

REPUBLIQUE ISLAMIQUE DE MAURITANIE

Honneur - Fraternité - Justice



MINISTRE DE L'EDUCATION ET DE LA REFORME DU
SYSTEME D'ENSEIGNEMENT
INSTITUT PEDAGOGIQUE NATIONAL

Mathématiques

5^{ème} LM

Réalisé par :

Mohamed Yahya Mohamed Abdellahi
Inspecteur de l'enseignement
secondaire

Cheikh Omar Samba TALL
Professeur de l'enseignement
secondaire

Révisé par :

Mohameden Ebah
Inspecteur de l'enseignement
secondaire

Mohameden El Hadi
Inspecteur de l'enseignement
secondaire

l'illustratrice / maquettiste :

Nejdi Sid'Ahmed Ejjejd Maquettiste /IPN

2026

IPN

PREFACE

Dans le cadre de la mise en œuvre des orientations nationales visant l'amélioration de la qualité de l'enseignement et l'adaptation des apprentissages aux exigences du développement, l'Institut Pédagogique National a le plaisir de mettre à la disposition des enseignants et des élèves cette nouvelle collection de manuels scolaires scientifiques destinés au second cycle de l'enseignement secondaire.

Ces ouvrages couvrent l'ensemble des filières du lycée, aussi bien scientifiques que littéraires, dans les disciplines des Mathématiques, des Sciences de la Nature, de la Physique et de la Chimie. Ils ont été élaborés conformément aux programmes officiellement en vigueur et traduisent la volonté des autorités éducatives de garantir à tous les apprenants des ressources pédagogiques de qualité, adaptées aux objectifs de formation et aux réalités de notre système éducatif.

Depuis la réécriture des programmes en 1999 jusqu'à la validation des programmes actuellement en vigueur en 2022, notre système éducatif a connu plusieurs étapes de réforme et de modernisation curriculaires. Toutefois, cette collection marque une avancée historique, puisqu'il s'agit de la première fois que les filières littéraires, notamment les Lettres Modernes (LM) et les Lettres Originelles (LO), bénéficient de manuels scolaires dans les disciplines scientifiques pour tous les niveaux du second cycle, de la 5^e à la 7^e année. Les filières LO ont, en outre, bénéficié de manuels rédigés en langue arabe afin de répondre aux spécificités linguistiques et pédagogiques de ces séries et de garantir une meilleure accessibilité des contenus scientifiques aux apprenants concernés.

Le travail réalisé dans le cadre de ce projet a consisté, d'une part, à la révision de douze titres correspondant aux manuels des disciplines de base dans les différents niveaux du lycée et, d'autre part, à la conception de vingt-deux nouveaux titres couvrant les autres. Cette entreprise éditoriale d'envergure témoigne de l'engagement des autorités éducatives à renforcer les ressources pédagogiques nationales et à accompagner efficacement la mise en œuvre des nouveaux programmes.

Conscient de l'importance stratégique du manuel scolaire dans le processus d'enseignement-apprentissage, l'Institut Pédagogique National a mobilisé les meilleures compétences nationales pour la réalisation de cette tâche. Des inspecteurs, des conseillers pédagogiques et des professeurs expérimentés, reconnus pour leur expertise scientifique et pédagogique, ont ainsi été sélectionnés afin de concevoir et de réviser des ouvrages répondant aux exigences de qualité académique, pédagogique et didactique.

Les équipes de conception se sont attachées à produire des manuels clairs, structurés et accessibles, favorisant le développement des connaissances, des compétences et de l'esprit scientifique chez les apprenants. Une attention particulière a été accordée à la cohérence des contenus, à la progressivité des apprentissages, à l'intégration des activités pratiques ainsi qu'à l'exploitation d'illustrations et de situations d'apprentissage adaptées au contexte national.

L'Institut Pédagogique National tient à exprimer sa profonde gratitude à la Banque Islamique de Développement pour l'appui précieux qu'elle a apporté à ce projet. Grâce à son financement, toutes les étapes de cette importante œuvre éducative ont pu être réalisées, depuis la rédaction et la révision des manuscrits jusqu'à leur édition, leur correction et leur impression. Cet accompagnement constitue une contribution majeure au développement de l'éducation et au renforcement de la qualité des apprentissages dans notre pays.

L'Institut Pédagogique National adresse également ses sincères remerciements à tous ceux qui ont contribué à l'aboutissement de cette œuvre : auteurs, relecteurs, inspecteurs, équipes techniques et partenaires ayant accompagné les différentes phases de conception et de production.

Nous espérons que ces manuels constitueront des outils pédagogiques efficaces au service des enseignants et des élèves et qu'ils contribueront au renforcement de l'enseignement des sciences, à l'amélioration des performances scolaires et à la formation d'une génération capable de participer activement au développement national.

Le Directeur Général
Dr. Cheikh Mouadh Sidi Abdalla

IPN

Avant-propos

Chers collègues professeurs,

Chers élèves,

Dans le cadre de la mise en œuvre des nouveaux programmes du secondaire, fondés sur une approche holistique, l'Institut Pédagogique National a le plaisir de mettre à la disposition de la communauté éducative un **manuel de mathématiques** destiné aux **élèves de la 5^{ém} LM**.

Ce manuel a été élaboré avec le souci de proposer un outil pédagogique clair, fonctionnel et adapté aux spécificités de cette série, où les mathématiques occupent un rôle de soutien aux disciplines principales.

L'objectif principal de ce manuel est de **renforcer chez les élèves une attitude positive vis-à-vis des mathématiques**, en mettant l'accent sur les compétences de base, la rigueur logique et le raisonnement.

Ce manuel est composé de 6 chapitres à savoir : calcul dans $\mathbb{R}$, équations inéquations et systèmes fonctions numériques droites et vecteurs dans le plan proportionnalité et statistique comportant chacun un cours bien structuré suivi d'exemples et d'applications corrigées et d'une série d'exercices divers.

Nous encourageons vivement les enseignants à nous faire part de leurs **observations pédagogiques**, ainsi que leurs suggestions constructives, afin que la version définitive du manuel réponde encore mieux aux attentes du terrain.

En remerciant tous les acteurs ayant contribué à la réalisation de cet ouvrage, nous souhaitons aux élèves et aux enseignants une année riche en découvertes et en réussites.

L'Institut Pédagogique National

Septembre 2025

IPN

Table de matières

N°	Chapitre	Page
1	Calcul dans IR	09
2	Equations, Inéquations et Systèmes	33
3	Fonctions numériques	49
4	Droites et vecteurs dans le plan	69
5	Proportionnalité	83
6	Statistiques	93

IPN

Chapitre 1 : Calcul dans IR

I Priorité de calcul et Fractions :

1) Règles de signes et priorité de calcul :

a) Suppression de parenthèses et règles de signes

$a + (b - c) = a + b - c$ $a + (b + c) = a + b + c$	Parenthèses précédées du signe + On conserve les signes
$a - (b + c) = a - b - c$ $a - (b - c) = a - b + c$	Parenthèses précédées du signe - On change les signes
$a \times (-b) = -ab$ $(-a) \times b = -ab$ $(-a) \times (-b) = ab$	Le produit de deux nombres de même signe est un nombre positif. Le produit de deux nombres de signes contraires est un nombre négatif

Exemple 1

Simplifier les expressions :

$$A = 4 + (3x - 2)$$

$$B = 2x - (-5 + 5x)$$

Solution

$$A = 4 + (3x - 2) = 4 + 3x - 2 = 3x + 2$$

$$B = 2x - (-5 + 5x) = 2x + 5 - 5x = -3x + 5$$

Exemple 2

- 7×4 est positif (produit de deux réels de même signe) et vaut 28
- $(-5) \times 3$ est négatif (produit de deux réels de signes contraires) vaut -15
- $0,4 \times (-6)$ est négatif (produit de deux réels de signes contraires) vaut -2,4
- $(-0,7) \times (-10)$ est positif (produit de deux réels de même signe) et vaut 7

- $4x \times (-3) = -12x$
- $(-2x) \times 7 = -14x$
- $(-2) \times (-6x) = 12x$
- Le produit de 6 nombres négatifs est positif
- Le produit de 11 nombres négatifs est négatif

b) Règles de priorité :

Les règles de priorité qui s'appliquent aux suites de calculs définissent l'ordre dans lequel ces calculs doivent être menés :

Les parenthèses ont toujours la priorité sur les autres calculs. On commence par les plus intérieures.

Quand il n'y a plus de parenthèses, on effectue, dans l'ordre, :

Les puissances

Les multiplications et les divisions

Les additions et les soustractions

Exemple 3

Calculer les nombres suivants

$$A = 6 \times (3 + 7)$$

$$B = 23 - 4 \times 5$$

$$C = (3 + 5) \times (9 - 7)$$

$$D = (13 - 7) \div 2$$

$$E = 5 - [4 - (2 + 1)]$$

$$F = (3 + 5 \times 7) \div 2 + 1$$

Solution :

$$A = 6 \times (3 + 7)$$

$$A = 6 \times 10$$

$$A = 60$$

$$B = 23 - 4 \times 5$$

$$B = 23 - 20$$

$$B = 3$$

Exercices d'application

Application 1

Calculer :

$$A = 132 - 11 \times 10 + 4 \times 2,5$$

$$B = 1,6 \div 2 \times 7 \times 5 \times 0,6 \div 3$$

$$C = (0,5 + 0,4) \times 0,3 - 0,2 \times 0,1$$

$$D = 0,5 + 0,4 \times (0,3 - 0,2) \times 0,1$$

Solutions des applications

Application 1

$$A = 132 - 11 \times 10 + 4 \times 2,5$$

$$= 132 - 110 + 10 = 22 + 10 = 32$$

$$B = 1,6 \div 2 \times 7 \times 5 \times 0,6 \div 3$$

$$= 0,8 \times 7 \times 5 \times 0,6 \div 3 = 0,56 \times 5 \times 0,6 \div 3$$

$$= 2,8 \times 0,6 \div 3 = 1,68 \div 3 = 0,56$$

$$C = (0,5 + 0,4) \times 0,3 - 0,2 \times 0,1$$

$$= 0,9 \times 0,3 - 0,2 \times 0,1 = 0,27 - 0,02$$

$$C = (3 + 5) \times (9 - 7)$$

$$C = 15 \times 2$$

$$C = 30$$

$$D = (13 - 7) \div 2$$

$$D = 6 \div 2$$

$$D = 3$$

$$E = 5 - [4 - (2 + 1)]$$

$$E = 5 - (4 - 3)$$

$$E = 5 - 1$$

$$E = 4$$

$$F = (3 + 5 \times 7) \div 2 + 1$$

$$F = (3 + 35) \div 2 + 1$$

$$F = 38 \div 2 + 1$$

$$F = 19 + 1$$

$$F = 20$$

Application 2

Placer les parenthèses nécessaires pour obtenir les résultats donnés :

$$9 = 1 + 2 \times 3$$

$$20 = 10 - 3 \times 2 \times 5$$

$$65 = 5 \times 9 + 5 \times 4$$

$$5 \times 9 + 5 \times 4 = 145$$

$$= 0,25$$

$$D = 0,5 + 0,4 \times (0,3 - 0,2) \times 0,1$$

$$= 0,5 + 0,4 \times 0,1 \times 0,1 = 0,5004$$

Application 2

Plaçons les parenthèses nécessaires pour obtenir les résultats donnés.

$$9 = (1 + 2) \times 3$$

$$20 = (10 - 3 \times 2) \times 5$$

$$65 = 5 \times 9 + 5 \times 4$$

$$5 \times (9 + 5 \times 4) = 145$$

2) Fractions

Soient a, b, c, et d des nombres réels

Règle		Condition	Résultat
Addition et Soustraction	avec le même dénominateur	$d \neq 0$	$\frac{a}{d} + \frac{b}{d} = \frac{a+b}{d}$ $\frac{a}{d} - \frac{b}{d} = \frac{a-b}{d}$
	réduction au même dénominateur	$b \neq 0, d \neq 0$	$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$ $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad-bc}{bd}$
Multiplication		$b \neq 0, d \neq 0$	$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ $c \times \frac{a}{b} = \frac{ac}{b}$
Division Diviser par un nombre c'est multiplier par son inverse		$a \neq 0, b \neq 0$	$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$
Règles de signes Le quotient $\frac{a}{b}$ et le produit ab ont le même signe		$b \neq 0$	$\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$ $\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$
Inverse d'une fraction :		$a \neq 0, b \neq 0$	L'inverse de $\frac{a}{b}$ est $\frac{b}{a}$ En effet $\frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = 1$

Exemples :

Exemples 1 addition

$$\frac{2}{3} + \frac{5}{3} = \frac{7}{3} \quad (\text{Les deux fractions ont le même dénominateur})$$

$$\frac{3}{4} + \frac{5}{8} = \frac{3 \times 2}{4 \times 2} + \frac{5}{8} = \frac{6}{8} + \frac{5}{8} = \frac{11}{8} \quad (\text{un des dénominateurs est multiple de l'autre})$$

$$\frac{5}{3} + \frac{2}{7} = \frac{5 \times 7}{3 \times 7} + \frac{2 \times 3}{7 \times 3} = \frac{35}{21} + \frac{6}{21} = \frac{41}{21}$$

Exemple 2 Multiplication

$$\frac{2}{25} \times 75 = \frac{2 \times 75}{25} = \frac{150}{25} = 6$$

$$\frac{4}{3} \times \frac{5}{7} = \frac{4 \times 5}{3 \times 7} = \frac{20}{21}$$

$$\frac{15}{22} \times \frac{2}{3} = \frac{5 \times 3}{11 \times 2} \times \frac{2}{3} = \frac{5}{11}$$

Exemple 3 inverse

L'inverse de $\frac{2}{3}$ est $\frac{3}{2}$;

L'inverse de 7 est $\frac{1}{7}$.

L'inverse de $-\frac{2}{5}$ est $-\frac{5}{2}$

L'inverse de $\frac{1}{2}$ est $\frac{2}{1}$ (c'est à dire 2)

Exemple 4 Division :

$$5 \div \frac{4}{7} = 5 \times \frac{7}{4} = \frac{35}{4}$$

$$\frac{3}{5} \div \frac{4}{7} = \frac{3}{5} \times \frac{7}{4} = \frac{21}{20}$$

Exercices d'application**Application 1**

Calculer

$$A = \frac{2}{6} + \frac{-7}{6}$$

$$B = \frac{-9}{4} - \frac{3}{4}$$

$$C = \frac{3}{5} + \frac{7}{10}$$

$$D = \frac{5 \times 2}{6 \times 2} + \frac{3 \times 3}{4 \times 3}$$

Application 2

Calculer

$$E = \frac{-3}{5} \times \frac{10}{7}$$

$$F = \frac{\frac{7}{-5}}{\frac{3}{-4}}$$

Solutions des applications**Application 1**

Calcul des nombres :

$$A = \frac{2}{6} + \frac{-7}{6} = \frac{2+(-7)}{6} = \frac{2-7}{6} = \frac{-5}{6}$$

$$B = \frac{-9}{4} - \frac{3}{4} = \frac{-9-3}{4} = \frac{-12}{4} = -3$$

$$C = \frac{3}{5} + \frac{7}{10} = \frac{3 \times 2}{5 \times 2} + \frac{7}{10} = \frac{6}{10} + \frac{7}{10} = \frac{13}{10}$$

$$D = \frac{5 \times 2}{6 \times 2} + \frac{3 \times 3}{4 \times 3} = \frac{10}{12} + \frac{9}{12} = \frac{10+9}{12} = \frac{19}{12}$$

Application 2

$$E = \frac{-3}{5} \times \frac{10}{7} = \frac{-3 \times 10}{5 \times 7} = \frac{-30}{35} = \frac{-6}{7}$$

$$F = \frac{\frac{7}{-5}}{\frac{3}{-4}} = \frac{7}{-5} : \frac{3}{-4} = \frac{7}{-5} \times \frac{-4}{3} = \frac{7 \times (-4)}{(-5) \times 3} = \frac{28}{15}$$

$$G = \frac{20}{3} \times \left(\frac{2}{3} - \frac{5}{2} + \frac{3}{2} \right)^2 \div 10 - 3$$

$$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{11}{7}} = \frac{2}{3} \times \frac{11}{7} = \frac{22}{21}$$

$$\frac{\frac{5}{3}}{\frac{11}{11}} = \frac{5}{3} \times \frac{1}{11} = \frac{5}{33}$$

$$G = \frac{20}{3} \times \left(\frac{2}{3} - \frac{5}{2} + \frac{3}{2} \right)^2 \div 10 - 3$$

Application 3

Un éleveur vend son troupeau de moutons. il cède tout d'abord les $\frac{2}{5}$ à son

cousin, puis les $\frac{3}{4}$ du reste à son boucher

du village voisin. Un peu plus tard, il vend les $\frac{9}{10}$ de ce qui lui reste à son frère. Il ne

lui reste alors que 3 moutons.

Combien avait-il de moutons ?

$$\begin{aligned} &= \frac{20}{3} \times \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{2} \right)^2 \div 10 - 3 \\ &= \frac{20}{3} \times \left(-\frac{1}{3} \right)^2 \div 10 - 3 = \frac{20}{3} \times \frac{1}{9} \div 10 - 3 \\ &= \frac{20}{27} \div 10 - 3 = \frac{20}{27} \times \frac{1}{10} - 3 \\ &= \frac{2}{27} - 3 = -\frac{79}{27} \end{aligned}$$

Application 3

$$\text{Reste après le cousin : } 1 - \frac{2}{5} = \frac{5}{5} - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$$

$$\text{Quantité cédée au boucher : } \frac{3}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{20}$$

Reste après le boucher :

$$1 - \frac{2}{5} - \frac{9}{20} = \frac{20}{20} - \frac{8}{20} - \frac{9}{20} = \frac{3}{20}$$

$$\text{Quantité vendue au frère : } \frac{9}{10} \times \frac{3}{20} = \frac{27}{200}$$

Reste après le frère :

$$\frac{3}{20} - \frac{27}{200} = \frac{30}{200} - \frac{27}{200} = \frac{3}{200}$$

Il avait donc 200 moutons.

II Puissances et Racines carrées

1) Puissances

a) Definition:

Soit a un nombre réel et n un entier, $n \geq 1$. Alors $a^n = \underbrace{a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ facteurs}}$

Si $a \neq 0$, $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$. $a^0 = 1$ et 0^0 n'a pas de sens.

Des pièges à éviter

Ne pas confondre :

$$-2^6 \text{ et } (-2)^6 \quad 3 \times 7^4 \text{ et } (3 \times 7)^4 \quad 5+3^2 \text{ et } (5+3)^2$$

b) Opérations et puissances

Soient a et b deux réels non nuls, m et n deux entiers relatifs

$a^n \times a^m = a^{n+m}$ $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ $(a^n)^m = a^{n \times m}$	$(a \times b)^n = a^n \times b^n$ $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$	En particulier $(-a)^n = (-1)^n \times a^n$ Pour n pair $(-a)^n = a^n$ Pour n impair $(-a)^n = -a^n$
---	---	--

Exemple 1

Calculer les nombres

$$A = (-3)^2 + 5 \times 2^2$$

$$B = 2 \times (-4)^2 + 6 \times (-1)^5.$$

Solution

$A = (-3)^2 + 5 \times 2^2 = 9 + 5 \times 4$ (Le calcul de puissance est prioritaire...) $A = 9 + 20$ (La multiplication est prioritaire sur l'addition). Donc $A = 29$

Exemple 2

Ecrire les nombres suivants sous la forme

$$a^n : L = (2^3)^{-2} \times 2^5 \quad M = \frac{7^4 \times (7^{-2})^3}{7^{-5}}$$

$$N = 10^{-4} \times \frac{10^5}{10^{-1}} \times (10^{-2})^{-1}$$

Solution

$$L = (2^3)^{-2} \times 2^5$$

$$L = (2^3)^{-2} \times 2^5 = 2^{-6} \times 2^5 = 2^{-1}$$

$$M = \frac{7^4 \times 7^{-6}}{7^{-5}} = \frac{7^{-2}}{7^{-5}} = 7^{-2+5} = 7^3$$

$$N = 10^{-4} \times 10^{5+1} \times 10^2$$

$$= 10^{-4} \times 10^6 \times 10^2 = 10^4$$

Exemple 3

Ecrire sous la forme d'une fraction

$$\text{irréductible : } C = \frac{49 \times 10^3 \times 6 \times 10^{-10}}{14 \times 10^{-2}}$$

Solution :

$$C = \frac{49 \times 10^3 \times 6 \times 10^{-10}}{14 \times 10^{-2}}$$

$$C = \frac{7 \times 7 \times 3 \times 2 \times 10^{-7}}{7 \times 2 \times 10^{-2}}$$

$$C = 7 \times 3 \times 10^{-7-(-2)}$$

$$C = 21 \times 10^{-7-(-2)}$$

$$C = 21 \times 10^{-5} = \frac{21}{10^5} = \frac{21}{100000}$$

Exercices d'application

Application 1

Ecrire sous la forme la plus simple :

$$X = \left(\frac{1}{3}\right)^8 \times 3^{10}, \quad Y = \left(-\frac{4}{3}\right)^5 \times \left(\frac{3}{4}\right)^6$$

$$Z = (1,5)^{2011} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{2011}.$$

Application 2

- 1) Comparer $(2^3)^5$ et 2^{3^5}
- 2) Calculer les nombres $A = (-3)^2 + 5 \times 2^2$ et $B = 2 \times (-4)^2 + 6 \times (-1)^5$.

Application 3

Soient a et b deux nombres réels non nuls. Simplifier chacun des nombres suivants :

$$A = (-a^{-2}b^3)^{-5}; \quad B = \left(\frac{a}{5}\right)^2 \times \left(\frac{5}{b}\right)^{-2} \quad \text{et}$$

$$C = \left(\frac{2a^2b}{4a^2b^2}\right)^{-3} \times \left(\frac{2a^2b}{4a^2b^2}\right)^{-3}.$$

Application 4

Simplifier les nombres suivants :

$$A = \frac{(3^5 \times 2^{-2})^2}{(9^{-1} \times 2^3)^3},$$

$$B = \left(\frac{2^3 \times 5^{-3}}{4 \times 25}\right)^2 \div \frac{10^2 \times 2}{5^8},$$

Solutions des applications

Application 1

$$\begin{aligned} X &= \left(\frac{1}{3}\right)^8 \times 3^{10} = \frac{1^8}{3^8} \times 3^{10} \\ &= 1 \times 3^{10} \times 3^{-8} = 3^{10-8} = 3^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y &= \left(-\frac{4}{3}\right)^5 \times \left(\frac{3}{4}\right)^6 \\ &= \frac{(-1)^5 \times 4^5}{3^5} \times \frac{3^6}{4^6} \\ &= -4^{5-6} \times 3^{6-5} \\ &= -4^{-1} \times 3^1 = -\frac{3}{4} \end{aligned}$$

$$C = 40^{71} \times (1,25)^{48} \times 10^{-119}$$

$$D = 12^{100} \times (1,5)^{50} \times 6^{-149}$$

Application 5

10 grains de sable font un volume de 1 mm^3 . Sur une plage de 125 m de large et de 2 km de long, il y a une épaisseur de 4 m de sable. Donner un ordre de grandeur du nombre de grains de sable sur cette plage sous forme d'une puissance de 10.

Application 6

- 1) Quelle est l'écriture la plus simple utilisant seulement une puissance pour la somme $2^4 + 2^4$?
- 2) Peut-on écrire la somme $12^2 + 5^2$ sous la forme d'un carré d'un nombre entier? (si oui, il faut préciser lequel)
- 3) Peut-on écrire la somme $20^2 + 7^2$ sous la forme d'un carré d'un nombre entier? (si oui, préciser lequel)

$$\begin{aligned} Z &= (1,5)^{2011} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{2011} = \left(\frac{3}{2}\right)^{2011} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{2011} \\ &= \left(\frac{3}{2} \times \frac{2}{3}\right)^{2011} = 1^{2011} = 1 \end{aligned}$$

Application 2

- 1) On a $(2^3)^5 = 2^{3 \times 5} = 2^{15}$,
et $2^{3^5} = 2^{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3} = 2^{243}$.
Or $234 > 15$, donc $2^{3^5} > (2^3)^5$.
- 2) $A = (-3)^2 + 5 \times 2^2 = 9 + 5 \times 4$,
 $A = 9 + 20 = 29$
 $B = 2 \times (-4)^2 + 6 \times (-1)^5$
 $= 2 \times 16 + 6 \times (-1) = 32 - 6 = 26$

Application 3

$$A = (-a^{-2}b^3)^{-5}$$

$$= (-1)^{-5} (a^{-2})^{-5} (b^3)^{-5} = -a^{10} \times b^{-15} = \frac{-a^{10}}{b^{15}}$$

$$B = \left(\frac{a}{5}\right)^2 \times \left(\frac{5}{b}\right)^{-2} = \frac{a^2}{5^2} \times \left(\frac{b}{5}\right)^2 = \frac{a^2}{5^2} \times \frac{b^2}{5^2} \\ = \frac{a^2 b^2}{5^4}$$

$$C = \left(\frac{2a^2b}{4a^2b^2}\right)^{-3} \times \left(\frac{2a^2b}{4a^2b^2}\right)^{-3} = \\ \left(\frac{2a^2b}{4a^2b^2}\right)^{-6} = \left(\frac{2a^2b}{2 \times 2a^2b \times b}\right)^{-6} \\ = \left(\frac{1}{2b}\right)^{-6} = 2^6 \times b^6.$$

Application 4

$$A = \frac{(3^5 \times 2^{-2})^2}{(9^{-1} \times 2^3)^3} = \frac{3^{5 \times 2} \times 2^{2 \times (-2)}}{9^{(-1) \times 3} \times 2^{3 \times 3}} = \frac{3^{10} \times 2^{(-4)}}{(3^2)^{-3} \times 2^9} \\ = \frac{3^{10} \times 3^6}{2^9 \times 2^4} = \frac{3^{16}}{2^{13}} = 3^{16} \times 2^{-13}$$

$$B = \left(\frac{2^3 \times 5^{-3}}{4 \times 25}\right)^2 \div \frac{10^2 \times 2}{5^8} \\ = \frac{2^6 \times 5^{-6}}{(2^2 \times 5^2)^2} \times \frac{5^8}{2 \times (2 \times 5)^2} = \frac{2^6 \times 5^2}{2^4 \times 5^4 \times 2 \times 2^2 \times 5^2} \\ = \frac{2^6 \times 5^2}{2^4 \times 5^4 \times 2 \times 2^2 \times 5^2} = \frac{2^6 \times 5^2}{2^7 \times 5^6} = 2^{-1} \times 5^{-4}$$

$$C = 40^{71} \times (1,25)^{48} \times 10^{-119}$$

$$= (4 \times 10)^{71} \times \left(\frac{125}{100}\right)^{48} \times 10^{-119}$$

$$= (2^2)^{71} \times 10^{71} \times \left(\frac{5^3}{10^2}\right)^{48} \times 10^{-119}$$

$$= 2^{142} \times 10^{71} \times \frac{5^{144}}{10^{96}} \times 10^{-119}$$

$$= 2^{142} \times 10^{71} \times 10^{-96} \times 5^{144} \times 10^{-119}$$

$$= 2^{142} \times 5^{142} \times 5^2 \times 10^{-215} \times 10^{71}$$

$$= 2^{142} \times 5^{-142} \times 5^2 \times 10^{-144} = 10^{142} \times 10^{-144} \times 5^2$$

$$= 10^{-2} \times 5^2 = 2^{-2} \times 5^{-2} \times 5^2 = 2^{-2} = \frac{1}{4}$$

Application 5

La plage peut être considérée comme un pavé de dimensions 125 m, 2 000 m et 4 m.

Son volume est égal à :

$$125 \times 2\,000 \times 4 = 1\,000\,000 \text{ m}^3 = 10^6 \text{ m}^3$$

$$1 \text{ m}^3 = 10^9 \text{ mm}^3.$$

$$\text{Donc } V = 10^{15} \text{ mm}^3$$

Étant donné qu'il y a 10 grains par mm^3 , il y aura en tout 10^{16} grains de sable sur cette plage.

Application 6

1) $2^4 + 2^4 = 2 \times 2^4$. Mais pour obtenir une écriture utilisant seulement une puissance, on doit écrire ce produit sous la forme 2^5

$$2) 12^2 + 5^2 = 144 + 25 = 169 = 13^2$$

3) $20^2 + 7^2 = 400 + 49 = 449$. Or $21^2 = 441$ et $22^2 = 484$. Donc il n'existe pas de nombre entier dont le carré soit égal à $20^2 + 7^2$

2) Racine carrée

a. Définition

Soit a un nombre positif, il existe un unique réel positif dont le carré est a . Ce nombre se note par $\sqrt{a}$ se lit "racine carrée de a " ou "radical de a ".

b. Propriétés

Soient a et b des réels positifs, alors :

$$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \quad \text{avec } b \neq 0$$

$$\sqrt{a^n} = (\sqrt{a})^n \quad (n \text{ entier naturel})$$

$$\sqrt{a^2} = (\sqrt{a})^2 = a$$

En général

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{a+b}$$

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} \neq \sqrt{a-b}$$

Pas de résultat général simple concernant la différence et la somme de deux racines.

Exemple 1

Simplifie les nombres suivants :

$$D = (\sqrt{3} - 5)^2 \quad E = \sqrt{15} \times \sqrt{10}$$

$$F = \frac{\sqrt{500}}{5} \quad G = \frac{3\sqrt{45}}{6\sqrt{20}}$$

Solution

$$\begin{aligned} D &= (\sqrt{3} - 5)^2 = \sqrt{3}^2 - 2 \times \sqrt{3} \times 5 + 5^2 \\ &= 3 - 10\sqrt{3} + 25 = 28 - 10\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$E = \sqrt{15} \times \sqrt{10} = \sqrt{5} \times \sqrt{3} \times \sqrt{2} \times \sqrt{5} = 5\sqrt{6}$$

$$F = \frac{\sqrt{500}}{5} = \frac{\sqrt{100} \times \sqrt{5}}{5} = \frac{10\sqrt{5}}{5}$$

$$G = \frac{3\sqrt{45}}{6\sqrt{20}} = \frac{3 \times \sqrt{9} \times \sqrt{5}}{6 \times \sqrt{4} \times \sqrt{5}} = \frac{3 \times 3}{6 \times 2} = \frac{3}{4}$$

c. Règles et techniques de calcul

1) Résolution de l'équation $x^2 = a$ dans $\mathbb{R}$

Si $a < 0$, l'équation n'a pas de solution.

Si $a = 0$, l'équation a une seule solution $x=0$.

Si $a > 0$, l'équation a deux solutions : $x_1 = \sqrt{a}$ et $x_2 = -\sqrt{a}$.

d. Racine carrée et valeur absolue

Soit a un réel quelconque. Alors $\sqrt{a^2} = |a|$.

$$\sqrt{a^2} = a \quad \text{si } a \geq 0$$

$$\sqrt{a^2} = -a \quad \text{si } a \leq 0$$

Exemple 2

$$\sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3$$

$$\sqrt{(\pi-2)^2} = |\pi-2| = \pi-2$$

$$\sqrt{(\pi-5)^2} = |\pi-5| = -\pi+5$$

e. Remarque

Soit $a \geq 0$, $b \geq 0$. Alors $\sqrt{a^2 b} = a\sqrt{b}$.

Exemple 3

Simplifie les nombres suivants :

$$A = 5\sqrt{27} - 2\sqrt{75} + 3\sqrt{3} \quad B = 2\sqrt{75} \times \sqrt{3}$$

$$C = -4\sqrt{18} + \sqrt{128} - 3\sqrt{32}$$

Solution

$$A = 5\sqrt{27} - 2\sqrt{75} + 3\sqrt{3}$$

$$A = 5\sqrt{27} - 2\sqrt{75} + 3\sqrt{3}$$

$$= 5\sqrt{9 \times 3} - 2\sqrt{25 \times 3} + 3\sqrt{3} \quad 8\sqrt{3}$$

$$= 5 \times 3\sqrt{3} - 2 \times 5\sqrt{3} + 3\sqrt{3}$$

$$= 15\sqrt{3} - 10\sqrt{3} + 3\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$$

$$B = 2\sqrt{75} \times \sqrt{3} = 2 \times \sqrt{25} \times \sqrt{3} \times \sqrt{3}$$

$$= 2 \times 5 \times 3 = 30$$

$$C = -4\sqrt{18} + \sqrt{128} - 3\sqrt{32}$$

$$C = -4\sqrt{18} + \sqrt{128} - 3\sqrt{32} =$$

$$-4\sqrt{9 \times 2} + \sqrt{64 \times 2} - 3\sqrt{16 \times 2}$$

$$= -4 \times 3\sqrt{2} + 8\sqrt{2} - 3 \times 4\sqrt{2}$$

$$= -12\sqrt{2} + 8\sqrt{2} - 12\sqrt{2} = -16\sqrt{2}$$

Exemple 4

Développer $E = (\sqrt{3} - 5)^2$

Solution :

$$E = (\sqrt{3} - 5)^2 = \sqrt{3}^2 + 5^2 - 2 \times \sqrt{3} \times 5$$

$$= 3 + 25 - 10\sqrt{3} = 28 - 10\sqrt{3}$$

Exemple 5

Rendre rationnels les dénominateurs des quotients :

$$A = \frac{5}{\sqrt{2}} ;$$

$$B = \frac{3}{\sqrt{3} - 2} ;$$

Exercices d'application

Application 1

1) Ecrire $\sqrt{45}, \sqrt{12}, \sqrt{20}$ sous la forme $a\sqrt{b}$:

2) Ecrire sous la forme $a\sqrt{b}$ les nombres :

$$C = \frac{1}{2\sqrt{5} - 5\sqrt{2}} ;$$

Solution

Pour écrire la fraction sans radical au dénominateur, on multiplie ses deux termes par l'expression conjuguée du dénominateur :

$$A = \frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{5 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}.$$

$$B = \frac{3}{\sqrt{3} - 2} = \frac{3}{\sqrt{3} - 2} \times \frac{\sqrt{3} + 2}{\sqrt{3} + 2}$$

$$= \frac{3 \times (\sqrt{3} + 2)}{(\sqrt{3} - 2)(\sqrt{3} + 2)}$$

$$= \frac{3\sqrt{3} + 6}{(\sqrt{3})^2 - 2^2} = \frac{3\sqrt{3} + 6}{3 - 4} = \frac{3\sqrt{3} + 6}{-1}$$

$$\text{Donc } B = -3\sqrt{3} - 6.$$

$$C = \frac{1}{2\sqrt{5} - 5\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{5} - 5\sqrt{2}} \times \frac{2\sqrt{5} + 5\sqrt{2}}{2\sqrt{5} + 5\sqrt{2}}$$

$$= \frac{2\sqrt{5} + 5\sqrt{2}}{(2\sqrt{5} - 5\sqrt{2})(2\sqrt{5} + 5\sqrt{2})}$$

$$= \frac{2\sqrt{5} + 5\sqrt{2}}{(2\sqrt{5})^2 - (5\sqrt{2})^2} = \frac{2\sqrt{5} + 5\sqrt{2}}{4 \times 5 - 25 \times 2}$$

$$C = \frac{2\sqrt{5} + 5\sqrt{2}}{-30} = -\frac{2\sqrt{5} + 5\sqrt{2}}{30}$$

$$\text{Donc } C = -\frac{2\sqrt{5} + 5\sqrt{2}}{30}.$$

$$C = 2\sqrt{45} + 3\sqrt{12} - \sqrt{20} - 6\sqrt{3}$$

$$D = 3\sqrt{18} + 2\sqrt{32} - \sqrt{50}$$

Application 2

Ecriture sous la forme $a\sqrt{b}$ ou a et b sont deux entiers non nuls, avec b le plus petit possible :

$$A = \sqrt{500} + 3\sqrt{5} - 3\sqrt{45}$$

$$B = 4\sqrt{7} + 2\sqrt{63} - 5\sqrt{28}$$

$$C = \frac{1}{2-\sqrt{3}} + \frac{1}{2+\sqrt{3}}$$

Application 3

1) Calculer $B = (4 - 2\sqrt{3})(4 + 2\sqrt{3})$.

