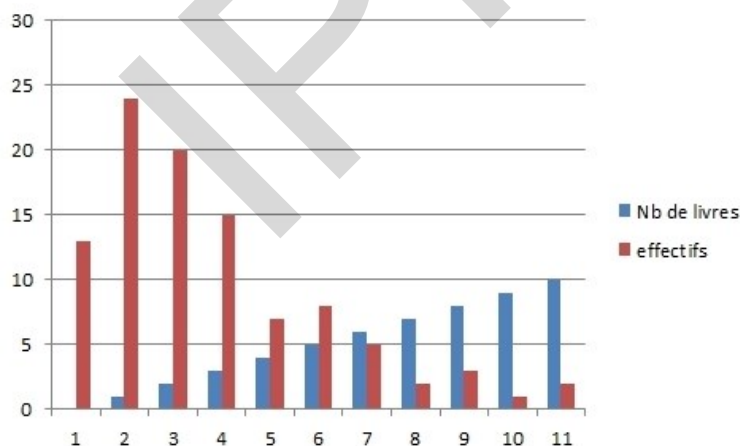
Dans un repère orthogonal, on dessine un segment parallèle à l'axe des ordonnées pour figurer chaque modalité. La hauteur de ce segment est proportionnelle à l'effectif de la modalité.

Exemple 12

La série suivante donne le nombre de livres lus par an sur une population de 100 personnes, représenter par un diagramme en bâtonnets les données de cette série :

Nbre de livres	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Effectifs	13	24	20	15	7	8	5	2	3	1	2

Solution



Remarque

On joint parfois les sommets de deux bâtons consécutifs par un segment de droite.

On obtient ainsi le polygone des effectifs.

b) Histogramme

Dans le cas où les valeurs de la variable sont regroupées en classes, on utilise un histogramme où chaque classe est représentée par un rectangle dont un côté est la classe sur l'axe des abscisses, et dont l'aire est proportionnelle à l'effectif de la classe.

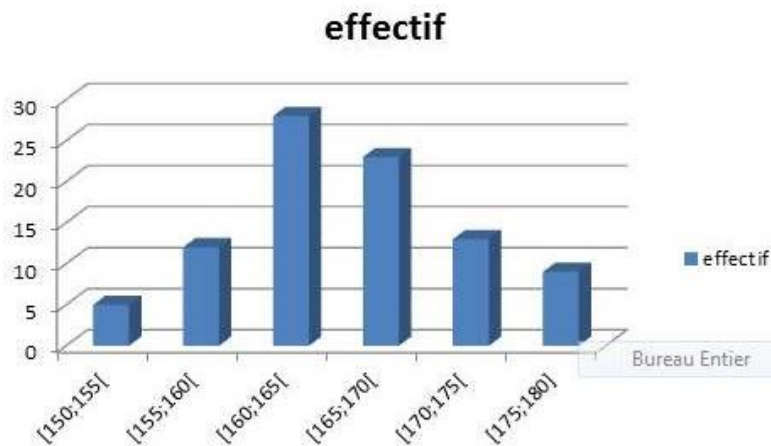
Si toutes les classes ont la même amplitude (*largeur*), les hauteurs des rectangles sont alors proportionnelles aux effectifs des classes.

Exemple 13

Représenter par un histogramme la répartition d'un groupe d'élèves suivant la taille :

Taille (en cm)	[150; 155[	[155; 160[	[160; 165[	[165; 170[	[170; 175[	[175; 180]
effectif	5	12	28	23	13	9

Solution



c) Diagramme polaire (ou radar)

Il est utilisé souvent pour des données chronologiques, ce diagramme utilise un axe tournant autour d'un point. Les différentes positions de l'axe correspondent aux modalités.

