الجمهورية الإسلامية الموريتانية
شرف - إخاء - عدل

وزارة التربية وإصلاح النظام التعليمي
المعهد التربوي الوطني

كتاب الرياضيات

للسنة الخامسة الآداب الأصلية

تأليـــف:

- يسلك بمب الطيب — أستاذ بالمعهد التربوي الوطني.
- ميمونه هيين — أستاذة بالمعهد التربوي الوطني.

تدقيـــق:

محمد المختـــار آكاه — أستاذ بالمعهد التربوي الوطني.

تصميـــم:

نجدي سيدأحمد الجيد — مصممة بالمعهد التربوي الوطني.

2026

IPN

تقديم

في إطار تنفيذ التوجهات الوطنية الرامية إلى تحسين جودة التعليم ومواءمة التعلمات مع متطلبات التنمية، يسرّ المعهد التربوي الوطني أن يضع بين أيدي المدرسين والتلاميذ هذه السلسلة الجديدة من الكتب المدرسية العلمية المخصصة للسلك الثانوي.

تغطي هذه المؤلفات جميع شعب التعليم الثانوي، سواء العلمية منها أو الأدبية، في مواد الرياضيات وعلوم الطبيعة والفيزياء والكيمياء. وقد أُعدّت هذه الكتب وفق البرامج الرسمية المعمول بها، وتعكس إرادة السلطات التربوية في توفير موارد تعليمية ذات جودة لجميع المتعلمين، بما يتلاءم مع أهداف التكوين وخصوصيات نظامنا التربوي.

ومنذ إعادة كتابة البرامج سنة 1999 إلى غاية اعتماد البرامج الحالية سنة 2022، عرف نظامنا التربوي مراحل متعددة من الإصلاح والتحديث. غير أن هذه السلسلة تمثل نقلة نوعية وتاريخية، إذ إنها المرة الأولى التي تستفيد فيها الشعب الأدبية، وخاصة شُعب الآداب العصرية والآداب الأصلية ، من كتب مدرسية في المواد العلمية تشمل جميع مستويات التعليم الثانوي من السنة الخامسة إلى السنة السابعة. كما استفادت شعب الآداب الأصلية من كتب مؤلفة باللغة العربية، مراعاة لخصوصياتها اللغوية والتربوية، وضماناً لتيسير استيعاب المضامين العلمية من طرف المتعلمين المعنيين.

وقد تمثلت هذه المهمة، من جهة، في مراجعة اثني عشر(12) عنواناً تمثل الكتب الأساسية لمختلف مستويات التعليم الثانوي، ومن جهة أخرى، في إعداد اثنين و عشرين (22) عنواناً جديداً تغطي باقي المواد العلمية. ويجسد هذا العمل التربوي الكبير مدى التزام السلطات التربوية بتعزيز الموارد التعليمية الوطنية ومواكبة تنفيذ البرامج الجديدة بصورة فعالة.

وانطلاقاً من الأهمية الاستراتيجية للكتاب المدرسي في عملية التعليم والتعلم، عمل المعهد التربوي الوطني على تعبئة أفضل الكفاءات الوطنية لإنجاز هذه المهمة، حيث تم اختيار نخبة من المفتشين والمستشارين التربويين والأساتذة ذوي الخبرة والكفاءة العلمية والبيداغوجية، قصد إعداد ومراجعة كتب تستجيب لمعايير الجودة العلمية والتربوية والديداكتيكية.

وقد حرصت فرق التأليف على إنتاج كتب واضحة ومنظمة وسهلة الاستعمال، تسهم في تنمية المعارف والكفايات وترسيخ الفكر العلمي لدى المتعلمين. كما أُولي اهتمام خاص بانسجام المضامين، وتدرج التعلمات، وإدماج الأنشطة التطبيقية، واستعمال الرسوم التوضيحية والوضعيات التعليمية الملائمة للسياق الوطني.

ويتقدم المعهد التربوي الوطني بخالص الشكر والتقدير إلى البنك الإسلامي للتنمية على دعمه القيّم لهذا المشروع. فبفضل تمويله، أمكن إنجاز جميع مراحل هذا العمل التربوي المهم، ابتداءً من التأليف والمراجعة، مروراً بالتحرير والتصحيح، وصولاً إلى طباعة هذه الكتب المدرسية. ويشكل هذا الدعم مساهمة كبيرة في تطوير التعليم وتعزيز جودة التعلمات في بلادنا.

كما يتوجه المعهد التربوي الوطني بجزيل الشكر إلى جميع الذين ساهموا في إنجاز هذا العمل، من مؤلفين ومراجعين ومفتشين وفرق تقنية وشركاء رافقوا مختلف مراحل التأليف والإنتاج.

وإننا لنعرب عن أملنا في أن تشكل هذه الكتب أدوات تربوية فعالة في خدمة المدرسين والتلاميذ، وأن تسهم في تعزيز تدريس العلوم، وتحسين المردودية الدراسية، وتكوين جيل قادر على الإسهام الفاعل في تنمية الوطن.

المدير العام للمعهد التربوي الوطني

د. الشيخ معاذ سيدى عبد الله

IPN

IPN

مقدمة

الحمد لله القائل في محكم كتابه:

﴿ هُوَ ٱلَّذِى جَعَلَ ٱلشَّمۡسَ ضِيَآءً وَٱلۡقَمَرَ نُورًا وَقَدَّرَهُۥ مَنَازِلَ لِتَعۡلَمُواْ عَدَدَ ٱلسِّنِينَ وَٱلۡحِسَابَۚ مَا خَلَقَ ٱللَّهُ ذَٰلِكَ إِلَّا بِٱلۡحَقِّۚ نُفَصِّلُ ٱلۡأٓيَٰتِ لِقَوۡمٖ يَعۡلَمُونَ ﴿5﴾ ﴾ سورة يونس

والصلاة والسلام على النبي العدناني وعلى آله وصحبه الأخيار الأعيان

زملاءنا التربويين، طلابنا الأعزاء،

في إطار الجهود المبذولة لتحسين جودة التعليم الوطني وفي ضوء مراجعة برامج التعليم الثانوي سنة 2020 نقدم إليكم كتاب الرياضيات للسنة الخامسة آداب أصلية.

وقد حرصنا فيه على المخطط التالي لكل فصل :

- محتوى شامل للدرس يحتوي أهم المعارف المقررة.
- أمثله تطبيقية محلولة.
- وضعيات لتجسيد المفاهيم من الحياة اليومية.
- تمارين متنوعة.

نأمل أن يكون هذا الكتاب بمثابة مساعدة قيمة في تحسين فعالية بناء المعرفة لدى الطلاب.

وفي الأخير نود من زملائنا الأساتذة موافاتنا بملاحظاتهم واقتراحاتهم

من أجل تحسين الطبعات الموالية ونسأل الله التوفيق والنجاح

لمنظومتنا التربوية.

المؤلفان.

IPN

IPN

الفهـــــــــرس

الفصل	عنوان الفصل	رقم الصفحة
الأول	الأعداد الحقيقية والمقاييس الإسلامية	9
الثاني	الحساب الحرفي	19
الثالث	المعادلات و المتراجحات والأنظمة	23
الرابع	عموميات على الدوال العددية	35
الخامس	دراسة الدوال الجبرية الأساسية	51
السادس	الهندسة في المستوي	65
السابع	الإحصاء	73

IPN

IPN

المجال الأول: الجبر

الفصل الأول

الأعداد الحقيقية

والمقاييس الإسلامية

IPN

1. مجموعة الأعداد الحقيقية:

أ- تعريف

هي مجموعة من أهم مجموعات الأعداد التي نتعامل معها في الحياة اليومية والدراسات العلمية.

ب- مفهوم عدد حقيقي

- نعني بالعدد الحقيقي كل الأعداد التي درسنا سابقا سواء في مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$
- أو الأعداد الصحيحة النسبية $\mathbb{Z}$
- أو الأعداد العشرية النسبية $\mathbb{D}$
- أو الأعداد الجذرية $\mathbb{Q}$

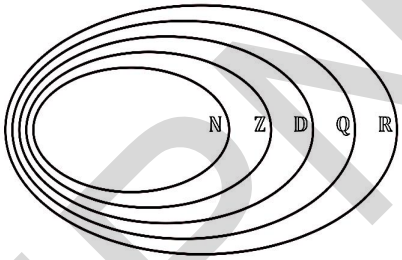
بالإضافة إلى أعداد مثل π و $\sqrt{2}$

وإذن كل ما سبق يندرج في مجموعة الأعداد الحقيقية ونرمز لها بالرمز $\mathbb{R}$

حيث يرمز لمجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة بالرمز $\mathbb{R}_+$

ويرمز لمجموعة الأعداد الحقيقية السالبة بالرمز $\mathbb{R}_-$

تذكير:

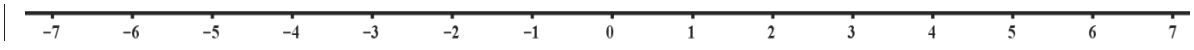


$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

ج- تمثيل الأعداد الحقيقية

يمكن لمجموعة الأعداد الحقيقية أن تمثل كاملة على مستقيم الأعداد المدرج، حيث تحدد عليه نقطة أصل صفر

وعلى يمينه الأعداد الموجبة وعلى يساره الأعداد السالبة.