2) Ecrire sous la forme $a + b\sqrt{3}$ où a et b sont des entiers les expressions :

$$C = (4 - 2\sqrt{3})^2 \text{ et } D = \frac{1}{4} \times (28 - 16\sqrt{3}).$$

Application 4

Solutions des applications

Application 1

Ecrivons $\sqrt{45}, \sqrt{12}, \sqrt{20}$ sous la forme $a\sqrt{b}$:

$$\sqrt{45} = \sqrt{9 \times 5} = \sqrt{9} \times \sqrt{5} = 3\sqrt{5}$$

$$\sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = \sqrt{4} \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

$$\sqrt{20} = \sqrt{4 \times 5} = \sqrt{4} \times \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$$

2) Ecrivons D sous la forme $a\sqrt{b}$:

$$C = 2\sqrt{45} + 3\sqrt{12} - \sqrt{20} - 6\sqrt{3}$$

$$= 2 \times 3\sqrt{5} + 3 \times 2\sqrt{3} - 2\sqrt{5} - 6\sqrt{3}$$

$$= 6\sqrt{5} + 6\sqrt{3} - 2\sqrt{5} - 6\sqrt{3}$$

$$\text{Donc } C = 4\sqrt{5}$$

3) Ecrivons D sous la forme $a\sqrt{b}$:

$$D = 3\sqrt{18} + 2\sqrt{32} - \sqrt{50}$$

$$= 3\sqrt{9 \times 2} + 2\sqrt{16 \times 2} - \sqrt{25 \times 2}$$

$$= 3 \times 3\sqrt{2} + 2 \times 4\sqrt{2} - 5\sqrt{2}$$

$$= 9\sqrt{2} + 8\sqrt{2} - 5\sqrt{2}$$

$$D = 12\sqrt{2}$$

Développer et réduire

$$Z = (2\sqrt{3} - 1)(6 - \sqrt{3}).$$

Application 5

On pose $A = \sqrt{48} + \sqrt{20}$ et $B = \sqrt{108} - \sqrt{45}$.

1) Montrer que :

• A s'écrit sous la forme $a\sqrt{3} + b\sqrt{5}$

• et B s'écrit sous la forme $c\sqrt{3} + d\sqrt{5}$

où a, b, c, d sont des entiers relatifs.

2) Montrer que le produit AB est un nombre entier.

Application 2

Ecrivons sous la forme $a\sqrt{b}$ ou a et b sont deux entiers non nuls avec b le plus petit possible

$$A = \sqrt{500} + 3\sqrt{5} - 3\sqrt{45}$$

$$= \sqrt{100 \times 5} + 3\sqrt{5} - 3\sqrt{9 \times 5}$$

$$= 10\sqrt{5} + 3\sqrt{5} - 3 \times 3\sqrt{5} = (10 + 3 - 9)\sqrt{5}$$

$$\text{Finalement } A = 4\sqrt{5}$$

$$B = 4\sqrt{7} + 2\sqrt{63} - 5\sqrt{28}$$

$$= 4\sqrt{7} + 2\sqrt{9 \times 7} - 5\sqrt{4 \times 7}$$

$$= 4\sqrt{7} + 2 \times 3\sqrt{7} - 5 \times 2\sqrt{7}$$

$$= 4\sqrt{7} + 6\sqrt{7} - 10\sqrt{7} = 0$$

$$\text{Finalement } B = 0\sqrt{7}.$$

$$C = \frac{1}{2-\sqrt{3}} + \frac{1}{2+\sqrt{3}}$$

$$= \frac{1 \times (2 + \sqrt{3}) + 1 \times (2 - \sqrt{3})}{(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})}$$

$$= \frac{2 + \sqrt{3} + 2 - \sqrt{3}}{2^2 - \sqrt{3}^2} = \frac{4}{4 - 3} = \frac{4}{1} = 4$$

Application 3

1)

$$B = (4 - 2\sqrt{3})(4 + 2\sqrt{3}) = 4^2 - (2\sqrt{3})^2 \\ = 16 - 2^2 \sqrt{3}^2 = 16 - 4 \times 3 = 16 - 12 = 4$$

2)

$$C = (4 - 2\sqrt{3})^2 \\ = 4^2 + (2\sqrt{3})^2 - 2 \times 4 \times 2\sqrt{3} \\ = 16 + 12 - 16\sqrt{3} \\ = 28 - 16\sqrt{3}$$

$$D = \frac{1}{4} \times (28 - 16\sqrt{3}) \\ = \frac{1}{4} \times 28 - \frac{1}{4} \times 16\sqrt{3} \\ = \frac{28}{4} - \frac{16}{4} \sqrt{3} \\ = 7 - 4\sqrt{3}$$

Application

$$Z = (2\sqrt{3} - 1)(6 - \sqrt{3}) \\ = 2\sqrt{3} \times 6 - 2\sqrt{3} \times \sqrt{3} - 1 \times 6 + 1 \times \sqrt{3} \\ = 12\sqrt{3} - 2\sqrt{3}^2 - 6 + \sqrt{3} \\ = 12\sqrt{3} - 2 \times 3 - 6 + \sqrt{3} \\ = 13\sqrt{3} - 12$$

Application 5

$$1) A = \sqrt{48} + \sqrt{20} = \sqrt{16 \times 3} + \sqrt{4 \times 5} \\ = \sqrt{16} \times \sqrt{3} + \sqrt{4} \times \sqrt{5} = 4\sqrt{3} + 2\sqrt{5}$$

$$1) B = \sqrt{108} - \sqrt{45} \\ = \sqrt{36 \times 3} - \sqrt{9 \times 5} \\ = \sqrt{36} \times \sqrt{3} - \sqrt{9} \times \sqrt{5} \\ = 6\sqrt{3} - 3\sqrt{5}$$

$$AB = (4\sqrt{3} + 2\sqrt{5})(6\sqrt{3} - 3\sqrt{5}) \\ = 2(2\sqrt{3} + \sqrt{5})3(2\sqrt{3} - \sqrt{5}) \\ = 2 \times 3(2\sqrt{3} + \sqrt{5})(2\sqrt{3} - \sqrt{5}) \\ = 6[(2\sqrt{3})^2 - \sqrt{5}^2] \\ = 6[2^2 \times 3 - 5] \\ = 6 \times 7 = 42$$

III Ordre, valeur absolue et intervalles

a) Ordre et opérations

Soient a, b, c, d et x des réels.

L'ordre et l'addition	L'ordre et la multiplication
$a \leq b \Leftrightarrow a + x \leq b + x$	$\begin{cases} a \leq b \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow ax \leq bx$
$\begin{cases} a \leq b \\ c \leq d \end{cases} \Rightarrow a + c \leq b + d$	$\begin{cases} a \leq b \\ x < 0 \end{cases} \Rightarrow ax \geq bx$
$a \leq b \Leftrightarrow -a \geq -b$	$\begin{cases} 0 < a \leq b \\ 0 < c \leq d \end{cases} \Rightarrow 0 < ac \leq bd$

b) Encadrement et opérations

$\begin{cases} a < x < b \\ a' < y < b' \end{cases}$	$a + a' < x + y < b + b'$	$\begin{cases} 0 < a < x < b \\ 0 < a' < y < b' \end{cases}$	$0 < aa' < xy < bb'$
	$a - b' < x - y < b - a'$	$0 < a' < y < b'$	$0 < \frac{1}{b'} < \frac{1}{y} < \frac{1}{a'}$
$a < x < b$	$k > 0 \Rightarrow ka < kx < kb$	$\begin{cases} 0 < a < x < b \\ 0 < a' < y < b' \end{cases}$	$0 < \frac{a}{b'} < \frac{x}{y} < \frac{b}{a'}$
	$k < 0 \Rightarrow kb < kx < ka$	$\begin{cases} 0 < a < x < b \\ 0 < a' < y < b' \end{cases}$	$0 < aa' < xy < bb'$

Exemple 1

Si x et y deux réels tels que : $2,3 \leq x \leq 2,4$ et $0,5 \leq y \leq 1,2$

Donner un encadrement de $2x$, $-3y$, $2x - 3y$, $\frac{-2}{x}$; $\frac{1}{y}$ et xy .

Solution

Encadrement de $2x$:

$$2,3 \leq x \leq 2,4 \quad \text{donc} \quad 2 \times 2,3 \leq 2x \leq 2 \times 2,4 \quad \text{d'où} \quad 4,6 \leq 2x \leq 4,8$$

Encadrement de $-3y$

$$0,5 \leq y \leq 1,2 \quad \text{donc} \quad -3 \times 1,2 \leq -3y \leq -3 \times 0,5 \quad \text{d'où} \quad -3,6 \leq -3y \leq -1,5$$

Encadrement de $2x - 3y$:

$$4,6 \leq 2x \leq 4,8 \quad \text{et} \quad -3,6 \leq -3y \leq -1,5 \quad \text{donc} \quad 4,6 - 3,6 \leq 2x - 3y \leq 4,8 - 1,5$$

$$\text{d'où} \quad 1 \leq 2x - 3y \leq 3,3$$

Encadrement de $\frac{-2}{x}$ et de $\frac{1}{y}$:

$$2,3 \leq x \leq 2,4 \quad \text{donc} \quad \frac{2}{2,4} \leq \frac{2}{x} \leq \frac{2}{2,3} \quad \text{d'où} \quad \frac{-2}{2,3} \leq \frac{-2}{x} \leq \frac{-2}{2,4} \quad \text{soit} \quad -0,86 \leq \frac{-2}{x} \leq -0,83$$

$$0,5 \leq y \leq 1,2 \quad \text{donc} \quad \frac{1}{1,2} \leq \frac{1}{y} \leq \frac{1}{0,5} \quad \text{d'où} \quad 0,83 \leq \frac{1}{y} \leq 2$$

Encadrement de xy :

$$2,3 \leq x \leq 2,4 \quad \text{et} \quad 0,5 \leq y \leq 1,2 \quad \text{donc} \quad 2,3 \times 0,5 \leq xy \leq 2,4 \times 1,2 \quad \text{d'où} \quad 1,15 \leq xy \leq 2,88$$

2. Valeur absolue

1) Définition

Soit x un réel. L'un des nombres x et $(-x)$ est positif : on l'appelle la valeur absolue de x , on le note $|x|$.

Pour tout réel a , on a $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$ $|a| \geq 0$ $|-a| = a$

Exemple 2

$$|-3| = 3$$

$$\left|\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$$

$$\left|-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$$

$$|\pi - 4| = 4 - \pi$$

2) Propriétés :

Soient a et b deux réels

$$|a| \times |b| = |ab|$$

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|} \quad \text{pour } b \neq 0$$

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

Si $|a| = |b|$, alors $a = b$ ou $a = -b$.

Si $|a| = m$, ($m \geq 0$), alors $a = m$ ou $a = -m$.

Si $|a| \leq m$, ($m > 0$), alors $-m \leq a \leq m$.

Exemple 3

Résoudre les équations et les inéquations :

1) $|x| = 4$

2) $\sqrt{x^2} = 3$

3) $|x| \leq 4$

4) $|x + 3| = 7$

Solution

Résolution des équations et des inéquations :

1) $|x| = 4 \Rightarrow x = 4$ ou $x = -4$

2) $\sqrt{x^2} = 3 \Rightarrow |x| = 3 \Rightarrow x = 3$ ou $x = -3$

3) $|x| \leq 4 \Rightarrow -4 \leq x \leq 4$

4) $|x + 3| = 7 \Rightarrow \begin{cases} x + 3 = 7 \Rightarrow x = 7 - 3 = 4 \\ \text{ou} \\ x + 3 = -7 \Rightarrow x = -7 - 3 = -10 \end{cases}$

Exercices d'application

Application 1

Résoudre :

$$|x| = 2$$

$$|2x-1| = 5$$

$$|2x| = |x+6|$$

$$|x| \leq 2$$

$$|3x-1| \leq 11$$

Application 2

Résoudre, dans l'ensemble de nombres réels :

a) $|x| = 7$;

b) $|x| = -4$;

c) $|x-4| = 1$;

d) $|1-2x| = 3$;

e) $|x-5| < 2$;

f) $|x+1| \geq 7$.

Application 3

Résoudre les équations et les inéquations

1) $|x| = 4$

2) $\sqrt{x^2} = 3$

3) $|x| \leq 4$

4) $|x+3| = 7$

Application 4

Ecrire sans valeur absolue les nombres $|3 - \sqrt{13}|$; $\left| \frac{\sqrt{12}-4}{5-\sqrt{24}} \right|$

Solutions des applications

Application 1

- $|x| = 2 \Leftrightarrow x = 2 \text{ ou } x = -2 \text{ car } |2| = |-2| = 2 \quad S = \{-2; 2\}$
- $|2x-1| = 5 \Leftrightarrow 2x-1 = 5 \text{ ou } 2x-1 = -5 \Leftrightarrow 2x = 5+1 \text{ ou } 2x = -5+1$
 $\Leftrightarrow 2x = 6 \text{ ou } 2x = -4 \Leftrightarrow x = 3 \text{ ou } x = -2 \quad S = \{-2; 3\}$
- $|2x| = |x+6|$
 $\Leftrightarrow 2x = x+6 \text{ ou } 2x = -x-6 \text{ donc } 2x - x = 6 \text{ ou } 2x + x = -6$
 $x = 6 \text{ ou } 3x = -6, \text{ d'où: } x = 6 \text{ ou } x = \frac{-6}{3} = -2. \quad S = \{-2; 6\}$
- $|x| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2 \Leftrightarrow S = [-2; 2]$
- $|3x-1| \leq 11 \Leftrightarrow -11 \leq 3x-1 \leq 11 \Leftrightarrow -11+1 \leq 3x \leq 11+1 \Leftrightarrow -10 \leq 3x \leq 12$
 $\Leftrightarrow S = [-10; 12]$

Application 2

- a) $|x| = 7 \Leftrightarrow (x = -7 \text{ ou } x = 7) \Rightarrow S = \{-7; 7\}$
- b) $|x| = -4$: impossible $\Rightarrow S = \Phi$ (il n'existe pas de solutions).
- c) $|x-4| = 1 \Leftrightarrow (x-4 = -1 \text{ ou } x-4 = 1)$
d'où $x = 3 \text{ ou } x = 5 \Rightarrow S = \{3; 5\}$
- d) $|1-2x| = 3 \Leftrightarrow (1-2x = -3 \text{ ou } 1-2x = 3) \text{ d'où, } x = 2 \text{ ou } x = -1 \Rightarrow S = \{-1; 2\}$
- e) $|x-5| < 2 \Leftrightarrow (-2 < x-5 < 2) \text{ d'où } 3 < x < 7 \Rightarrow S =]3; 7[$
- f) $|x+1| \geq 7 \Leftrightarrow (x+1 \leq -7 \text{ ou } x+1 \geq 7)$
d'où $x \leq -8 \text{ ou } x \geq 6 \Rightarrow S =]-\infty; -8] \cup [6; +\infty[$

Application 3

- 1) $|x| = 4 \Rightarrow x = 4$ ou $x = -4$ donc $S = \{4; -4\}$
- 2) $\sqrt{x^2} = 3 \Rightarrow |x| = 3 \Rightarrow x = 3$ ou $x = -3$ donc $S = \{3; -3\}$
- 3) $|x| \leq 4 \Rightarrow -4 \leq x \leq 4$ donc $S = [-4; 4]$
- 4) $|x+3| = 7 \Rightarrow \begin{cases} x+3 = 7 \Rightarrow x = 7-3 = 4 \\ \text{ou} \\ x+3 = -7 \Rightarrow x = -7-3 = -10 \end{cases}$ donc $S = \{4; -10\}$

Application 4

Comme $3 < \sqrt{13} \Rightarrow 3 - \sqrt{13} < 0$

Et $\text{opp}(3 - \sqrt{13}) = \sqrt{13} - 3 > 0$ alors $|3 - \sqrt{13}| = \sqrt{13} - 3$

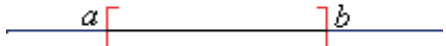
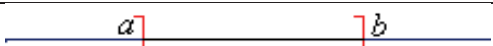
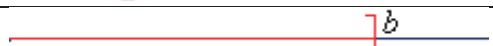
Comme $\sqrt{12} - 4 < 0$ et $5 - \sqrt{24} > 0$ alors $|\sqrt{12} - 4| = 4 - \sqrt{12}$ et $|5 - \sqrt{24}| = 5 - \sqrt{24}$
 $\Rightarrow \left| \frac{\sqrt{12} - 4}{5 - \sqrt{24}} \right| = \frac{|\sqrt{12} - 4|}{|5 - \sqrt{24}|} = \frac{4 - \sqrt{12}}{5 - \sqrt{24}}$

3) Intervalles

a) Définition

a et b sont deux réels tels que $a < b$.

Le tableau ci-dessous résume les différents types d'intervalles.

L'intervalle noté ...	est l'ensemble des réels x tels que ...	Représentation de cet intervalle sur une droite graduée
$[a ; b]$	$a \leq x \leq b$	
$]a ; b[$	$a < x < b$	
$]a ; b]$	$a < x \leq b$	
$[a ; b[$	$a \leq x < b$	
$[a ; +\infty[$	$a \leq x$	
$]a ; +\infty[$	$a < x$	
$]-\infty ; b]$	$x \leq b$	
$]-\infty ; b[$	$x < b$	

b) Centre – Rayon – Encadrement - Distance:

- L'intervalle $[a, b]$ est de centre $\alpha = \frac{a+b}{2}$ et de rayon $r = \frac{b-a}{2}$.
- On a : $a = \alpha - r$ et $b = \alpha + r$; alors $[a, b] = [\alpha - r, \alpha + r]$.

$$x \in [a, b] \Leftrightarrow a \leq x \leq b \Leftrightarrow \left| x - \frac{a+b}{2} \right| \leq \frac{b-a}{2} \Leftrightarrow |x - \alpha| \leq r \Leftrightarrow d\left(x, \frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{b-a}{2}.$$

Exemple 1 Compléter suivant le modèle

Intervalle	Encadrement	Valeur absolue	Distance
$x \in [a, b]$	$a \leq x \leq b$	$\left x - \frac{a+b}{2} \right \leq \frac{b-a}{2}$	$d\left(x, \frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{b-a}{2}$
$x \in [2, 5]$			
	$-9 \leq x \leq 2$	$ x-3 \leq 5$	

Solution

Intervalle	Encadrement	Valeur absolue	Distance
$x \in [a, b]$	$a \leq x \leq b$	$\left x - \frac{a+b}{2} \right \leq \frac{b-a}{2}$	$d\left(x, \frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{b-a}{2}$
$x \in [2, 5]$	$2 \leq x \leq 5$	$ x-3,5 \leq 1,5$	$d(x, 3,5) \leq 1,5$
$x \in [-2, 8]$	$-2 \leq x \leq 8$	$ x-3 \leq 5$	$d(x, 3) \leq 5$
$x \in [-2, 6]$	$-2 \leq x \leq 6$	$ x-2 \leq 4$	$d(x, 2) \leq 4$

Exercices d'applications**Application 1**

Traduire sous forme d'inégalités :

- $x \in]-2; 7]$;
- $x \in]-\infty; 0]$
- $y \in [1; 5[$
- $y \in [1; +\infty[$.

Application 2

Traduire sous forme d'intervalles :

- $-1 > x$
- $-1 \geq x \geq -4$

3) $-x \geq 2$

4) $3x - 2 \leq 1$

5) $-x > 3$

Application 3:

Ecrire sous forme d' inégalité(s):

$x \in [-1; 3] \quad x \in]-\infty ; 0]$

$x \in [2 ; +\infty[\quad x \in]-4 ; 4[$

Solutions des applications**Application 1**

Traduisons sous forme d'inégalités :

- $x \in]-2; 7] \Rightarrow -2 < x \leq 7$;
- $x \in]-\infty; 0] \Rightarrow x \leq 0$;
- $y \in [1; 5[\Rightarrow 1 \leq y < 5$;
- $y \in [1; +\infty[\Rightarrow y \geq 1$

Application 2

Traduisons sous forme d'intervalles :

- $-1 > x \Rightarrow x \in]-\infty; -1[$
- $-1 \geq x \geq -4 \Rightarrow x \in [-4; -1]$
- $-x \geq 2 \Rightarrow x \leq -2 \Rightarrow x \in]-\infty; -2]$

$$4) 3x - 2 \leq 1$$

$$3x \leq 2 + 1 \Rightarrow x \leq 1 \Rightarrow x \in]-\infty; 1]$$

$$5) -x > 3 \Rightarrow x < -3 \Rightarrow x \in]-\infty; -3[$$

Application 3

Application 3

Ecriture sous forme d'inégalité(s):

$$x \in [-1; 3] \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 3 \quad x \in]-\infty; 0] \Leftrightarrow x \leq 0$$

$$x \in [2; +\infty[\Leftrightarrow x \geq 2$$

$$x \in]-4; 4[\Leftrightarrow -4 < x < 4$$

IV Calcul littéral :

1. Définition

Une expression littérale est une expression dans laquelle un, deux ou plusieurs nombres sont représentés par des lettres (on les appelle variables).

2. Identités remarquables d'ordre 2

Soient a et b des réels.

Identités remarquables	Remarques	Attention
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	$(a+b)^2 = (-a-b)^2$	$a^2 + b^2 \neq (a+b)^2$
$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	$(a-b)^2 = (b-a)^2$	$a^2 - b^2 \neq b^2 - a^2$
$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$		

Exemple 1

$$1) (2x+3)^2 = (2x)^2 + 2 \times 2x \times 3 + 3^2 \\ = 4x^2 + 12x + 9;$$

$$2) 16x^2 + 8x + 1 = (4x+1)^2;$$

$$3) 25x^2 + 20x + 4 = (5x+2)^2.$$

Exemple 2

$$1) (2x-3)^2 = (2x)^2 - 2 \times 2x \times 3 + 3^2 \\ = 4x^2 - 12x + 9;$$

$$2) 99^2 = (100-1)^2 = 100^2 - 2 \times 100 \times 1 + 1^2 \\ = 10\,000 - 200 + 1 = 9\,801.$$

$$3) 16x^2 - 8x + 1 = (4x-1)^2;$$

$$4) 25x^2 - 20x + 4 = (5x-2)^2.$$

Exemple 3

On donne :

$$A = [(x-3)(x+7)] - [(2x-7)(x-3)]$$

1) Développer A

2) Factoriser A

3) Calculer la valeur de A pour $x = 3$

Solution

1) Développement de A :

$$A = [(x-3)(x+7)] - [(2x-7)(x-3)]$$

$$= [x^2 + 7x - 3x - 21] - [2x^2 - 6x - 7x + 21]$$

$$= [x^2 + 4x - 21] - [2x^2 - 13x + 21]$$

$$= x^2 - 2x^2 + 4x + 13x - 21 - 21$$

$$= -x^2 + 17x - 42$$

2) Factorisation de A :

$$\text{On a } A = (x-3)(x+7) - (2x-7)(x-3).$$

On remarque que $(x-3)$ est un facteur commun :

$$A = (x-3)[(x+7) - (2x-7)]$$

$$= (x-3)[x+7-2x+7]$$

$$A = (x-3)[-x+14] = (x-3)(-x+14)$$

3) Calcul des valeurs de A pour $x = 3$:

❖ Première expression de A :

$$A = (3-3)(3+7) - (6-7)(3-3)$$

$$= (0)(7) - (-1)(0) = 0$$

❖ Expression développée de A :

$$A = - (3)^2 + 17 \times 3 - 42 = -9 + 51 - 42$$

$$= -51 + 51 = 0$$

3) Identités remarquables d'ordre 3

Soit a et b deux réels :

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

Exemple

Développer les expressions suivantes :

$$A = (x + 1)^3 \quad B = (2x + 5)^3 \quad C = (3x - 2)^3$$

Solution

$$\begin{aligned} A &= (x + 1)^3 = x^3 + 3 \times x^2 \times 1 + 3 \times 1^2 \times x + 1^3 \\ &= x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \end{aligned}$$

$$B = (2x + 5)^3 = (2x)^3 + 3 \times (2x)^2 \times 5 + 3 \times 2x \times 5^2 + 5^3$$

$$= 8x^3 + 3 \times 4x^2 \times 5 + 3 \times 2x \times 25 + 125$$

$$= 8x^3 + 60x^2 + 150x + 125$$

$$C = (3x - 2)^3 = (3x)^3 - 3 \times (3x)^2 \times 2 + 3 \times 3x \times 2^2 - 2^3$$

$$= 27x^3 - 3 \times 9x^2 \times 2 + 3 \times 3x \times 4 - 8$$

$$= 27x^3 - 54x^2 + 36x - 8$$

4) Méthodes

Pour factoriser une expression:

- Utiliser la règle de la distributivité
- Reconnaître un facteur commun
- Identifier le développement d'un produit remarquable et particulièrement la différence de deux carrés.

Pour développer une expression:

- Utiliser la règle de la distributivité
- Utiliser des identités remarquables
- Supprimer les parenthèses ou crochets.

Exercices d'application

Application 1

Développer les expressions

- $(x + 5)^2$
- $(2x - 3)^2$

- $(2 - 3x)(2 + 3x)$
- $-3(5 - 4x)$
- $(3x - 7)(5 - 4x)$

Application 2

Factoriser les expressions

$$9x^2 + 18x + 4$$

$$1 - 2x + x^2$$

$$16x^2 - 9$$

Application 3

Factoriser

$$A = x^3 + 8 \quad B = x^3 - 27$$

$$C = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$$

Solutions des applications

Application 1

Développement des expressions

$$\bullet (x + 5)^2 = x^2 + 2 \times x \times 5 + 5^2 = x^2 + 10x + 25$$

$$\bullet (2x - 3)^2 = (2x)^2 - 2 \times 2x \times 3 + 3^2 = 4x^2 - 12x + 9$$

$$\bullet (2 - 3x)(2 + 3x) = 2^2 - (3x)^2 = 4 - 9x^2$$

$$\bullet -3(5 - 4x) = -3 \times 5 + (-3) \times (-4x) = -15 + 12x$$

$$\bullet (3x - 7)(5 - 4x) = 3x \times 5 + 3x \times (-4x) + (-7) \times 5 + (-7) \times (-4x) = 15x - 12x^2 - 35 + 28x = -12x^2 + 43x - 35$$

Application 2

$$\bullet 9x^2 + 18x + 4 = (3x)^2 + 2 \times 3x \times 2 + 2^2 = (3x + 2)^2$$

$$\bullet 1 - 2x + x^2 = 1^2 - 2 \times 1 \times x + x = (1 - x)^2$$

$$\bullet 16x^2 - 9 = (4x)^2 - 3^2 = (4x - 3)(4x + 3)$$

Application 3

$$A = x^3 + 8 = x^3 - 2^3 = (x + 2)(x^2 - 2x + 2^2) = (x + 2)(x^2 - 2x + 4)$$

$$B = x^3 - 27 = x^3 - 3^3 = (x - 3)(x^2 + 3x + 3^2) = (x - 3)(x^2 + 3x + 9)$$

$$C = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = x^3 + 3 \times x^2 \times 1 + 3x \times 1^2 + 1^3 = (x + 1)^3 = (x + 1)(x + 1)(x + 1)$$

Exercices

1

QCM

Dans chaque ligne, rayer la ou les propositions incorrectes.

	Peut s'écrire aussi :			
$3 + 5 \times 7$	$(3 + 5) \times 7$	$3 + (5 \times 7)$	$3 \times 7 + 5 \times 7$	$(3 \times 7) + (5 \times 7)$
$4 \times 3 + 7 \times 6$	$(4 \times 3 + (7 \times 6))$	$4 \times (3 + 7) \times 6$	$(4 \times 3) + 7 \times 6$	$(4 \times 3 + 7) \times 6$
$(4 + 5) \times 3 + 7$	$(4 + 5) \times (3 + 7)$	$4 \times 3 + 5 \times 3 + 7$	$4 + 5 \times 3 + 7$	$4 + 5 \times (3 + 7)$
$4 \times 7 + 2 \div 3$	$4 \times 7 + \frac{2}{3}$	$4 \times 7 + \frac{2}{3}$	$(4 \times 7) + (2 \div 3)$	$\frac{4 \times 7 + 2}{3}$

2

QCM

Déterminer la réponse correcte :

Expressions	A	B	C	D	E
$(-4,5) \times (-2,3)$	6,8	-10,25	-6,8	10,35	-10,35
$(-3) \times (-6) \times (-4,5)$	-40,5	-81	31,5	-28,5	40,5
Si $a = \frac{-15}{14}$ et $b = \frac{5}{7}$, alors $ab =$	$-\frac{75}{98}$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{65}{78}$	$\frac{75}{98}$
Si $a = 84$ et $b = -105$, alors $\frac{b}{a} =$	$-\frac{5}{4}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{5}{3}$	$-\frac{3}{5}$	$\frac{15}{12}$
Si $a = \frac{3}{4}$ et $b = \frac{7}{12}$, alors $\frac{a+b}{a-b} =$	$-\frac{5}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{5}{3}$	8	$-\frac{2}{9}$
Si $b = \frac{2}{5}$, alors l'opposé de l'inverse de b est	$\frac{5}{2}$	$-\frac{2}{-5}$	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{-2}{5}$
Si $a = \frac{3}{4}$ et si $b = \frac{8}{15}$, alors l'inverse de ab est	$\frac{24}{60}$	$-\frac{60}{24}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{32}{45}$	$-\frac{5}{2}$

3

QCM

Dans chacune des questions suivantes, déterminer la réponse exacte.