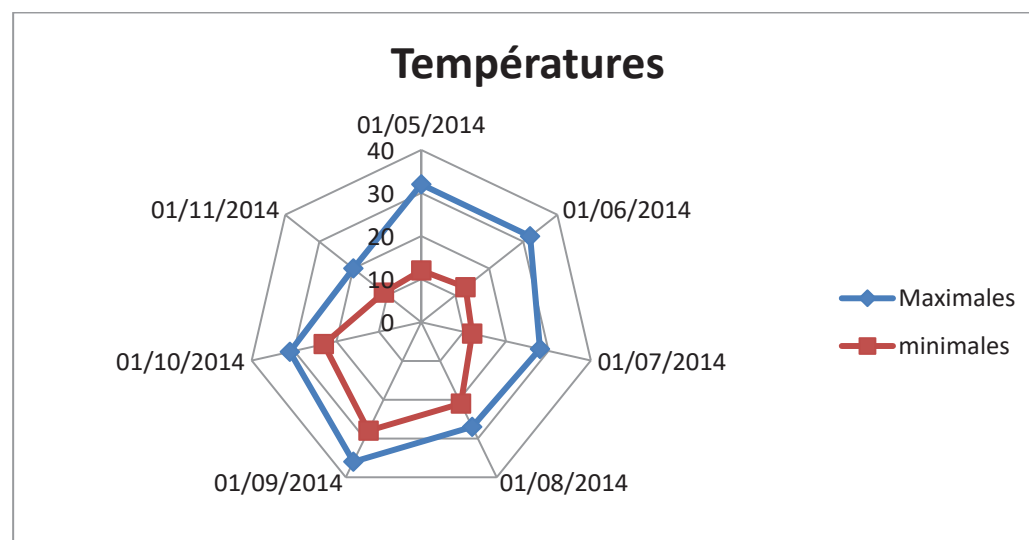
Chaque modalité est représentée par un point dont l'écart au centre du graphique est proportionnel à l'effectif de cette modalité.

Exemple 14

Le tableau suivant représente les températures maximales et minimales enregistrées en degré Celsius dans une ville mauritanienne sur la semaine du 1 au 7 janvier 2014.

Représenter les données de cette suite statistique par un diagramme polaire :

Date	T. Maximales	T. minimales
05/01/2014	32	12
06/01/2014	32	13
07/01/2014	28	12
08/01/2014	27	21
09/01/2014	36	28
10/1/2014	31	23
11/1/2014	20	11



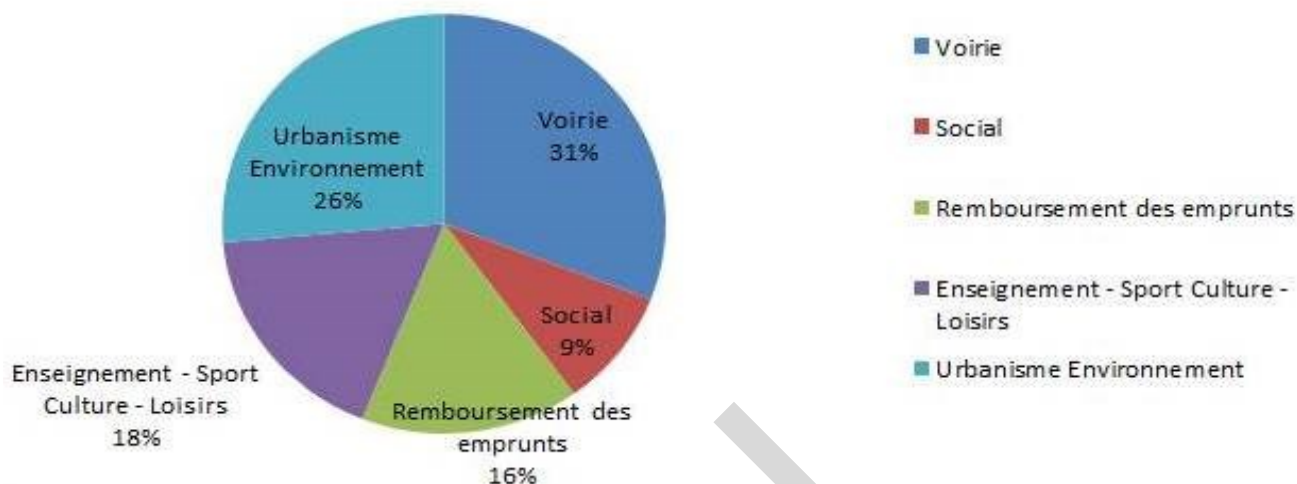
d) Diagramme circulaire

Il s'agit d'un disque partagé en secteurs dont les angles au centre sont proportionnels aux effectifs des modalités qu'ils représentent.