د - ترتيب الاعداد الحقيقية

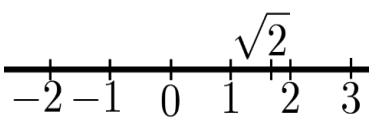
يمكن ترتيب عددين حقيقين بإحدى الطرق التالية

أما بتمثيلها على مستقيم الأعداد المدرج ومقارنة موضعيهما على هذا المستقيم حيث يكون أكبرهما هو الأقصى عن اليمين.

أو بأخذ قيمتيهما العشريتين الحقيقيتين أو المقربتين ومقارنة الأرقام عن يمين الفاصلة أولا بأول.

مثال 1: على الطريقة الأولى: نريد ترتيب العددين 1 و $\sqrt{2}$

التمثيل:



إذا $\sqrt{2} > 1$

IPN

مثال 2: على الطريقة الثانية:

تريد مقارنة $\frac{2}{5}$ و $\frac{3}{19}$ بأخذ القيم العشرية:

$\frac{3}{19} = 0,15$ و $\frac{2}{5}=0,4$

بمقارنة العددين الصحيحين من العددين العشريين نجد أنهما يساويان صفر

نقارن العددين الأولين عن يمين الفاصلة نجد أن 4 أكبر من 1

اذن $\frac{2}{5} > \frac{3}{19}$

و - تطويق عدد حقيقي

كل عدد حقيقي يمكن تطويقه ما بين عددين صحيحين أو عددين عشريين نسبيين برقم أو أكثر بعد الفاصلة.

مثال 3:

$\frac{5}{3}$ مطوقة بين رقمين 1 و 2 وتكتب $1< \frac{5}{3} <2$

- $\sqrt{2}$ مطوق بين 1,4 و 1,5 وتكتب :

$1,4 < \sqrt{2} < 1,5$

ونقول إن 1,4 و 1,5 قيمتان مقربتان بالنقص والزيادة على التوالي للعدد $\sqrt{2}$

- π مطوقة بين 3,14 و3.15 وتكتب:

$3,14 < \pi < 3,15$

ونقول إن 3,14 و 3,15 قيمتان مقربتان بالنقص والزيادة على التوالي للعدد π

- ولدينا أيضا $2.236 < \sqrt{5} < 2.237$

حيث إن 2,236 و2,237 هما قيمتان مقربتان بالنقص والزيادة على التوالي للعدد $\sqrt{5}$

2. العمليات في R

أ- الجمع

قاعدة 1 :

مجموع عددين حقيقين لهما نفس الإشارة هو عدد حقيقي:

- له نفس إشارتهما.
- يبعد عن صفر مركز مستقيم الأعداد مسافة تساوي مجموع مسافتي نفس العددين عن الصفر.

مثال 4:

$6,3 = 1,5 + 4,8$

$12,5- = (5,3-)+ (7,2-)$

قاعدة 2 :

مجموع عددين حقيقين مختلفي الإشارة هو عدد حقيقي :

- إشارته هي إشارة أبعدهما عن الصفر.
- قيمته هي الفرق بين قيمتيهما أو الفرق بين مسافتيهما عن الصفر.

مثال 5:

$1,2 = 5,3+ (4,1-)$

$4,3 = (10,5-) + 6,2$

IPN

قاعدة 3 :

طرح عدد حقيقي من عدد هو إضافة مقابله مثال:

$$12.3 - 15.1 = 12.3 + (-15.1) = -3.8$$

ب- خاصيات الجمع في الأعداد الحقيقية

- الجمع في R هو تبادلي وتجميعي: $3 = 5 + (-2) = (-2) + 5$(التبادل)

$15 = 5 + (3 + 7) = (5 + 3) + 7$(التجميعي)

- العدد صفر هو العنصر المحايد لعملية الجمع : $-2 + 0 = 0 + (-2) = -2$; $5 + 0 = 0 + 5$
- لكل عدد حقيقي x يوجد مقابل يعرف ب مقا (x) أو $(-x)$ أو $Opp\ (x)$ بحيث:

$x + Opp\ (x) = 0$; 5+(-5)= (-5)+5=0

$x + -x = 0$

ملاحظة 1:

كل قواعد نزع الأقواس التي تم العمل بها في مجموعات الأعداد السابقة تبقى صحيحة في الأعداد الحقيقية بحيث نقبل الصيغ التالية :

مقابل مقابل (a) = a : -(-5)=5

مقابل (a + b) = مقابل (a) + مقابل (b) : $-(3.5 + 7) = (-3.5) + (-7)$

مقابل (a - b) = مقابل (a) - مقابل (b) : $-(5 - 9) = (-5) - (-9)$

ج- الضرب في الأعداد الحقيقية

قاعدة 4:

جداء عددين حقيقين هو عدد حقيقي:

إشارته:

- موجبة إذا كانت لهما نفس الإشارة : $2 \times 3 = 6$; $(-2) \times (-3) = 6$
- سالبة إذا كانا مختلفي الإشارة : $2 \times (-3) = (-6)$; $(-2) \times 3 = (-6)$

د - خاصيات الضرب

- ضرب الأعداد الحقيقية تبادلي وتجميعي العدد 1 هو العنصر المحايد.
- لكل لعدد حقيقي x يوجد مقلوب يسمى x أومقلوب x أو $\frac{1}{x}$ بحيث $x.\frac{1}{x} = 1$:5 مقلوبها $\frac{1}{5}$
- الضرب توزيعي بالنسبة للجمع والطرح $a(b + c) = a \times b + a \times c$: $2(3 + 7) = 2 \times 3 + 2 \times 7 = 6 + 14$
- لكل عدد حقيقي x فإن $x \times 0 = 0$ وحاصل ضرب عددين غيرمنعدمين هو عدد غير منعدم.

قاعدة 5:

إذا كانت x و y عددين حقيقين و $x \times y = 0$

فإن : $x = 0$ أو $y = 0$

قاعدة 6:

- القسمة على عدد يعني الضرب في مقلوبه : $6 \div 2 = 6 \times \frac{1}{2}$
- مقلوب مقلوب (a) هو a
- مقلوب (a × b)= مقلوب (a) × مقلوب (b)

ملاحظة 2 :

قواعد التوزيعية المزدوجة التي طبقت في مجموعات الأعداد السابقة تبقى صحيحة في R وسيتم التعرض لها بالتفصيل في فصل الحساب الحرفي.

2. الكسور

قاعدة 7:

لكل عدد حقيقي a, b, c, d مع c و d يختلفان عن الصفر فإن :

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c} \quad \text{et} \quad \frac{a}{c} + \frac{b}{d} = \frac{a \times d + b \times c}{c \times d}$$

IRN

مثال 7:

- $\frac{2}{5}+\frac{1}{5}=\frac{2+1}{5}=\frac{3}{5}$
- $\frac{1}{4}+\frac{2}{7}=\frac{1\times7+4\times2}{4\times7}=\frac{7+8}{28}=\frac{15}{28}$

قاعدة 8:

لكل عدد حقيقي a, b, c, d مع b و d يختلفان عن الصفر فَإن :

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}$$

مثال 8:

$$\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}=\frac{2\times4}{3\times5}=\frac{8}{15}$$

قاعدة 9:

$$\frac{\frac{a}{b}}{c}=\frac{a}{b}\cdot\frac{1}{c} \qquad \text{و} \qquad \frac{a}{\frac{b}{c}}=a\cdot\frac{c}{b}$$

مثال 9 :

- $\frac{2}{\frac{3}{5}}=2\times\frac{5}{3}=\frac{2\times5}{3}=\frac{10}{3}$
- $\frac{\frac{7}{2}}{6}=\frac{7}{2}\times\frac{1}{6}=\frac{7}{12}$

4. الأسس

أ - التعريف

ليكن x عدد حقيقي غير منعدم و n عدد طبيعي $1<$

$a^n=a\times a\times a\times\ldots\ldots\times a,$ (n مرة) $(3^4=3\times3\times3\times3)$

- نقبل أن $a^0=1$ حيث a غير منعدم. $5^0=1$

خاصية 1:

1- ليكن a عدد حقيقي غير منعدم و n عدد طبيعي

$a^{-n}=\frac{1}{a^n}$, $(2^{-3}=\frac{1}{2^3})$

نسمي a^{-n} مقلوب a^n

ب - بعض قواعد الأسس

إذا كان a وb عددين حقيقين غير منعدمين
و p , m ,n أعداد طبيعية فإن:

$a^n\times a^p=a^{n+p}$ $(3^4\times3^7=3^{11})$

$(a^n)^p=a^{n\times p}$ $((2^4)^5=2^{20})$

$\left(\frac{a}{b}\right)^p=\frac{a^p}{b^p}$ $\left(\left(\frac{2}{3}\right)^7=\frac{2^7}{3^7}\right)$

$\frac{a^n}{a^p}=a^{n-p}$ $\left(\frac{2^5}{2^3}=2^{5-3}\right)$; $\left(\frac{a}{b}\right)^{-p}=\left(\frac{b}{a}\right)^p$ $\left(\left(\frac{3}{5}\right)^{-4}=\left(\frac{5}{3}\right)^4\right)$; $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$ $\left(3^{-5}=\frac{1}{3^5}\right)$

IPN

6. الجذور

أ- مفهوم الجذر التربيعي

نسمي الجذر التربيعي لعدد موجب a العدد الموجب الذي مربعه يساوي a ونرمز له بالرمز $\sqrt{a}$ ونقرأه الجذر التربيعي ل a أو جذر a

مثال 10:

$$\sqrt{25^2} = 25 \qquad \sqrt{25} = 5 \qquad \sqrt{4^2} = 4 \quad \text{و} \quad \sqrt{4} = 2$$

$\sqrt{a} = 0$ يعني $a = 0$, $\sqrt{a} > 0$ دائما و $\sqrt{a}$ ليس له معنى اذا كان $a < 0$

ب- العمليات على الجذور

- **الجداء وخارج القسمة:**

ليكن a و b عددين حقيقين موجبين و $b \neq 0$

$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$; $\sqrt{4 \times 9} = \sqrt{4} \times \sqrt{9} = 2 \times 3 = 6$ و $\sqrt{4 \times 9} = \sqrt{36} = 6$ ،

$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$; $\sqrt{\frac{100}{4}} = \frac{\sqrt{100}}{\sqrt{4}} = \frac{10}{2} = 5$ و , $\sqrt{\frac{100}{4}} = \sqrt{25} = 5$

- **الجمع والجذر التربيعي :**

قاعدة 10 :

إذا كان a و b عددين حقيقين موجبين فإن:

$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$

$\sqrt{16+9} = +\sqrt{25} = 5 \neq \sqrt{16} + \sqrt{9} = 4 + 3 = 7$

كتابة جذر على شكل $a\sqrt{b}$

قاعدة 11:

ليكن a عدد حقيقي موجب ليس له جذر محدد يمكن تبسيط $\sqrt{a}$ كما يلي:

$$\sqrt{a} = \sqrt{b^2 c} = \sqrt{b^2} \times \sqrt{c} = b\sqrt{c}$$

إذن نقول إننا كتبنا $\sqrt{a}$ على شكل $b\sqrt{c}$ حيث b و c عددين موجبين.

مثال 11: $\sqrt{75} = \sqrt{25 \times 3} = \sqrt{25} \times \sqrt{3} = 5\sqrt{3}$

- **القوى والجذر التربيعي:**

ليكن a عدد حقيقي موجب و n عدد طبيعي فإن : $\sqrt{a^{2n}} = a^n$:

$$\sqrt{a^{2n+1}} = \sqrt{a^{2n}} \, X \sqrt{a} = a^n \sqrt{a}$$

- **التخلص من الجذر في المقام:**

قاعدة 12:

للتخلص من الجذر في المقام لكسر معين نضرب بسطه ومقامه بالمرافق

مثال 12:

$$\frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{2}{3+\sqrt{5}} = \frac{2 \times (3-\sqrt{5})}{(3+\sqrt{5}) \times (3-\sqrt{5})} = \frac{6-2\sqrt{5}}{9-5} = \frac{6-2\sqrt{5}}{4}$$

IPN

7. القيمة المطلقة

أ- التعريف

x عدد حقيقي ، M نقطة من المستقيم مزود بالمعلم (O.I) فاصلتها x

القيمة المطلقة للعدد x هي المسافة OM ، وترمز إليها بالرمز $|x|$: ونكتب $|x| = OM$

ب - نتيجة

القيمة المطلقة للعدد الموجب a هي a نكتب $|a| = a$ مثلا $|3| = 3$

القيمة المطلقة للعدد السالب a هي -a نكتب $|a| = -a$ مثلا $|-3| = -(-3) = 3$

ج - خواص

بفرض x و y عددين حقيقيين لدينا :

⌂ $\left\|\frac{x}{y}\right\| = \frac{\|x\|}{\|y\|}$	⌂ $\|x\| \geq 0$
⌂ $\|x\| = a \Leftrightarrow x = a$ او $x = -a$;	⌂ $\|x\| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$
⌂ $\|x\| = \|y\| \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ \text{او} \\ x = -y \end{cases}$	⌂ $\|x\| \geq a \Leftrightarrow x \leq -a$ او $x \geq a$
	⌂ $\|x - a\| \leq b \Leftrightarrow a - b \leq x \leq a + b$
	⌂ $\|x\| \times \|y\| = \|x \times y\|$

مثال 13:

اكتب بدون قيمة مطلقة الأعداد التالية

$$|6 - \sqrt{10}| \; ; \; \left|\frac{\sqrt{12}-4}{5-\sqrt{24}}\right| ; \; |3 - \sqrt{13}| \; ;$$

الحل :

- $3 < \sqrt{13} \Rightarrow 3 - \sqrt{13} < 0$

$$opp(3 - \sqrt{13}) = \sqrt{13} - 3 > 0 \Rightarrow |3 - \sqrt{13}| = \sqrt{13} - 3$$

- $\sqrt{12} - 4 < 0$ و $5 - \sqrt{24} > 0 \Rightarrow |\sqrt{12} - 4| = 4 - \sqrt{12}\; et \; |5 - \sqrt{24}| = 5 - \sqrt{24}$

$$\Rightarrow \left|\frac{\sqrt{12} - 4}{5 - \sqrt{24}}\right| = \frac{|\sqrt{12} - 4|}{|5 - \sqrt{24}|} = \frac{4 - \sqrt{12}}{5 - \sqrt{24}}$$

- $6 > \sqrt{10} \Rightarrow 6 - \sqrt{10} > 0 \Rightarrow |6 - \sqrt{10}| = 6 - \sqrt{10}$.

مثال 14:

أوجد المجهول أو مجموعة المجاهيل x في الحالات التالية

a) $|x| = 7$; **b)** $|x| = -4$; **c)** $|x - 4| = 1$; **d)** $|1 - 2x| = 3$; **e)** $|x - 5| < 2$; **f)** $|x + 1| \geq 7$.

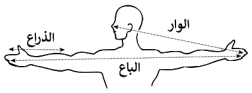
الحل :

- **a)** $|x| = 7 \Leftrightarrow (x = -7$ او $x = 7) \Rightarrow \boldsymbol{S} = \{-7; 7\}$
- **b)** $|x| = -4 \Rightarrow \boldsymbol{S} = \boldsymbol{\Phi}$ (لا يوجد حل).

IPN

- **c)** $|x-4|=1 \Leftrightarrow (x-4=-1 \text{ او } x-4=1)$ اذن $x=3$ او $x=5 \Rightarrow S=\{3;5\}$
- **d)** $|1-2x|=3 \Leftrightarrow (1-2x=-3 \; ou \; 1-2x=3)$ اذن $x=2$ او $x=-1 \Rightarrow S=\{-1;2\}$
- **e)** $|x-5|<2 \Leftrightarrow (-2<x-5<2)$ اذن $3<x<7 \Rightarrow S=]3;7[$
- **f)** $|x+1|\geq 7 \Leftrightarrow (x+1\leq -7 \text{ او } x+1\geq 7)$ اذن $x\leq -8$ او $x\geq 6 \Rightarrow S=]-\infty;-8]\cup[6;+\infty[$

8. المقاييس الإسلامية



استخدم المسلمون منذ العهود الأولى للنبوة مقاييس متعددة في التعاملات اليومية من بيع وشراء وعبادات كالزكاة والفرائض والصيام. وقد وجه الإسلام إلى ضبط الكيل والوزن في كم من آية قرآنية ونهى عن التطفيف والغش في آيات أخرى.