N°	Question	Réponse A	Réponse B	Réponse C
1	Sur l'axe des réels, la  partie hachurée représente l'inégalité ...	$-8 \leq x$	$x > -8$	$x < -8$
2	Si $x \in]-\infty; 3]$, alors :	$x \geq 3$	$x \leq 3$	$x > 3$

3	Si $x \in]4; +\infty[$, alors :	$x < 4$	$x \leq 4$	$x > 4$
4	Soit x un réel tel que $2 \leq x \leq 5$. Alors un encadrement du nombre: $2x - 3$ est...	$1 \leq 2x - 3 \leq 7$	$1 \leq 2x - 3 \leq 2$	$8 \leq 2x - 3 \leq 10$
5	Soit x un réel tel que $\frac{2}{3} \leq x \leq \frac{3}{4}$. Alors un encadrement de $\frac{1}{x}$ est...	$\frac{4}{3} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{3}{2}$	$\frac{3}{4} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{2}{3}$	$\frac{3}{4} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{2}{3}$

4

Questions à trous

Compléter les calculs suivants :

$$A = \frac{6}{5} + \frac{9}{5} = \frac{\dots + \dots}{\dots} = \frac{\dots}{\dots} = \dots$$

$$B = \frac{2}{3} + \frac{-5}{4} = \frac{2 \times \dots}{3 \times \dots} + \frac{(-5) \times \dots}{4 \times \dots} = \frac{\dots}{\dots} + \frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots + \dots}{\dots} = \frac{\dots}{\dots} = -\frac{\dots}{\dots};$$

$$C = \frac{2}{3} \times \frac{6}{5} = \frac{\dots \times \dots}{\dots \times \dots} = \frac{2 \times 3 \times 2}{\dots \times \dots} = \frac{2 \times \dots}{\dots} = \dots$$

$$D = \frac{-9}{2} \times 14 = \frac{-9}{2} \times \frac{14}{\dots} = \frac{(-9) \times \dots \times \dots}{2 \times \dots} = \frac{(-9) \times \dots}{\dots} = \frac{-63}{\dots} = \dots;$$

$$E = \frac{-45}{3} \times \frac{1}{-5} = -\frac{\dots}{\dots} \times \left(-\frac{1}{\dots}\right) = \frac{45}{3} \times \frac{1}{5} = \frac{\dots \times \dots \times 5 \times 1}{3 \times \dots} = 3$$

5

(Questions d'appariement)

Relier par une flèche chaque calcul à son résultat :

$$(5 + 5) \times (5 + 5) \quad . \quad 6$$

$$5 \times (5 + 5 + 5) \quad . \quad .10$$

$$5 + (5 + 5) \times 5 \quad . \quad .55$$

$$(5 + 5) \times (5 , 5) \quad . \quad .75$$

$$(5 + (5 \times 5)) , 5 \quad . \quad .100$$

6

Calculer les expressions suivantes :

$$A = 6 \times (3 + 7)$$

$$B = 23 - 4 \times 5$$

$$C = (3 + 5) \times (9 - 7)$$

$$D = (13 - 7) \div 2$$

$$E = 5 - [4 - (2 + 1)]$$

$$F = (3 + 5 \times 7) \div 2 + 1$$

7

Calculer en écrivant les étapes intermédiaires :

$$N = 24 - 5 - 1$$

$$O = 28 \div 4 - (0,5 + 1) \times 2$$

$$P = 10 \div [6 - 2 \times (1 - 0,5)] \times 5$$

$$Q = 72 \div 9 \times 8 \div 2 - 9 \times 3$$

8

Calculer et donner chacun des expressions suivantes sous forme d'une fraction irréductible

$$X = \left(\frac{1}{5} + \frac{5}{8}\right) \times \left(\frac{2}{3} - 2\right)$$

$$Y = \frac{\frac{1}{2} + \frac{4}{3}}{\frac{1}{3} - 2}$$

$$Z = \left(\frac{1}{2} + \frac{4}{3}\right) \div \left(\frac{1}{3} - 2\right)$$

$$U = \frac{4}{5} \times \frac{8}{3} + \left(-\frac{4}{7}\right) \times 14 - \frac{4}{5}$$

$$V = \frac{4}{3} \div \frac{2}{3} + \left(\frac{-1}{5}\right) \times \frac{2}{3} - \frac{5}{4}$$

9

Calculer et donner chacun des expressions suivantes sous forme d'une fraction irréductible

$$A = \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{7}\right) \times \left(\frac{7}{3} - 1\right)$$

$$B = \left(\frac{1}{3} + \frac{5}{2}\right) \times \left(\frac{5}{2} - \frac{1}{3}\right)$$

$$C = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{7}{24}\right) \times \frac{12}{49}$$

$$D = \left(\frac{7}{5} - \frac{3}{2}\right) - \left[\frac{7}{8} - \left(\frac{3}{4} - 2\right)\right]$$

$$E = \left(\frac{1}{9} - \frac{2}{27}\right) \times \left(\frac{54}{5}\right)$$

$$F = \frac{7}{3} \times \left(\frac{2}{5} - 4\right)$$

10

Dans chacun des cas, calculer A, B, C et D :

$$A = \frac{1}{a} + \frac{2}{b} - \frac{3}{c} ; B = \frac{b}{a} + \frac{a}{b} ; C = \frac{a}{b+c} ; D = a - \frac{c}{a+b}$$

$$1) a = 3 ; b = 5 ; c = 7$$

$$2) a = \frac{1}{2} ; b = \frac{-1}{3} ; c = \frac{3}{5}$$

11

Ecrire les nombres suivants sous la forme d'une fraction irréductible :

$$G = \frac{3}{2} - \frac{1}{5} \times \frac{25}{7} ;$$

$$H = \left(\frac{2}{8} - \frac{3}{15}\right) \div \frac{3}{10} ;$$

$$I = \frac{\frac{5}{4} + \frac{2}{5}}{2 - \frac{7}{5}}$$

$$E = \frac{24}{15} : \frac{36}{25}$$

$$F = \frac{72}{162} : \frac{108}{54}$$

$$G = \frac{\frac{2}{3} - \frac{5}{2} + 1}{\frac{4}{5} - \frac{2}{3} + \frac{3}{2}}$$

12

Sidi dépense les $\frac{2}{3}$ de son capital puis les $\frac{2}{5}$ du reste. Il n'a plus que 7200 Ouguiyas. Quel était son capital initial.

13

1) Ecrire M sous forme scientifique : $M = 5 \times 10^5 \times 3 \times 10^7$

2) Ecrire L sous forme décimale : $L = 4 \times 10^{-7} \times 0,2 \times 10^5$

3) Ecrire O sous forme d'une fraction irréductible : $O = \frac{3 \times 10^5 \times 2 \times 10^{-2}}{8 \times 10^4}$

14

Ecrire sous la forme d'une puissance d'un nombre

$$N = 4^7 \times 4^{10} \times 4^{-2}$$

$$O = \frac{5^2 \times 5^7}{5^{-3}}$$

$$P = 4^7 \times 5^7$$

$$Q = \frac{6^8}{6^{-2}}$$

$$R = \frac{10^5 \times 10^{-4}}{10^{-3}}$$

$$T = \left(\frac{3}{7}\right)^9 \times \frac{3}{7}$$

$$U = (12^3)^5$$

15 1) Simplifier l'écriture des nombres donnés :

$$A = \sqrt{2} \times \sqrt{8} \quad B = \sqrt{10} \times \sqrt{1000} \quad C = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{27}}$$

2) Ecrire sous la forme $a\sqrt{b}$ (a et b désignant des entiers, b étant le plus petit possible) les nombres suivants :

$$D = \sqrt{8} \quad E = 5\sqrt{6} \times 2\sqrt{3} \quad F = \sqrt{20} + \sqrt{125} - \sqrt{45} + \sqrt{5}.$$

16 La distance moyenne de la Terre au Soleil est évaluée à 150 millions de km et celle de la Terre à la Lune à $3,8 \times 10^5$ km. (Pour les calculs prendre 4×10^5 km.) La longueur d'un pas de géant (de science fiction) est celle de la distance Terre-Lune. Combien de pas doit-il faire pour aller de la Terre au Soleil ?

17 1) Ecrire $\sqrt{5} \times \sqrt{125}$ sous la forme d'un nombre entier.

2) Ecrire $(\sqrt{5} \times \sqrt{125}) \times 2$ sous la forme $a\sqrt{5}$ où a est un entier.

18 Développer et réduire:

$$A = (3x + 5)^2$$

$$B = (5x - 4)^2$$

$$C = (2x + 3)(2x - 3)$$

$$D = 2(5x + 4)^2 - 3(2x - 3)^2$$

$$E = 3(5x - 4)(-4x + 3)$$

$$F = (x + 1)^2 - (-2x + 3)(x - 5)$$

19 Soit $F = (3x - 5)^2 - (3x - 5)(x + 4)$.

1. Développer et réduire F.

2. Factoriser F.

3. Calculer F pour $x = 1$ puis pour $x = 4,5$.

20 Ecrire sans valeur absolue les réels suivants :

$$a = \left| \frac{4}{3} - \frac{3}{5} \right|; \quad b = |10^{-2}|; \quad c = |2,21 - \sqrt{5}|; \quad d = \left| \pi - \frac{22}{7} \right|$$

21 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes ;

$$a) |x| \leq 3 \quad b) |5x - 1| \leq 3 \quad c) |x| \geq 3 \quad d) \left| 2 - \frac{1}{3}x \right| > 1$$

22 Ecris sous forme d'intervalle chacun des ensembles de nombres définis ci-dessous :

$$x \leq -2; \quad x > 3,5; \quad -4 < x < 6; \quad -2 < x < 2; \quad 5,1 \leq x; \quad x > 1; \quad x < \frac{1}{2} \text{ et } x \geq -2; \quad x < -1; \quad -7 < x \leq 5.$$

23 Traduis à l'aide d'inégalités :

$x \in] 0 ; +\infty [$; $x \in] - 4 ; 5 [$; $x \in] - 3,5 ; +\infty [$; $x \in [-10 ; 10]$; $x \in] - 2 ; 4 [$;
 $x \in]3,4 ; 7 [$; $x \in] - \infty ; -9 [$; $x \in] - \infty ; 4,1 [$; $x \in]80 ; +\infty [$.

24

La Terre ressemble à une boule dont le rayon est 6371 km et la masse volumique moyenne $5,5 \text{ g/cm}^3$. Préciser un ordre de grandeur de sa masse en Tonnes (On rappelle que : $\text{masse} = \text{volume} \times \text{masse volumique}$).

25 On considère l'expression :

$$P = (2^x - 3)^2 - (2^x - 3)(5^x - 1).$$

1. Développer et réduire l'écriture de P

2. Factoriser P

3. Calculer la valeur de P pour $x = -10$.

26 A partir de l'encadrement $3,65 < x < 3,8$; donner un encadrement de :

1) $3x$ 2) $-2x$ 3) $-2x+5$ 4) $\frac{2}{x}$ 5) $\frac{-5}{x}$.

27 Un nombre x a pour écriture décimale illimitée : $x \approx 5,744562647...$

-Un nombre y a pour écriture décimale illimitée : $y \approx 3,605551275...$

1) Donner l'arrondi de x à 10^{-2} près, à 10^{-5} près.

2) Donner l'arrondi de y à 10^{-2} près.

3) Encadrer x et y à 10^{-2} .

4) Encadrer $x+y$; $x-y$; xy et $\frac{x}{y}$ à 10^{-2} près

28 Calculer chacun des nombres suivants et donner le résultat sous forme d'une fraction irréductible :

$$x = \left| \frac{3}{5} - \frac{1}{4} \right| + \left| \frac{1}{4} - \frac{2}{7} \right| \quad , \quad y = \left| \frac{5}{4} + \frac{1}{2} \right| - \left| \frac{1}{5} - \frac{2}{3} \right|$$

Chapitre 2 : Equations, inéquations et systèmes

I Equations, inéquations

1) Equation de 1^{er} degré

a. Equations de référence

- Toute égalité d'inconnue x se ramenant au type $ax + b = 0$; où $a \neq 0$ et b sont des nombres réels, est appelée équation du 1^{er} degré.
- Résoudre une équation, c'est trouver toutes ses solutions (valeurs que prend l'inconnue pour lesquelles l'égalité est vérifiée)

Equation d'inconnue x	$a + x = b$	$ax = b$; $a \neq 0$	$(ax + b)(cx + d) = 0$ $a \neq 0$ et $c \neq 0$
Solution	$x = b - a$	$x = \frac{b}{a}$	$x_1 = \frac{-b}{a}$ et $x_2 = \frac{-d}{c}$

b. Principes :

Si l'on ajoute ou si l'on soustrait un même nombre à chaque membre d'une équation, on obtient une équation équivalente (c'est à dire qui a les mêmes solutions).

Si l'on multiplie ou si l'on divise chaque membre d'une équation par un même nombre, on obtient une équation équivalente

c. Mise en équation et résolution d'un problème

- ❖ Choisir les inconnues.
- ❖ Mettre le problème en équation(s), inéquation(s).
- ❖ Résoudre les équations.
- ❖ Vérifier la validité des solutions.
- ❖ Répondre au problème (conclusion)

Exemple 1

Résoudre l'équation :

$$-2x + 3 = 0$$

Solution

$$-2x = -3 \Leftrightarrow x = \frac{-3}{-2}$$

Donc $x = 1,5$

L'équation admet une seule solution : le

nombre 1,5 donc $S = \left\{ \frac{3}{2} \right\}$

Exemple 2

Résoudre l'équation : $3x + 1 = -5$

Solution

$$3x + 1 = -5 \Leftrightarrow 3x = -1 - 5 \Leftrightarrow x = \frac{-6}{3}$$

$$\Leftrightarrow x = -2$$

Donc l'équation admet une seule solution :

Le nombre -2. Donc $S = \{-2\}$

Exercices d'application

Application 1

Résoudre l'équation : $\frac{3}{2} = \frac{5}{x}$ avec $x \neq 0$

Application 2

Résoudre l'équation :

$$\frac{5}{3} = \frac{x}{x+1}$$

Application 3

Un père a 30 ans et son fils 7 ans.

1° Exprimer l'âge du père et l'âge du fils dans x années.

2° Dans quel nombre x d'années l'âge du père sera-t-il le double de l'âge de son fils? Ecrire l'équation correspondant au problème et trouver la solution.

Application 4

Résoudre l'équation :

$$(5x + 4)(3 - 2x) = 0.$$

Solutions des applications

Application 1

$$\frac{3}{2} = \frac{5}{x} \Leftrightarrow 3x = 2 \times 5$$

$$\Leftrightarrow 3x = 10$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{10}{3}$$

L'équation admet une seule solution $\frac{10}{3}$

$$\text{Donc } S = \left\{ \frac{10}{3} \right\}$$

Application 2

On a : $5(x + 1) = 3x$

$$\Leftrightarrow 5x + 5 = 3x$$

$$\Leftrightarrow 5x - 3x = -5$$

$$\Leftrightarrow 2x = -5$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{5}{2}$$

L'équation admet une seule solution : -2,5

$$\text{Donc } S = \left\{ -\frac{5}{2} \right\}$$

Application 3

1° Dans x années l'âge du père sera $30 + x$, l'âge du fils sera $7 + x$

2° L'âge du père sera le double de l'âge de son fils:

$$30 + x = 2(7 + x)$$

$$30 + x = 14 + 2x$$

$$30 - 14 = 2x - x$$

$$16 = x$$

Application 4

$$(5x + 4)(3 - 2x) = 0.$$

Cette équation d'inconnue x est un produit de deux facteurs

$(5x+4)$ et $(3-2x)$.

Or comme le produit de ces deux facteurs est nul, alors l'un au moins de ces deux facteurs est nul.

$$5x+4 = 0 \quad \text{ou} \quad 3-2x = 0$$

$$5x = -4 \quad \text{ou} \quad -2x = -3$$

$$x = \frac{-4}{5} \quad \text{ou} \quad x = \frac{3}{2}$$

Les solutions de l'équation produit

sont exactement $\frac{-4}{5}$ et $\frac{3}{2}$

2. Inéquation de 1^{er} degré

a. Signe de l'expression $ax + b$; $a \neq 0$

Le signe d'une expression du 1^{er} degré se résume dans un tableau de la forme suivante :

X	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax + b$	Signe de $(-a)$	0	Signe de a

Exemple 1

Compléter les tableaux de signes :

X	$-\infty$		$+\infty$
$2x + 7$		0	

X	$-\infty$		$+\infty$
$-3x + 5$		0	

X	$-\infty$		$+\infty$
$5x - 10$		0	

X	$-\infty$		$+\infty$
$-x - 4$		0	

Solution

X	$-\infty$	$-\frac{7}{2}$	$+\infty$
$2x + 7$	-	0	+

X	$-\infty$	$\frac{5}{3}$	$+\infty$
$-3x + 5$	+	0	-

X	$-\infty$	$\frac{10}{5}$	$+\infty$
$5x - 10$	-	0	+

X	$-\infty$	-4	$+\infty$
$-x - 4$	+	0	-

b. Inéquations de référence

- Toute inégalité d'inconnue x , se ramenant à l'un des types : $ax + b \leq 0$, $ax + b \geq 0$, $ax + b < 0$, $ax + b > 0$ où $a \neq 0$ et b sont des nombres réels donnés, est appelée inéquation du 1^{er} degré.
- Une solution de l'inéquation, c'est une valeur que prend l'inconnue pour laquelle l'inégalité est vérifiée.
- Résoudre une inéquation, c'est trouver tous les nombres x (ou un encadrement de ces x) qui vérifient cette inégalité.

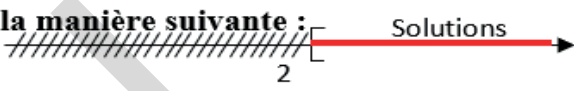
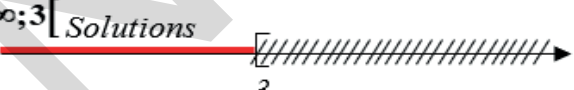
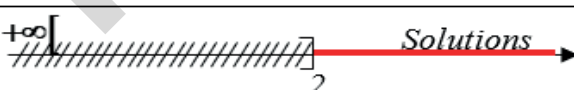
Equation d'inconnue x	$a + x \geq b$	$a + x \leq b$	$ax \geq b$; $a > 0$	$ax \geq b$; $a < 0$	$ax \leq b$; $a > 0$	$ax \leq b$; $a < 0$
Solution	$x \geq b - a$	$x \leq b - a$	$x \geq \frac{b}{a}$	$x \leq \frac{b}{a}$	$x \leq \frac{b}{a}$	$x \geq \frac{b}{a}$

Exemple 2

Compléter le tableau

Inéquation	Résolution	Solution
a) $5x - 10 \geq 0$		
b) $8x - 24 < 0$		
c) $12 - 6x < 0$		

Solution

Inéquation	Résolution	Solutions
a) $5x - 10 \geq 0$	$5x \geq 10$, donc $x \geq 2$	$S = [2; +\infty[$. Tous les nombres plus grands que 2 sont solution, 2 inclus. On les représentent sur un axe de la manière suivante : 
b) $8x - 24 < 0$	$8x < 24$, donc $x < 3$	$S =]-\infty; 3[$ 
c) $12 - 6x < 0$	$-6x < -12$, donc $x > 2$	$S =]2; +\infty[$ 

Remarque :

En général, l'ensemble des solutions d'une inéquation est constitué d'intervalles.

c. Principes de résolution des inéquations de 1er degré :

Si l'on ajoute ou si l'on soustrait un même nombre à chaque membre d'une inéquation, on obtient une inéquation équivalente (c'est à dire qui a les mêmes solutions).	Si l'on multiplie ou si l'on divise chaque membre d'une inéquation par un même nombre strictement positif, on obtient une inéquation équivalente.	Si l'on multiplie ou si l'on divise chaque membre d'une inéquation par un même nombre strictement négatif, on obtient une inéquation équivalente en changeant le sens de l'inégalité.
--	---	---

Exemple 3

On donne l'inéquation $x + 5 \leq 4(x + 1) + 7$.

Pour chacun de ces nombres : -5 ; -3 ; 0 ; 3 , on remplace x par la valeur proposée pour voir si l'inégalité est vérifiée.

Valeur de x	Premier membre	Deuxième membre	Conclusion
-5	0	-9	faux
-3			
0			
3			

Solution

Premier membre : $x + 5$

Deuxième membre : $4x + 8$

Valeur de x	Premier membre	Deuxième membre	Conclusion
- 5	0	- 9	faux
- 3	2	- 1	faux
0	5	11	vrai
3	8	23	vrai

Exercices d'application

Application 1

Résoudre l'inéquation : $3x + 2 < 6x + 7$

Application 2

Résoudre dans l'ensemble de nombres réels, l'inéquation $x + 1 \leq 4(x + 1) + 7$

Application 3

1) Résoudre dans l'ensemble de nombres réels, l'inéquation $-4y \geq -\frac{19}{2}$

2) Déterminer les entiers naturels qui sont solutions de cette inéquation.

Application 4

Résoudre dans l'ensemble de nombres réels, les inéquations

1) $7x > 8x - 3$

2) $-3x + 1 > -5x - 2$

Application 5

Résoudre chacune des inéquations suivantes en utilisant un tableau de signe.

1) $4x - 12 \geq 0$

2) $-3x + 12 \geq 0$

Application 6

Je suis parti avec une somme x de 150 à 200 Ouguiyas dans mon portefeuille, j'ai dépensé une somme d de 90 à 120 . Encadrer la somme s qui peut se trouver encore dans mon portefeuille

Solutions des Applications

Application 1

$3x - 6x < 7 - 2 \Leftrightarrow -3x < 5 \Leftrightarrow x > -\frac{5}{3}$. Tous les x supérieurs strictement à $-\frac{5}{3}$ sont

solutions de l'inéquation. C'est l'intervalle $S = \left] -\frac{5}{3}; +\infty \right[$

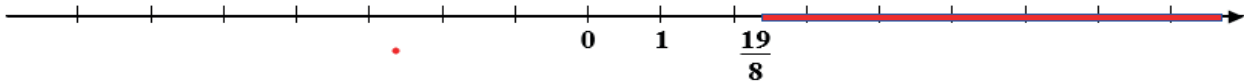
Application 2

$$x + 5 \leq 4(x + 1) + 7 \Leftrightarrow x + 5 \leq 4x + 11 \Leftrightarrow -6 \leq 3x \Leftrightarrow x \geq -2 \Leftrightarrow x \in [-2, +\infty[$$



Application 3

$$-4y \geq -\frac{19}{2} \Leftrightarrow y \leq \frac{19}{8}$$



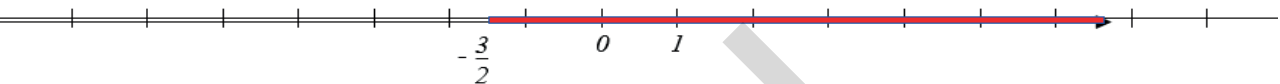
Les seuls entiers positifs qui sont solutions sont 0, 1 et 2.

Application 4

1) $7x > 8x - 3 \Leftrightarrow x < 3 \Leftrightarrow x \in]-\infty, 3[$



2) $-3x + 1 > -5x - 2 \Leftrightarrow -3x + 5x > -2 - 1 \Leftrightarrow 2x > -3 \Leftrightarrow x > -\frac{3}{2} \Leftrightarrow x \in]-\frac{3}{2}, +\infty[$



Application 5

1) Utilisons un tableau de signe

X	$-\infty$	3	$+\infty$
$4x - 12$	-	0	+

Donc $4x - 12 \geq 0 \Leftrightarrow x \in [3, +\infty[$

2) Utilisons un tableau de signe

X	$-\infty$	4	$+\infty$
$-3x + 12$	+	0	-

$-3x + 12 \geq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, 4]$

Application 6

Il me reste au moins $150 - 120 = 30$, au plus $200 - 90 = 110$.

Donc il me reste entre 30 et 110 :

$$150 < x < 200 \Leftrightarrow 90 < x < 120$$

$$\Leftrightarrow 150 - 120 < s = x - d < 200 - 90$$

$$30 < s < 110$$

II Systèmes d'équations et d'inéquations

1) Systèmes d'équations linéaires à deux inconnues

a. Définition

Un système de deux équations linéaires à deux inconnues x et y est un système qui peut s'écrire sous la forme $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ où a, b, c, a', b' et c' sont de réels

b. Méthodes de résolution

Méthode de substitution :

- On écrit, dans l'une des deux équations, une inconnue en fonction de l'autre

- On remplace l'expression obtenue dans l'autre équation. On obtient une équation à une inconnue. On calcule cette inconnue.
- On remplace dans l'une des deux équations pour calculer l'autre inconnue.

Méthode de combinaison :

- On multiplie chacune des équations par un coefficient convenablement choisi, de façon que les coefficients d'une même inconnue soient opposés, pour éliminer cette inconnue.
- On ajoute, membre à membre. On obtient une équation à une inconnue. On calcule cette inconnue.
- On reporte la valeur de l'inconnue calculée dans l'une des deux équations pour calculer l'autre inconnue.

Méthode de Cramer (ou de déterminant) :

Pour résoudre le système $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$, on calcule les déterminants :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b \quad ; \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix} = cb' - c'b \quad ; \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} = ac' - a'c$$

- ❖ Si $\Delta \neq 0$, alors le système a une solution unique (x ; y) avec

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} \quad \text{et} \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$$

- ❖ Si $\Delta = 0$, on calcule Δ_x et Δ_y alors :

$$\begin{cases} \Delta_x \neq 0 \text{ ou } \Delta_y \neq 0, & \text{le système n'a pas de solutions.} \\ \Delta_x = 0 \text{ ou } \Delta_y = 0, & \text{le système a une infinité de solutions.} \end{cases}$$

c. Interprétation graphique des solutions d'un système

Pour interpréter graphiquement les solutions du système $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$, on passe

par les étapes suivantes :

- Représenter graphiquement les droites D_1 et D_2 définies par les deux équations.
- Lire les coordonnées de leur point d'intersection (s'il existe).
- Ces coordonnées vérifient les équations des deux droites et sont donc solution du système d'équations.

d. Mise en équation et résolution d'un problème

- Choisir les inconnues.
- Mettre le problème en équation(s), inéquation(s) ou système.
- Résoudre les d'équations. Les systèmes d'équations ?
- Vérifier la validité des solutions.
- Déduire la solution du problème (conclusion).

Exemple 1

Résoudre le système $\begin{cases} x + 3y = 10 \\ 3x + 5y = 18 \end{cases}$

par substitution.

Solution

1) Dans cet exemple, le coefficient de x dans la première équation est 1. On choisit pour plus de facilité d'exprimer x en fonction de y dans cette équation : $x = -3y + 10$

2) On remplace x par $-3y + 10$ dans la seconde équation. On écrit le nouveau système obtenu

$$\begin{cases} x = -3y + 10 \\ 3(-3y + 10) + 5y = 18 \end{cases}$$

3) On résout la seconde équation à une inconnue y :

$$\begin{cases} x = -3y + 10 \\ -4y + 30 = 18 \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} x = -3y + 10 \\ y = 3 \end{cases}$$

4) On reporte la valeur de y dans la première équation pour calculer x :

$$\begin{cases} x = -3 \times 3 + 10 \\ y = 3 \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}$$

5) La solution du

système $\begin{cases} x + 3y = 10 \\ 3x + 5y = 18 \end{cases}$ est le couple $(1; 3)$.

Donc l'ensemble de solution est

$$S = \{(1; 3)\}$$

Exemple 2

Résoudre le système précédent par combinaison

Solution

1) Dans cet exemple, le coefficient de x dans la première équation est 1. On choisit pour plus de facilité d'éliminer x , on multiplie par -3 les deux membres de la première équation : $-3x - 9y = -30$.

2) On additionne membre à membre les deux équations du système

$$\begin{cases} -3x - 9y = -30 \\ 3x + 5y = 18 \end{cases}$$

On obtient l'équation $-4y = -12$.

On écrit le nouveau système :

$$\begin{cases} -4y = -12 \\ 3x + 5y = 18 \end{cases}$$

3) On résout la première équation à une inconnue y $\begin{cases} y = 3 \\ 3x + 5y = 18 \end{cases}$

4) On reporte la valeur de y dans la première équation pour calculer x :

$$\begin{cases} y = 3 \\ 3x + 5 \times 3 = 18 \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} y = 3 \\ x = 1 \end{cases}$$

La solution du système :

$$\begin{cases} x + 3y = 10 \\ 3x + 5y = 18 \end{cases} \text{ est le couple } (1; 3)$$

Donc d'où l'ensemble de solution

$$\text{est } S = \{(1; 3)\}$$

Exemple 3

Résoudre par la méthode des

déterminants, le système $\begin{cases} x + 3y = 10 \\ 3x + 5y = 18 \end{cases}$

Solution

Considérons le système $\begin{cases} x + 3y = 10 \\ 3x + 5y = 18 \end{cases}$

$$\begin{cases} 3x + y = 5 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 1 \times 5 - 3 \times 3 = 5 - 9 = -4 \neq 0$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 10 & 3 \\ 18 & 5 \end{vmatrix} = 10 \times 5 - 18 \times 3 = 50 - 54 = -4,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 10 \\ 3 & 18 \end{vmatrix} = 1 \times 18 - 3 \times 10 = 18 - 30 = -12$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-4}{-4} = 1 \text{ et } y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-12}{-4} = 3$$

La solution du système $\begin{cases} x + 3y = 10 \\ 3x + 5y = 18 \end{cases}$

est le couple $(1; 3)$. D'où l'ensemble

de solution est $S = \{(1; 3)\}$

Exercices d'application

Application 1

Résoudre le système suivant

$$\begin{cases} y + 3x = 5 \\ 3y - 4x = 8 \end{cases}$$

Application 2

Résoudre le système par combinaison

$$\begin{cases} 3x + y = 45 \\ 6x + 5y = 126 \end{cases}$$

Application 3

Résoudre le système suivant par combinaison :

$$\begin{cases} 3x - 2y = -2 \\ -9x + 6y = 1 \end{cases}$$

Solutions des Applications

Application 1

La substitution est très efficace, quand l'une des inconnues est « toute seule ». On isole alors cette inconnue, et on la remplace dans l'autre équation.

$$\begin{cases} y = 5 - 3x \\ 3(5 - 3x) - 4x = 8 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 5 - 3x \\ 15 - 9x - 4x = 8 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 5 - 3x \\ -13x = 8 - 15 = -7 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 5 - 3x \\ x = \frac{7}{13} \end{cases}$$

Quand on a trouvé une inconnue, on la remplace dans la première équation pour trouver l'autre :

$$y = 5 - 3x = 5 - 3 \times \frac{7}{13} = \frac{5}{1} - \frac{21}{13} = \frac{65 - 21}{13} = \frac{34}{13} . \text{ La solution du système est le couple}$$

$$\left(\frac{7}{13}; \frac{34}{13} \right) . \text{ D'où l'ensemble de solution est } S = \left\{ \left(\frac{7}{13}; \frac{34}{13} \right) \right\}$$

Application 2

$$\begin{cases} y = 45 - 3x \\ 6x + 5y = 126 \end{cases} \quad \text{On exprime } y \text{ en fonction de } x \text{ dans la première équation}$$

$$\begin{cases} y = 45 - 3x \\ 6x + 5(45 - 3x) = 126 \end{cases} \quad \text{On reporte le résultat dans la deuxième équation}$$

$$\begin{cases} y = 45 - 3x \\ 6x + 225 - 15x = 126 \end{cases} \quad \text{On développe, réduit et résout la deuxième équation}$$

$$\begin{cases} y = 45 - 3x \\ x = 11 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 45 - 3 \times 11 \\ x = 11 \end{cases} \quad \text{On reporte la valeur de } x \text{ trouvée dans la première équation}$$

$$\begin{cases} y = 12 \\ x = 11 \end{cases} . \text{ La solution du système est le couple } (11; 12) . \text{ D'où l'ensemble de solution est}$$

$S = \{(11; 12)\}$. On peut ensuite vérifier en reportant dans les deux équations les valeurs trouvées.

$$\begin{cases} 3 \times 11 + 12 = 45 \\ 6 \times 11 + 5 \times 12 = 126 \end{cases} \quad \text{ici, les deux égalités sont bien vérifiées avec le couple (11 ; 12)}$$

Application 3

Résolvons le système $\begin{cases} 3x - 2y = -2 \\ -9x + 6y = 1 \end{cases}$ par la méthode de combinaison :

Pour éliminer x il suffit de multiplier la 1^{ère} équation par 3, puis additionner les deux équations :

$$\begin{cases} 3(3x - 2y) = -2 \times 3 \\ -9x + 6y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9x - 6y = -6 \\ -9x + 6y = 1 \end{cases}$$

On obtient : $0 = -5$ Ce qui est impossible. Donc le système n'a pas de solution.

Interprétation graphique: Les deux droites d'équations : $3x - 2y = -2$; $-9x + 6y = 1$ ne se coupent pas (elles sont parallèles).

2) Système d'inéquations du 1^{er} degré

a. Résolution graphique d'une inéquation à deux inconnues

L'étude du signe de l'expression $ax + by + c$ conduit à la résolution graphique d'une inéquation à deux inconnues ($ax + by + c \geq 0$ par exemple) :

Pour déterminer chacun de ces deux demi-plans, il suffit d'essayer l'origine $O(0,0)$; si la droite ne passe pas par l'origine. S'il vérifie l'inéquation, alors la solution de cette inéquation est l'ensemble des couples $(x ; y)$, coordonnées des points M situés dans le demi-plan de bord la droite Δ , qui contient le point O .

Lorsque la droite passe par l'origine, on essaie un autre point non situé sur Δ , judicieusement choisi.

b. Résolution graphique d'un système d'inéquations à deux inconnues

On procède comme précédemment pour trouver le demi-plan solution de chaque inéquation et la solution graphique du système correspondra à l'intersection de ces deux demi-plans.

Exemple 1

Résoudre l'inéquation suivante $-2x + y + 1 > 0$ et représenter graphiquement ses solutions.

Solutions

Résolvons l'inéquation $-2x + y + 1 > 0$

Méthode (1) :

Les couples solutions de l'inéquation $-2x + y + 1 > 0$ sont représentés par les coordonnées de points d'un demi-plan ouvert déterminé par la droite d_1 d'équation : $-2x + y + 1 = 0$ pour déterminer ce demi-plan on peut essayer avec les coordonnées de l'origine $O(0;0)$: $-2 \times 0 + 0 + 1 = 1 > 0$

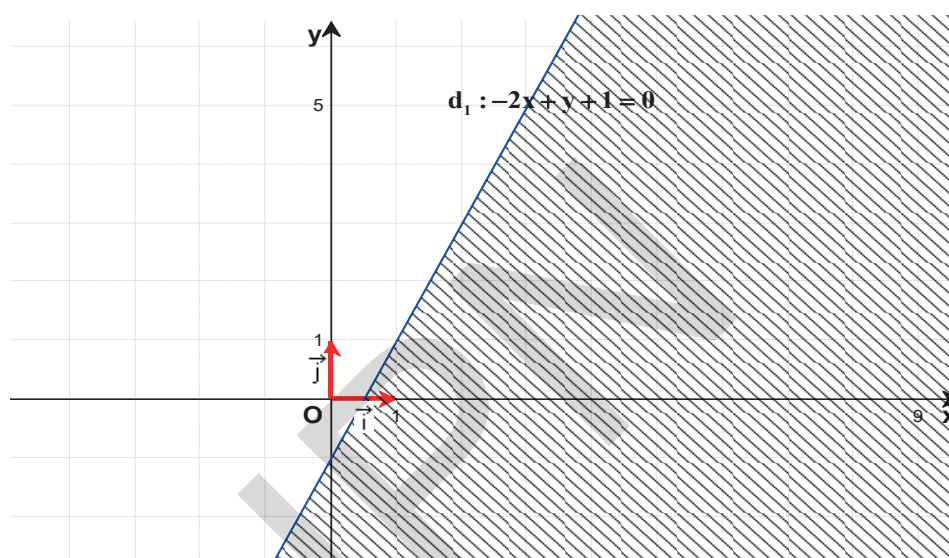
Donc les coordonnées de O vérifient l'inéquation, ce qui montre que la partie solution est le demi-plan ouvert contenant O de bord la droite d_1 (c'est donc la partie non hachurée du plan).