Exemple 15

Voici les dépenses d'investissement d'une commune en Ouguiyas, représenter par un diagramme circulaire ces données :

Poste	Voirie	Social	Remboursement des emprunts	Enseignement - Sport Culture - Loisirs	Urbanisme Environnement
Dépenses	9 592 836	2 838 411	4 962 561	5 456 333	8 204 686

Solution**Dépenses****Exemple 16**

Voici le relevé des températures extérieures maximales et minimales exprimées en degrés Celsius ($^{\circ}\text{C}$) enregistrées dans des zones étrangères, au mois de janvier 1992.

Mini	0	0	1	-2	-2	2	4	4	5	5	3	1	0	3	4	5
Max	1	2	3	2	3	5	7	6	8	8	6	3	3	5	7	9

Mini	8	0	-1	0	3	3	3	3	6	4	5	6	3	3	7
Max	9	10	8	5	7	10	8	9	10	12	6	9	10	10	10

1°) Calculer la moyenne et l'écart type des températures minimales.

2°) Même question avec les températures maximales.

3°) Avec les températures minimales, regrouper les données en classes d'amplitude 2°C ; $([-2; 0], [0; 2], \dots)$

a) Construire l'histogramme représentatif des résultats obtenus.

b) Même question avec les températures maximales.

Solution**1) Moyenne des températures minimales**

Mini	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Effectifs	2	1	5	2	1	8	4	4	2	1	1

$$\bar{X} = \frac{1}{31} (2 \times -2 + 1 \times -1 + 5 \times 0 + 2 \times 1 + 1 \times 2 + 8 \times 3 + 4 \times 4 + 4 \times 5 + 2 \times 6 + 1 \times 7 + 1 \times 8)$$

$$= \frac{1}{31} (-4 - 1 + 2 + 2 + 24 + 16 + 20 + 12 + 7 + 8) = \frac{1}{31} \times 86 = \frac{86}{31} \Rightarrow \boxed{\bar{X} \approx 2.7742}$$

La variance

$$\begin{aligned}
 V &= \frac{2 \left(-2 - \frac{86}{31}\right)^2 + 1 \left(-1 - \frac{86}{31}\right)^2 + 5 \left(0 - \frac{86}{31}\right)^2 + \dots + 1 \left(8 - \frac{86}{31}\right)^2}{2 + 1 + 5 + 2 + 1 + 8 + 4 + 4 + 2 + 1 + 1} \\
 &= \frac{2 \left(-\frac{148}{31}\right)^2 + 1 \left(-\frac{117}{31}\right)^2 + 5 \left(-\frac{86}{31}\right)^2 + \dots + 1 \left(\frac{162}{31}\right)^2}{31} \\
 &= \frac{2 \left(-\frac{148}{31}\right)^2 + 1 \left(-\frac{117}{31}\right)^2 + 5 \left(-\frac{86}{31}\right)^2 + \dots + 1 \left(\frac{162}{31}\right)^2}{31} \Rightarrow V \approx 6.3683
 \end{aligned}$$

L'écart type : $\sigma = \sqrt{V} \approx \sqrt{6.3683} \approx 2.5235$

2) Moyenne des températures maximales

Maxi	1	2	3	5	6	7	8	9	10	12
Effectif	1	2	4	3	3	3	4	4	6	1

$$\bar{X} = \frac{1}{31}(1 \times 1 + 2 \times 2 + 4 \times 3 + 3 \times 5 + 3 \times 6 + 3 \times 7 + 4 \times 8 + 4 \times 9 + 6 \times 10 + 1 \times 12)$$

$$= \frac{1}{31}(1 + 4 + 12 + 15 + 18 + 21 + 32 + 36 + 60 + 12) = \frac{1}{31} \times 197 = \frac{197}{31} \Rightarrow \boxed{\bar{X} \approx 6.3548}$$