أ- مقاييس الطول والمسافات

المقياس	المقدار	ملاحظة
الشبر	22سم	مسافة الخنصر إلى الإبهام
القدم	30 سم	طول القدم إلى الأصبع الأكبر
الذراع	46,2 -55 سم	مسافة من المرفق إلى الأصبع الأيسر
الباع	184,8 سم	المسافة بين طرفي الذراعين
الميل	1848 م	ألف باع
الفرسخ	5554 م	ثلاثة أميال
البريد العربي	22176 م	أربع فراسخ

ب - مقاييس الكيل والسعة

المقياس	مقداره	ما يعادله بالليتر
المد	ملئ اليدين لا مقبوضتين ولا مبسوطتين	0,68 ليتر
الصاع	أربعة أمداد	3,36 ليتر
الوسق	ستون صاعا	180 ليتر
الإردب	96 صاعا	270 ليتر

ج - مقاييس النقد

المعدن	العملة	الوزن
ذهب	دينار	4,25 غرام
فضة	درهم	2,97 غرام

د - مقاييس الوزن

المقياس	وزنه بالجرام	ملاحظة
النقير	لا قيمة له	النقطة الصغيرة على ظهر نوى التمر
الفتيل	لا قيمة له	الخيط الرفيع في شق النوى
القطمير	لا قيمة له	غلاف النواة
القيراط	0,2 غرام	-
المثقال	4 غرام	-
الرطل الشرعي	380.8 غرام	-
القنطار	143 كيلوغرام	-

IRN

تمارين تطبيقية

تمرين 1:

رتب الأعداد التالية ترتيبا تصاعديا: $\sqrt{3}\ ;\ 3{,}1\ ;\ \pi\ ;\ -12\ ;\ 2{,}14\ ;\ -\frac{2}{3}\ ;\ \sqrt{2}\ ;\ \frac{1}{2}\ ;\ -2\ ;\ 2{,}5$

تمرين 2: احسب :

1- $A= -3{,}5 - \sqrt{2} + \text{Opp}\,(5-3\sqrt{2})$

2- انزع الأقواس واحسب

$$(2\sqrt{3} - 4) + (1+(5-\sqrt{3}))$$

تمرين 3 :

بسط إلى أبعد عدد ممكن: $A=\frac{\frac{\pi}{2}}{3}$ $B=\frac{\pi}{\frac{2}{3}}$ $C=\frac{\pi+1}{\frac{2}{3}}$ $D=\frac{\frac{\pi}{2}}{\frac{1}{2}}$

تمرين 4 :

من بين الكتابات التالية أيها يمثل نفس العدد؟

$$a^2 \times a^3\ ,\ a^9 \times a^5\ ,\ a^5 \times a\ ,\ a^2\ ,\ (a^3)^3\ ,\ (2b)^2\ ,\ 2b^2\ ,\ a^5b^5\ ,\ 5ab\ ,$$
$$8b^3, 2b^3\ ,\ (a \times b)^5$$

تمرين 5:

اكتب على شكل $a\sqrt{5}$ ، $a\sqrt{10}$ ، $a\sqrt{3}$، $a\sqrt{6}$

حيث a عدد طبيعي

$A= \sqrt{4 \times 3}$ $B= \sqrt{27}$ ، $C= \sqrt{300}$ $D= \sqrt{1000}$

$E= \sqrt{125}$ $F= \sqrt{500}$ $G= \sqrt{90}$ $I= \sqrt{150}$

تمرين 6:

بسط بأبعد حد ممكن وبدون جذر في المقام: $\frac{1}{\sqrt{5}}$ ، $\frac{1}{2+\sqrt{3}}$، $\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$، $\frac{\sqrt{3}}{4-\sqrt{3}}$، $\frac{4}{\sqrt{2}-5}$

تمارين المقاييس الإسلامية:

تمرين 7:

كم شبر في الباع الواحد ؟

تمرين 8:

إذا كان عندك 4 أمداد من التمر فكم صاعا تملك؟

تمرين 9:

احسب زكاة الفطر لعائلة مكونة من 6 أشخاص علما أن الفرض صاع لكل شخص.

تمرين 10:

إذا أعطيت رجلا 10 دنانير ذهبية فما الوزن الإجمالي لما أعطيته بالغرام؟

تمرين11:

رتب من الأكبر إلى الأصغر.

الفتيل، القطمير، النقير، المثقال.

IPN

المجال الأول: الجبر

الفصل الثاني

الحســـاب الحرفـــي

1. الحساب الحرفي

أ- تعريف

نعني بالحساب الحرفي استخدام أحرف مثل $x, y \ldots . c \ , b \ , a$
لتمثيل الأعداد في العمليات الحسابية ويتيح التعامل مع الأعداد المجهولة أو المتغيرة بدلا من التعامل مع أعداد محددة فقط مما يسمح بإعطاء قواعد عامة سهلة الاستخدام كما يساعد الحساب الحرفي في تبسيط المسائل الرياضية المعقدة.

ب - العبارة الجبرية

هي مقدار جبري يتم فيه التعبير عن عدد أو أعداد بواسطة أحرف مثال:

$A= 2a + 3b + c$

ملاحظة 1:

- إذا تكرر الحرف في العبارة فإنه يحدد نفس العدد:

$$A = 2a + (5b + 3a + 4c) + 2b$$

- للحصول على القيمة العددية للعبارة الجبرية أو المقدار الجبري نستبدل الأحرف بأعداد حقيقية.

ملاحظة 2:

إذا كان الحرف يمثل عدد غير محدد بقيمة ثابتة فإننا نسميه "**متغيرا**"
أما إذا كان هذا الحرف يمثل قيمة ثابتة فإننا نسميه " **ثابتا**"

ج - اختصار عبارة جبرية

قاعدة: اختصار عبارة جبرية يعني تحويلها إلى مجموع ذي حدود أقل .

مثال : $A = x^3 + 2x + 5 + 2x^3 - x^2 - 2 = 3x^3 - x^2 + 2x + 3$

$B = 5a + b - 2a + 3 - 4b = 3a - 3b + 3$

د - نزع الأقواس

لنزع الأقواس في عبارة جبرية يمكن الاستفادة من الصيغ التالية:
لكل ثلاث أعداد a, b ,c نجد أن:

$$a + (b + c) = a + b + c$$
$$a - (b + c) = a - b - c$$
$$a + (b - c) = a + b - c$$
$$a - (b - c) = a - b + c$$

مثال :

بسط العبارات التالية : $3c - (5 + 2c);\ a - (6a - 7); y + (9 - 4y)\ ; 2x + (x + 3)$

الحل :

$$2x + (x + 3) = 2x + x + 3 = 3x + 3$$
$$y + (9 - 4y) = y + 9 - 4y = -3y + 9$$
$$3c - (5 + 2c) = 3c - 5 - 2c = c - 5$$
$$a - (6a - 7) = a - 6a + 7 = -5a + 7$$

2. نشر عبارة

أ - قاعدة التوزيعية البسيطة

لكل x, y, k أعداد حقيقية نجد أن:

$$K(x + y) = kx + ky$$
$$K(x - y) = kx - ky$$

مثال :

$$5(x + 8) = 5x + 40$$
$$x(x - 5) = x^2 - 5x$$

ب - التوزيعة المزدوجة

- لكل الأعداد الحقيقية a, b , y فإن الصيغ التالية صحيحة:

$$(a + b)(x + y) = ax + ay + bx + by$$
$$(a + b)(x - y) = ax - ay + bx - by$$
$$(a - b)(x + y) = ax + ay - bx - by$$
$$(a - b)(x - y) = ax - ay - bx + by$$

مثال : نشر ثم بسط العبارات التالية

$$(2 + x)(x + 3); (x + 5)(x - 3); (3 - x)(x + 7); (2 - b)(3 - b)$$

IPN

الحل :

$$(2+x)(x+3) = 2x+6+x^2+3x = x^2+5x+6$$
$$(x+5)(x-3) = x^2-3x+5x-15 = x^2+2x-15$$
$$(3-x)(x+7) = 3x+21-x^2-7x = -x^2-4x+21$$
$$(2-b)(3-b) = 6-2b-3b+b^2 = b^2-5b+6$$

ومن نتائج التوزيعية أيضا:

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a(a+b)+b(a+b) = a^2+2ab+b^2$$
$$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a(a-b)-b(a-b) = a^2-2ab+b^2$$
$$(a+b)(a-b) = a(a-b)+b(a-b)$$
$$= a^2-ab+ab-b^2$$
$$= a^2-ab+ab-b^2$$
$$= a^2-b^2$$

إذن $(a+b)(a-b) = a^2-b^2$

هذه المتساويات الأخيرة تسمى المتطابقات الشهيرة.

إليك أيضا متطابقات شهيرة من درجة ثالثة:

$$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$
$$(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$$
$$a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$$
$$a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2).$$

ملاحظة 3:

المتطابقتان الأولى والثانية تستخدمان في نشر الأقواس والمتطابقتان الثالثة والرابعة تستخدمان لتحليل إلى جداء عوامل.