Méthode (2) :

On a $-2x + y + 1 > 0 \Rightarrow y > 2x - 1$.

Donc la partie du plan solution de l'inéquation est le demi-plan situé au-dessus de la droite d_1 d'équation $y = 2x - 1$ (Voir la figure).

Représentation graphique :



Exemple 2

Résoudre le système d'inéquations
$$\begin{cases} 3x - 2y < 2 \\ x - 2y - 4 > 0 \end{cases}$$

Solution

Méthode (1) :

Pour résoudre le système d'inéquations : $\begin{cases} 3x - 2y < 2 \\ x - 2y - 4 > 0 \end{cases}$ on résout d'abord chacune de

deux inéquations, puis on détermine les solutions communes :

❖ Pour l'inéquation $3x - 2y < 2$ déterminons le demi-plan solution :

On essaie le point $O(0;0)$: $3 \times 0 - 2 \times 0 = 0 < 2$, donc l'origine O appartient au demi-plan solution. C'est le demi plan ouvert, contenant O , de bord la droite d_1 d'équation : $3x - 2y - 2 = 0$, on hachure donc l'autre demi-plan.

❖ Pour l'inéquation $x - 2y - 4 > 0$, déterminons le demi-plan solution :

On essaie le point $O(0;0)$: $0 - 2 \times 0 - 4 = -4 > 0$ donc l'origine O n'appartient pas au demi-plan solution. C'est donc le demi-plan ouvert au bord de la droite d_2 d'équation $x - 2y - 4 = 0$ qui ne contient pas l'origine O , on hachure donc l'autre demi-plan.

❖ **Conclusion :** Les solutions du système sont les couples coordonnées de points et la partie intersection de deux demi-plans solutions.

Méthode (2) :

❖ Résolvons la 1^{ère} inéquation : $3x - 2y - 2 < 0 \Rightarrow -2y < -3x + 2 \Rightarrow y > \frac{3}{2}x - 1$

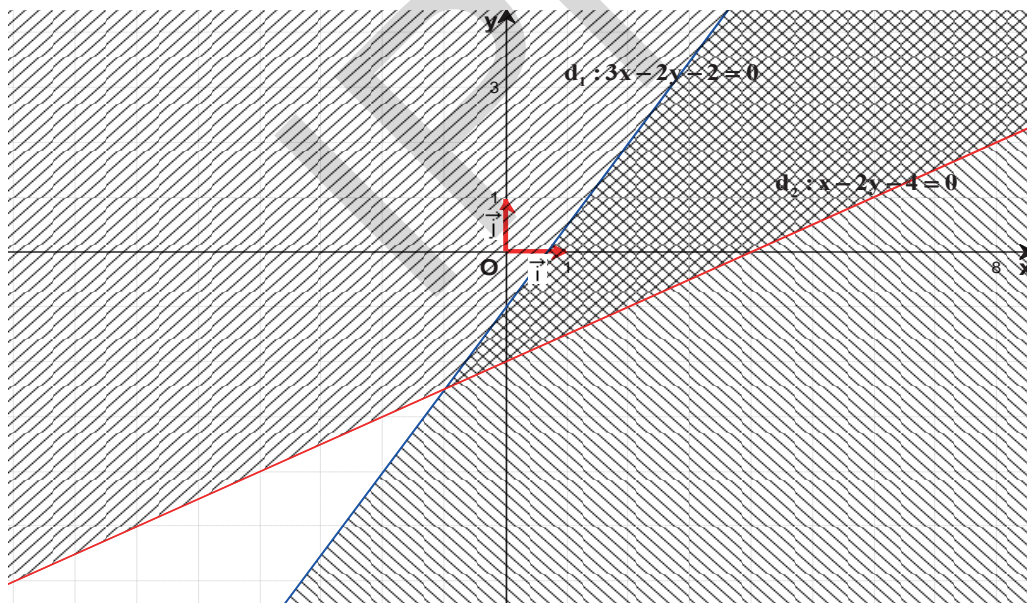
Donc la partie solution est le demi-plan ouvert situé en dessus de la droite d_1 d'équation $3x - 2y - 2 = 0$.

❖ Résolvons la 2ⁿ de inéquation : $x - 2y - 4 > 0 \Rightarrow -2y > -x + 4 \Rightarrow y < \frac{1}{2}x - 2$

Donc la partie solution est le demi-plan ouvert situé au-dessous de la droite d_2 d'équation $x - 2y - 4 = 0$.

Conclusion : Les solutions du système sont les couples coordonnés de points de la partie du plan située à la fois en dessus de la droite d_1 d'équation $3x - 2y - 2 = 0$ et au-dessous de la droite d_2 d'équation $x - 2y - 4 = 0$

❖ **Représentation graphique :**



Exercices d'application

Application 1

Résoudre l'inéquation suivante et représenter graphiquement les solutions
 $x - 2y \geq 4$

Application 2

Résoudre le système suivant : $\begin{cases} 2x - y < 1 \\ x - 2y > -4 \end{cases}$

Solutions des applications

Application 1

Réolvons l'inéquation $x - 2y \geq 4$

Méthode (1) :

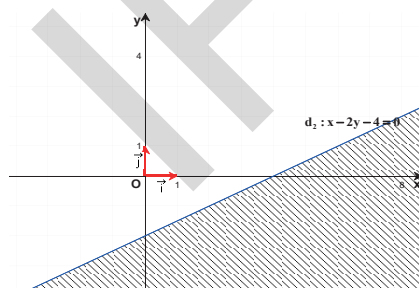
Les couples solutions de l'équation $x - 2y \geq 4$ sont représentés par les coordonnées de points d'un demi-plan fermé de bord la droite d_2 d'équation : $x - 2y - 4 = 0$. Pour déterminer ce demi-plan on peut essayer avec les coordonnées de l'origine $O(0;0)$. On obtient $0 - 2 \times 0 - 4 = -4$

Donc les coordonnées de l'origine O ne vérifient pas l'inéquation $x - 2y \geq 4$, ce qui montre que la partie solution est le demi plan fermé de bord la droite d_2 qui ne contient pas l'origine (demi plan non hachuré).

Méthode (2) :

$$x - 2y \geq 4 \Rightarrow -2y \geq -x + 4 \Rightarrow y \leq \frac{x}{2} - 2$$

Donc la partie solution est le demi-plan situé au-dessous de la droite d_2 d'équation réduite $y = \frac{x}{2} - 2$ (Voir la figure). Représentation graphique :



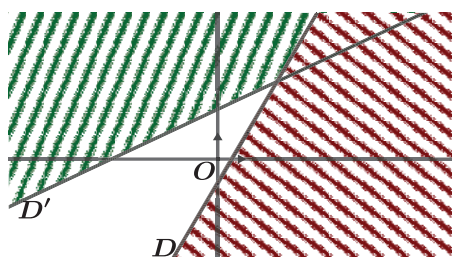
Application 2

Le système $\begin{cases} 2x - y < 1 \\ x - 2y > -4 \end{cases}$ s'écrit $\begin{cases} 2x - 1 < y \\ \frac{1}{2}x + 2 > y \end{cases}$

On trace les deux droites D et D' d'équations

$D : y = 2x - 1$ et $D' : y = \frac{1}{2}x + 2$

Pour chacune des deux inéquations, on considère le demi-plan qui convient. La solution graphique du système correspond à tous les points communs aux deux demi-plans (région non hachurée).



Exercices

1

Résoudre les équations suivantes

$$x + \frac{2}{7} = \frac{35}{9}$$

$$x - \frac{3}{8} = -\frac{5}{4}$$

$$\frac{11}{3} + x = 5$$

$$x \times \frac{1}{3} = \frac{4}{7}$$

$$-\frac{3}{5} \times x = -\frac{11}{4}$$

$$\frac{x}{5} = \frac{3}{8}$$

2

Résoudre les équations suivantes

1) $x + 7 = 4$

2) $2x - 8x - 4 = 8x + 6 - 7 + 4x$

3) $3x = 9$

4) $-(x + 5) = 5(1 - 2x)$

3

Résoudre les équations suivantes

1) $8x = 4$

2) $9x - 7x + 5 - 9x = 6 - 4x + 8x$

3) $\frac{8}{7}x = 14$

4) $6(3y - 5) = -(-5 - y)$

4

Résoudre les équations suivantes

1) $12x = 48$

2) $7x - 2x + 2x - 9 + 7x = 14x$

3) $\frac{x}{2} = 25$

4) $-(18 - x) + 7(3x + 5) = -(2 - 4x)$

5

Mariem a 3 ans de plus que Lala et 4 ans de moins que N'deye. On désigne l'âge de Mariem par x .

a) Exprimer en fonction de x , les âges de Lala et de N'deye.

b) Trouver l'âge de Mariem sachant que la somme des trois âges est 40.

6

Une élève ouvre un livre au hasard. Elle regarde les numéros des deux pages et trouve 55 en les additionnant. A quelles pages le livre est-il ouvert ?

7

Résoudre les inéquations suivantes :

1) $x + 7 - 4 < 0$

2) $2x - 8x - 4 \leq 8x + 6 - 7 + 4x$

3) $3x < 9$

4) $-(x + 5) \geq 5(1 - 2x)$

8

Résoudre les inéquations suivantes

1) $8x + 4 \leq 0$

2) $9x - 7x + 5 > 6 - 4x + 8x$

3) $\frac{8}{7}x \geq 14$

4) $6(3y - 5) < -(-5 - y)$

9

Un groupe de huit personnes et un groupe de quinze personnes arrivent au restaurant. Tout le monde prend le même menu. Le groupe de quinze personnes paie 4550 Ouguiyas de plus que l'autre groupe. Retrouver le prix du menu.

10

Deux randonneurs marchent pendant trois jours. L'étape du deuxième jour est deux fois plus longue que l'étape du premier jour. L'étape du troisième jour est trois fois plus longue que celle du premier jour. En tout, ils ont parcouru 90 km. Calculer la longueur de chaque étape.

11

Résoudre les équations

a) $(x+2)(3-2x)=0$. b) $(3x+20)(4x-7)=0$ c) $(4x+1)(-x+3)=0$.

12

Résoudre chacune des équations 1) $\frac{x-3}{5} = \frac{7}{2}$ 2) $(x+2)(x-11)=0$.

13

Je pense à un nombre a , je prends son triple, je retranche 30 et je trouve 3. Quel est ce nombre ?

14

Les trois quarts d'un nombre augmentés de 5 font 35. Déterminer ce nombre

15

Combien faut-il ajouter au numérateur de la fraction $\frac{57}{68}$ pour qu'elle augmente des quatre tiers de sa valeur ?

16

QCM

Dans chacune des questions suivantes, déterminer la seule des réponses exactes.

N°	Question	Réponse A	Réponse B	Réponse C
1	Dans une ferme, il y a des vaches et des poulets. Le fermier a compté 40 têtes et 120 pattes. Il y a donc :	30 poules	20 poules	15 poules
2	Les solutions de $-2x-3 < 1$ sont telles que	$x > 2$	$x < 2$	$x < -2$
3	Le couple $(x,y)=(-1 ; 3)$ est solution du système :	$\begin{cases} 5x+2y=1 \\ x+2y=7 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x-5y=1 \\ -x+2y=7 \end{cases}$	$\begin{cases} 5x-2y=1 \\ -x+2y=7 \end{cases}$
4	Le système $\begin{cases} 4x+3y=0 \\ 2y+x=0 \end{cases}$ a pour solution le couple	(0 ; 0)	(-1 ; 1)	(1 ; -1)
5	La solution du système : $\begin{cases} x-y=5 \\ 8y+2x=6 \end{cases}$	$d_1 : y = x-5$ $d_2 : y = -2x+6$	$d_1 : y = x-5$ $d_2 : y = -\frac{1}{4}y + \frac{3}{4}$	$d_1 : y = x+5$ $d_2 : y = 2x-6$

	est représentée par l'intersection des droites d_1 et d_2 :			
6	Le système $\begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y = 5 \\ x + y = 10 \end{cases}$	a une infinité de solution	n'a pas de solution	a une seule solution

17 Résoudre le système $\begin{cases} 5x + 3y = 20,5 \\ 4x + 4y = 22 \end{cases}$

18 Résoudre le système $\begin{cases} 8x + 5y = 57 \\ 3x + 4y = 28,6 \end{cases}$

19 1) Résoudre le système $\begin{cases} x + y = 20 \\ 7x + 4y = 104 \end{cases}$

2) Un camion transporte 20 caisses de masses différentes : les unes pèsent 28 kg, les autres 16 kg. Sachant que la masse totale de ces caisses est 416 kg, combien y a-t-il de caisses de chaque catégorie ?

20 Le périmètre d'un rectangle est égal à 36 cm. Si on triple sa longueur et que l'on double sa largeur, son périmètre augmente de 56 cm. Déterminer la longueur et la largeur du rectangle.

21 Résoudre le système d'inéquations $\begin{cases} 3x - 2y < 2 \\ x - 2y - 4 > 0 \end{cases}$

22 Résoudre les systèmes d'inéquations suivants :
 $\begin{cases} 4x - 5 \geq 0 \\ -2x + 3 \geq -2 \end{cases} ; \begin{cases} 3x + 1 \leq 0 \\ 5x + 3 \leq 0 \end{cases}$

23 1) Résoudre le système suivant $\begin{cases} 3x - 7y = 18,8 \\ x - 5y = 10 \end{cases}$

2) Résoudre l'inéquation $4x - 5 \leq 10x + 1$. Représenter en couleur les solutions sur une droite graduée.

3) Le nombre 4 vérifie-t-il l'équation $x^2 - 5x = 4$? Indiquer les calculs. On ne cherchera pas à résoudre cette équation.

24 Chez un confiseur, une dame achète des chocolats au détail :

- chaque chocolat blanc est vendu 20 Ouguiyas et pèse 20 g ;
- chaque chocolat noir est vendu 30 et pèse 35 g.

Cette dame paye 840 pour 900 g. Déterminer le nombre de chocolats de chaque couleur.

Chapitre 3

Fonctions numériques

1) Généralités

a. Définition

Soit I un intervalle ou une réunion d'intervalle.

Une fonction numérique sur I est un procédé qui à chaque élément de I associe au plus un nombre réel. $f(x)$ est l'image par f de x .

b. Images et antécédents

On appelle image de x par f , le nombre unique $f(x)$

Pour tout réel a , on appelle antécédent de a par f , le (ou les) réels x tels que $f(x) = a$.

Remarque : un réel peut avoir un ou plusieurs antécédents ou n'en avoir aucun.

Exemple 1

Soit $f(x) = -x^2 + 2x - 1$.

1) Calculer l'image de 0, de -2 et de $\sqrt{2}$.

2) Déterminer le ou les antécédents de 1.

Solution

1) $f(0) = -0^2 + 2 \times 0 - 1 = -1$; $f(-2) = -2^2 + 2 \times (-2) - 1 = -4 - 4 - 1 = -9$;

$$f(\sqrt{2}) = -(\sqrt{2})^2 + 2 \times (-\sqrt{2}) - 1 = -2 - 2\sqrt{2} - 1 = -3 - 2\sqrt{2}.$$

2) Il suffit de résoudre l'équation $f(x) = 1$

$f(x) = 1 \Leftrightarrow -x^2 + 2x - 1 = 1 \Leftrightarrow -(x^2 - 2x + 1) = 1 \Leftrightarrow (x^2 - 2x + 1) = -1 \Leftrightarrow (x - 1)^2 = -1$, cette dernière égalité est impossible, donc 1 n'a pas d'antécédent par f .

c. Ensemble de définition

L'ensemble de définition d'une fonction f , noté souvent D_f ou simplement D , est l'ensemble des réels x tels que le calcul de $f(x)$ est possible.

Exemple 2:

Donner les ensembles de définition de chacune des fonctions suivantes :

1) $f : x \mapsto x^3 + 5$

2) $g : x \mapsto \frac{x-7}{x+3}$

3) $h : x \mapsto \sqrt{x+6}$

Solution :

1) La fonction ; $f : x \mapsto x^3 + 5$ est un polynôme, définie sur $\mathbb{R}$.

2) La fonction ; $g : x \mapsto \frac{x-7}{x+3}$ est définie si et seulement si $x+3 \neq 0$ ce qui équivaut à $x \neq -3$

Donc le domaine de définition de f est $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$.

La fonction ; $h : x \mapsto \sqrt{x+6}$ est définie si et seulement si $x+6 \geq 0$ ce qui équivaut à $x \geq -6$ donc le domaine de définition de f est $[-6; +\infty[$.

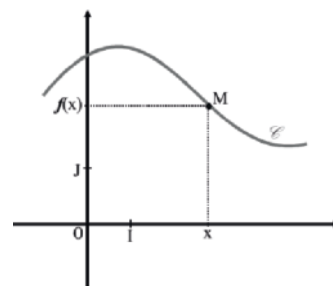
2) Représentation graphique d'une fonction :

Soit $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan $\mathcal{P}$.

Soit f une fonction définie sur un ensemble $\mathcal{D}$.

La représentation graphique $\mathcal{C}$ de f est l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que x décrit $\mathcal{D}$ et $y = f(x)$. $\mathcal{C}$ est appelée la courbe représentative de f dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Par exemple, la représentation graphique d'une fonction affine définie par $f(x) = ax + b$ est une droite d'équation réduite $y = ax + b$.



Exemple 3 :

Utiliser un tableau de valeurs pour tracer une représentation graphique de fonction $f(x) = x^2 - 4x - 4$, dans un repère orthonormé

Solution :

$$f(x) = x^2 - 4x - 4$$

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	8	1	-4	-7	-8	-7	-4	1	8

Chaque couple $(x; f(x))$ de ce tableau est représenté par un point sur la courbe.

3) Parité et périodicité

a. Parité de fonctions

Soit f une fonction définie sur un intervalle I . On dit que f est paire si :

Pour tout élément x de I , $-x$ est aussi dans I et pour tout réel x de I , $f(-x) = f(x)$

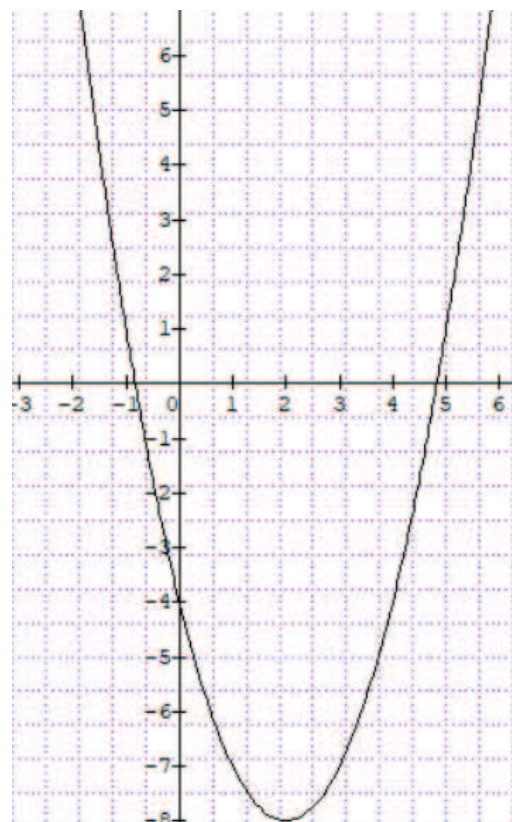
- On dit que f est impaire si :

Pour tout élément x de I , $-x$ est aussi dans I et pour tout réel x de I , $f(-x) = -f(x)$

Exemple 4:

On définit la fonction suivante : $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$.

1) Quel est son ensemble de définition ?



2) Cette fonction est-elle paire ? impaire ?

Solution :

1) $x^2 - 1$ doit être positif ou nul et x doit être non nul.

On résout donc $x^2 - 1 \geq 0$ avec $x \neq 0$.

Ceci donne $(x - 1)(x + 1) \geq 0$ et le tableau ci-après.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$x + 1$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x - 1$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x^2 - 1$	$+$	$-$	$+$	$+$

On en déduit la solution $]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$ et comme 0 (la valeur interdite du dénominateur) n'appartient pas à cet intervalle, $D_f =]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$.

2) On constate que $D_f =]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$ est symétrique par rapport à zéro. f peut éventuellement être paire ou impaire.

On a $f(-x) = \frac{\sqrt{(-x)^2 - 1}}{(-x)} = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{-x} = -\frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} = -f(x)$ donc f est donc une fonction impaire.

Interprétation graphique :

Dans un plan rapporté à un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la courbe représentative admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie.

b. Fonctions périodiques

Une fonction f est périodique s'il existe un réel T strictement positif tel que pour tout x et $x + T$ du domaine de définition, on a : $f(x + T) = f(x)$

Pour une fonction périodique, la période T est la plus petite valeur positive de T pour laquelle $f(x + T) = f(x)$ pour tout x

Exemple 5

La fonction f définie sur l'ensemble des nombres réels par $f(x) = \sin x$ est périodique de période 2π . En effet :

$$f(x + 2\pi) = \sin(x + 2\pi) = \sin x = f(x)$$

4) Variation

a. Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I . On dit que :

f est croissante sur I , si :

Pour tous réels x et x' de I , tels que $x \leq x'$, on a $f(x) \leq f(x')$.

f est décroissante sur I , si :

Pour tous réels x et x' de I , tels que $x \leq x'$, on a $f(x) \geq f(x')$.

f est monotone sur I , lorsque f est soit croissante sur I , soit décroissante sur I .

Exemple 6

a) Etudier les variations de la fonction f définie par $f(x) = 3x - 5$

b) Soit f la fonction définie sur l'ensemble des nombres réels par $f(x) = -x^2 + 9$

Etudier les variations de la f sur chacun des intervalles

1) $]-\infty; 0[$

2) $]0; +\infty[$

Solution

a) Lorsque $a \leq b \Rightarrow 3a \leq 3b \Rightarrow 3a - 5 \leq 3b - 5 \Rightarrow f(a) \leq f(b)$, alors f est croissante.

b.1) Lorsque $a < b < 0$, on a $a^2 > b^2 \Leftrightarrow -a^2 < -b^2 \Leftrightarrow -a^2 + 9 < -b^2 + 9 \Leftrightarrow f(a) < f(b)$ donc f est croissante ;

2) lorsque $0 < a < b$ on a $a^2 < b^2 \Leftrightarrow -a^2 > -b^2 \Leftrightarrow -a^2 + 9 > -b^2 + 9 \Leftrightarrow f(a) > f(b)$ f est décroissante.

b. Taux d'accroissement (de variations) d'une fonction :

Soit $\mathcal{D}_f$ le domaine de définition d'une fonction numérique f , soit $I \subset \mathcal{D}_f$, et $x_1, x_2 \in I$ tels que $x_1 \neq x_2$, on appelle taux d'accroissement de la fonction f sur l'intervalle I que l'on note

Δf ou T , le nombre réel défini par $T = \Delta_f = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$

Si $T \geq 0$ alors f est croissante sur I ,

Si $T \leq 0$ alors f est décroissante sur I ,

Si $T = 0$ alors f est constante sur I ,

Exemple 7

Soit la fonction définie par $f(x) = x^2$

a) Déterminer l'ensemble de définition de f et étudier sa parité.

b) Etudier les variations de f

c) Compléter le tableau suivant et tracer la courbe de f

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
f(x)										

Solution

a. Domaine de définition :

La fonction $f(x) = x^2$ est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$; $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$

Parité :

$\forall x \in \mathbb{R}, -x \in \mathbb{R}$ et $f(-x) = (-x)^2 = (-x)(-x) = x^2 = f(x) \Rightarrow f(-x) = f(x)$

f est paire et admet donc (yOy') comme axe de symétrie.

On peut donc l'étudier sur l'intervalle $[0; +\infty[$ et compléter sa courbe en procédant par symétrie par rapport à (yOy') .

b. Variations :

- Taux d'accroissement :

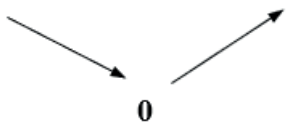
Quels que soient $x_1, x_2 \in \mathcal{D}_f$, on a ;

$$T = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1 - x_2} = \frac{(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)}{x_1 - x_2} = (x_1 + x_2) \Rightarrow T = x_1 + x_2$$

Si $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow T > 0 \Rightarrow f$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$

Et par symétrie, f est décroissante sur $\mathbb{R}_-$

- Tableau de variation :

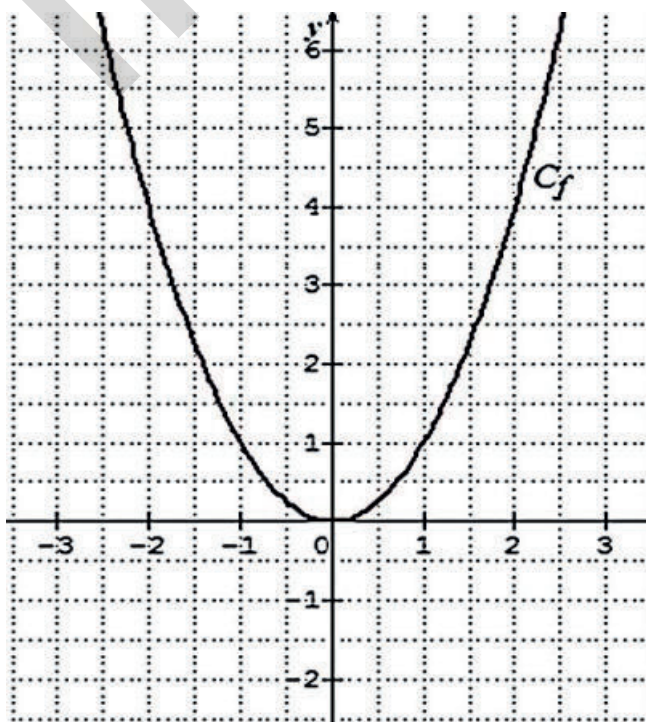
x	$-\infty$	0	$+\infty$
T	-	0	+
$f(x)$			

- c. Représentation graphique :

- Tableau de valeurs :

X	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
f(x)	16	9	4	1	0	1	4	9	16	25

- Courbe de f :



5) Eléments de symétrie

Soit C_f la courbe représentative d'une fonction f .

- C_f est symétrique par rapport à un point de coordonnées $(a ; b)$ si et seulement si $\forall x \in D_f; \quad 2a - x \in D_f$ et $f(2a - x) + f(x) = 2b$
- C_f est symétrique par rapport à la droite d'équation $x=a$ si et seulement si $\forall x \in D_f; \quad 2a - x \in D_f$ et $f(2a - x) = f(x)$

Exemple 8

Soit la fonction f définie par $f(x) = x^2 - 3x + 1$

Montrer que la droite Δ d'équation $x = \frac{3}{2}$ est un axe de symétrie de la courbe de f .

Solution

Pour montrer que Δ est un axe de symétrie de la courbe de f , montrons que pour tout

$x \in \mathbb{R}$, $f(2a - x) = f(x)$, avec $a = \frac{3}{2}$:

$$\text{On a } a = \frac{3}{2} \Rightarrow 2a = 3.$$

$$\begin{aligned} \text{Alors } f(2a - x) &= (3 - x)^2 - 3(3 - x) + 1 = (9 - 6x + x^2) - 9 + 3x + 1 \\ &= 9 - 6x + x^2 - 9 + 3x + 1 = x^2 - 3x + 1 = f(x) \end{aligned}$$

Donc la droite Δ d'équation $x = \frac{3}{2}$ est l'axe de symétrie de C_f .

Exemple 9

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{3x+1}{x-5}$. Montrer que le point $\Omega(5,3)$ est un centre de symétrie de la courbe de f

Solution

Pour montrer que $\Omega(5,3)$ est un centre de symétrie de la courbe de f , montrons que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{5\}$, $2a - x \in D_f$ et $f(2a - x) + f(x) = 2b$ avec $a = 5$, $b = 3$.

On a $a \in D_f \Rightarrow a \neq 5 \Rightarrow 2a \neq 10 \Rightarrow 2a - 5 \neq 5 \Rightarrow 2a - 5 \in D_f$

$$\begin{aligned} f(2a - x) + f(x) &= f(10 - x) + f(x) = \frac{3(10 - x) + 1}{10 - x - 5} + \frac{3x + 1}{-x + 5} = \frac{30 - 3x + 1}{-x + 5} + \frac{3x + 1}{x - 5} \\ &= \frac{31 - 3x}{-x + 5} + \frac{3x + 1}{x - 5} = \frac{3x - 31}{x - 5} + \frac{3x + 1}{x - 5} = \frac{6x - 30}{x - 5} = \frac{6(x - 5)}{x - 5} = 6 \\ &= 2 \times 3 \\ &= 2b. \end{aligned}$$

Enfin $f(2a - x) + f(x) = 2b$.

Donc, le point $\Omega(5,3)$ est le centre de symétrie de la courbe de f .

Exemple 10

Compléter le tableau suivant :

	Vrai	Faux
$f(x) = \frac{\sqrt{2}}{3}$ est une fonction affine.		
Dans l'équation de droite $y = cx + d$, d est le coefficient directeur et c l'ordonnée à l'origine.		
La représentation graphique d'une fonction constante est une droite parallèle à l'axe des ordonnées.		
$g(x) = 0,2x$ est une fonction décroissante.		
La représentation graphique d'une fonction linéaire est une droite parallèle à l'axe des abscisses.		

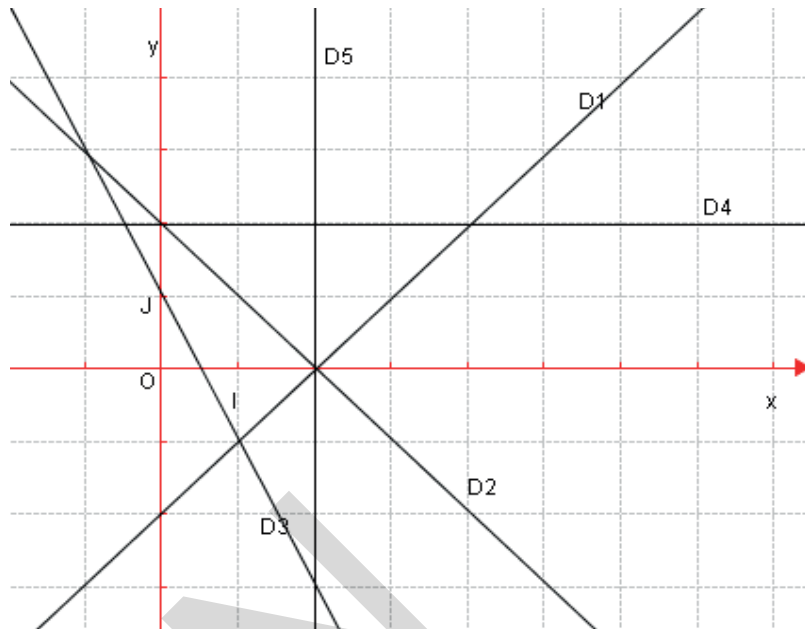
Solution

	Vrai	Faux
$f(x) = \frac{\sqrt{2}}{3}$ est une fonction affine.	V	
Dans l'équation de droite $y = cx + d$, d est le coefficient directeur et c l'ordonnée à l'origine.		F
La représentation graphique d'une fonction constante est une droite parallèle à l'axe des ordonnées.		F
$g(x) = 0,2x$ est une fonction décroissante.		F
La représentation graphique d'une fonction linéaire est une droite parallèle à l'axe des abscisses.		F

Exemple 11

Dans un repère orthonormé, cinq droites sont représentées. Utiliser le graphique pour déterminer

- 1) Celles qui représentent des fonctions affines
- 2) Déterminer leurs expressions



Solution

1) L'équation réduite de la droite D_1 (qui n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées) est de la forme : $y = mx + p$.

Par lecture du graphique :

$$D_1 \text{ passe par } A(0; -2) \text{ et } B(2; 0) \text{ d'où : } m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{0 - (-2)}{2 - 0} = 1.$$

D'autre part $A(0; -2) \in D_1$ donc l'ordonnée à l'origine de D_1 est $p = -2$.

Donc D_1 a pour équation : $y = x - 2$. Donc cette droite représente la fonction affine $f(x) = x - 2$

L'équation réduite de la droite D_2 (qui n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées) est de la forme : $y = mx + p$.

Par lecture du graphique :

$$D_2 \text{ passe par } C(0; 2) \text{ et } B(2; 0) \text{ d'où : } m = \frac{0 - 2}{2 - 0} = -1.$$

D'autre part $C(0; 2) \in D_2$, donc l'ordonnée à l'origine de D_2 est $p = 2$.

Donc D_2 a pour équation : $y = -x + 2$. Donc cette droite représente la fonction affine $f(x) = -x + 2$

3) L'équation réduite de la droite D_3 (qui n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées) est de la forme : $y = mx + p$.

Par lecture du graphique : D_3 passe par $E(0;1)$ et $F(2;-3)$ d'où : $m = \frac{1+3}{0-2} = -2$.

D'autre part $E(0;1) \in D_3$, donc l'ordonnée à l'origine de D_2 est $p = 1$.

Donc D_3 a pour équation : $y = -2x + 1$. Donc cette droite représente la fonction affine $f(x) = -2x + 1$

4) La droite D_4 est parallèle à l'axe des abscisses, donc son équation est de la forme $y = p$ et graphiquement tous les points de D_4 sont d'ordonnées 2.

D'où D_4 a pour équation : $y = 2$. Donc cette droite représente la fonction affine $f(x) = 2$

5) La droite D_5 est parallèle à l'axe des ordonnées, donc ne représente pas une fonction affine.