La variance

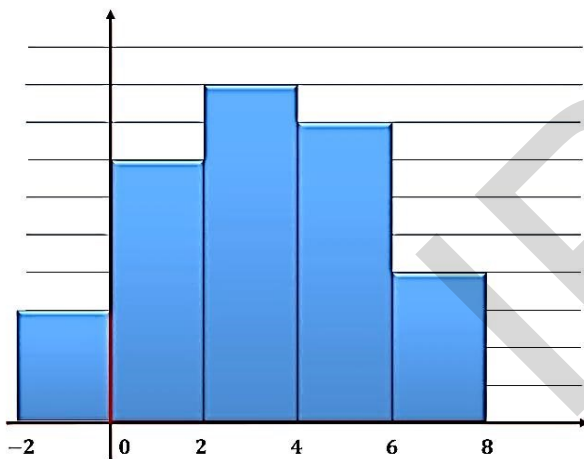
$$V = \frac{1 \left(1 - \frac{197}{31}\right)^2 + 2 \left(2 - \frac{197}{31}\right)^2 + 4 \left(3 - \frac{197}{31}\right)^2 + \dots + 1 \left(12 - \frac{197}{31}\right)^2}{1 + 2 + 4 + 3 + 3 + 3 + 4 + 4 + 6 + 1}$$

$$= \frac{1 \left(-\frac{166}{31}\right)^2 + 2 \left(-\frac{135}{31}\right)^2 + 4 \left(-\frac{104}{31}\right)^2 + \dots + 1 \left(\frac{175}{31}\right)^2}{1 + 2 + 4 + 3 + 3 + 3 + 4 + 4 + 6 + 1} \Rightarrow V \approx 5.5477$$

L'écart type : $\sigma = \sqrt{V} \approx \sqrt{5.5477} \approx 2.3553$

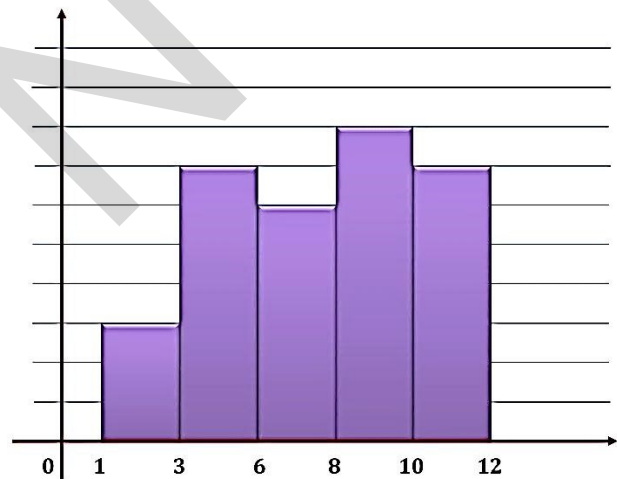
3° a)

Intervalles	$[-2; 0[$	$[0; 2[$	$[2; 4[$	$[4; 6[$	$[6; 8]$
Effectifs	3	7	9	8	4



b)

Intervalles	$[1; 3[$	$[3; 6[$	$[6; 8]$	$[8; 10[$	$[10; 12]$
Effectifs	3	7	6	8	7



Exercices Généraux

Organisation de données- Effectifs - Fréquences

1. Soit la série statistique suivante :

x_i	3	4	5	6	7	8	9
n_i	5	8	9	11	9	8	5

- 1°) Donner le mode, la médiane et calculer la moyenne ;
- 2°) Compléter un tableau de fréquences et d'effectifs cumulés ;
- 3°) Représenter sur un diagramme à bâtonnets et tracer le polygone des effectifs ;
- 4°) Déterminer le nombre de valeurs qui dépassent 7 ;
- 5°) Déterminer le pourcentage des valeurs qui n'atteignent pas 5 ;
- 6°) Calculer la variance de cette série, son écart type.

2. On a relevé les tailles, en cm, des élèves de la cinquième année.

173 ; 180 ; 160 ; 174 ; 170 ; 173 ; 163 ; 154 ; 170 ; 176 ; 170 ; 169 ; 164 ; 174 ; 165 ; 177 ; 158 ; 180 ; 162 ; 169 ; 163 ; 170 ; 180 ; 163 ; 170 ; 171 ; 167 ; 184 ; 173 ; 166 ; 174 ; 180 ; 183 ; 171 ; 181 ; 163 ; 173 ; 184 ; 163 ; 178 ; 162 ; 175 ; 161 ; 163 ; 175 ; 172 ; 179 ; 178 ; 180 ; 172 ; 164 ; 162 ; 181 ; 172 ; 179 ; 170 ; 184 ; 182 ; 177 ; 179 ; 177 ; 181 ; 180 ; 178 ; 163 ; 183 ; 177 ; 181 ; 172.