مثال :

$$(2+x)^2 = 2^2+2\times2\times x+x^2 = 4+4x+x^2$$
$$(3-x)^2 = 3^2+2\times3\times x+x^2 = 9+6x+x^2$$
$$(x+5)(x-5) = x^2-5^2 = x^2-25$$
$$(2+3x)^2 = 2^2+2\times2\times3x+(3x)^2 = 4+12x+9x^2$$
$$(3-5x)^2 = 3^2-2\times3\times5x+(5x)^2 = 9-30x+25x^2$$
$$(4x+5)(4x-5) = (4x)^2-5^2 = 16x^2-25$$
$$(x+2)^3 = x^3+3x^2\times2+3x\times2^2+2^3 = x^3+6x^2+12x+8$$
$$(x-5)^3 = x^3-3x^2\times5+3x\times5^2-5^3 = x^3-15x^2+75x-125$$

3. تحليل عبارة جبرية

تعريف : تحليل عبارة جبرية هو كتابتها على شكل جداء عوامل.

قاعدة 1:

لتحليل عبارة جبرية نستخدم العوامل المشتركة أو المتطابقات الشهيرة.

مثلا:

- $ax+ay = a(x+y)$
- $(a+b)(x+y)+(a+b)(5x-2y) = (a+b)(x+y+5x-2y) = (a+b)(6x-y)$
- $(a+b)(x+y)-(a+b)(5x-2y) = (a+b)\big(x+y-(5x-2y)\big) = (a+b)(x+y-5x+2y) = (a+b)(-4x+3y)$
- $a^2+2ab+b^2 = (a+b)^2$
- $a^2-2ab+b^2 = (a-b)^2$
- $a^2-b^2 = (a+b)(a-b)$
- $9+6x+x^2 = (3+x)^2$
- $4x^2+8x+4 = (2x+2)^2$
- $9x^2-6x+1 = (3x-1)^2$
- $9-25x^2 = 3^2-(5x)^2 = (3-5x)(3+5x)$
- $(x+3)(x+2)+9+6x+x^2 = (x+3)(x+2)+(3+x)^2 = (x+3)(x+2)+(x+3)(x+3) = (x+3)(x+2+x+3) = (x+3)(2x+5)$
- $8x^3+27 = (2x)^3+3^3 = (2x+3)((2x)^2-2x\times3+3^2) = (2x+3)(4x^2-6x+9)$
- $x^3+6x^2+12x+8 = x^3+3x^2\times2+3x\times2^2+2^3 = (x+2)^3.$

تمارين تطبيقية

تمرين1:
اختصر العبارات التالية:

$$A = 27 - (-32 + a - b) + (45 - a - b) + (-64 - a - b)$$
$$B = (a - 12 + b) - (45 - a) + (b + 93) - (-12 - a - b)$$

تمرين 2: انشر:

$$A = 3{,}5\,(x + 2{,}1)$$
$$B = (-1{,}3)\,(y + 2)$$
$$C = x\,(2 - y)$$

تمرين 3:
نعطي $E = 7x - 8\,;\ F = 4x^2 - x + 4$

1- احسب E من أجل $x = 2$ و $x = -2$
2- احسب F من أجل $x = 2$ و $x = -2$

تمرين 4:
فكك العبارات التالية:

$$M = (8x + 9)^2\,;\ N = (7x - 12)^2\,;\ P = (8x + 9)(8x - 9)$$

تمرين 5:
حلل

$$A = 4x^2 - 12x + 9 \qquad B = (2x - 3)^2 - 4$$

تمرين 6:
انشر واختصر ورتب:

$$H = (x + 5)^2\,;\ I = (4x + 6)^2\,;\ J = 7x(2x - 5)\,;\ k = (2x - 5)(3x - 2)$$

تمرين 7:
استعمل المتطابقات الشهيرة لتبسيط ما يلي :

$$A = (x + 7)^2$$
$$B = (2x + 3)^2$$
$$C = (x + 5)(x - 5)$$

تمرين 8:
أثبت أن

$$(x + 2)^2 - (x - 2)^2 = 8x$$

$$(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2)$$

تمرين 9:
مستطيل طوله $(x + 3)$ و عرضه $(x - 2)$
اكتب عبارة محيطه
احسب المجهول x في حالة المحيط يساوي 104.
اكتب عبارة مساحته
احسب المجهول x في حالة المساحة تساوي 104.

IPN

المجال الأول: الجبر

الفصل الثالث

المعدلات و المتراجحات والأنظمة

1. المعادلات

أ- حل المعادلات من الدرجة الأولى ذات المجهول الواحد

1. حلول المعادلة : $ax + b = c$

- ***قواعد الحساب:***

$$ax + b = c \iff ax = c - b$$

إذا كان : $a \neq o$ فإن

$$x = \frac{c - b}{a}$$

تنبيه 1 :

يجب التمييز بين $2x = 6$ و $2 + x = 6$

في الحالة الاولى: $2 + x = 6$

$\Rightarrow x = 6 - 2$

$\Rightarrow x = 4$

في الحالة الثانية : $2x = 6$

$\Rightarrow x = \frac{6}{2}$

$\Rightarrow x = 3$

ملاحظة 1 :

إذا كان $a \neq 0$ فإن : $ax = 0 \iff x = 0$

تمرين محلول 1:

حل في $\boldsymbol{R}$ المعادلة : $7x - 3 = 9x + 5$

$$7x - 3 = 9x + 5 \implies 7x - 9x = 5 + 3 \implies -2x = 8 \implies x = \frac{8}{-2} \implies x = -4$$

للتحقق الطرف الأول $7 \times (-4) - 3 = -28 - 3 = -31$

الطرف الثاني $9 \times (-4) + 5 = -36 + 5 = -31$

ملاحظة 2 :

المعادلة $0x = b$ لا تقبل أي حل إذا كان $b \neq 0$ لأن الجداء في 0 معدوما دائما

ملاحظة 3 :

في المعادلة: $0x = 0$ جميع الاعداد هي حلول

2. حلول المعادلة : $(ax + b)(cx + d) = 0$, $x \in \mathcal{R}, a \neq 0$ و $c \neq 0$

هذا النوع من المعادلات عبارة عن جداء رقمين يساوى صفرًا مما يعني أن أحدهما يساوي صفرا إذن

$(ax + b)(cx + d) = 0$ تكافئ $ax + b = 0$ او $cx + d = 0$

مما يعني أن مجموع حلول المعادلة $(ax + b)(cx + d) = 0$, $x \in \mathcal{R}$ هي اتحاد مجموع حلول $ax + b = 0,\ x \in \mathcal{R},$ و $cx + d = 0,\ x \in \mathcal{R},$

تمرين محلول 2: حل في R المعادلات التالية

$a)\ x^2 - 8x + 16 = 0$ $b)\ x^2 = 9.$ $c)\ (3\sqrt{2}x - 6)(x - \sqrt{3}) = 0$

IPN

الحل

$(3\sqrt{2}x-6)(x-\sqrt{3})=0$ $\Rightarrow 3\sqrt{2}x-6=0$ او $x-\sqrt{3}=0$ اي $\Rightarrow 3\sqrt{2}x=6$ او $x=\sqrt{3}$ $\Rightarrow x=\frac{6}{3\sqrt{2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$ و $x=\sqrt{3}$ اذن الحل هو $S=\{\sqrt{2};\ \sqrt{3}\}$	$x^2=9$ $\Rightarrow x^2-9=0$ $\Rightarrow x^2-3^2=0$ $\Rightarrow (x-3)(x+3)=0$ $\Rightarrow x-3=0$ او $x+3=0$ $\Rightarrow x=3$ او $x=-3$ اذن الحل هو $S=\{-3;\ 3\}$	$x^2-8x+16=0$ $\Rightarrow x^2-2\times 4x+4^2=0$ $\Rightarrow (x-4)^2=0$ $\Rightarrow (x-4)(x-4)=0$ $\Rightarrow x-4=0$ $\Rightarrow x=4$ اذن الحل هو $S=\{4\}$

ملاحظة 4 :

المعادلات من الشكل $ax^2+bx+c=0$ هي معادلات من الدرجة الثانية و حلها إما بكتابتها على شكل جداء عوامل أولية أي $(ax+b)(cx+d)=0$ وتطبيق الطريقة السابقة او باستخدام المحدد $\Delta=b^2-4ac$ وهو ما سندرسه السنة المقبلة باذن الله

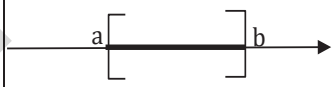
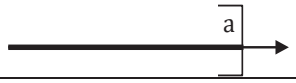
2. المتراجحات

أ- المجالات

تذكير ببعض التعاريف:

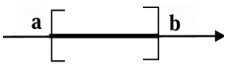
المتباينات والمجالات

a و b عددان حقيقيان بحيث $a \leq b$

التمثيل البياني	مجموعة الأعداد الحقيقية x بحيث	المجال	الترميز
	$a \leq x \leq b$	مغلق من الطرفين a و b	$x \in [a,b]$
	$a < x < b$	مفتوح من الطرفين a و b	$x \in]a,b[$
	$a < x \leq b$	مفتوح عند a ومغلق عند b	$x \in]a,b]$
	$a \leq x < b$	مفتوح عند b ومغلق عند a	$x \in [a,b[$
	$x \leq a$	نصف مستقيم مغلق من اليمين	$x \in]-\infty,a]$
	$x \geq a$	نصف مستقيم مغلق من اليسار	$x \in [a,+\infty[$

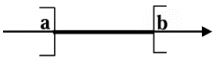
المجال المغلق [a,b] هو مجموعة الاعداد الحقيقية x بحيث

$a \leq x \leq b$



IPN

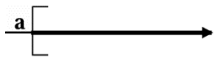
المجال المفتوح $]a,b[$ مجموعة الأعداد الحقيقية x بحيث

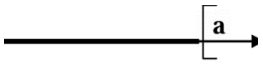


$a < x < b$

العدد الحقيقي b-a هو طول المجال [a,b] أو $]a,b[$

نصف المستقيم المغلق من اليسار [a , $+\infty$ [هو مجموع الأعداد الحقيقية x حيث : $x \geq a$

نصف المستقيم  المغلق من اليمين] $-\infty$, a] هو مجموعة الأعداد الحقيقية x,



بحيث: $x \leq a$

ب - المتراجحات من الدرجة الأولى ذات المجهول الواحد

يجب معرفة المتراجحة من الشكل الآتي:

$$ax + b < 0, \quad ax + b > 0, \quad ax + b \leq 0, \quad ax + b \geq 0,$$

والبحث عن جميع الأعداد الحقيقية x التي تحقق المتراجحة المفروضة.

مثال 1:

1) حل في $\boldsymbol{R}$ المتراجحة : $2x - 9 > 0$

$$2x - 9 > 0 \implies 2x > 9 \implies x > \frac{9}{2}$$

مجموع الحلول هو المجال: S =] $\frac{9}{2}$, $+\infty$ [

2) حل في R المتراجحة : $24 - 3x < 0$

$$-3x < -24 \implies x > \frac{-24}{-3} \implies x > \frac{24}{3} \implies x > 8$$

إذن مجموع الحلول هو المجال : s =] 8 , $+\infty$ [

ج - قواعد هامة للحساب

1) إذا كان $a > O$:	1) إذا كان $a < O$:
$ax < b$	$ax < b$
$\Leftrightarrow x < \frac{b}{a}$	$\Leftrightarrow x > \frac{b}{a}$

تنبيه 2 :

لا تنس بأن **تغير اتجاه المتراجحة** عندما تقسم أو تضرب في عدد سالب.

ملاحظة 5 :

في الحالة : a = 0

إذا كانت المتراجحة المفروضة تكتب على الشكل: $0\ x < b$

يجب أن ننظر إلى إشارة b

الحالة الأولى : b> 0 (المتراجحة محققة دائما) s =R

الحالة الثانية : $b < 0$ S = { $\emptyset$ }

IPN

مثال 2:

حل في R : $\frac{2x-7}{2} + x - 1 < 2\,(1+x)$

نضرب طرفي المتراجحة في 2:

$2x - 7 + 2x - 2 < 4x + 4$

$0x < 13$

هذه المتراجحة الأخيرة صحيحة مهما يكن العدد الحقيقي x

ومنه S=R

تمرين محلول 3 :

حل في R : $\frac{2x-4}{x+1} > 0$

الحل:

يكون حاصل القسمة معرفا إذا وافق، إذا كان المقام يختلف عن الصفر. $x + 1 \neq 0$ أي أن : $x \neq -1$

يكون حاصل القسمة موجبا إذا وافق، إذا كان حداه لهما نفس الإشارة ومنه إذا كان

$x \neq -1$ فإن

$(2x - 4 < 0 \text{ و } x + 1 < 0)$ أو $(2x - 4 > 0 \text{ و } x + 1 > 0)$

$\frac{2x-4}{x+1} > 0 \Leftrightarrow$

$(2x < 4 \text{ و } x < -1)$ أو $(2x > 4 \text{ و } x > -1) \Leftrightarrow (x < 2 \text{ و } x < -1)$ أو $(x > 2 \text{ و } x > -1)$

$\Leftrightarrow x > 2$ أو $x < -1$

مجموعة الحلول هي اتحاد المجالين $]-\infty\,;-1[$ و $]2\,;+\infty[$

ومنه : $S =]-\infty\,;-1[\cup]2\,;+\infty[$

يمكن تلخيص النتائج في الجدول التالي:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$2x-4$	$-$		$-$		0	$+$	
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$		
$\frac{2x-4}{x+1}$	$+$	‖	$-$		$+$		

IPN

3. نظام معادلتين من الدرجة الأولى ذات مجهولين

أ- تعريف النظام

هو مجموعـة من معادلتين خطيتين تحتويان على نفس المجهولين x و y ويمكن كتابتهما بالشكل العام $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ حيث :

a, b, c, a', b', c', -معاملات الأعداد (قد تكون موجبة أو سالبة).

حل النظام هو إيجاد زوج الأعداد (x, y) الذي يحقق المعادلتين معًا في نفس الوقت.

ب - طرق الحل

هناك عدة طرق للحل نذكر منها

* - طريقة التعويض

الخطوات

- اعزِل أحد المجهولين x مثلا من إحدى المعادلتين.
- عوّض الناتج في المعادلة الثانية
- حل المعادلة الجديدة لإيجاد قيمة المجهول الثاني y
- عوّض قيمة y في إحدى المعادلات الأصلية لإيجاد x

مثال 3

حل النظام: $\begin{cases} 2x - y = -4 \\ x + y = 1 \end{cases}$

الحل

نأخذ x من المعادلة الثانية $x + y = 1 \Rightarrow x = 1 - y$

نعوض في المعادلة الأولى نجد

$$2x - y = -4 \Rightarrow 2(1 - y) - y = -4 \Rightarrow 2 - 2y - y = -4 \Rightarrow 2 - 3y = -4 \Rightarrow -3y = -4 - 2 = -6 \Rightarrow y = \frac{-6}{-3} = 2$$

$$x = 1 - y \Rightarrow x = 1 - 2 = -1$$

الحل اذن هو (x, y)=(-1, 2)

لنتحقق $\begin{cases} 2 \times (-1) - 2 = -4 \\ -1 + 2 = 1 \end{cases}$

* - طريقة الحذف (الجمع أو الطرح)

الخطوات

- اضرب إحدى المعادلتين أو كليهما بأعداد مناسبة لجعل معاملات أحد المجهولين متساوية.
- اجمع المعادلتين أو اطرحهما لحذف ذلك المجهول.
- حل المعادلة الناتجة لإيجاد قيمة المجهول المتبقي.
- عوّض القيمة في إحدى المعادلات الأصلية لإيجاد المجهول الآخر.

مثال 4

حل النظام: $\begin{cases} 2x - y = -4 \\ x + y = 1 \end{cases}$

IPN

الحل

اضرب المعادلة (2) في (-2) تجد التالي:

$$\begin{cases} 2x - y = -4 \\ -2x - 2y = -2 \end{cases}$$

نجمع المعادلتين نجد:

$$-y + (-2y) = -4 + (-2) \Longrightarrow -3y = -6 \Longrightarrow y = \frac{-6}{-3} = 2$$

نعوض في المعادلة الأولى

$$2x - y = -4 \Longrightarrow 2x - 2 = -4 \Longrightarrow 2x = -4 + 2 \Longrightarrow 2x = -2 \Longrightarrow x = \frac{-2}{2} = -1$$

الحل اذن هو $(x, y) = (-1,2)$

لنتحقق $\begin{cases} 2 \times (-1) - 2 = -4 \\ -1 + 2 = 1 \end{cases}$

*** ـ طريقة الحذف (الجمع أو الطرح)**

نظام المعادلات يتكون من معادلتين خطيتين. لحله بيانياً:

- نرسم المستقيم الأول الذي يمثل المعادلة الأولى.
- نرسم المستقيم الثاني الذي يمثل المعادلة الثانية.
- نحدد نقطة تقاطع المستقيمين (إن وجدت).
- إحداثيات نقطة التقاطع هي حل النظام قيم x و y التي تحقق كلا المعادلتين.

حالات النظام:

1- حل وحيد: عندما يتقاطع المستقيمان في نقطة واحدة.

2- لا يوجد حل: عندما يكون المستقيمان متوازيين وغير متطابقين.

3- عدد لا نهائي من الحلول: عندما يتطابق المستقيمان.

تذكير :

تمثيل المعادلة بيانياً

كل معادلة خطية بمجهولين تمثل مستقيماً في المستوى الإحداثي.