Exemple 12

Etudier la parité des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^3 - x \quad g(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$$

Solution

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ donc son domaine de définition est centré en zéro.

$$f(-x) = (-x)^3 - (-x) = -x^3 + x = -f(x) \text{ donc } f \text{ est impaire.}$$

La fonction g définie sur $\mathbb{R}^*$ donc son domaine de définition est centré en zéro.

$$g(-x) = \frac{1}{(-x)^2 + 1} = \frac{1}{x^2 + 1} = g(x) \text{ donc } g \text{ est paire.}$$

Exemple 13

Soit f la fonction dont le tableau de variation est donné ci-dessous.

x	-2	2	5	10
$f(x)$	2	5	0	6

1) Etudier les variations de f .

2) Déterminer les images des nombres -2 ; 2 5 et 10

Solution

1) f est croissante sur $[-2 ; 2]$; décroissante sur $[2 ; 5]$ et croissante sur $[5 ; 10]$.

2°) $f(-2)=2$; $f(2)=5$; $f(5)=0$ et $f(10)=6$

Exemple 14

Traduire à l'aide d'écritures simples les phrases suivantes :

a. La courbe de la fonction f passe par le point $A(3 ; -1)$.

- b. L'ordonnée du point d'abscisse 2 de la courbe C de g vaut 1.
 c. La représentation graphique de la fonction h coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée 3.
 d. La courbe représentant la fonction k passe par l'origine.
 e. La courbe C' représentant la fonction m est au-dessus de l'axe des abscisses entre les points d'abscisse -5 et 4.

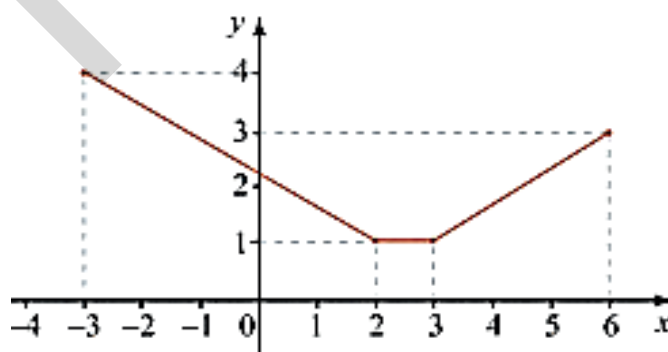
Solution

- a. La courbe de la fonction f passe par le point A(3 ; -1) : $f(3) = -1$.
 b. L'ordonnée du point d'abscisse 2 de la courbe C de g vaut 1 : $g(2) = 1$.
 c. La représentation graphique de la fonction h coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée 3 : $h(0) = 3$.
 d. La courbe représentant la fonction k passe par l'origine : $k(0) = 0$.
 e. La courbe C' représentant la fonction m est au-dessus de l'axe des abscisses entre les points d'abscisse -5 et 4 : $m(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-5 ; 4]$.

Exemple 15

La ligne brisée ci-dessus représente la courbe d'une fonction f.

- 1) Déterminer les images des nombres -3 ; 2 ; 3 et 6 par f
 2) Dresser le tableau de variation de f.



Solution

- 1) $f(-3)=4$; $f(2)=1$; $f(3)=1$ et $f(6)=3$
 2) La fonction f est :
 – décroissante sur l'intervalle ; $[-3 ; 2]$;
 – constante sur l'intervalle ; $[2 ; 3]$;
 – croissante sur l'intervalle ; $[3 ; 6]$.

x	-3	2	3	6
sens de variation de f	4	1	1	3

Exemple 16

On considère la fonction $f(x) = x^3$ pour $x \in \mathbb{R}$.

- a) Déterminer l'ensemble de définition de f et étudier sa parité.
 b) Etudier les variations de f
 c) Compléter le tableau suivant et tracer la courbe de f

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
f(x)								

Solution

a. Domaine de définition :

La fonction $f(x) = x^3$ est définie pour tout $x \in \mathbb{R} \Rightarrow \mathcal{D}_f = \mathbb{R}$

Parité :

$$\forall x \in \mathbb{R}, -x \in \mathbb{R} \text{ et } f(-x) = (-x)^3 = (-x)(-x)(-x) = -(x^3) = -f(x)$$

$$\Rightarrow f(-x) = -f(x)$$

La fonction $f(x) = x^3$ est impaire. Sa courbe admet l'origine O comme centre de symétrie.

On peut donc l'étudier sur l'intervalle $[0; +\infty[$ et compléter sa courbe par symétrie par rapport à O .

b. Variations:

• Taux d'accroissement :

Quels que soient $x_1, x_2 \in \mathcal{D}_f$, on a ;

$$T = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{x_1^3 - x_2^3}{x_1 - x_2} = \frac{(x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2)}{x_1 - x_2} \Rightarrow T = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$$

Si $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow T > 0 \Rightarrow f$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et par symétrie, f est aussi croissante sur $\mathbb{R}_-$

Tableau de variation:

x	$-\infty$	$+\infty$
T		+
$f(x)$		

c) Représentation graphique :

• Tableau de valeurs :

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-64	-27	-8	-1	0	1	8	27

• Courbe de f :

Dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, la représentation graphique de la fonction $f(x) = x^3$ est la courbe suivante.

Exercices d'application

Application 1

Soit $g(x) = \frac{2x-3}{x-1}$.

- 1) Calculer l'image de 0, de -2 et de $\sqrt{2}$.
- 2) Peut-on calculer l'image de 1 ?
- 3) Déterminer le ou les antécédents de 1.

Application 2

Donner les ensembles de définition de chacune des fonctions suivantes :

$$f(x) = \frac{-5x^2 + 4x + 1}{x(x-3)(x+2)}$$

$$g(x) = \sqrt{5x-2}$$

Application 3

Etudier la périodicité des fonctions définies sur l'ensemble de nombres réels par :

1) $f(x) = \cos(x)$

2) $f(x) = \sin(x)$

3) $f(x) = \tan x$

Application 4

On définit sur la fonction g par $g(x) = 2 - \frac{2}{x+1}$ dont la courbe représentative est C_g .

1. Déterminer les variations de g sur $]-\infty; -1[$ et $]-1; +\infty[$
2. Tracer, dans le repère, la courbe C_g .

Application 5

Soit f la fonction définie sur $[-3; 6]$ par $f(x) = \begin{cases} \frac{-3}{5}x + \frac{11}{5} & \text{si } x \in [-3; 2] \\ 1 & \text{si } x \in [2; 3] \\ \frac{2}{3}x - 1 & \text{si } x \in [3; 6] \end{cases}$

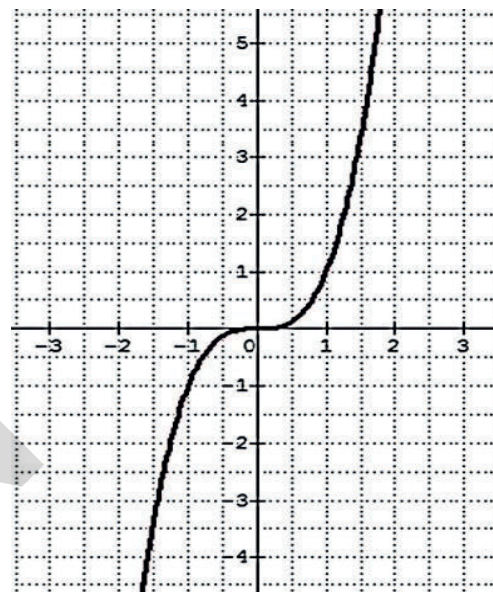
- 1) Calculer les images des nombres : -3 ; 0 ; 1 ; 2 ; 2,5 ; 3 ; 5 et 6
- 2) Construire la représentation graphique de f

Application 6

Une entreprise fabrique chaque jour un produit. On appelle x la masse journalière produite en kg, x peut varier entre 0 et 45.

Le coût de production de ces x kg de produit exprimé en Ouguiyas est donné par la formule : $C(x) = x^2 - 20x + 200$.

Le prix de vente de ce produit est de 34 Ouguiyas le kg. On suppose que tous les objets fabriqués sont vendus.



- 1) Quel est le coût de production pour 20 kg de produit ? Quelle est la recette liée à la vente de ces 20 kg ? Quel est le bénéfice réalisé ?
- 2) Déterminer la recette $R(x)$ réalisée lorsque l'entreprise fabrique et vend x kg de produit. Déterminer le bénéfice $B(x)$ correspondant.
- 3) Etudier les variations de $B(x)$ sur les intervalles $[0; 27]$ et $[27; 45]$
- 4) Pour quelle valeur de x le bénéfice est-il maximal ? Quel est alors ce bénéfice ?

Solutions des Applications

Application 1

$$1) g(0) = \frac{2 \times 0 - 3}{0 - 1} = \frac{-3}{-1} = 3; \quad g(-2) = \frac{2 \times (-2) - 3}{(-2) - 1} = \frac{-7}{-3} = \frac{7}{3};$$

$$g(\sqrt{2}) = \frac{2\sqrt{2} - 3}{\sqrt{2} - 1} = \frac{(2\sqrt{2} - 3)(\sqrt{2} + 1)}{(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1)} = \frac{(4 + 2\sqrt{2} - 3\sqrt{2} - 3)}{(2 - 1)} = 1 - \sqrt{2}$$

- 2) On ne peut pas calculer $g(1)$, car 1 n'appartient pas au domaine de définition,
- 3) Il suffit de résoudre l'équation $g(x) = 1$.

$$g(x) = 1 \Leftrightarrow \frac{2x - 3}{x - 1} = 1 \Leftrightarrow 2x + 3 = x - 1 \Leftrightarrow x = -4, \text{ donc l'antécédent de 1 par } g \text{ est } -4.$$

Application 2

$$f(x) = \frac{-5x^2 + 4x + 1}{x(x-3)(x+2)} \text{ est définie si et seulement si } x(x-3)(x+2) \neq 0.$$

C'est-à-dire pour ; $x \neq 0, x \neq -2$ et $x \neq 3 \Rightarrow \mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-2; 0; 3\}$

$g(x) = \sqrt{5x - 2}$ est définie si et seulement si $5x - 2 \geq 0$.

$$5x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow 5x \geq 2 \Leftrightarrow x \geq \frac{2}{5} \text{ donc le domaine de définition de } g \text{ est } \left[\frac{2}{5}, +\infty \right[$$

Application 3

- 1) La fonction f a pour période 2π car $\forall x \in \mathbb{R} : f(x + 2\pi) = \cos(x + 2\pi) = \cos x$.
- 2) La fonction f a pour période 2π car $\forall x \in \mathbb{R} : f(x + 2\pi) = \sin(x + 2\pi) = \sin x$.
- 3) La fonction f a pour période π car :

$$\forall x \in \mathbb{R} : f(x + \pi) = \tan(x + \pi) = \frac{\sin(x + \pi)}{\cos(x + \pi)} = \frac{-\sin x}{-\cos x} = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x = f(x)$$

Application 4

1. Sur $] -\infty; -1[$:

$$\text{Soit } a < b < -1, \text{ alors } a + 1 < b + 1 < 0 \text{ puis } \frac{1}{a+1} > \frac{1}{b+1}, -\frac{2}{a+1} < -\frac{2}{b+1},$$

$$2 - \frac{2}{a+1} < 2 - \frac{2}{b+1};$$

donc $g(a) < g(b)$ et g est croissante sur $] -\infty; -1[$.

Sur $] -1; +\infty[$:

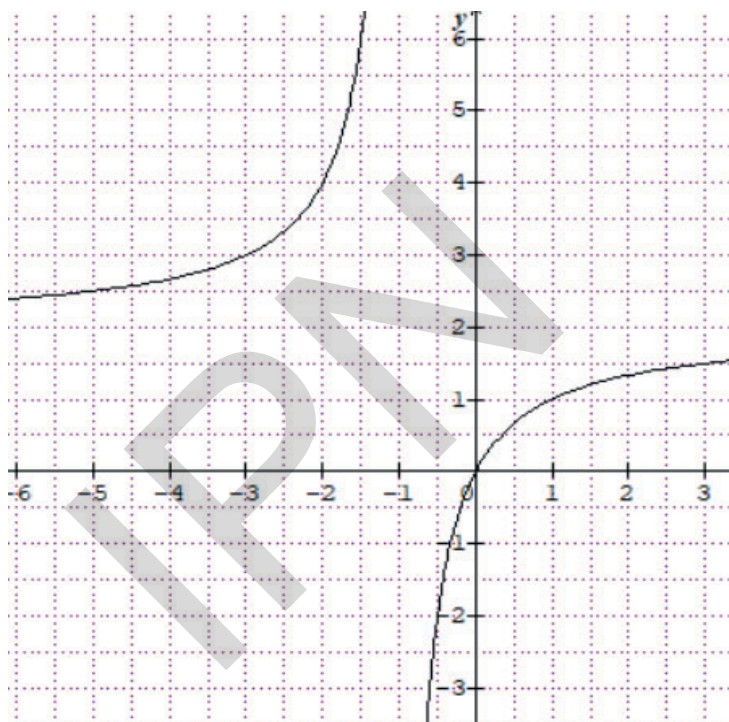
x	$-\infty$	-1	$+\infty$
g(x)			

Soit $-1 < a < b$, $0 < a + 1 < b + 1$, $\frac{1}{a+1} > \frac{1}{b+1}$,

$-\frac{2}{a+1} < -\frac{2}{b+1}$, $2 - \frac{2}{a+1} < 2 - \frac{2}{b+1}$ donc $g(a) < g(b)$, g est croissante sur $]-1; +\infty[$.

2. Valeurs arrondies à 10^{-4} près:

X	-5	-4,5	-4	-3,5	-3	-2,5	-2	-1,5	-0,5	0	0,5	1
g(x)	2,5	2,5714	2,6667	2,8	3	3,3333	4	6	-2	0	0,6667	1



Application 5

$$1) f(-3) = \frac{-3}{5} \times (-3) + \frac{11}{5} = 4$$

$$f(0) = \frac{-3}{5} \times 0 + \frac{11}{5} = \frac{11}{5}$$

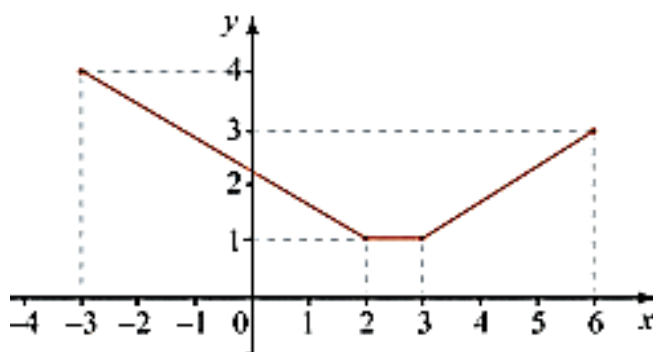
$$f(1) = \frac{-3}{5} \times 1 + \frac{11}{5} = \frac{8}{5}$$

$$f(2) = \frac{-3}{5} \times 2 + \frac{11}{5} = 1$$

$$f(2,5) = 1 \quad f(3) = 1$$

$$f(5) = \frac{2}{3} \times 5 - 1 = \frac{7}{3}$$

$$f(6) = \frac{2}{3} \times 6 - 1 = 3$$



3) La représentation graphique de f est la ligne brisée constituée des segments dont les extrémités sont les points de coordonnées $(-3; 4)$, $(2; 1)$, $(3; 1)$ et $(6; 3)$

Application 6

Le coût de production de ces x kg de produit exprimé en Ouguiyas est donné par la formule : $C(x) = x^2 - 20x + 200$.

Le prix de vente de ce produit est de 34 Ouguiyas le kg. On suppose que tous les objets fabriqués sont vendus.

1) Le coût de production pour 20 kg de produit est

$$C(20) = 20^2 - 20 \times 20 + 200 = 200 \text{ Ouguiyas.}$$

La recette liée à la vente de ces 20 kg est $R(20) = 34 \times 20 = 680$ Ouguiyas.

Le bénéfice réalisé est $B(20) = R(20) - C(20) = 680 - 200 = 480$

2) La recette $R(x)$ réalisée lorsque l'entreprise fabrique et vend x kg de produit est

$$R(x) = 34 \times x = 34x$$

Le bénéfice $B(x)$ correspondant est

$$B(x) = C(x) - R(20) = 34x - x^2 + 20x - 200 - 34x = -x^2 + 54x - 200$$

3) La valeur de x pour laquelle le bénéfice est-il maximal :

Le taux d'accroissement est :

$$T = \frac{B(x_1) - B(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{-x_1^2 + 54x_1 - 200 - (-x_2^2 + 54x_2 - 200)}{x_1 - x_2} = \frac{-(x_1^2 - x_2^2) - 54(x_1 - x_2)}{x_1 - x_2}$$

$$T = \frac{B(x_1) - B(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{-(x_1 + x_2)(x_1 - x_2) + 54(x_1 - x_2)}{x_1 - x_2} = -(x_1 + x_2) + 54$$

- Sur l'intervalle sur l'intervalle $[0; 27]$:

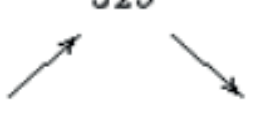
$$x_1; x_2 \in [0; 27] \text{ donc :}$$

$0 \leq x_1 \leq 27$ et $0 \leq x_2 \leq 27$ donc $x_1 + x_2 \leq 54$ et par conséquent $T \geq 0$ donc la fonction bénéfice est croissante sur cet intervalle.

- Sur l'intervalle sur l'intervalle $[27; 45]$ $x_1; x_2 \in [27; 45]$:

$27 \leq x_1 \leq 45$ et $27 \leq x_2 \leq 45$ donc $x_1 + x_2 \geq 54$ et par conséquent $T \leq 0$ donc la fonction bénéfice est décroissante sur cet intervalle.

$$B(27) = -27^2 + 54 \times 27 - 200 = 529$$

x	$-\infty$	27	$+\infty$
$B(x)$		529	
			

D'après les variations de $B(x)$, la valeur de x le bénéfice pour laquelle le bénéfice est maximal est $x = 27$ et ce bénéfice est 529 Ouguiyas.

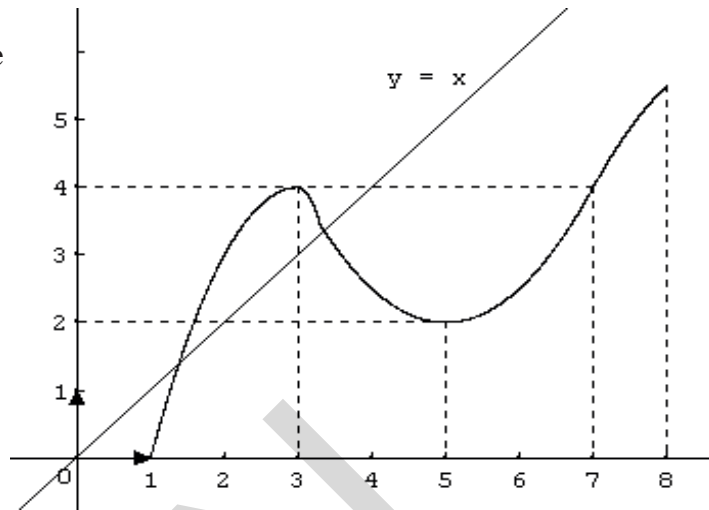
Exercices

1

On a représenté ci-contre

- la droite d'équation $y = x$,
- la courbe représentative d'une fonction f définie sur $[1 ; 8]$. Les questions posées seront résolues par lecture graphique.

1. Répondre par vrai ou faux aux questions suivantes :



vrai ou faux

1.	1 a pour image 0 par la fonction f	
2.	0 a pour image 1 par la fonction f	
3.	7 est un antécédent de 4 par la fonction f	
4.	3 est un antécédent de 4 par la fonction f	
5.	$f(3) = 4$	
6.	$f(2) = 5$	
7.	$f(3) > f(5)$	
8.	2,5 a trois antécédents par la fonction f	
9.	0,5 a un seul antécédent par la fonction f	
10.	L'équation $f(x) = 3$ a au moins une solution dans l'intervalle $[1 ; 8]$	
11.	L'équation $f(x) = x$ a au moins une solution dans l'intervalle $[1 ; 8]$	
12.	f est croissante sur l'intervalle $[1 ; 8]$	
13.	Si x appartient à l'intervalle $[4 ; 5]$, alors $f(x) \leq x$	
14.	Si a et b appartiennent à l'intervalle $[3 ; 5]$ et si $a < b$, alors $f(a) < f(b)$	

2

Vrai ou faux

On donne le tableau des variations d'une fonction f définie sur $[-10 ; 10]$

x	-10	-7	-1	0	4	6	10
Variations de f	0,01	2	0	-5	0	3	1

1. Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie, fausse ou si le tableau ne permet pas de savoir. (justifier chaque réponse)

a) $f(1) > f(3)$

b) $f(-9) < f(-6)$

c) $f(-6) < 2$

d) $f(-5) > f(-3)$

2. Indiquer à l'aide d'un tableau le signe de $f(x)$

3 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 3$

a) Calculer les images par f des réels $0; \sqrt{2}; -4$.

b) Vérifier que $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$ ont pour image 4.

c) Pourquoi -4 n'est-il pas l'image d'aucun réel ?

4 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x-3)(x+1)$

1/ Quelles sont les images par f de 2 et de -10 ?

2/ Quels sont les antécédents de 0 par f ?

3/ Les points de coordonnées $(-1; 3)$, $(0; -3)$, et $(1; 0)$ sont-ils des points de la représentation graphique de f ?

5 Dans chaque cas, préciser l'ensemble de définition de f :

a) $f(x) = 2x^2 + 1$

b) $f(x) = \frac{1}{2x} + 3x$

c) $f(x) = \frac{1}{x-1}$

d) $f(x) = 2\sqrt{x} + 1$

e) $f(x) = \frac{1}{(x-4)(x+1)}$

f) $f(x) = \frac{x}{(x-1)^2}$

g) $f(x) = \frac{-2}{x^2 + 1}$

h) $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$

6 Associer les tableaux de variation aux courbes représentatives.

1.

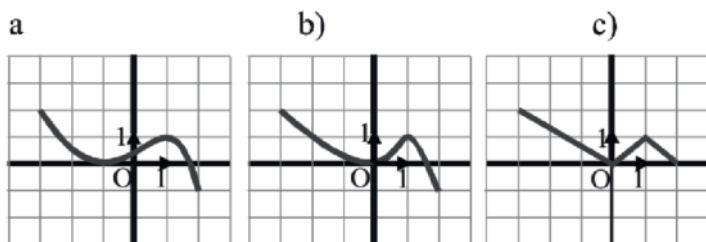
x	-3	0	1	2
f(x)	2	0	1	-1

2.

x	-3	0	1	2
f(x)	2	0	1	0

3.

x	-3	-1	1	2
f(x)	2	0	1	-1



7 Dans les deux cas suivants, tracer une courbe susceptible de représenter f à partir de son tableau de variation et des renseignements donnés.

a) $D_f =]-3; 4[$; $f(-4) = -3$; $f(1) = 3$; $f(4) = 2$.

Pour tout $x > 2$, $f(x) > 0$.

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
f					

b) ; $f(-1) = 0$; $f(-3) = 2$.

Pour tout $x < -3$, $f(x) < 3$.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
f				

8 Soit la fonction numérique définie par $f(x) = x^2 - 3x + 2$ sur $I = [-2; 5]$.

1/ Compléter le tableau de valeurs suivant :

x	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
$f(x)$															

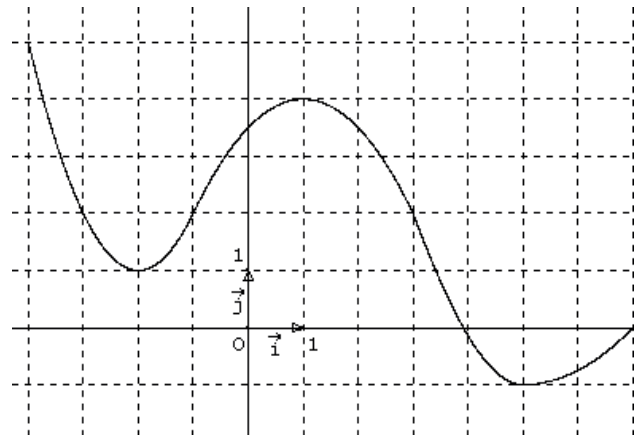
2/ Placer les points de coordonnées $(x ; f(x))$ dans un repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ en prenant comme unité 1 cm. Tous ces points appartiennent à la représentation graphique de f . La tracer en joignant ces points.

3/ Déterminer le minimum de la fonction f ainsi que la valeur pour laquelle il est atteint.

4/ Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x)$

9 On donne ci-contre la courbe représentative d'une fonction f .

1. Donner le domaine de définition
2. Déterminer graphiquement l'image de 5 par la fonction f . Donner $f(-4)$.
3. Déterminer s'ils existent, les antécédents de 2 par la fonction f .
Déterminer s'ils existent, les antécédents de -2 par la fonction f .
5. Etablir le tableau des variations de f .
6. Quel est le maximum de la fonction f sur $[-1 ; 3]$.
Préciser la valeur pour laquelle il est atteint.



10 Pour chacune des fonctions rationnelles suivantes, déterminer l'ensemble de définition et simplifier si possible l'expression :

$$A(x) = \frac{x^2}{x^3 + 2x^2}; \quad C(x) = \frac{2}{(x-1)(x-3)} - \frac{1}{(x-2)(x-3)}$$

$$D(x) = \frac{(2x-3)(x-1)^2 - 4(2x-3)}{(x+1)^2(x-3)};$$

$$E(x) = \frac{3}{x} + \frac{5}{x+2} - \frac{1}{x-2} + \frac{4}{x^2-4};$$

11 On donne les fonctions suivantes ;
 $f(x) = 3x - 7$; $g(x) = 4x^2 + 5x - 2$;

$h(x) = 5x^3 - 1$ et $l(x) = -4x + 6$.

1°) Montrer que f est croissante sur $\mathbb{R}$, g est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et h est croissante sur $\mathbb{R}_-$.

2°) Montrer que l est décroissante sur $\mathbb{R}$.

12 Parmi les fonctions suivantes, quelles sont les fonctions paires, les fonctions impaires et celles qui ne sont ni paires ni impaires ;

$$f : x \mapsto x^2; \quad g : x \mapsto x^3; \quad h : x \mapsto \frac{1}{x};$$

$$j : x \mapsto x + \frac{1}{x}; \quad k : x \mapsto 2x^2 + \frac{3}{x^2};$$

$$l : x \mapsto x^2 + \frac{5}{x}; \quad m : x \mapsto \frac{x^2 + 1}{x^3 - 2x}$$

$$n : x \mapsto 2x^2 + \frac{|x|}{x^2 - 6}; \quad p : x \mapsto \sqrt{-x};$$

13 Soit f la fonction définie par le tableau :

x	-1	-0,5	0	1	1,5	3
$f(x)$	2	4	3,5	2	-0,5	-14

Quelles sont les images par f des nombres : 0 ; 1 et 1,5 ?

Quels nombres ont pour image par f le nombre 2 ?

14 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$.

a) Reproduire et compléter le tableau suivant :

x	-1	-0,5	0	0,5	2	4
$f(x)$						

b) Quels est le nombre dont l'image par f est 4 ?

15 Soit f une fonction définie pour tout réel x sauf $\frac{4}{3}$, par $f(x) = \frac{2x+1}{3x-4}$.

1) Déterminer les images par f de 4 ; -2 ; 7 ; 0,5 et 5.

2) Déterminer les antécédents par f de 2.

3) Soit C la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé. Déterminer, s'ils existent, les coordonnées des points d'intersection de C avec l'axe des abscisses.

4) Utiliser un tableau de variation pour représenter la courbe de cette fonction.

16 Pourquoi la courbe C , de la figure ci-dessous, représente-t-elle une fonction ?

Soit f cette fonction.

Déterminer ;

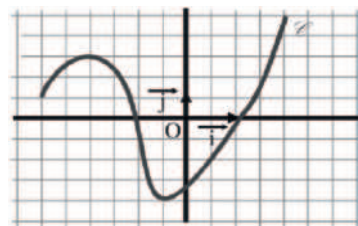
1) L'ordonnée du point de C dont l'abscisse est 1,5 ;

2) Les abscisses des points de C dont l'ordonnée est -1.

3) Les coordonnées des sommets de C ;

4) L'image de -1 par f ;

5) Les antécédents de 3 par f .



17 Soit $f(x) = 2x^2 - 4x + 3$

1- Déterminer D_f

2- Montrer que la droite d'équation $x = 1$ est un axe de symétrie de la courbe de f

3- Etudier le signe du taux d'accroissement sur chacun des intervalles $]-\infty; 1]$ et $[1; +\infty[$

4- Dresser le tableau de variations de la fonction f .

5- Utiliser un tableau de valeur pour construire la courbe de f .

18 On définit sur la fonction g par $g(x) = 2 - \frac{2}{x+1}$ dont la courbe représentative est C_g .

1. Déterminer les variations de g sur $]-\infty; -1[$ et $]-1; +\infty[$

2. Tracer, dans le repère, la courbe C_g .

Chapitre 4 : Droites et vecteurs dans le plan

I Vecteurs

1) Rappel

a) Notion d'un vecteur

A et B étant deux points distincts, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est caractérisé par :

- sa direction : la droite (AB)
- son sens : celui de A vers B
- sa norme : la distance AB

- Le point A est l'origine du vecteur $\overrightarrow{AB}$ et B son extrémité.
- Si les points A et B sont confondus, alors le vecteur $\overrightarrow{AA}$ ou $\overrightarrow{BB}$ est appelé vecteur nul et noté $\vec{0}$. Le vecteur nul n'a pas de direction ni sens.
- Un vecteur peut être noté $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, etc.. ;

b) Vecteurs égaux, vecteurs opposés

Vecteurs opposés

- Deux vecteurs sont opposés s'ils ont la même direction, la même norme, mais des sens contraires.
- Un vecteur opposé de $\vec{u}$ est $-\vec{u}$
- Un vecteur opposé de $\overrightarrow{AB}$ est $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$

Vecteurs égaux

Deux vecteurs sont égaux s'ils ont la même direction, le même sens et la même norme.

Exemple 1

Répondre par vrai ou faux.

1. La direction du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est le sens de A vers B.
2. Le vecteur opposé de $\overrightarrow{EA}$ est $\overrightarrow{AE}$.
3. Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ alors ABCD est un parallélogramme.
4. Si O est le milieu du segment [EF] alors $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OF}$
5. Si A est l'image de B par la translation de vecteur $\vec{v}$ alors $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$.

Solution

1. faux 2. vrai 3. faux 4. faux 5. Vrai.

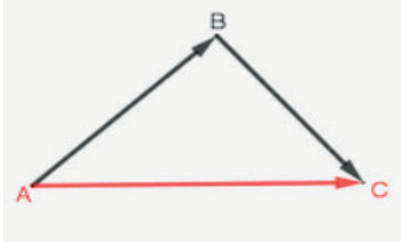
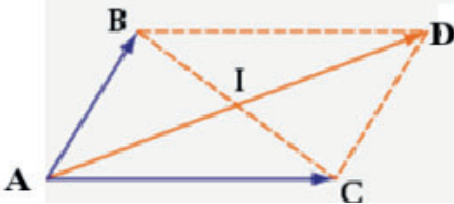
c) Vecteurs et configurations géométriques

- Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, alors ABCD est un parallélogramme.
- Si ABCD est un parallélogramme, alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

- Si $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$, alors I est le milieu de [AB]
- Si I est le milieu de [AB], alors $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$

2) Operations sur les vecteurs

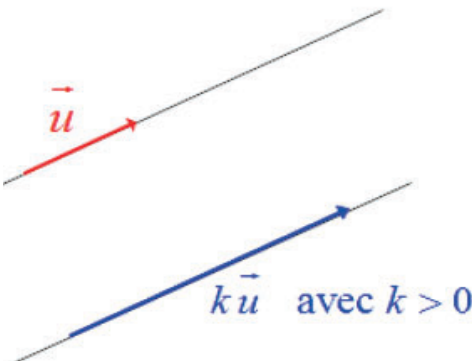
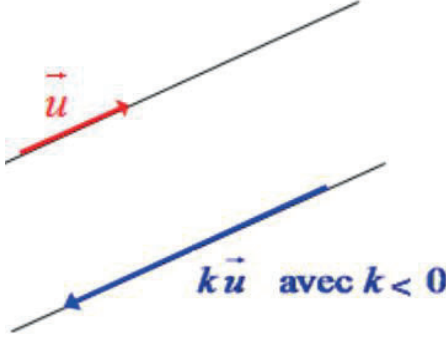
a) Somme de deux vecteurs

• Relation de Chasles : Pour tous points A, B et C du plan, on a $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$ 	• Règle de parallélogramme : Soit A, B, C, D quatre points. Dire que $\vec{AD} = \vec{AB} + \vec{AC}$ équivaut à dire que ABDC est un parallélogramme. 
--	--

b) Multiplication d'un vecteur par un réel

Le produit d'un vecteur non nul $\vec{AB}$ par un réel k non nul, est le vecteur $\vec{CD}$ tel que : - $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ ont la même direction - $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ ont le même sens si $k > 0$ et de sens contraires si $k < 0$ - $CD = k AB$ On note $\vec{CD} = k \vec{AB}$	Si le vecteur est nul ou le réel est nul, alors leur produit est le vecteur nul. $0 \times \vec{u} = \vec{0}$ et $k \times \vec{0} = \vec{0}$
--	---

Illustration :

 $k\vec{u}$ avec $k > 0$	 $k\vec{u}$ avec $k < 0$
---	--

c) Propriétés

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ des vecteurs du plan • $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ • $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$ • $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$ • $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$	Soient a et b des réels, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ des vecteurs du plan • $1 \times \vec{u} = \vec{u}$ • $a(\vec{u} + \vec{v}) = a.\vec{u} + a.\vec{v}$ • $a(b.\vec{u}) = (ab).\vec{u}$ • $(a + b).\vec{u} = a.\vec{u} + b.\vec{u}$
---	--

3) Vecteurs colinéaires :

- Deux vecteurs sont colinéaires s'ils ont la même direction ou si l'un d'eux est nul
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires s'il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$;

- Si AB et CD sont colinéaires non nuls, alors les droites (AB) et (CD) sont parallèles
- Si les droites (AB) et (CD) sont parallèles alors les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires
- Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires alors les points A, B et C sont alignés.
- Si A, B et C sont alignés alors $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires.