- 1°) Ordonner les mesures.
- 2°) Quelle est la population ? Quels sont les individus ?
Quelle est la variable étudiée ?
- 3°) Regrouper les mesures en classes d'amplitude 4 cm.
- 4°) Construire le tableau des effectifs cumulés et des fréquences cumulées.
- 5°) Combien d'élèves ont une taille strictement inférieure à 1,70 cm ?

3. On jette un dé 100 fois et on note la lecture x_i . On appelle n_i l'effectif correspondant à la lecture x_i (n_i est le nombre d'apparition du chiffre x_i). On obtient le tableau suivant :

x_i	1	2	3	4	5	6
n_i	20	10	26	14	10	20

Déterminer les fréquences et les fréquences cumulées.

Caractéristiques de position

4. Déterminer le mode, la moyenne, la médiane et l'étendue de la série de l'Ex. 2.
5. Dans un Lycée, trois classes de terminale C ont le même sujet de Mathématiques au cours d'un Bac blanc. Les notes obtenues sont les suivantes :

Terminale	6,5	8	9	10	11	12,5	14	16
C ₁	3	7	5	3	3	4	1	1

Terminale	7	8	9	10	11	12,5	14	15	17
C ₂	2	5	6	5	3	4	2	1	2

Terminale	6	7,5	9	10	11	12	14	15	17
C ₃	4	4	5	4	2	3	4	2	3

1°) Calculer les moyennes m_1 ; m_2 ; m_3 des notes respectivement en TC₁ ; TC₂ ; TC₃.

2°) En déduire la moyenne m des notes des trois classes réunies.

6. On a relevé l'âge des vingt personnes d'une entreprise :

20 ; 18 ; 36 ; 30 ; 20 ; 24 ; 60 ; 26 ; 40 ; 24 ; 30 ; 32 ; 18 ; 24 ; 50 ; 26 ; 42 ; 28 ; 52 ; 28.

Construire le tableau statistique de la série des âges (indiquer l'effectif, la fréquence, la fréquence cumulée).

Déterminer le mode, la moyenne m , la médiane, l'étendue de cette série statistique.

7. On a mesuré la durée de vie (en certaines heures) de 900 ampoules.

Les résultats ont permis de dresser la courbe des effectifs cumulés croissants.

Faire un tableau avec les classes, les effectifs et les effectifs cumulés croissants.

Déterminer graphiquement une approximation de la médiane.

8. La moyenne des notes d'un élève est actuellement de 12,5 sur 20. Avec une note de 16 sur 20 au prochain contrôle, cette moyenne passerait à 13.

Quel est le nombre de contrôles effectués à ce jour ?

9. La moyenne des notes de Français d'un élève à l'issue des neuf premiers devoirs est 11,75 sur 20.

Quelle meilleure moyenne peut-il espérer obtenir après un dixième et dernier devoir ?

Sa moyenne peut-elle être inférieure à 10 à l'issue de ce dernier devoir ?

Caractéristiques de dispersion

10. On lance deux dés 60 fois de suite et on note, pour chaque lancer, la somme des points obtenus.

Points	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Effectif	2	3	3	5	8	11	9	8	5	3	3

1°) Calculer la moyenne, l'écart moyen et l'écart type de cette série statistique.

2°) Construire les diagrammes en bâtons des effectifs cumulés croissants et décroissants.

En déduire la valeur de la médiane.

11. Lors d'un contrôle de 400 points, On a relevé la taille (en mm) de chacune d'elles, et regroupé les résultats dans le tableau suivant :

Taille (en mm)	Effectif
28,5	2
28,8	9
29,1	5
29,4	15
29,7	60
30	165
30,3	95
30,6	21
30,9	15
31,12	9
31,5	4

1°) Calculer la moyenne m et l'écart type σ de cette série.

2°) Quel est le pourcentage du nombre de pointes dont la taille est comprise entre $m - \sigma$ et $m + \sigma$

12. Un professeur de français recense le nombre de livres lus par chacun de ses 180 élèves au cours du dernier mois.

Il obtient le résultat suivant :

- 18 élèves n'ont lu aucun livre,
- 72 élèves ont lu 1 livres,
- 45 élèves ont lu 2 livres,
- 36 élèves ont lu 3 livres,
- 9 élèves ont lu 4 livres,

1°) Recopier et compléter le tableau suivant :

Nombre de livres	0	1	2	3	4
Effectif					
Fréquence					
Fréquence (en %)					
Effectif cumulé croissant					
Effectif cumulé décroissant					

Combien d'élèves ont lu au moins 2 livres ? moins de 2 livres ?