خطوات رسم المستقيم:

1. نجد نقطتين تحققان المعادلة.
2. نرسم المستقيم المار بهاتين النقطتين.

مثال 5 :

حل النظام: $\begin{cases} 2x - y = -4 \\ x + y = 1 \end{cases}$

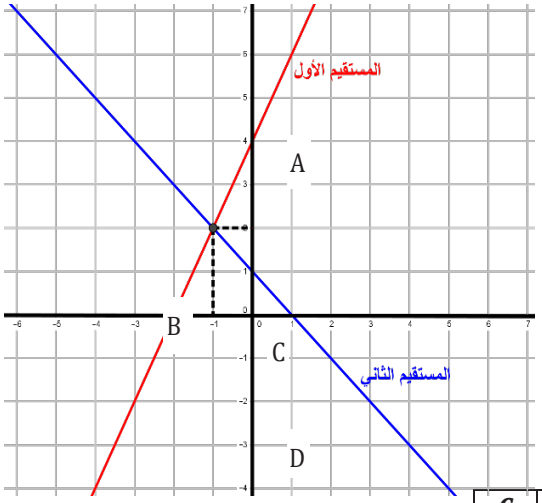
IPN

الحل :

-نرسم المستقيم الأول $(2x - y = -4)$ باستخدام النقطتين

A(0,4) و B (-1,2)

	A	B
x	0	-1
y	4	2



(نختار قيمة ل x ثم نحسب قيمة y) مثلا $x = 0$

$2 \times 0 - y = -4 \Rightarrow y = 4$

إذن المستقيم يمر من النقطة A(0,4)

نرسم المستقيم الثاني $(x + y = 1)$ باستخدام النقطتين C (0,1) و D(2,-1)

	C	D
x	0	2
y	1	-1

-نلاحظ تقاطع المستقيمين عند النقطة B(-1,2)

-إذن حل النظام هو $x = -1$ و $y = 2$

الحل إذن هو $(x, y) = (-1,2)$

لنتحقق $\begin{cases} 2 \times (-1) - 2 = -4 \\ -1 + 2 = 1 \end{cases}$

4. الطريقة العامة لحل النظام

$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$

حيث : a'. b'. c'. a . b .c أعداد حقيقية مفروضة

نضرب المعادلة الأولى في a' والثانية في a– نحصل على: $\begin{cases} aa' \times +a'by = ca' \\ -a'a \times -ab'y = -ac' \end{cases}$

بجمع المعادلتين نحصل على: (a'b - ab') y = ca' - ac'

بالرجوع إلى النظام الأول وضرب المعادلة الأولى في b' والثانية في b– نحصل على

$\begin{cases} ab'x + b'by = cb' \\ -a'b \times -bb'y = -bc' \end{cases}$

بجمع المعادلتين نحصل على: (ab' – a'b) x = b'c - bc'

إذا كان العدد ab' -a'b يختلف عن الصفر فإن:

النظام يقبل زوجا من الحلول هي: $x = \frac{b'c-bc'}{ab'-a'b}$, y $= \frac{a'c-ac'}{a'b-ab'} = \frac{ac'-a'c}{ab'-a'b}$

إذا كان العدد : ab' –a'b معدوما فإن النظام يقبل ما لا نهاية من الحلول في حالة ما إذا كان b'c-bc' و ac'-a'c معدومين في آن واحد , ولا يقبل أي حل إذا لم يكونا معدومين معا.

ملاحظة 6 :

نسمي محدد النظام Δ العدد $ab' - a'b$ ونكتبه $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b$

هذا العدد هو محدد المتجهين: $\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}$,

IPN

ملاحظة 7 :

نفرض $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$ (محدد النظام)

$\Delta x = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}$ (جعل العمود $\begin{pmatrix} c \\ c' \end{pmatrix}$ مكان العمود $\begin{pmatrix} a \\ a' \end{pmatrix}$ الذي هو عبارة عن معاملات x] و $\Delta y = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}$ (نجعل العمود $\begin{pmatrix} c \\ c' \end{pmatrix}$ مكان العمود $\begin{pmatrix} b \\ b' \end{pmatrix}$ الذي هو عبارة عن معاملات y)

زوج الحلول سوف يكون عبارة عن $y=\frac{\Delta y}{\Delta}$, $x=\frac{\Delta x}{\Delta}$

مثال 6 :

حل النظام: $\begin{cases} 2x - y = -4 \\ x + y = 1 \end{cases}$

الحل= :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \times 1 - 1 \times (-1) = 2 + 1 = 3$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix} = = (-4) \times 1 - 1 \times (-1) = -4 + 1 = -3$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \times 1 - 1 \times (-4) = 2 + 4 = 6$$

زوج الحلول سوف يكون عبارة عن

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{6}{3} = 2$$

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{-3}{3} = -1 ,$$

الحل إذن هو $(x, y) = (-1,2)$

لنتحقق $\begin{cases} 2 \times (-1) - 2 = -4 \\ -1 + 2 = 1 \end{cases}$

ملاحظة 8 :

طريقة التمثيل البياني هي طريقة بصرية رائعة لفهم حل أنظمة المعادلات، لكنها قد لا تكون دقيقة دائماً خاصة عندما تكون حلول النظام أعداداً غير صحيحة.

IPN

تمارين تطبيقية

تمرين 1:
حل في R المعادلات :

$a)\ 2x-4=0,$ $b)\ 2x+5=1,$ $c)\ 4x=8,$ $d)\ 3x=0$

تمرين 2:
حل المعادلات التالية في R

$a)\ x-3=10x+4,$ $b)\ 12x-4=3x+5,$ $c)\ 20x-24=24+30x,$

$d)\ -9x+8=11x-5,$ $e)\ 4(x-5)=2(2x-6)-8,$ $f)\ 6x-2(x-1)=2x+2.$

تمرين 3:
حديقة مستطيلة الشكل طولها $60m$ وعرضها $40m$ نضيف إلى طولها $5m$ كم ننقص من العرض لكي لا تتغير المساحة؟

تمرين 4:
أحمد عمره 5 سنوات وأبوه 25 سنة كم يصبح عمر أحمد عندما يكون عمر أبيه ضعف عمره؟

تمرين 5:
أوجد ثلاثة أعداد متتالية بحيث يكون مجموعها 375.

تمرين 6 :
عين جميع الأعداد التي تنتمي إلى المجالات :

$]-\infty\ ,\ 3\ ]\ ,\ [1\ ,\ 7\ ]\ ,\ [\ 2\ ,\ +\infty[$

تمرين 7 :
حل في R المتراجحات اللآتية:

$a)\ x-3\geq -10x+4,$ $b)\ 12x-4\leq 3x+5,$ $c)\ 20x-24<24+30x,$

$d)\ -9x+8<11x+5,$ $e)\ 4(x+2)\leq 2(2x-6)-8,$ $f)\ 6x-2(x-1)>2x+2.$

تمرين 8 :
حل في R : $\frac{1}{2}(5x-3)-\frac{1}{6}(8x-3)>\frac{1}{4}(3x-1)$

تمرين 9:
حل في R : $\frac{1}{3}(2x+1)-\frac{1}{2}(x-2)>\frac{x-1}{6}$

تمرين 10:
حل في R : $(3-x)(x+4)\geq 0$

تمرين 11 :
حل في R: $\frac{x+1}{3-4x}\geq 0$

تمرين 12:
حل في R : $\frac{x-1}{x-2}<4$

تمرين 13:
حل في R: $\frac{2x-5}{4-x}\leq 1$

IPN

تمرين 14:

حل في R : $-1 < \frac{2x+1}{x-1} < 1$

تمرين 15 :

حل في R: $\frac{x+3}{x-3} - \frac{x-3}{x+3} \leq \frac{36}{x^2-9}$

تمرين 16 :

وكالتان لتأجير السيارات أسماؤهما الترتيب POM و ROM تقترحان الأسعار الآتية للسيارات المتطابقة.

الوكالة POM 2900 أوقية يوميا للسيارة بالإضافة إلى 30 أوقية للكيلومتر.

الوكالة ROM 2500 أوقية يوميا للسيارة بالإضافة إلى 35 أوقية للكلومتر.