Exemple 2

Compléter les pointillés

1. Si $A = B$, alors $\overrightarrow{AB} = \dots$
2. Si M' est l'image de M par la symétrie de centre I alors $\overrightarrow{IM'} = \dots$
3. Pour tous points M, N et P du plan, $\overrightarrow{MN} + \dots = \overrightarrow{MP}$
4. S'il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$, alors les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont ...
5. Les points A, B et C sont alignés, s'il existe un réel k tel que ...

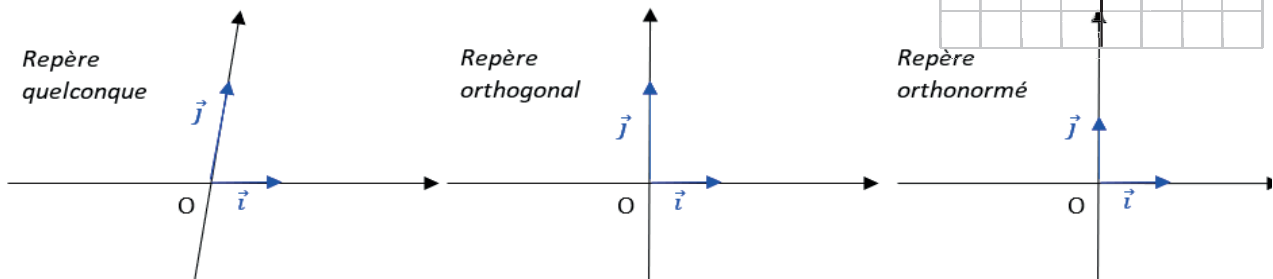
Solution

1. Si $A = B$, alors $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$
2. Si M' est l'image de M par la symétrie de centre I alors $\overrightarrow{IM'} = -\overrightarrow{MI}$
3. Pour tous points M, N et P du plan, $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MP}$
4. S'il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$, alors les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
5. Les points A, B et C sont alignés, s'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$

II Repères du plan

1) Définitions

- On appelle repère du plan tout triplet $(O, \vec{i}, \vec{j})$ où O est un point et $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont deux vecteurs non colinéaires
- Un repère est dit orthogonal si $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont orthogonaux.
- Un repère est dit orthonormé s'il est orthogonal et si $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont de même norme



2) Configurations géométriques et coordonnées

Soient deux points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ dans un repère orthonormé :

Coordonnées d'un vecteur	Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$.
Coordonnées du milieu d'un segment	Le milieu M du segment $[AB]$ a pour coordonnées : $\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2} \right)$
Distance dans un repère orthonormé	La distance AB (ou la norme de $\overrightarrow{AB}$) est : $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$
Soient deux vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ et soit k un réel	• $\vec{u} + \vec{v} \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$
	• $k\vec{u} \begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$ • $-\vec{u} \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$
	• $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont égaux lorsque $x = x'$ et $y = y'$.

Exemple 1

Déterminer par calcul, les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{EF}$, tels que $A(2; 1)$, $B(4; -2)$, $C(5; 3)$, $D(-1; -2)$, $E(-2; 3)$ et $F(1; -4)$.

Solution

Déterminons par calcul, les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{EF}$:

on a $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 5 - 2 \\ 3 - 1 \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} -2 - (-1) \\ 3 - (-2) \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{EF} \begin{pmatrix} 4 - 1 \\ -2 - (-4) \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{EF} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

Exemple 2

En prenant les données d'exemple précédent, calculer les coordonnées des vecteurs $3\overrightarrow{AB}$, $4\overrightarrow{CD}$ et $3\overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{CD}$.

Solution

Calculons les coordonnées des vecteurs $3\overrightarrow{AB}$, $4\overrightarrow{CD}$ et $3\overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{CD}$:

- On a : $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$; $3\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3 \times 3 \\ 3 \times 2 \end{pmatrix}$ soit $3\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \end{pmatrix}$;

$\overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} 4 \times (-1) \\ 4 \times 5 \end{pmatrix}$ soit $4\overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} -4 \\ 20 \end{pmatrix}$.

$3\overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{CD}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 9 - (-4) \\ 6 - 20 \end{pmatrix}$ soit $3\overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} 13 \\ -14 \end{pmatrix}$

Exemple 3

Calcul des coordonnées d'un point défini par une égalité vectorielle

Soient les points $A(1; 2)$, $B(-4; 3)$, $C(1; -2)$.

Déterminer les coordonnées du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.

Solution

Déterminons les coordonnées du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.

$ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

On pose $(x_D; y_D)$ les coordonnées du point D . On a alors : $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DC} \begin{pmatrix} 1 - x_D \\ -2 - y_D \end{pmatrix}$, d'après la formule de l'égalité vectorielle on a : $1 - x_D = -5$ et $-2 - y_D = 1$ soit $-x_D = -5 - 1$ et $-y_D = 1 + 2$ donc $x_D = 6$ et $y_D = -3$. Les coordonnées du point D sont donc $(6; -3)$.

Exemple 4

Soit quatre points $A(3; 2)$, $B(2; -2)$, $C(1; 2)$ et $D(-3; -5)$ dans un repère orthonormé. Calculer les distances : AB , AC et BD

Solution

La distance AB (ou norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$) est égale à :

$$AB = \sqrt{(2 - 3)^2 + (-2 - 2)^2} = \sqrt{(-1)^2 + (-4)^2} = \sqrt{1 + 16} = \sqrt{17}.$$

La distance AC (ou norme du vecteur $\overrightarrow{AC}$) est égale à :

$$AC = \sqrt{(1 - 3)^2 + (2 - 2)^2} = \sqrt{(-2)^2 + 0^2} = \sqrt{4} = 2.$$

La distance BD (ou norme du vecteur $\overrightarrow{BD}$) est égale à :

$$BD = \sqrt{(-3 - 2)^2 + (-5 - (-2))^2} = \sqrt{(-5)^2 + (-3)^2} = \sqrt{25 + 9} = \sqrt{34} = \sqrt{2 \times 17} = \sqrt{2} \sqrt{17}.$$

3) Vecteurs colinéaires, vecteurs orthogonaux :

Vecteurs colinéaires	Vecteurs Orthogonaux
Soit deux vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si : $xy' - yx' = 0.$	Dans un repère orthonormé, soient deux vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si : $xx' + yy' = 0$.

Exemple 5

Dans chaque cas, vérifier si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires

a) $\vec{u} \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -12 \\ 21 \end{pmatrix}$ b) $\vec{u} \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 15 \\ -7 \end{pmatrix}$

Solution

a) Vérifions si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires

On a : $xy' - yx' = 4 \times 21 - (-7) \times (-12) = 84 - 84 = 0$.

Le critère de colinéarité est vérifié donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

On peut également observer directement que $\vec{v} = -3\vec{u}$.

b) on a : $xy' - yx' = 5 \times (-7) - (-2) \times (15) = -35 + 30 = -5 \neq 0$.

Le critère de colinéarité n'est pas vérifié donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

Exemple 6

Dans un repère orthonormé, dans chaque cas, vérifier si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

a) $\vec{u} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ b) $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Solution

a) Vérifions si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

On a $\vec{u} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ Calculons $xx' + yy' = -2 \times 1 + 1 \times 2 = 0$ d'après la définition les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

b) Vérifions si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

On a: $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ Calculons $xx' + yy' = 3 \times 1 + 4 \times 3 = 15$ d'après la définition les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas orthogonaux.

III Droites dans un repère

1) Equations d'une droite

c) Propriétés

• Equation cartésienne d'une droite Une équation cartésienne d'une droite (d) est de la forme $ax + by + c = 0$; où a, b, c sont des réels et $(a ; b) \neq (0 ; 0)$ • Un vecteur directeur de (d) est $\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ • Un vecteur normal de (d) est $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$	• Equation réduite d'une droite Une équation réduite d'une droite (d) est de la forme : $y = mx + p$, où m et p sont des réels. • p est l'ordonnée à l'origine et m est le coefficient directeur de (d). • Un vecteur directeur de (d) est $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$ • Un vecteur normal de (d) est $\vec{n} \begin{pmatrix} m \\ -1 \end{pmatrix}$
--	--

Exemple 1

Une droite d'équation cartésienne $3x - 4y + 5 = 0$ admet pour vecteur normal le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ et vecteur directeur le vecteur $\vec{v} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Une droite d'équation cartésienne $y = 5x - 3$ admet pour vecteur normal le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ et vecteur directeur le vecteur $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Cas particuliers

Droite parallèle à (Ox): Si le coefficient directeur de la droite (d) est nul, alors l'équation réduite de la droite devient : $y = p$,	Droite parallèle à (Oy): Si $b = 0$ on obtient alors une égalité de la forme $x = q$
--	--

b) Droites parallèles et Droites perpendiculaires

Si	(d) // (d') ssi:	(d) $\perp$ (d') ssi :
(d): $ax + by + c = 0$ et (d'): $a'x + b'y + c' = 0$	$ab' - a'b = 0$	$aa' + bb' = 0$
(d): $y = mx + p$ et (d'): $y = m'x + p'$	$m = m'$	$mm' = -1$

• **Connaissant les coordonnées de deux de ces points :**

Méthode

- On considère un point $M(x; y)$ appartenant à (AB) .
- On traduit le fait que $M \in (AB)$ ssi $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.
- On utilise le fait que les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont colinéaires ssi $xy' - yx' = 0$ pour obtenir une équation de la droite (AB) .

Exemple 2

Soient $A(2; 1)$ et $B(-3; 5)$ deux points d'un plan rapporté à repère orthonormé ; déterminons une équation de la droite (AB) .

Soient un point $M(x; y)$ un point de (AB)

$M \in (AB)$ ssi $\overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x-2 \\ y-1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3-2 \\ 5-1 \end{pmatrix}$ sont colinéaires équivaut :

$$4(x-2) - (-5)(y-1) = 0. \text{ D'où } (AB) \text{ a pour équation } 4x + 5y - 13 = 0$$

• **Connaissant les coordonnées d'un point et d'un vecteur directeur :**

Méthode

- On choisit un point $M(x; y)$ appartenant à la droite (d) passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.
- On traduit le fait que $M \in (d)$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires .
- On utilise le fait que deux vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont colinéaires ssi $xy' - yx' = 0$ pour obtenir une équation de la droite (d) .

Exemple 3

Soient $(-2; 3)$ un point et $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ un vecteur d'un repère orthonormal ;

déterminons une équation de la droite (d) passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.

Solution

- Soit $M(x; y)$ un point de (d) c'est à dire $M \in (d)$

$\overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x+2 \\ y-3 \end{pmatrix}$ et $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ sont colinéaires si et seulement si $3(x+2) - (2)(y-3) = 0$

$$\text{D'où } (d) \text{ a pour équation } 3x - 2y + 12 = 0$$

2) Représentation graphique d'une droite

• **A partir de deux de ses points :**

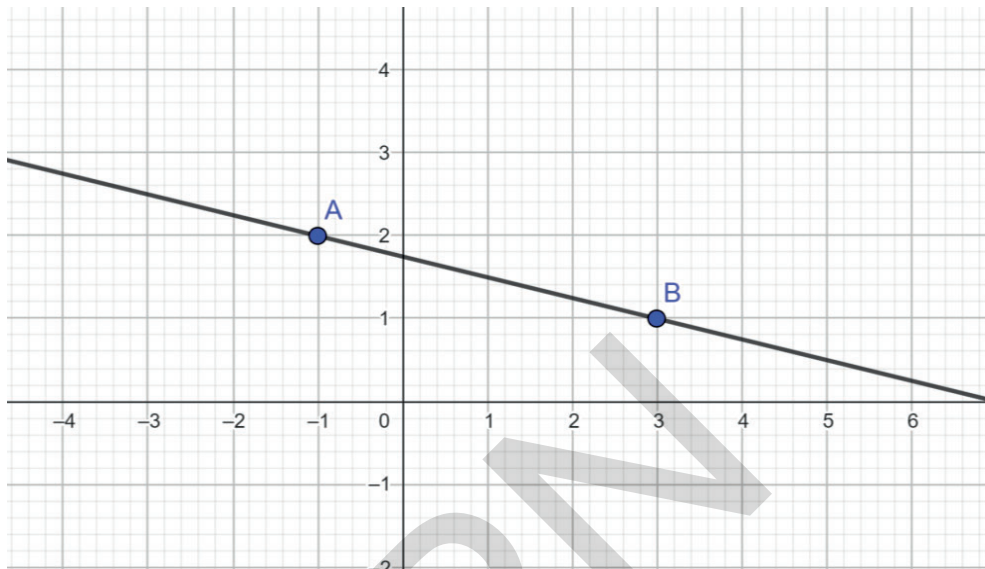
Connaissant les coordonnées de deux points de (d) , on représente ces points dans le repère et on trace la droite passant par ces deux points. Cette droite est la représentation de (d) .

Exemple 4

Soit $A(-1; 2)$ et $B(3; 1)$ deux points d'une droite (d) , représentons (d) .

Solution

- on représente dans le repère les points A et B
- on trace la droite passant par les points A et B ; c'est la représentation de (d).



• A partir d'un point et d'un vecteur directeur :

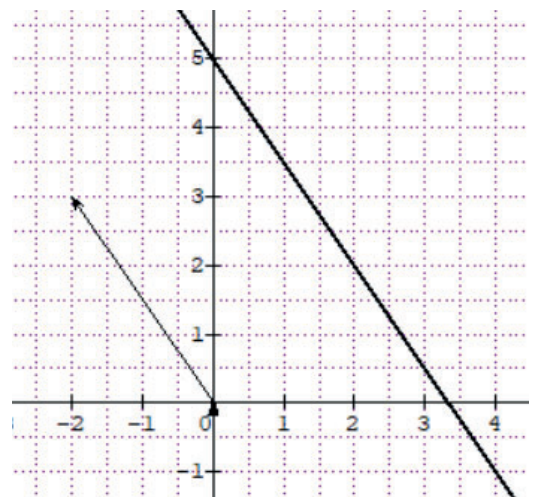
Connaissant les coordonnées d'un vecteur directeur et d'un point de (d), on représente le point et le vecteur dans le repère et on trace la droite passant par ce point et de même direction que le vecteur directeur. Cette droite est la représentation de (d).

Exemple 5

Soient $\vec{u} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ un vecteur directeur de (d) et A(2 ; 2) un point d'une droite (d), représentons (d).

Solution

- On représente dans le repère le point A et le vecteur $\vec{u}$
 $= -2\vec{OI} + 3\vec{OJ}$
- On trace la droite passant par le point A et de même direction que $\vec{u}$. Cette droite est la représentation de (d).



• A partir d'un point et de son coefficient directeur :

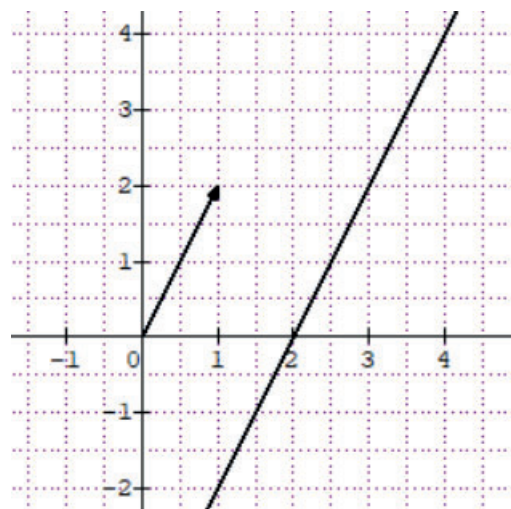
Connaissant le coefficient directeur m d'une droite (d), et les coordonnées d'un de ses points, on représente le point et $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$ un vecteur directeur de (d) dans le repère, puis on trace la droite passant par ce point et de même direction que le vecteur directeur. Cette droite est la représentation de (d).

Exemple 6

Soit $A(3 ; 2)$ un point d'une droite (d) de coefficient directeur 2 ; représentons (d) .

Solution

- On représente dans le repère le point A et le vecteur $\vec{u} = \vec{OI} + 2\vec{OJ}$
- On trace la droite passant par le point A et de même direction que $\vec{u}$. Cette droite est la représentation de (d) .



Exercice d'application

Application 1

Choisis la bonne réponse

N°	Questions	Réponse A	Réponse B	Réponse C
1	2 vecteurs sont colinéaires si et seulement si ...	Ils ont la même direction	Ils ont la même longueur	Ils ont le même sens
2	Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si ...	Les points A, B, C et D sont alignés	les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux	$\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$, $k \in \mathbb{R}$
3	Les points A, B et C sont alignés si et seulement si ...	$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$, $k \in \mathbb{R}$	$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont opposés
4	Pour tout point A, le vecteur $\overrightarrow{PQ}$ est égal à ...	$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{QA}$	$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AQ}$	$\overrightarrow{QA} + \overrightarrow{AP}$
5	Les vecteurs $\vec{u}$ et $-3\vec{u}$ sont ...	Opposés	Colinéaires	De même sens

Application 2

On considère les points $A(2 ; 3)$, $B(-2 ; 1)$ et $C(3 ; -1)$. Calculer les coordonnées de M, N et P, milieux respectifs de $[AB]$, $[AC]$ et $[BC]$

Application 3

Soient quatre points $(3; 2)$, $B(2; -2)$, $C(1; 2)$ et $D(-3; -5)$ dans un repère orthonormé. Calculer les distances : AB , AC et BD

Application 4

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Réponds par Vrai ou Faux.

1. le point M défini par $\overrightarrow{OM} = 3\vec{j} - 2\vec{i}$ a pour coordonnées $\overrightarrow{OM} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

2. Les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont opposés.
3. Les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ sont colinéaires
4. $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (d) : $-2x - y + 1 = 0$
5. Les droites (d₁): $y = 3x - 2$ et (d₂): $y = -3x + 1$ sont parallèles.
6. Les droites (d₁): $y = -2$ et (d₂): $x = 1$ sont perpendiculaires.

Application 5

Soit A (1 ; -2) un point d'un repère orthonormal ;

Déterminons l'équation de la droite (d) passant par A et de coefficient directeur -7.

Application 6

Ecrire l'équation d'une droite (d) passant par A(2 ;3) et vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Application 7

Représentons dans un même repère les droites

(d1) : $x - 2y + 3 = 0$; (d2) : $y = -2x + 1$; (d3) : $x = 2$ et (d4) : $y = -1$

Solutions des applications :

Application 1

Question	1	2	3	4	5
Réponse	A	C	B	B	B

Application 2

- Calculons les coordonnées de M milieu

de [AB] : $M \left(\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2} \right) \right)$ soit $M \left(\frac{2+(-2)}{2}; \frac{3+1}{2} \right)$ donc $M(0; 2)$

- Calculons les coordonnées de N milieu respectif de [AC]

$N \left(\frac{x_A + x_C}{2}; \frac{y_A + y_C}{2} \right) N \left(\frac{2+3}{2}; \frac{3+(-1)}{2} \right)$ donc $N(2.5; 1)$

- Calculons les coordonnées de P milieu respectif de [BC] $P \left(\frac{x_B + x_C}{2}; \frac{y_B + y_C}{2} \right)$

$P \left(\frac{-2+3}{2}; \frac{1+(-1)}{2} \right)$ donc $P(0.5; 0)$.

Application 3

La distance AB (ou norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$) est égale à :

$$AB = \sqrt{(2-3)^2 + (-2-2)^2} = \sqrt{(-1)^2 + (-4)^2} = \sqrt{1+16} = \sqrt{17}.$$

La distance AC (ou norme du vecteur $\overrightarrow{AC}$) est égale à :

$$AC = \sqrt{(1-3)^2 + (2-2)^2} = \sqrt{(-2)^2 + 0^2} = \sqrt{4} = 2.$$

La distance BD (ou norme du vecteur $\overrightarrow{BD}$) est égale à :

$$BD = \sqrt{(-3-3)^2 + (-5-(-2))^2} = \sqrt{(-6)^2 + (-3)^2} = \sqrt{36+9} = \sqrt{45} = \sqrt{9 \times 5} = 3\sqrt{5}.$$

Application 4

1. Vrai 2. Faux 3. Vrai 4. Vrai 5. Faux 6. Vrai .

Application 5

Soit (d) d'équation $y = mx + p$ ou $m = -7$ donc équation de (d) : $y = -7x + p$

Or $(1 ; -2) \in (d)$ donc $-2 = -7(1) + p$ d'où $p = 5$

Par conséquent (d) a pour équation : $y = -7x + 5$

Application 6

Comme $\vec{n}$ est un vecteur normal l'équation de la droite est de la forme $-x + 2y + c = 0$.

On détermine c en utilisant le fait que le point $A \in (d)$ donc ses coordonnées vérifient l'équation $-2 + 2 \times 3 + c = 0$ donc $c = -4$ l'équation devient $-x + 2y - 4 = 0$.

Application 7

- Pour $(d1)$: $x - 2y + 3 = 0$, on détermine deux de ses points en donnant une valeur quelconque à x (respectivement y) et en déterminant la valeur de y (respectivement de x) correspondante.

- $(d1)$: $x - 2y + 3 = 0$ Pour $x = 1$ on a : $1 - 2y + 3 = 0$ soit $-2y = -1 - 3$ soit $-2y = -4$; d'où $y = 2$ on obtient un point $A(1 ; 2)$.

Pour $y = 0$ on a :

$x - 2 \times 0 + 3 = 0$ soit $x + 3 = 0$ soit

$x = -3$ on obtient un point

$B(-3 ; 0)$

- $(d2)$: $y = -2x + 1$ Pour $x = 0$

on a : $y = -2 \times 0 + 1 = 1$ donc on obtient un point $C(0 ; 1)$

Pour $x = 1$ on a :

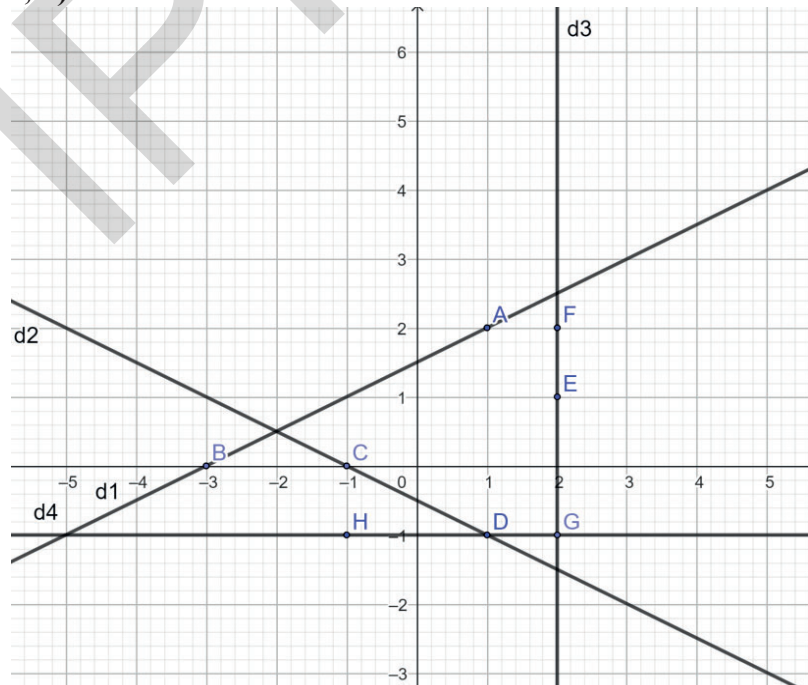
$y = -2 \times 1 + 1 = -1$ donc on obtient un point $D(1 ; -1)$

- $(d3)$: $x = 2$ on choisit $y = 1$ ou $y = 2$ on obtient les points

$E(2 ; 1)$ et $F(2 ; 2)$

- $(d4)$: $y = -1$ on choisit $x = 0$ ou $x = -2$ on obtient les points G

$(2 ; -1)$ et $H(-2 ; -1)$.



Exercices

1 Placer deux points A et B et tracer le vecteur $\overrightarrow{AB}$.

- 1) Construire un vecteur opposé à $\overrightarrow{AB}$.
- 2) Construire un vecteur de même direction et de même sens que $\overrightarrow{AB}$ et qui n'est pas égal à $\overrightarrow{AB}$.
- 3) Construire un vecteur de même direction que $\overrightarrow{AB}$ mais de sens contraire et qui n'est pas égal à $\overrightarrow{BA}$.

2 On considère un repère (O; I, J).

1) Soit $\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$. Calculer les coordonnées des vecteurs suivants. :

- a) $\vec{w} = 2\vec{u}$ b) $\vec{t} = -3\vec{v}$ c) $\vec{z} = 2\vec{u} - 3\vec{v}$

2) Un cas simple et pratique

a) Placer un vecteur $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et un vecteur $\overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$.

3 Le plan est muni d'un repère orthonormé (O; I, J) d'unité 1 cm.

- 1) Placer les points A et B de coordonnées respectives (2; -1) et (-6; -1).
- 2) Construire un point C tel que ABC soit un triangle isocèle en C et de hauteur 4 cm.
- 3) Lire les coordonnées du point C.
- 4) Construire le symétrique de C par rapport à (AB).
- 5) Lire ses coordonnées.

4 Le plan est muni d'un repère (O; I, J).

- 1) Placer les points F, N et E de coordonnées respectives (2, 1; -3, 4), (-1, 8; 5, 5) et (4, 9; -1, 9).
- 2) Construire le point A tel que le quadrilatère FANE soit un parallélogramme.
- 3) Lire les coordonnées du point A

5 Dans le plan muni d'un repère (O; I, J), on a placé les points A et M de coordonnées respectives (3; -2) et (0; 3). Déterminer les coordonnées du point B tel que M soit le milieu du segment [AB].

6 Dans un repère (O; I, J), on donne les points de coordonnées suivants : A(-1; 4); B(-2; 1); C(3; 0) et D(4; 3).

- 1) Placer les points dans le repère (O; I, J).
- 2) Calculer les coordonnées du milieu du segment [AC] puis du segment [BD]. Conclure.

7 Dans un repère (O; I, J)

- 1) placer les points suivants :
• A(1; 5) • B(-4; 2) • C(-2; -1) • D(1; -2) • E(4; 2)

2) Construire les points R, S et T tels que :

a) $\overrightarrow{AR} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$, b) $\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DB}$, c) $\overrightarrow{CT} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{ED}$

3) Lire les coordonnées des vecteurs suivants :

a) $\overrightarrow{AD}$; b) $\overrightarrow{AB}$; c) $\overrightarrow{AC}$; d) $\overrightarrow{AS}$; e) $\overrightarrow{ED}$; f) $\overrightarrow{DB}$; g) $\overrightarrow{CT}$; h) $\overrightarrow{BC}$.

8 Distance entre deux points

Dans un repère (O; I, J) orthonormal, on donne les points de coordonnées suivantes :

R(1; -1) S(-2; 0) T(0; 6) et U(3; 5)

1) Placer les points dans le repère (O; I, J).

2) Conjecturer la nature du quadrilatère RSTU.

3) Calculer les longueurs RT et SU. Conclure.

9 On munit le plan d'un repère orthonormé. Les points A et B ont pour coordonnées respectives (5; -1) et (-2; 1). Déterminer :

1) la valeur exacte de la longueur du segment [AB] ;

2) les coordonnées du milieu du segment [AB].

10 Dans un repère orthonormé (O; I, J) tel que $OI = 1$ cm, on a placé les points A et B de coordonnées respectives (-2; 5) et (3; 4). Calculer la distance AB. Donner un arrondi au millimètre.

11 On considère un repère orthonormé (O; I, J) tel que $OI = 1$ cm. On a placé les points C et D de coordonnées respectives (-6, 4; 2, 3) et (1, 3; -4, 5). Calculer la distance CD au millimètre près

12 on considère les points de coordonnées suivants : A(2; 4) B(-2; 5) C(7; -6) D(-2; -3)

1. Quelles sont les coordonnées du milieu du segment [BC] ?

a. (-1; -1) b. (2, 5; -0, 5) c. (2, 5; -5, 5) d. (5, 5; -0, 5)

2. Quelles sont les coordonnées du milieu du segment [AD] ?

a. (-2; -3, 5) b. (0; -0, 5) c. (2; 3, 5) d. (0; 0, 5)

3. Citer le (ou les) point(s) appartenant à l'axe des ordonnées.

a le milieu de [AB] b le milieu de [BD] c le milieu de [AC] d le milieu de [AD]

4. On considère que le repère est orthonormé. Quelle est la longueur du segment [AC] ?

a. $\sqrt{73}$ b. $\sqrt{29}$ c. $\sqrt{85}$ d. $\sqrt{125}$

5. On considère que le repère est orthonormé. Quel segment a pour longueur 8 ?

a. [AC] b. [BC] c. [DC] d. [BD]

6. Quelles sont les coordonnées du point F tels que A soit le milieu de [BF] ?

a. (-6; -3) b. (3; 2) c. (3; 6) d. (6; 3)

13 Parmi les vecteurs suivants, lesquels sont colinéaires?

a. $\begin{pmatrix} -6 \\ 3 \end{pmatrix}$ b. $\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ c. $\begin{pmatrix} 8 \\ -4 \end{pmatrix}$ d. $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ e. $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

14

Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ pour :

1. A(2; 5) et B(6; 7);
2. A(-1; 2) et B(-2; -3).

15

Les parties sont indépendantes

1. Dans le plan muni d'un repère, les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ sont $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, celles du point A(5; 2). Calculer les coordonnées du point B tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$.

2. Dans le plan muni d'un repère, les coordonnées du vecteur $\vec{v}$ sont $\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}$, celles du point A(1; -2). Calculer les coordonnées du point C tel que $\overrightarrow{CA} = \vec{v}$.

3. Dans le plan muni d'un repère, on considère les points K(-2; -3), L(3; -4) et M(-1; 5). Quelles sont les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{LM}$?

16

Construire un repère (O; I, J) orthogonal.

1. Placer le point A(-3; 4).
2. Construire un représentant du vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$.
3. Placer les points B et C tels que : $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{CA} = \vec{u}$
4. Calculer les coordonnées des points B et C.
5. Que peut-on dire du point A ? Justifier.

17

Construire un repère (O; I, J) et tracer deux représentants du vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, l'un d'origine I et l'autre d'extrémité J.

18

Les cinq parties sont indépendantes

1. Dans le plan muni d'un repère, on considère les points A(1; 2), B(-2; 5) et C(-3; -3). Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{BC}$.
2. Dans le plan muni d'un repère, on considère les points E(2; -1), F(-3; 4) et G(1; 4). Déterminer les coordonnées du point H pour que EFGH soit un parallélogramme.
3. Dans un plan muni d'un repère, on considère les points : A(3; 5), B(2; -1), C(-2; -4) et D(-1; 2). Prouver que ABCD est un parallélogramme.
5. Construire un repère (O; I, J) orthogonal.
 - a) Placer les points A(3; -9) et B(-1; -5).
 - b) Placer les points C et D tels que le quadrilatère ABCD soit un parallélogramme de centre I.
 - c) Déterminer les coordonnées des vecteurs suivant : $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{DC}$; $\overrightarrow{AD}$.

19

Dans le plan muni d'un repère, les coordonnées des points A et B sont respectivement (5; -6) et (-2; 6). Le point A est le milieu de [BC]. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{CA}$.

Chapitre 5

Proportionnalité

1) Situations de proportionnalité

a) Définition

On dit que deux grandeurs sont proportionnelles quand on peut passer de l'une à l'autre en multipliant toujours par le même nombre. Ce nombre s'appelle coefficient de proportionnalité.

Exemple 1

Quand on achète des baguettes de pain, le prix payé au total est proportionnel au nombre de baguettes achetées :

Nombre de baguettes	2	5	12
Prix des baguettes	20	50	120

Le coefficient de proportionnalité 10 correspond ici au prix d'une baguette de pain.

b) Propriétés

Propriété 1

On peut associer à toute situation de proportionnalité (de coefficient de proportionnalité p) la fonction linéaire définie par $f(x) = px$.

On dit alors que cette fonction linéaire modélise la situation de proportionnalité.

Exemple 2

Dans l'exemple précédent, l'achat des baguettes est associé à la fonction linéaire $f(x) = 10x$.

Propriété 2

Pour tous nombres réels x , x' et k ,

Si f est une fonction linéaire de coefficient a , alors	(1) $f(x + x') = f(x) + f(x')$ (2) $f(k \times x) = k \times f(x)$
--	---

Exemple 3

1. Dans l'exemple précédent :

Le prix à payer pour 2 pains est de 20 UM ; $p(2) = 20$

Le prix à payer pour 3 pains est de 30 UM ; $p(3) = 30$.

Le prix à payer pour 5 pains est de $20 + 30 = p(2) + p(3) = 50 = p(5) = p(2+3)$

2. Dans l'exemple précédent : le prix à payer pour 6 pains est de

$2 \times 30 = 2 \times p(3) = p(2 \times 3) = p(6) = 60$.

2) Proportionnalité et tableau

a) Méthode

Pour vérifier si un tableau représente une situation de proportionnalité, on calcule dans chaque colonne le quotient du premier nombre par le second :

♦ Si tous les quotients sont égaux, alors il s'agit d'une situation de proportionnalité.

♦ Si un, deux ou plusieurs quotients sont différents, alors il ne s'agit pas d'une situation de proportionnalité.