2°) Quel est le mode de cette série statistique ?

3°) Calculer la moyenne, l'écart moyen et l'écart type.

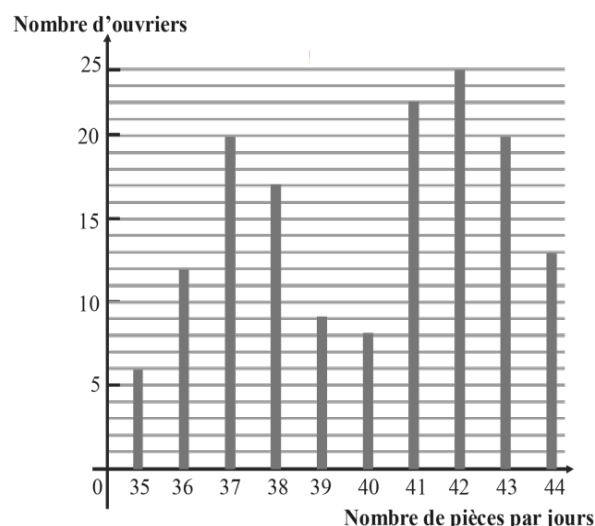
4°) Représenter le résultat de cette enquête par un diagramme circulaire.

13. Une usine utilise deux types de machines, M_1 et M_2 , pour produire la même pièce. La direction a relevé la production journalière de chacun de ses ouvriers :

Les ouvriers travaillant sur une machine M_1 produisent entre 35 et 39 pièces par jour ;

Les ouvriers travaillant sur une machine M_2 produisent entre 40 et 44 pièces par jour.

On regroupe ces données dans le diagramme en bâtons suivant :



Organiser les données dans un tableau faisant apparaître les effectifs (nombre d'ouvriers) ni

Représentation graphique

14. On a relevé la taille (en m) de 50 individus.

Les résultats obtenus sont les suivants :

1,71 ; 1,72 ; 1,82 ; 1,57 ; 1,75 ; 1,78 ; 1,96 ; 1,67 ; 1,63 ; 1,72 ; 1,67 ; 1,73 ; 1,77 ; 1,69 ; 1,78 ; 1,71 ; 1,82 ; 1,62 ; 1,74 ; 1,69 ; 1,7 ; 1,79 ; 1,65 ; 1,75 ; 1,7 ; 1,84 ; 1,64 ; 1,73 ; 1,68 ; 1,74 ; 1,78 ; 1,68 ; 1,79 ; 1,74 ; 1,6 ; 1,73 ; 1,72 ; 1,79 ; 1,74 ; 1,75 ; 1,68 ; 1,74 ; 1,69 ; 1,73 ; 1,64 ; 1 ; 74 ; 1,67 ; 1,72 ; 1,63 ; 1,75.

Regrouper les données dans un tableau suivant les classes [1,5 ; 1,6[; [1,6 ; 1,65[; [1,65 ; 1,7[;

[1,7 ; 1,75[; [1,75 ; 1,8[; [1,8 ; 1,9[; [1,9 ; 2[.

Construire l'histogramme correspondant (une classe d'amplitude 0,1 sera représentée par un rectangle de base 3 cm et le rectangle représentant la classe [1,65 ; 1,7[aura une hauteur de 2 cm).

15. Le tableau ci-dessous recense les têtes de bétail (bovin et ovin) dans certains pays africain :

	Bovin (×1000)	Fréquence	Ovin (×1000)	Fréquence (%)
Burkina	4250			19,85
Cameroun	5 000			13,7
Guinée	1 750			1,6
Mali	5 500			18,6
Mauritanie	1 369			
Niger	4 750			18,75
Sénégal	2 750			16,6
Tchad	4 750			7,55
Totale	Totale		28 000	

1°) Compléter le tableau (on arrondira) les fréquences à 10^{-3} près).

2°) Dessiner un diagramme circulaire représentant la répartition de la population de bovins de ces huit pays.

Représenter par un diagramme à bandes les effectifs de la population ovine de ces pays.