Exemple 4

Un transporteur propose les tarifs suivants :

Distance (km)	100	150	200	250
Coûts (Mru)	83,6	125,4	1672	2090

Le prix payé est-il proportionnel à la distance parcourue ? Justifier votre réponse

Solution

Calculons pour chaque colonne, le quotient d'un élément de la deuxième ligne par l'élément correspondant de la première ligne

On a : $\frac{83,6}{100} = 0,836$; $\frac{125,4}{150} = \frac{1254}{1500} = 0,836$; $\frac{1672}{200} = 0,836$; $\frac{2090}{250} = 0,836$ Pour chaque

colonne on a calculé le coefficient permettant de passer de la première ligne à la deuxième.

On obtient à chaque fois le même nombre donc c'est un tableau de proportionnalité.

Le prix payé est proportionnel à la distance parcourue

Le coefficient de proportionnalité est 0,836, qui correspond à 0.836 Mru au km.

b) Propriétés

Pour compléter un tableau de proportionnalité, on utilise le « produit en croix »

Concrètement :

On considère a, b, c et d quatre nombres tels que c et d soient non nuls.

Dans un tableau de proportionnalité		les produits en croix sont égaux				
<table><tr><td>a</td><td>c</td></tr><tr><td>b</td><td>d</td></tr></table>		a	c	b	d	$a \times d = c \times b$
a	c					
b	d					

Exemple 5

Pour faire ses confitures, Ramata a acheté 4 kg de sucre pour 160 Mru.

Calculer le prix de 7 kg de sucre.:

Solution

1. On organise les données sous forme de tableau:

Quantité de sucre en kg	4	7
Prix en Mru	160	?

2. On utilise le produit en croix pour trouver la valeur manquante : $\frac{160 \times 7}{4} = 280$ Mru

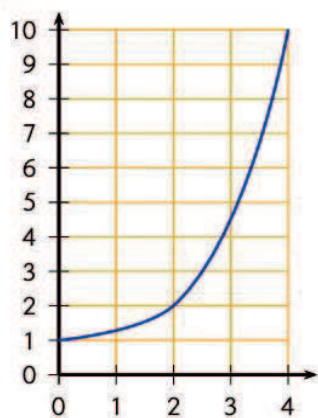
Conclusion: 7 kg de sucre coûteront donc 280Mru

3) Proportionnalité et représentations graphiques

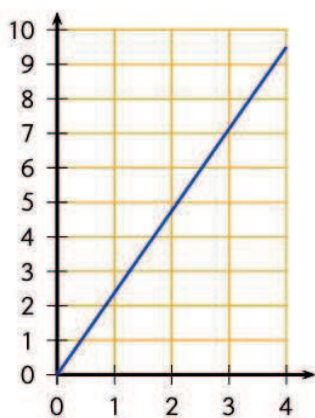
• Si deux grandeurs sont proportionnelles, alors elles sont représentées par une droite passant par l'origine.

• Inversement, si des points sont alignés avec l'origine du repère, alors les deux grandeurs représentées sont proportionnelles.

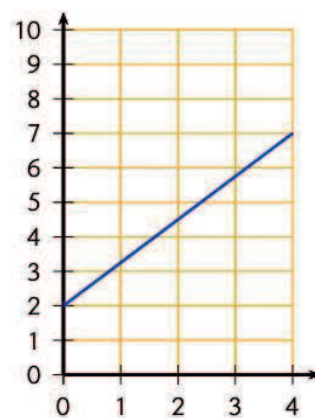
Exemple 6



Ce n'est pas une situation de proportionnalité car la courbe n'est pas une droite.



C'est une situation de proportionnalité car la courbe est une droite passant par l'origine.



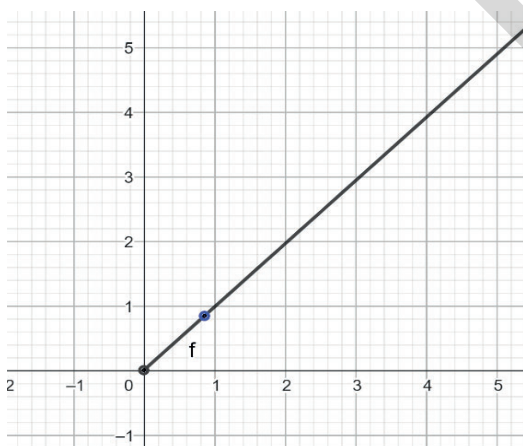
Ce n'est pas une situation de proportionnalité car la droite ne passe pas par l'origine.

Remarque :

Dans un repère, la représentation d'une fonction linéaire de coefficient a est une droite qui passe par l'origine du repère. Le nombre a est le coefficient directeur de cette droite.

Exemple 7

Dans un repère orthonormé, on considère le graphique suivant :



Ce graphique représente une fonction linéaire (et donc situation de proportionnalité), car les points sont alignés avec l'origine du repère.

Remarque :

La réciproque est vraie : Dans un repère, toute fonction qui est représentée par une droite passant par l'origine est linéaire.

4) Pourcentages

a) Définition

Un pourcentage de $t\%$ traduit une proportion de $\frac{t}{100}$

Appliquer un taux de $t\%$ à une quantité revient à calculer $\frac{t}{100}$ de cette quantité.

Prendre $t\%$ d'une quantité c'est multiplier cette quantité par $\frac{t}{100}$.

Exemple 1

Utiliser une proportion exprimée en %

. Sur un groupe de 25 élèves, 80% d'entre eux aiment les maths.

Combien d'entre eux devraient aimer les maths ?

. Prendre 300% de 1200 :

Solution

On cherche les 80% de 25 : Soit: $\frac{80}{100} \times 25 = 0,80 \times 25 = 20$ Sur 25 élèves, on peut penser que 20 d'entre eux aiment les maths.

. Prendre 300% de 1200 est: $\frac{1200}{100} \times 300 = 12 \times 300 = 3600$

b) Propriété

Soit t un réel

- Augmenter un nombre de $t\%$ revient à le multiplier par $1 + \frac{t}{100}$.
- Diminuer un nombre de $t\%$ revient à le multiplier par $1 - \frac{t}{100}$

Exemple 2

Méthode : Appliquer une augmentation ou une diminution en %

1. Le prix d'un blouson qui coûtait 160 Mru est réduit de 35 %.

Calculer le nouveau prix du blouson.

2. Le prix d'un survêtement qui coûtait 49 Mru est augmenté de 8 %.

Calculer le nouveau prix du survêtement.

3. Si on a payé un manteau 130 Mru après une réduction de 20%.

Calculer le prix avant la réduction.

Solution

1. 160 Mru est le prix de départ. Le prix est diminué de 35 %.

Diminuer un nombre de 35 %, revient à le multiplier par $1 - 35\%$.

Calculons du nouveau prix après diminution : $160 \times (1 - 0,35) = 160 \times 0,65 = 104$ Mru.

Le nouveau prix du blouson est de 104 Mru.

2. 49 Mru est le prix de départ. Le prix est augmenté de 8 %.

Augmenter un nombre de 8 %, revient à le multiplier par $1 + \frac{8}{100}$.

Calculons de nouveau le prix après augmentation : $49 \times (1 + 0,08) = 49 \times 1,08 = 52,92$ Mru.
Le nouveau prix du survêtement est de 52,92 Mru.

3. x est le prix de départ (avant la réduction). Le prix est diminué de 20 %. Diminuer un nombre de 20 %, revient à le multiplier par $1 - \frac{20}{100}$. Nouveau prix après diminution : $x \times (1 - 0,2) = 0,8x$ Or, ce nouveau prix est connu et il est égal à 1300 Mru. Donc : $0,8x = 1300$ soit $x = \frac{1300}{0,8} = 1625$. Le prix du manteau avant réduction est de 1625 Mru.

c) Évolutions successives

Pour deux évolutions successives de coefficients multiplicateurs c_1 et c_2 , l'évolution finale a pour coefficient multiplicateur global $C = c_1 \times c_2$.

Exemple 3

1. Les prix ont augmenté de 20 % puis de 30 % l'année suivante.

La hausse globale est : a. 50 %. b. 54 %. c. 56 %.

2. Deux baisses successives de 10 % correspondent à une baisse globale de :

a. 81 %. b. 19 % c. 20 %.

3. Une baisse de 20 % suivie d'une hausse de 30 % correspond à :

a. une hausse de 4 %. b. une baisse de 4 %. C.

4. Une hausse de 30 % suivie d'une baisse de 30 % correspond à : une stagnation.

a. une baisse de 9 %. b. une hausse de 8 % c. une hausse de 10 %.

5. Trois augmentations successives de 20 % correspondent-elles à une hausse de 60 % ?

Justifier 1 2 3 et 4.

Solution :

Question	1	2	3	4	5
Réponse	c	b	a	a	Non

Justification de 1,2 et 3

1. $1,2 \times 1,3 = 1,56$ donc une augmentation de 56%.

2. $0,9 \times 0,9 = 0,81$ donc une baisse de 19%.

3. $0,8 \times 1,3 = 1,04$ donc une hausse de 4%.

4. $1,3 \times 0,7 = 0,91$ donc une baisse de 9%.

Exemple 4

1. Quel est le coefficient multiplicateur associé à une hausse de 13 % ?

2. Quel est le coefficient multiplicateur associé à une baisse de 15 % ?

3. À la suite d'une augmentation de 25 %, si le prix final est de 150 Mru.

Quel est le prix initial ?

Solution

1. Le coefficient multiplicateur associé à une hausse de 13 % est 1,13

2. Le coefficient multiplicateur associé à une baisse de 15 % est 0,85

3. À la suite d'une augmentation de 25 %, si le prix final est de 150 Mru,
Augmenter de 25% revient à multiplier 1,25.

Donc le prix initial $\times 1,25 = 150$ donc le prix initial $= \frac{150}{1,25} = 120$

Le prix initial était de 120 Mru.

5) Echelles

Définition

Les distances représentées sur une carte ou dessin sont proportionnelles aux distances réelles. L'échelle d'une carte est le coefficient de proportionnalité

Exemple 1

Le terrain du stade de France est un rectangle de 105 m sur 70 m.

1. Complétez : « Un plan à l'échelle $\frac{1}{1000}$ signifie que 1 cm sur la carte représente cm soit m dans la réalité. »
2. Calculer les dimensions du terrain à l'échelle $\frac{1}{1000}$ et faire le plan.

Solution

1. « Un plan à l'échelle $\frac{1}{1000}$ signifie que 1 cm sur la carte représente 1 000 cm soit 10 m dans la réalité. »
2. Longueur largeur :

	Echelle	Longueur	largeur
Distance sur le plan en cm	1	10,5	7
Distance sur le plan en cm	10	150	70

Exercices d'application

Application 1

Chez le boucher, un kg de viande hachée 270 Mru.

a. Compléter ce tableau.

Masse en kg	1	0,4	2	1.4	0,5
Prix (en Mru)					

b. On note p la fonction qui à x (en kg) associe le prix (en Mru).

Donner l'expression de p(x).

c. La fonction p est elle linéaire? Expliquer.-

Situation 2

Relier chaque pourcentage à son résultat.

- 10 % de 250
- 17 % de 38
- 32 % de 70
- 20 % de 46
- 25 % de 54
- 13,5
- 9,2
- 25
- 22,4
- 6,46 .

Situation 3

Les 1 575 enfants de moins de 15 ans représentent 31,5 % des habitants de cette ville. Dans cette même ville, il y a 54 % de femmes. Combien y a-t-il de femmes dans cette ville ?

Situation 4

Répondre par Vrai ou Faux

- a. Augmenter de 36 % revient à multiplier par 1,36.
- b. Augmenter de 4 % revient à multiplier par 1,4.
- c. Diminuer de 25 % revient à multiplier par 0,25.
- d. Diminuer de 3,5 % revient à multiplier par 0,965.

Application 5

Une maquette de la Tour Eiffel à l'échelle $\frac{1}{4000}$ a une hauteur de 8,1 cm.

Quelle est la hauteur réelle de la Tour Eiffel ?

Application 6

Le viaduc de Millau a une longueur de 2,46 km. Quelle serait sa longueur sur une maquette à la même échelle que celle de la question 1 ?

Application 7

L'Arc de Triomphe a une hauteur réelle de 50 m. Une maquette de ce monument mesure 25 cm. Quelle est l'échelle de la maquette ?

Application 8

Une fourmi de 5 mm est représentée sur une photo où elle mesure alors 12,5 cm. Quelle est l'échelle de la photo ?

Application 9

Un globule blanc monocyte est un disque de 0,002 mm de diamètre. On souhaite en faire un dessin à l'échelle 25000 . Calculer le diamètre du disque à représenter à cette échelle. On donnera une réponse en cm.

Application 10

Une spore de fougère est représentée par un disque de 1 cm de diamètre. Son diamètre réel est de 0,5 mm. Quelle est l'échelle du schéma ?

Solutions des exercices d'application

Solution 1

a. Complétons le tableau

Masse en kg	1	0,4	2	1.4	0,5
Prix (en Mru)	270	108	540	378	135

b. Donnons l'expression de $p(x)$. le tableau étant un tableau de proportionnalité de coefficient de proportionnalité 270 donc l'expression de $p(x)$ est $p(x) = 270x$

c. La fonction p est linéaire car pour calculer l'image d'un nombre , on multiplie ce nombre par 270 donc p est linéaire de coefficient 270.

Solution 2

1. Relions chaque pourcentage à son résultat

- 10 % de 250 correspond à 25
- 32 % de 70 correspond à 22,4
- 25 % de 54 correspond à 13,5
- 17 % de 38 correspond à 6,46
- 20 % de 46 correspond à 9,2

Solution 3

Les 1 575 enfants de moins de 15 ans représentent 31,5 % des habitants de cette ville.

Le nombre d'habitants de cette ville est : $\frac{1575 \times 100}{31,5} = 5000$.

Dans cette même ville, il y a 54 % de femmes donc le nombre de femmes dans cette ville est : $\frac{5000 \times 54}{100} = 2700$

Solution 4

Répondons par Vrai ou Faux :

a. Vrai b. Faux c. Faux d. Vrai

Solution 5

	Echelle	Longueur
Distance sur la maquette en cm	1	8,1
Distance réelle en cm	4000	32400

On a 32 400 cm = 324 m La hauteur réelle de la Tour Eiffel est 324 m.

Solution 6

On a : 2,46 km = 246 000 cm

	Echelle	Longueur
Distance sur la maquette en cm	1	61,5
Distance réelle en cm	4000	246000

Sur la maquette, le viaduc de Millau mesure 61,5 cm.

Solution 7

50 m = 5 000 cm Echelle = $\frac{\text{distance sur la maquette}}{\text{distance réelle}}$

Echelle = $\frac{25}{5000}$ soit $\frac{1}{200}$ = L'échelle de la maquette est $\frac{1}{200}$ (réduction).

Solution 8

12,5 cm = 125 mm Echelle = $\frac{\text{distance sur la photo}}{\text{distance réelle}}$ soit = 25

L'échelle de la photo est 25 (agrandissement)

Solution 9

L'échelle $\frac{25000}{1}$ signifie que : 1 mm dans la réalité représente 25 000 mm sur le schéma.

Taille de la représentation en mm	25000	50
Taille de la représentation en mm	1	0,002

car $\frac{25000}{1} \times 0,002 = 50$ Le diamètre du disque à représenter est : 50 mm ou encore 5 cm.

Exercices

1

Ce Tableau récapitule la consommation d'essence d'un automobiliste effectuant un trajet

Distance parcourue (km)	50	80	120	150
Essence consommée (L)	4	6,4	9,6	12

a. Calculer chacun des quotients suivants : $\frac{50}{4} = \dots$; $\frac{80}{6,4} = \dots$; $\frac{120}{9,6} = \dots$; $\frac{150}{12} = \dots$

b. Ce tableau est-il un tableau de proportionnalité ? Oui ou Non

1

Tableau récapitule le prix d'un microprocesseur en fonction de sa vitesse :

Prix (UM)	2290	2990	4990	7590
Vitesse (GHz)	1,8	2,2	2,4	2,5

a. $\frac{2290}{1,8} = \dots$; $\frac{2990}{2,2} = \dots$; $\frac{4990}{2,4} = \dots$; $\frac{7590}{2,5} = \dots$

b. Ce tableau est-il un tableau de proportionnalité ? Oui ou Non.

3

Calculer x dans chacun des cas :

n°1: $\frac{x}{1,4} = \frac{1,2}{9}$; n°2 : $\frac{0,49}{0,14} = \frac{2,5}{x}$; n°3: $\frac{2,7}{x} = \frac{6,6}{14}$; n°4: $\frac{x}{10} = \frac{10}{x}$; n°5 $\frac{x}{0,35} = 5,2$;
n°6 : $\frac{0,49}{0,14} = \frac{2,5}{x}$.

4

Dans un immeuble, les charges payées sont proportionnelles à la surface au sol de la propriété pour chacun des propriétaires. Trouver la valeur de x, y et de z du tableau des charges de quelques propriétaires.

Surface au sol en m ²	x	61,2	Y	72,9
Montant des charges (UM)	823,2	1713,6	1890	z

5

Compléter les tableaux de proportionnalité suivants :

a.

Valeur de x	3	6	12		27
Valeur de y	2	4		14	

b.

Valeur de x	3		6	7,5	
Valeur de y		10,5	14		29,4

6

4 mètres de tissu ont coûté 675 UM. Combien coûtent 7 mètres du même tissu ?

7

Deux kilogrammes de sucre pour trois kilogrammes d'abricots, c'est la proportion indiquée sur le livre de recettes pour faire cette confiture. - Quelle quantité d'abricots faut-il pour 3 kg de sucre ? - Combien de sucre doit-on ajouter à 7,5 kg d'abricots ?

8

Une voiture roulant à vitesse constante, a parcouru 105 km en 1 h 15min. Combien de temps lui faudra-t-il pour parcourir 189 km ?

9

Lorsqu'il a battu le record du monde de l'heure le 6 septembre 1956, le champion Chris Boardman a parcouru 27,06 m chaque fois qu'il a fait 3 tours de pédalier. Combien de tours de pédales a-t-il faits pour parcourir les 56,3759 km de son record ?

10

Un train qui roule d'un mouvement uniforme à la vitesse de 80 km par heure défile en 12 s devant un passage à niveau. Calculer la longueur du train.

11

Trouver les nombres x , y et z pour que les suites :
(x ; y ; 10 ; $x+y+10$) et (50 ; 75 ; 250 ; z) soient proportionnelles.

12

Un globule blanc monocyte est un disque de 0,002 mm de diamètre. On souhaite en faire un dessin à l'échelle 25000 . Calculer le diamètre du disque à représenter à cette échelle. On donnera une réponse en cm.

13

Une personne distribue l'argent de poche à ses trois enfants, Diobel, Moustapha (5 ans) et Diabou proportionnellement à leur âge. Elle donne 25 UM à Moustapha, 40 UM à Diobel et le reste à Diabou. Sachant que la somme des âges des enfants est 23 ans,

1. Quels sont les âges de Diobel et de Diabou ?
2. Quel est l'argent de poche de Diabou ?
3. Quelle est la somme totale distribuée ?

14

Une spore de fougère est représentée par un disque de 1 cm de diamètre. Son diamètre réel est de 0,5 mm. Quelle est l'échelle du schéma ?

15

Sur une carte à l'échelle $\frac{1}{100000}$, deux villes sont séparées par 4,5 cm. Quelle est la distance réelle entre elles ?

Chapitre 6

Statistiques

I Série statistique

1) Définitions et Rappels

a) Définition

Population : En statistique, l'ensemble sur lequel porte l'étude est appelé population.

Individu : Tout élément de la population est appelé individu.

Caractère : Un caractère est toute information qu'on peut étudier sur la population.

Modalité ou valeur du caractère : toute valeur prise par le caractère.

Effectif : le nombre d'individus d'une modalité

Effectif total de la population : nombre total d'individus de la population. Il est noté N en général.

Remarques :

- Un caractère peut être :

- qualitatif lorsqu'il ne peut pas être exprimé par un nombre.
- quantitatif lorsqu'il est mesurable ou peut être exprimé par un nombre .

- L'effectif n_i d'une modalité x_i est le nombre d'individus présentant cette modalité
l'effectif total est égal à la somme des effectifs des modalités.

2) Caractère quantitatif discret – caractère quantitatif continu

a) Définition

• Un caractère quantitatif est discret lorsqu'il prend des valeurs isolées.	• Un caractère quantitatif est continu lorsqu'il peut prendre n'importe quelle valeur dans un intervalle.
Par exemple les notes en maths, le nombre de points obtenus par les différentes équipes de basketball lors d'une compétition, etc.	. Par exemple la taille, le poids, etc.

NB: Si les modalités d'un caractère sont présentées sous forme d'intervalles $[a ; b[$ alors le caractère est quantitatif continu et ces intervalles sont appelés classes.

a) Amplitude et centre d'une classe

- L'amplitude d'une classe $[a ; b[$ est le nombre $b - a$.
- Le centre d'une classe $[a ; b[$ est le nombre $\frac{a+b}{2}$.

3) Fréquence :

a) Définition

On considère une série statistique comportant p modalités (ou p classes) d'effectifs $n_1 ; \dots ; n_p$ et d'effectif total N .

La fréquence d'apparition de la modalité (ou de la classe) correspond à la proportion d'individus dont le caractère est égal à cette modalité (ou appartenant à cette classe).

Ainsi, pour tout entier i compris entre 1 et p : $f_i = \frac{n_i}{N}$.

Autrement dit La fréquence d'une modalité : le rapport de l'effectif d'une modalité par l'effectif total.

On a : $\text{Fréquence} = \frac{\text{Effectif de la modalité}}{\text{Effectif total}}$

Remarque :

La fréquence d'une valeur peut-être donnée en pourcentage. La somme des fréquences est alors égale à 100 %.

On a donc : $f = \frac{\text{Effectif de la modalité}}{\text{Effectif total}} \times 100$

b) Propriété :

La somme des fréquences de toutes les valeurs est égale à 1. On a $f_1 + f_2 + \dots + f_k = 1$

Preuve

$$f_1 + f_2 + \dots + f_k = \frac{n_1}{N} + \frac{n_2}{N} + \dots + \frac{n_p}{N} = \frac{n_1 + n_2 + \dots + n_p}{N} = \frac{N}{N} = 1$$

4) Fréquence cumulée :

Pour une valeur x d'une série statistique quantitative, la fréquence cumulé croissant (respectivement décroissant) de x est la somme des fréquences des valeurs inférieures (respectivement supérieures) ou égale à x .

Exemple 1 :

A l'occasion de la visite médicale d'aptitude des élèves de la classe de 5MA, aux épreuves éducatives physiques , le médecin a relevé les tailles suivantes en centimètres : 168 ;184 ;165 ;174 ;169 ;183;170 ;170 ;171 ;178 ;172 ;173 ;160 ;173 ;174 ;171 ;175 ;176 ; 177 ;175 ;177 ;167 ;177 ; 178 ;170 ; 162.

a. Regrouper des tailles en classe d'amplitude de 5 cm .

b. Dresser le tableau des effectifs, des effectifs cumulés croissants et décroissants, des fréquences, des fréquences cumulées croissantes et décroissantes.

Solution :

a. Regroupons les tailles en classe d'amplitude de 5 cm

On obtient les classes [160 ; 165[, [165 ; 170[, [170 ; 175[, [175 ; 180[, [180 ; 185[

b. Dressons le tableau des effectifs, des effectifs cumulés croissants (ECC) et décroissants (ECD), des fréquences, des fréquences cumulées croissantes (FCC) et décroissantes (FCD) en % :

Tableau récapitulatif

Classe	[160 ; 165[	[165 ; 170[	[170 ; 175[	[175 ; 180[	[180 ; 185[
Centre de classe	162,5	167,5	172,5	177,5	182,5
Effectif	2	4	10	8	2
ECC	2	6	16	24	26
ECD	26	24	20	10	2
Fréquence en %	8	15	38	31	8
FCC en %	8	23	61	92	100
FCD en %	100	92	77	39	8

II

Caractéristiques de position:

1) Mode d'une série statistique

a) Définition

- Le mode d'une série statistique est toute modalité ayant le plus grand effectif.
- Une classe modale est une classe ayant le plus grand effectif.

b) Remarque :

Une série statistique peut avoir un ou plusieurs modes.

Exemple 1

Dans l'exemple précédent la classe modale est : [170 ; 175[car l'effectif le plus grand est 10.

2) Moyenne:

a) Définition

. La valeur moyenne d'une série de données est égale à la somme de ces données divisée par l'effectif total.

. La moyenne pondérée d'une série de données est égale à la somme des produits de chaque valeur et de son effectif, divisée par l'effectif total

b) Propriété

Dans le cas d'un caractère quantitatif discret,

Si $n_1, n_2, \dots, n_k$ sont les effectifs respectifs des modalités $x_1, x_2, \dots, x_k$, alors la moyenne de la série statistique est $\bar{x} = \frac{n_1 \times x_1 + n_2 \times x_2 + \dots + n_k \times x_k}{N}$, où N est l'effectif total.

Remarque :

Dans le cas d'un caractère quantitatif continu, la modalité x_i est égale au centre de la classe $[a_i ; b_i[$.

Exemple 2

Un joueur de basket a relevé ses points marqués lors des 22 matchs de sa saison. 8 ; 12 ; 6 ; 15 ; 17 ; 10 ; 20 ; 7 ; 12 ; 10 ; 8 ; 17 ; 13 ; 9 ; 9 ; 14 ; 5 ; 12 ; 8 ; 13 ; 7 ; 10.
Calculer sa moyenne de points marqués par match.

Solution

Calculons sa moyenne de points marqués par match :

$$\bar{x} = \frac{1 \times 5 + 1 \times 6 + 2 \times 7 + 3 \times 8 + 2 \times 9 + 3 \times 10 + 3 \times 12 + 2 \times 13 + 1 \times 14 + 1 \times 15 + 2 \times 17 + 1 \times 20}{22} = \frac{225}{22} = 10,23$$

La moyenne des points marqués est de 10,23

Exemple 3

Voici les données concernant la taille en cm des élèves d'une classe de cinquième.

Les tailles 155 ; 163 ; 167 ; 171 et 175 correspondent respectivement aux nombres d'élèves 3 ; 11 ; 13 ; 7 et 2 . Calculer la taille moyenne de ces élèves de cinquième.

Solution

Calculons la taille moyenne de ces élèves de cinquième :

$$\bar{x} = \frac{3 \times 155 + 11 \times 163 + 13 \times 167 + 7 \times 171 + 2 \times 175}{36} = \frac{5976}{36} = 166$$

3) Médiane:

a) Définition

Dans une série ordonnée, une médiane Me est une valeur qui partage la série en deux parties de même effectif.

b) Méthodes

Pour déterminer la médiane on peut procéder comme suit :

- | | |
|---|---|
| • Pour un caractère quantitatif discret | • Pour un caractère quantitatif continu |
|---|---|

On range dans l'ordre croissant les modalités en répétant chaque modalité un nombre de fois égal à son effectif: - si l'effectif total N est impair, la médiane est égale à la valeur centrale ; - si l'effectif total N est pair, alors la médiane est égale à la demi-somme des deux valeurs centrales.	- On dresse le tableau des effectifs cumulés croissants ou décroissants. - On trace le polygone des effectifs cumulés croissants ou décroissants. - On détermine graphiquement la position de la médiane qui est l'abscisse du point du polygone des effectifs cumulés croissants ou décroissants qui a comme ordonnée la moitié de l'effectif total.
---	---

Remarque :

Pour un caractère quantitatif discret

- Dans le cas d'un effectif total N impair, la médiane est la valeur de la série ordonnée de

rang $\frac{N+1}{2}$.

- Dans le cas d'un effectif total N pair, aucune valeur de la série ordonnée ne partage la

série en deux groupes de même effectif. Toute valeur comprise entre les valeurs de rang $\frac{N}{2}$

et $\frac{N}{2}+1$ peut être prise comme médiane. En général, on prend la moyenne de ces deux valeurs

- Cas où l'effectif total est impair :

Exemple 4

On dispose de la série de données suivantes : 2 ; 2 ; 5 ; 5 ; 5 ; 7 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10 ; 10.

Solution :

Calculons l'effectif total est 11 donc $\frac{11}{2} = 5,5$ on prend la sixième valeur donc $Me = 7$.

Exemple 5

On donne le tableau ci-dessous :

Valeur	1	2	3	4
Effectif	5	12	8	6

Solution :

Calculons l'effectif total : 31 donc $\frac{31}{2} = 15,5$, on prend la seizième valeur. Donc $Me = 2$

- Cas où l'effectif total est pair :

Exemple 6

On dispose de la série de données suivantes : 2 ; 2 ; 5 ; 5 ; 5 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10 ; 10.

Solution

Calculons l'effectif total : $\frac{10}{2} = 5$. On considère la cinquième et la sixième valeur : 5 et 7.

On peut prendre pour médiane : Effectif $\frac{5+7}{2} = 6$ donc $Me = 6$

III

Caractéristique de dispersion:

1) Etendue

a) Définition

L'étendue d'une série statistique est la différence entre la plus grande valeur et la plus petite valeur de la série.

b) Propriété :

L'étendue est un paramètre de dispersion : moins l'étendue d'une série statistique est grande, moins les valeurs sont dispersées. Elles sont alors regroupées autour de la moyenne et de la médiane (qui sont des paramètres de position)

Exemple 1

On a effectué différentes mesures de concentration de CO₂ dans une eau minérale gazeuse.

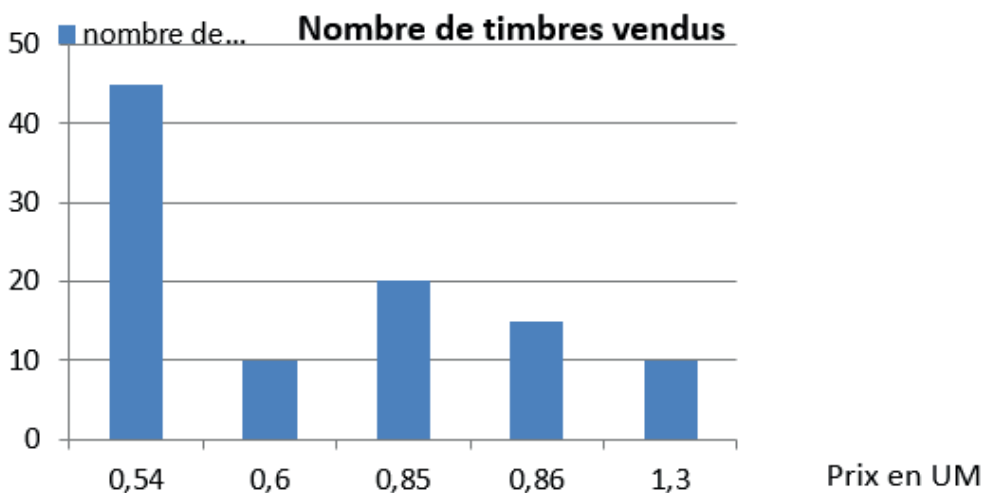
Voici les résultats obtenus en g/l : 0,491 ; 0,497 ; 0,474 ; 0,488 ; 0,490 ; 0,475 ; 0,492 ; 0,495 ; 0,482 ; 0,486 ; 0,491 ; 0,48 . Déterminer l'étendue de la série.

Solution

L'étendue de la série est : $0,497 - 0,474 = 0,023$.

Exemple 2

Le graphique suivant indique le nombre de timbres de collection vendus au guichet d'une poste durant une matinée. Le nombre de timbres vendus prix en Ouguiyas



Déterminer l'étendue de la série.

Solution

L'étendue de la série est $1,3 - 0,54 = 0,76$.

Exemple 3

On donne le nombre d'enfants dans leur famille des membres d'une association du lycée le nombre d'enfants 1, 2, 3 et 4 d'effectifs respectifs 5 ; 11 ; 9 et 7 .

Solution :

L'effectif total est 32 et $\frac{32}{2} = 16$ On considère la seizième et la dix-septième valeur : 2 et 3.

On peut prendre pour médiane : $\frac{2+3}{2} = 2,5$ donc $Me = 2,5$.

IV

Représentations graphiques:

1) Diagramme en bâtons :

Diagramme en bâtons des effectifs - des fréquences

a) Définition

Le diagramme en bâtons est une forme de représentation des séries à caractère quantitatif discret. Dans un repère d'axes perpendiculaires, on porte en abscisses les modalités et en ordonnées les effectifs (ou les fréquences) correspondants. A chaque modalité x_i , portée en abscisse, on fait correspondre un segment vertical (bâton) de longueur proportionnelle à l'effectif n_i ou à la fréquence f_i de cette modalité

Exemple 1

Dans un collège, une enquête a été menée pour connaître le nombre total d'enfants dans la famille de chaque élève. Les résultats ont été consignés dans le tableau suivant.

1) Compléter ce tableau:

Nombre d'enfants	Effectif	Fréquence	fréquence (f_i)	fréquences cumulées croissantes (F_i)
1	50			
2	35			
3	15			
4	10			
5	10			

2) Représenter le diagramme en bâtons des effectifs, puis le diagramme en bâton des effectifs cumulés croissants.

3) Représenter le polygone des effectifs cumulés croissants et le polygone des effectifs cumulés décroissants.

Solution

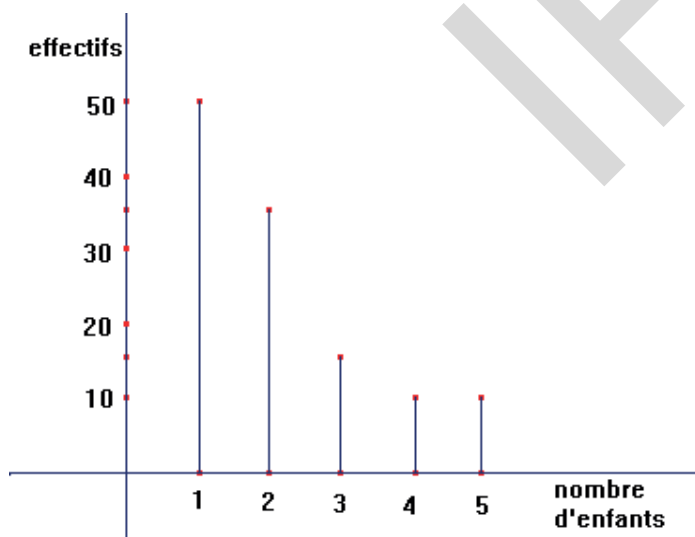
1) L'effectif total est égal à 120.

Fréquence = $\frac{\text{effectif de la classe}}{\text{effectif total}}$, (On calcule l'arrondie à 0,01 près) :

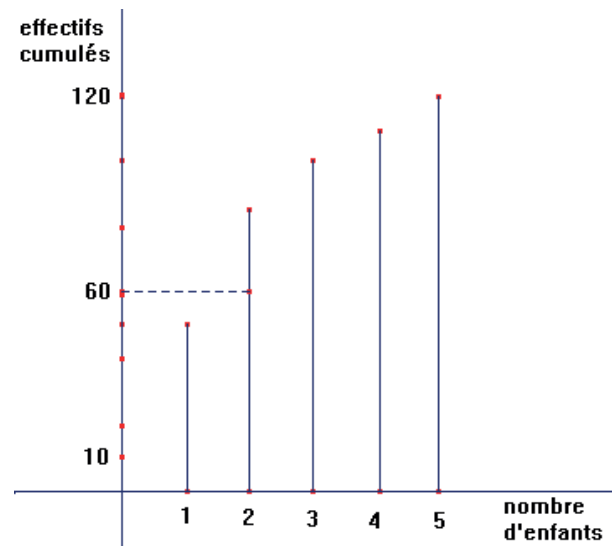
Nombre d'enfants	Effectif	Fréquence	fréquence (□)	Fréquences cumulées croissantes (□)
1	50	0,42	42	42
2	35	0,29	29	71
3	15	0,13	13	84
4	10	0,08	8	92
5	10	0,08	8	100

2) Les diagrammes :

Le diagramme en bâtons des effectifs



Le diagramme en bâton des effectifs cumulés croissants



2) Diagrammes à bandes ou en barres

a) Définition

Le diagramme à bandes encore appelé diagramme en barres est une représentation d'un caractère qualitatif. Les modalités sont représentées par des rectangles (bandes) de base constante et dont les hauteurs sont proportionnelles aux effectifs de ces modalités.

Exemple 2

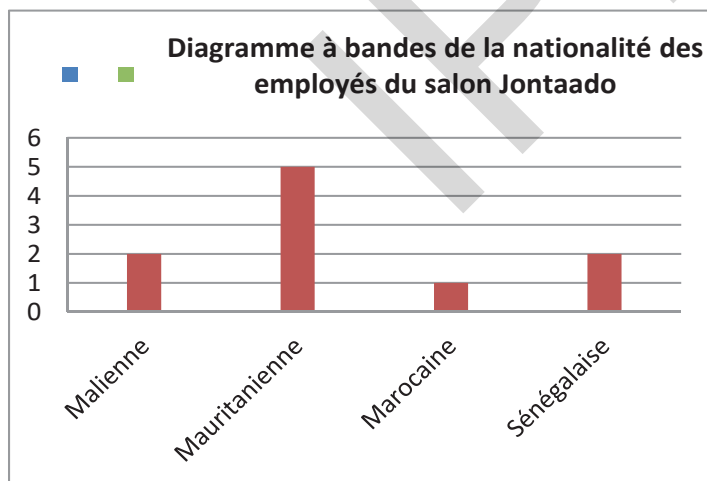
L'étude de la nationalité des employés du salon de coiffure Jontaado a donné les résultats organisés de la façon suivante des nationalités : Malienne, Mauritanienne, Marocaine, et Sénégalaise d'effectifs respectifs 2, 5, 1 et 2 .

Dressons le tableau des fréquences

Nationalité	Malienne	Mauritanienne	Marocaine	Sénégalaise
Effectif	2	5	1	2
Fréquence	0,2	0,5	0,1	0,2
Fréquence en %	20	50	10	20

On remarque que la somme des fréquences est égale à 1 et la somme des fréquences en pourcentage est égale à 100.

Représentation graphique de la série



3) Diagramme circulaire :

a) Définition

Le diagramme circulaire est une représentation d'un caractère qualitatif par un cercle. Chaque modalité est représentée par un secteur angulaire au centre dont la mesure est proportionnelle à l'effectif de cette modalité.

b) Méthodes :

Diagramme circulaire	Diagramme semi-circulaire
A l'effectif total N correspond l'angle au centre du cercle qui mesure 360 degrés. A l'effectif partiel n_1 correspond un angle au centre du cercle de mesure $\alpha_1 = \frac{n_1 \times 360^\circ}{N}$. A l'effectif partiel n_2 correspond un angle au centre de mesure $\alpha_2 = \frac{n_2 \times 360^\circ}{N}$, etc...	A l'effectif total N correspond un angle de mesure de 180 degrés. A l'effectif partiel n_1 correspond un angle de mesure $\alpha_1 = \frac{n_1 \times 180^\circ}{N}$. A l'effectif partiel n_2 correspond un angle de mesure $\alpha_2 = \frac{n_2 \times 180^\circ}{N}$, etc..

Exemple 3

On utilise la règle de trois pour déterminer le secteur angulaire représentant chaque ethnie en fonction de son effectif.

Nationalité	Malienn	Mauritanienne	Marocaine	Sénégalaise
Angle	72	180	36	72

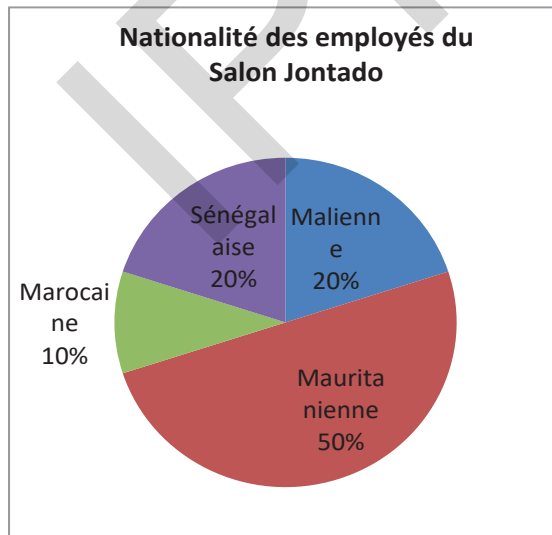


Diagramme circulaire

4) Histogramme

a) Définition

L'histogramme est une forme de représentation des séries à caractère quantitatif continu.

Mais pour un caractère quantitatif discret comportant plusieurs modalités, on peut faire un regroupement en classes et le représenter comme un caractère continu.

Histogramme des effectifs ou des fréquences

Dans un repère d'axes perpendiculaires, on met les classes en abscisses et les effectifs partiels (ou fréquences) correspondants en ordonnées. A chaque couple (classe ; effectif partiel)(ou fréquence) correspond un rectangle dont les dimensions sont l'amplitude et l'effectif de la classe (ou la fréquence de la classe).

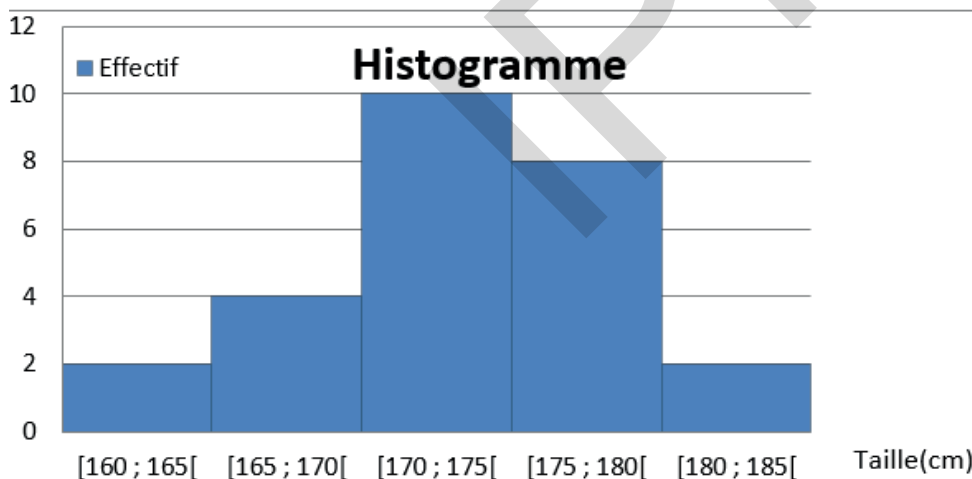
Exemple 4

A l'occasion de la visite médicale d'aptitude des élèves de la classe de 5MA, aux épreuves éducation physique, le médecin a relevé les tailles suivantes en centimètres : 168 ;184 ;165 ;174 ;169 ;183;170 ;170 ;171 ;178 ;172 ;173 ;160 ;173 ;174 ;171 ;175 ;176 ; 177 ;175 ;177 ;167 ;177 ; 178 ;170 ; 162.

Construire l'histogramme de effectifs

Classe	[160 ; 165[	[165 ; 170[	[170 ; 175[	[175 ; 180[	[180 ; 185[
Centre de classe	162,5	167,5	172,5	177,5	182,5
Effectif	2	4	10	8	2

Solution



Dans le cas où les rectangles ont la même largeur, la hauteur des rectangles est proportionnelle à l'effectif (ou fréquence).

Exercices d'application

Application 1

Reprendre les données de l'exemple I.1)

- Déterminer la moyenne
- Déterminer la médiane
- Représenter le diagramme des effectifs cumulés croissants.
- Déterminer graphiquement la médiane.

Application 2

Voici les 40 décimales du nombre π , ($\pi = 3,1415\dots$) :

1 ; 4 ; 1 ; 5 ; 9 ; 2 ; 6 ; 5 ; 3 ; 5 ; 8 ; 9 ; 7 ; 9 ; 3 ; 2 ; 3 ; 8 ; 4 ; 6 ; 2 ; 6 ; 4 ; 3 ; 3 ; 8 ; 3 ; 2 ; 7 ; 9 ; 5 ; 0 ; 2 ; 8 ; 8 ; 4 ; 1 ; 9 ; 7 ; 1.

1) Regrouper les données dans un tableau en indiquant le nombre de fois que chaque chiffre apparaît dans cette liste (effectif).

2) Faire la représentation graphique de la série obtenue par un diagramme en bâtons.

3) Calculer la fréquence d'apparition d'un nombre pair, puis celle d'un nombre impair (les fréquences seront exprimées en pourcentage).

1) Tableau d'effectif :

Chiffres	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Effectif	1	4	5	6	4	4	3	3	5	5

Application 3

Les trois séries suivantes qui présentent les dernières notes obtenues par 3 élèves :

Khawtar: 4 ; 6 ; 18 ; 7 ; 17 ; 12 ; 12 ; 18

Dahaba : 13 ; 13 ; 12 ; 10 ; 12 ; 3 ; 14 ; 12 ; 14 ; 15

Lobudu : 15 ; 9 ; 14 ; 13 ; 10 ; 12 ; 12 ; 11 ; 10

1. Calculer les moyennes de notes de chacun

2. Calculer les médianes de notes de chacun

3. Calculer les étendues de notes de chacun

4. Interpréter

Application 4

On a demandé à 61 élèves de 5^e quel était leur animal préféré.

En additionnant le nombre d'élèves qui avaient donné la même réponse, on a obtenu le tableau suivant :

Animaux	Cheval	Chien	Chat	Dauphin	Autres	Total
Effectifs	17	14	11	8	11	61

Représenter les données par un diagramme à bâton

Application 5

A la sortie d'une ville, on a relevé, un certain jour, la répartition par tranches horaires des 6400 véhicules quittant la ville entre 16 heures et 22 heures. Les résultats sont donnés dans le tableau ci-dessous.

Tranche horaire	16h – 17h	17h – 18h	18h – 19h	19h – 20h	20h – 21h	21h – 22h
Nombre de véhicules	1100	2000	1600	900	450	350

1. Représenter l'histogramme des effectifs de cette série statistique.

2. Calculer la fréquence de la tranche horaire 19h – 20h (on donnera le résultat arrondi à 0,01 près, puis le pourcentage correspondant).
3. Calculer le pourcentage de véhicules quittant la ville entre 16h et 20h.

Solutions des exercices d'application

Application 1

Tableau récapitulatif

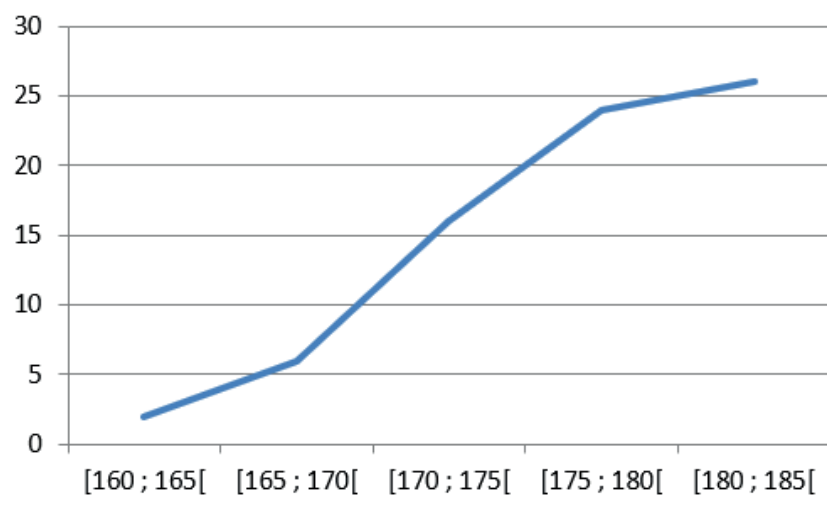
Classe	[160 ; 165[	[165 ; 170[	[170 ; 175[	[175 ; 180[	[180 ; 185[
Centre de classe	162,5	167,5	172,5	177,5	182,5
Effectif	2	4	10	8	2
ECC	2	6	16	24	26
ECD	26	24	20	10	2
Fréquence en %	8	15	38	31	8
FCC en %	8	23	61	92	100
FCD en %	100	92	77	39	8

a. Déterminons la moyenne

La moyenne est : $\bar{x} = \frac{2 \times 162,5 + 4 \times 167,5 + 10 \times 172,5 + 8 \times 177,5 + 2 \times 182,5}{26} = 173,26$

b. Déterminons la médiane

c. Représentation graphique du diagramme des effectifs cumulés croissants



d. La médiane étant l'abscisse du point du polygone des effectifs cumulés qui a comme ordonnée la moitié de l'effectif total $\frac{N}{2} = 13$, on peut procéder comme suit :

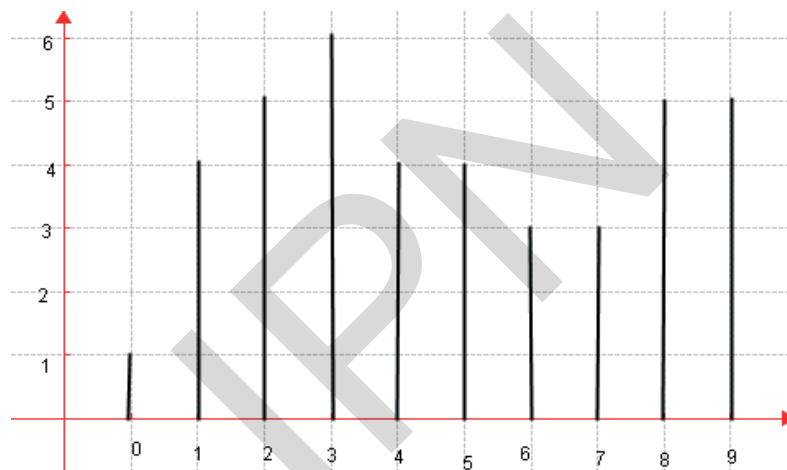
- On place $\frac{N}{2} = 13$ sur l'axe des ECC (l'axe (Oy) ;
- On détermine le point du polygone des ECC qui a pour ordonnée 13
- On détermine son abscisse qui est la médiane

Remarques

- On obtient ainsi la médiane par la méthode graphique. La médiane se trouvant dans la classe [170 ; 175], cette classe est appelée classe médiane. Avec cette méthode graphique, on obtient une valeur approchée de la médiane qui est ici égale à 173.

Application 2

2) Le diagramme en bâtons :



3) L'effectif d'apparition d'un nombre pair est la somme d'effectifs de nombres 0, 2, 4, 6, 8, donc égal à : $1+5+4+3+5=18$.

D'où la fréquence % d'apparition d'un nombre pair est égale à : $\frac{18 \times 100}{40} = 45\%$

La fréquence % d'apparition d'un nombre impair est égale à : $100\% - 45\% = 55\%$

C'est la somme de fréquences d'apparition des nombres 1,3,5,7 et 9.

Application 3

1. Calculons les moyennes des notes de Khawtar, Dahaba et Lobudu.

Khawtar : Moyenne = $(4 + 6 + 18 + 7 + 17 + 12 + 12 + 18) : 8 \approx 11,8$

Dahaba : Moyenne = $(13 + 13 + 12 + 10 + 12 + 3 + 14 + 12 + 14 + 15) : 10 = 11,8$

Lobudu : Moyenne = $(15 + 9 + 14 + 13 + 10 + 12 + 12 + 11 + 10) : 9 \approx 11,8$

2. Calculer les médianes des notes de Khawtar, Dahaba et Lobudu.

Pour déterminer les notes médianes, il faut ordonner les séries.

La médiane partage la série en deux groupes de même effectif.

Khawtar: 4 6 7 12 12 17 18 18 . Médiane = 12

Dahaba : 3 10 12 12 12 13 13 14 14 15

Médiane = $(12 + 13) : 2 = 12,5$

Lobudu : 9 10 10 11 12 12 13 14 15 4. Médiane = 12

3. Calculer les étendues des notes de Khawtar, Dahaba et Lobudu.

L'étendue d'une série statistique est la différence entre la plus grande valeur et la plus petite.

Khawtar: La plus grande valeur est 18 et la plus petite valeur est 4 donc :

$$\text{Étendue} = 18 - 4 = 14$$

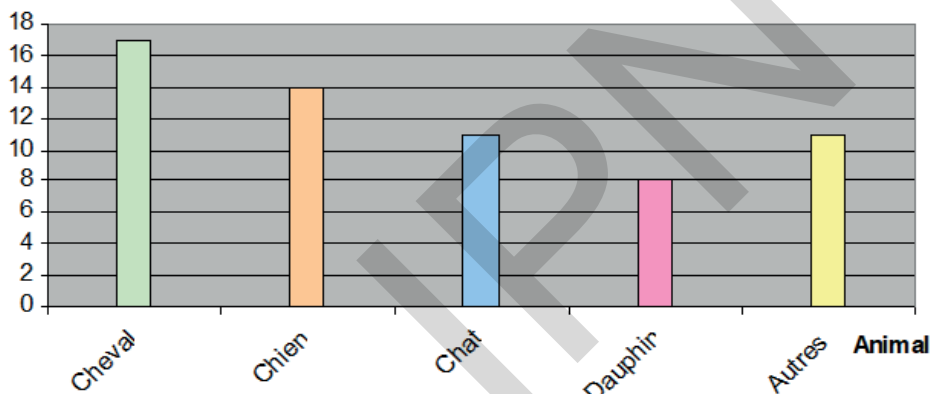
Dahaba : Étendue = $15 - 3 = 12$.

Lobudu : Étendue = $15 - 9 = 6$

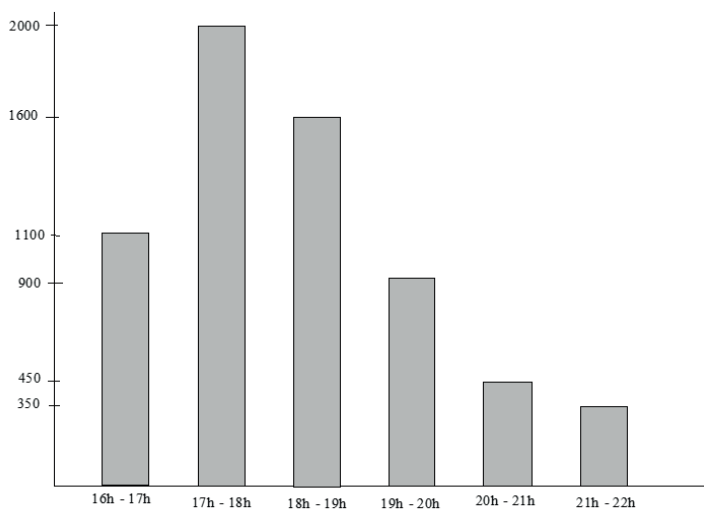
4. Interprétation : On a vu que les trois élèves ont approximativement la même moyenne mais les étendues sont très différentes. Les notes de Khawtar par exemple sont beaucoup plus dispersées autour de la moyenne que les notes de Lobudu. Khawtar a été plus irrégulier que Lobudu.

Application 4

Effectifs



Application 5



$$1) \frac{900}{6400} \approx 0,14 \text{ et } 0,14 \times 100 =$$

14

La fréquence de 19h – 20h est environ 0,14, soit 14%.

$$\frac{1100 + 2000 + 1600 + 900}{6400} \times 100 = 87,5$$

87,5 % des véhicules quittent la ville entre 16h et 20 h.

Exercices

1 Complète les pointillés :

1. En statistique, l'ensemble sur lequel porte l'étude est appelé
2. Le mode d'une série statistique est la modalité qui a le effectif.
3. Un caractère est s'il peut être exprimé par des nombres.
4. Le nombre d'individus d'une population est appelé
5. La valeur qui partage la série en deux groupes de même effectif s'appelle

2 Réponds par vrai ou faux :

1. La population est le nombre d'individus.
2. Toute propriété étudiée sur les individus d'une population est appelée caractère.
3. Le mode est le plus grand des effectifs des modalités.
4. Un échantillon est une partie de la population.
5. Le centre de la classe $[-a ; a[$ est 2 .

3 Activité mentale

1. Calculer la moyenne de la série ci-dessous : 8 ; 14 ; 10 ; 12 ; 11.
2. Déterminer une médiane de la série ci-dessous : 0 ; 2 ; 5 ; 8 ; 9 ; 12 ; 15 ; 18 ; 20.
3. Déterminer le 1er quartile de la série ci-dessous : 2 ; 5 ; 7 ; 10 ; 12 ; 13 ; 15 ; 17 ; 20.
4. Mariam a obtenu 12 et 7 aux deux premiers devoirs d'Anglais. Quelle note doit-elle avoir au prochain devoir pour avoir une moyenne trimestrielle de 11 (sans pondération) ?
5. Donner une série statistique d'effectif total 3 dont :
 - une médiane est 8 ;
 - la moyenne est 7 ;
 - l'une des valeurs est 4.
6. La moyenne de Mame Diarra en physique est 8 sur 20. Son professeur lui rend une dernière interrogation où il a obtenu la note de 11 sur 20. La moyenne de Mame Diarra a-t-elle augmenté ou diminué.

Une enquête portant sur les notes de Mathématiques de six élèves a révélé les résultats suivants : 13 – 19 – 13 – 15 – 07 – 17.

4 Répondre aux questions posées sur cette série statistique en choisissant l'une des réponses.

N°	Questions	Réponse A	Réponse A	Réponse C
1	La population est ...	Les notes de maths	6	Les six élèves
2	Le caractère est ...	Qualitatif	quantitatif continu	quantitatif discret
3	Le mode est ...	13	19	07
4	La moyenne est ...	9	13	14
5	La médiane est ...	14	13,5	15

5 Le tableau suivant donne le nombre de moutons vendus par un éleveur en fonction de la race dans l'année.

Race	Balibali	Ful Fuldi	Ladoum	Azawad	Toulaber
Effectif	15	60	50	15	10

1. Quelle est la population étudiée ?
2. Quel est le caractère étudié ? Quelle est sa nature ?
3. Donne le(s) mode(s) de la série.
4. Représente la série.

6 Voici les notes obtenues par les élèves d'une classe de 5LM à un devoir de mathématiques : 10 ; 10 ; 14 ; 8 ; 9 ; 19 ; 17 ; 6 ; 14 ; 10 ; 8 ; 14 ; 17 ; 9 ; 10 ; 9 ; 8 ; 10 ; 14 ; 6.

1. Compléter le tableau statistique suivant :
2. Quelle est la population étudiée ?
3. Quel est le caractère étudié ? Quelle est sa nature ?
4. Donner le(s) mode(s) de la série
5. Calculer la moyenne en mathématiques de cette classe pour ce devoir.
6. Calculer le pourcentage d'élèves qui ont une note supérieure à cette moyenne de la classe.
7. Déterminer la médiane de cette série de notes.
8. Représenter le diagramme en bâtons des effectifs et le polygone des effectifs cumulés croissants (E.C.C.).

7 On considère les deux séries statistiques suivantes : 12 – 13 – x – 14 – 12 – 10. 9 – 7 – 11 – x – 17 – 15 – 12. Déterminer x pour que ces deux séries aient la même moyenne.

8 La surveillante d'une classe de 5ème , a relevé les absences des élèves pendant le 1^{er} semestre. Les résultats sont consignés dans le tableau ci-dessous.

Absences	[0;4[	[4;8[	[8;12[	[12;16[	[16 ;20[
Nombre d'élèves	30	8	4	x	8
Effectif E.C.C					
E.C.D					

Sachant que la moyenne de la série est 7,2 ;

1. Montrer que l'effectif manquant x est 10.
2. Représenter le diagramme semi-circulaire de cette série.
3. Compléter la série avec la ligne des effectifs cumulés croissants.
4. Calculer le pourcentage d'élèves qui ont comptabilisé au moins 12 absences.
5. Représenter graphiquement le polygone des effectifs cumulés croissants.
6. Déterminer la médiane en utilisant le théorème de Thalès.

10

Les gendarmes ont effectué un contrôle de vitesse sur le bord d'une route nationale.

Vitesse	[50 ; 70[	[70 ; 90[	[90 ; 110[	[110 ; 130[
Effectif	15	90	35	5

Calculer la vitesse moyenne des automobilistes contrôlés.

11

Les élèves d'une classe de 5ème ont mesuré, par groupe, le pH de l'eau. Voici les résultats obtenus : 6,99 ; 6,9 ; 7,02 ; 7,02 ; 6,99 ; 6,99 ; 7,2 ; 7,2 ; 7,08 ; 7,22 ; 6,99 ; 7,01 ; 7,02 ; 6,99.

1. Quelle est la population étudiée?
2. Quel est le caractère étudié ? Quelle est sa nature ?
3. Quel est le mode de la série ?
4. Quel est l'effectif total de la série
5. Dresser le tableau des effectifs de la série?
6. Calculer en moyenne le pH de l'eau
7. Calculer la médiane de la série
8. Etablir le tableau des fréquences cumulées croissantes
9. Représenter les diagrammes en bâtons des effectifs et des fréquences cumulées croissantes.

12

Lors de la journée nationale de solidarité aux enfants orphelins, on a relevé les contributions en Mru de trente élèves d'une classe de 3ème dans un collège de la Commune de Talhaya : 100-50-150-200-20-25-175-125-100-50-200-50-250-75-100-100-120-75-125-200-100-50-30-200-100-50-50-10-25-100 On a regroupé les différentes contributions en intervalles (classes) d'amplitude 50.

Contributions	[0;50[	[50;100[	[100;150[	[150;200[	[200;250[	[250;300[
Effectifs						
ECC						

(ECC signifie effectifs cumulés croissants)

1. Compléter le tableau ci-dessus
2. Quelle est la classe modale de cette série statistique?
3. Calculer la contribution moyenne des élèves
4. Représenter sur un même dessin l'histogramme et le polygone des effectifs cumulés croissants.
5. Calculer la médiane de la série

13

Voici la répartition des 64 professeurs d'un collège suivant leur âge :

Age (ans)	[25 ; 35[	[35 ; 45[	[45 ; 55[	[55 ; 65[
Fréquence en %	37,5	43,75	12,5	6,25

1. Calculer les effectifs de chaque classe d'âge.

2. Déterminer à un an près l'âge moyen des professeurs de collège.
3. Calculer les effectifs cumulés croissants de chaque classe.
4. Représenter graphiquement le diagramme des effectifs cumulés croissants

14

Le tableau ci-dessous donne la repartirions des diverses notes d'une classe de 35 élèves à un contrôle.

Notes	2	4	5	6	9	11	12	14	15	16	18
Effectifs	1	3	2	2	6	4	4	5	3	3	2

1. Recopier et compléter ce tableau en calculant les fréquences à 10^{-3} près , et les effectifs cumulés croissants et décroissants.
2. Construire le polygone des effectifs cumulés croissants et celui des effectifs cumulés décroissants.
3. Donner la médiane de la série statistique.
4. Calculer la moyenne de la série statistique et comparer - la à la médiane.

15

Un relevé des durées de communications téléphoniques effectuées dans un central téléphonique a fourni les informations consignées dans le tableau suivant (l'unité de durée est la minute).

Intervalles de durée	[0 ;2[	[2 ;4[	[4 ;6[	[6 ;8[	[8 ;10[	[10 ;12[
Effectifs	14	16	25	15	17	13

1. Calcule la durée moyenne d'un appel.
2. Construis le polygone des effectifs cumulés croissants puis celui des effectifs cumulés décroissants.
3. Détermine alors une valeur approchée de la médiane de cette série par lecture graphique.
4. Calcule de façon précise la médiane.
5. Calcule la moyenne de la série statistique

16

voici les notes obtenues par deux classes de 5ème lors d'un devoir de Maths

Notes	2	4	5	8	9	10	11	12	13	15	16	18
Effectif1	1	0	1	3	3	3	5	2	0	1	0	1
Effectif2	2	2	3	0	1	1	2	2	1	3	2	1

1. Pour chacune des deux séries de notes, calcule la moyenne et la médiane
2. En utilisant deux couleurs différentes, représente sur un même diagramme en bâtons les deux séries de notes

17

Dans un bureau de vote , 2000 électeurs ont porté leur choix sur quatre candidats A ; B; C et D. Voici les résultats sous forme de tableau

Candidats	A	B	C	D
Effectifs	30	40	60	70

1. Quelle est la population étudiée ? Quel est le caractère étudié ? Est-il qualitatif ou quantitatif ?
2. Calcule la fréquence et le pourcentage correspondant à chaque valeur du caractère.
3. Faire une représentation des effectifs par un diagramme circulaire puis par un diagramme semi-circulaire.

18 Dans un magasin de vente de chaussures, on a relevé en vrac les pointures suivantes 43 ; 45 ; 35 ; 40 ; 43 ; 38 ; 36 ; 37 ; 42 ; 44 ; 44,5

1. Quelle est la population étudiée ? Le caractère est-il qualitatif ou quantitatif ?
2. Calculer la moyenne $\bar{x}$ des pointures relevées
3. Ordonner la série et déterminer la valeur Me de la médiane.

19 Soit la série statistique brute ci-dessous donnant les diamètres (cm) des anneaux.

- 1 ; 3 ; 8 ; 5 ; 4 ; 4 ; 5 ; 5 ; 9 ; 7 ; 4 ; 6 ; 8 ; 10 ; 12
1. Déterminer des classes de même amplitude égale à 4 cm à partir du plus petit diamètre.
 2. Calculer les centres des classes et la moyenne $\bar{x}$ de la série classée.
 3. Tracer l'histogramme des effectifs et le polygone des effectifs.
 4. Détermine la classe modale et la classe médiane.*

20 Une course de vitesse a donné les résultats suivants :

Temps	[5 ;8[	[8 ;11[	[11 ;14[	[14 ;17[
Effectifs	15	20	30	35

1. Compléter le tableau par les effectifs cumulés croissants et décroissants. Donner la signification des effectifs cumulés 35 et 85
2. Tracer l'histogramme des effectifs cumulés croissants et décroissants sur deux diagrammes différents.
3. Déterminer graphiquement la classe médiane dans les deux graphiques. Calcule la valeur Me de la médiane en utilisant Thalès

21 Prévention routière

Suite aux accidents répétitifs des aménagements urbains sont mis en place afin de réduire la vitesse des automobilistes. Un sondage est alors réalisé auprès de 250 d'entre eux. Il leur est demandé si les mesures mises en place ont modifié leur comportement à cet endroit. Voici les résultats :

	Hommes	Femmes
A modifié ses habitudes	51	38
N'a pas modifié ses habitudes	84	30
Sans opinion	15	32

1. Quel est le pourcentage de conducteurs qui ont déclaré avoir modifié leurs habitudes ?
2. Parmi les femmes interrogées, quel est le pourcentage de celles qui déclarent avoir modifié leurs habitudes ? Même question pour les hommes. Commenter ces résultats.
3. Parmi les personnes ayant modifié leur comportement, quel est le pourcentage de femmes ? D'hommes ? Cela confirme-t-il l'analyse précédente ?

Bibliographie

Manuel 4AS IPN edition 2022

Manuel 5C-D IPN edition 2022

Livret de Maths 3^{em} 2020 Sesamath Magnard

Livret de Maths 2^{de} 2020 Sesamath Magnard

Manuel_cours_2012_3N5.p

Annales de Mathématiques 3^{ème} 2020 burkina Faso

1^{ere} édition conforme au nouveau programme des Mathématiques du premier cycle Octobre 2006]

FASCICULES DE MATHEMATIQUE ASOSORTIS de quelques sujets de BFEM

Recueil d'exercices de Mathématiques 1^{ère} Edition Edition Edition 2012-2013

Livret de Maths 3^{ème} Sénégal juin 23

CURRICULA DE MATHEMATIQUES Premier Cycle de l'Enseignement Secondaire Septembre 2022

SENEMATHS 3^{émé} Edition 2017

Annales_TROISIEME_-PICHNET_2020-MATH

Fascicule MATHEMATIQUES – 3^{ème} v1 Octobre 2017

3e-Maths-fascicule-exos-Babacar-DIARRA EDITION 2020

IPN