أ) قارن الأسعار المطبقة من طرف الوكالتين تبعا للعدد الكيلومترات المقطوعة, نرمز ب $P(x)$لسعر عدد الكيلومترات x المقطوع عند الوكالة POM و $R(x)$ لسعر عدد الكيلومترات x المقطوع عند الوكالة ROM مثل المنحنيات البيانية ل P و R
الوحدة 1 سم تمثل 20 كلم على المحور ox

الوحدة 1 سم تمثل 500أوقية على المحور oy

ب) بعد كم من كلومتر تصبح الوكالة ROM أكثر تشجيعا من الوكالة POM؟

تمرين 17:

(ABC) مثلث بحيث: AC = 3 cm, AB = 5cm , BC = 7cm

لتكن M نقطة من [AB] و N مسقط M على (AC) بموازاة (AB) عين وضعيات M بحيث يكون المثلث (AMN) أكبر من محيط شبه المنحرف (BCNM)

التمرين 18:

حل في R: $2 \times (x - 1) > 3 \times (x + 1)$

تمرين 18 :

حل في R : $(x - 1)^2 - 25 < 0$

تمرين 19:

(ABCD) شبه منحرف قائم (DA)_|_ (AB) ; (DC) // (AB) ; (DA) _|_(DC)

DA = 4 cm , DC = 3 cm , AB = 5cm

M نقطة من القطة [DA], ما الوضعية التي تأخذها M حتى تكون مساحة شبه المنحرف أكبر من مجموع مساحتي المثلثين (MDC) و (MAB)؟

تمرين 20:

عين المجال الذي ينتمي إليه x عندما يكون : 1) $\frac{1}{5} < \frac{1}{x} < \frac{1}{4}$ 2) , $\frac{1}{6} < \frac{6}{x} < \frac{1}{5}$

تمرين 21:

حل في R: $|\frac{x}{3} - 2| > \frac{1}{4}$ نريد إعطاء الحل البياني: وذلك باستعمال الخاصية: $(A < -\frac{1}{4}$ أو $A > \frac{1}{4}) \Leftrightarrow |A| > \frac{1}{4}$

تمرين 22 :

عين مجموعة تعريف كل من الدوال الاتية $g(x) = \sqrt{\frac{x+1}{2-x}}$; $f(x) = \sqrt{6 - 6x}$

تمرين 23:

حل بالتعويض والجمل الخطية الأنظمة التالية: $a) \begin{cases} -x + 4y - 3 = 0 \\ 3x + 2y + 6 = 0 \end{cases}$; $b) \begin{cases} 5x + 3y - 9 = 0 \\ -3x + y - 7 = 0 \end{cases}$

IPN

التمرين 24: حساب الأعمار

قبل 5 سنوات، كان عمر الأب 4 أضعاف عمر ابنه. الآن، مجموع عمريهما هو50 سنة

المطلوب:

أوجد عمر الأب و الابن

التمرين 25: حساب السرعات

.قطع قطار مسافة 300 كم في زمن معين. إذا زادت سرعته 10 كم/س، فإنه يقطع المسافة في وقت أقل بساعة واحدة

المطلوب:

أوجد السرعة الأصلية للقطار.

التمرين 26: تذاكر السفر

.دفع أحمد 160000أوقية لشراء تذكرتين للكبار و3 تذاكر للأطفال. بينما دفعت سلمى 230000 أوقية لشراء 3 تذاكر للكبار و4 تذاكر للأطفال

المطلوب:

أوجد سعر تذكرة الكبار وسعر تذكرة الأطفال.

تمرين 27 :

مرت سيارة بسرعة معينة بوتد مكتوب عليه الكلومتر $\overline{AB}$ ساعة، بعد ذلك مرت بوتد مكتوب عليه الكلومتر$\overline{BA}$ ، وبعد ذلك بساعة أيضا مرت بوتد مكتوب عليه $\overline{A0B}$ (Aصفر B)

ما الأرقام التي تحمل الأوتاد؟ وما السرعة الثابة للسيارة؟

ملاحظة:

Aو B أعداد طبيعية محصورة ما بين 0 و 9

مثال على نظام غير خطي (درجة تختلف من الواحد) ، ودراسته تؤول إلى نظام خطي.

تمرين 28 :

يسير الأمير سيد محمد من قصره إلى المطار دائماً بنفس السرعة على طريق خاصة معدة لهذا الغرض.

إذا زاد أو نقص السائق سرعته بـ 20 km/h ، يربح دقيقتين أو يخسر ثلاث دقائق.

ما المسافة بين القصر والمطار؟

تمرين :29

عند سيد قطعة أرضية مربعة الشكل يحدها من الداخل ممر كبير عرضه ثابت ومساحته .464 m².

عند ما دار سيد بأرضه لاحظ فرق 32 m بين الدوران على الحافة الداخلية للممر والحافة الخارجية له.

ما المسافة الإجمالية للقطعة الأرضية التي عند سيد؟

IPN

المجال الثاني: التحليل

الفصل الرابع

عموميات على الدوال العددية

1. مفاهيم عامة حول الدوال

أ- مفهوم الدالة

التعريف

لتكن D مجموعة جزئية من $\mathbb{R}$. نقول إن f دالة للمتغير الحقيقي x معرفة على D إذا كانت f علاقة تسمح بربط كل عدد حقيقي $x \in D$ بعدد حقيقي وحيد y يُرمز له بـ $f(x)$

أ) الرموز والتعبيرات

نرمز $f(x)=y$ ونقرأ "y هو صورة x بالدالة f" أو f تربط x بالعدد الحقيقي y :أو $f: x \mapsto y = f(x)$.

يُسمى y **صورة** x، ويُسمى x **سابقًا** لـ y.

مثال 1:

1) في هذا التمرين، مطلوب ترجمة الجمل التالية إلى معادلات من النوع $f(a)=b$

- أ) سابق العدد 5 بالدالة f هو -2.
- ب) صورة العدد 3 بالدالة f هي الصفر.
- ج) المنحنى Cf يمر بالنقطة A(1;4).
- د) المنحنى Cf يقطع محور الفواصل عند النقطة ذات الفاصلة -3.

2)لتكن $f(x) = -x^2 + 2x - 1$ و $g(x) = \frac{2x-3}{x-1}$

- أ) احسب صورة 0، -2، و $\sqrt{2}$. لكل دالة.
- ب) هل يمكن حساب صورة 1 للدالتين؟
- ج) حدد السوابق (إن وجدت) للعدد 1 لكل دالة.

الحل :

(1

أ) $f(-2)=5$ ب) $f(3)=0$ ج) $f(1)=4$ د) $f(-3)=0$

(2

أ)

$$f(0) = -0^2 + 2\times 0 - 1 = -1;\ f(-2) = -22 + 2\times(-2) - 1 = -4 - 4 - 1 = -9;$$
$$f(\sqrt{2}) = -(\sqrt{2})2 + 2\times(-\sqrt{2}) - 1 = -2 - 2\sqrt{2} - 1 = -3 - 2\sqrt{2}.$$
$$g(0) = \frac{2\times 0-3}{0-1} = \frac{-3}{-1} = 3;\ g(-2) = \frac{2\times(-2)-3}{(-2)-1} = \frac{-7}{-3} = \frac{7}{3};$$
$$g(\sqrt{2}) = \frac{2\sqrt{2}-3}{\sqrt{2}-1} = \frac{(2\sqrt{2}-3)(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = \frac{(4+2\sqrt{2}-3\sqrt{2}-3)}{(2-1)} = 1-\sqrt{2}$$
$$b)\ f(1) = -12 + 2\times 1 - 1 = -1 + 2 - 1 = 0;$$

ب) نعم يمكننا حساب صورة 1 بواسطة f وهي صفر (f(1)=0)

في المقابل لا يمكننا حساب صورة 1 بواسطة الدالة g لأن القسمة على الصفر غير ممكن.

ج) لتحديد السوابق (إن وجدت) للعدد 1 في الدالة f يكفي أن نحل المعادلة $f(x) = 1$

$$f(x) = 1 \Leftrightarrow -x^2 + 2x - 1 = 1 \Leftrightarrow -(x^2 - 2x + 1) = 1 \Leftrightarrow (x^2 - 2x + 1) = -1 \Leftrightarrow (x-1)^2 = -1,$$

المعادلة الأخيرة لا حل لها في الأعداد الحقيقية إذ لا يوجد مربع عدد حقيقي يساوي سالب واحد وبالتالي لا يوجد سابق للعدد 1

و لتحديد السوابق (إن وجدت) للعدد 1 في الدالة g يكفي أن نحل المعادلة $g(x) = 1$

$g(x) = 1 \Leftrightarrow \frac{2x-3}{x-1} = 1 \Leftrightarrow 2x + 3 = x - 1 \Leftrightarrow x = -4,$.

اذن العدد $\{-4\}$ هو سابق العدد 1 بالدالة g

ب - مجموعة التعريف دالة

المجموعة الجزئية D من $\mathbb{R}$ تسمى مجموعة تعريف f أو مجال تعريف f ، ويرمز لها بـ $\mathcal{D}_f$ [ونقول أيضا ميدان تعريف f] هي أكبر مجموعة مكونة من الأعداد الحقيقية x التي لها صورة $f(x)$

الرمز : $f: \begin{cases} \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f(x) \end{cases}$ يختصر هذا التعريف

تنبيه : في هذا الفصل، "دالة" تعني دالة عددية بمتغير حقيقي.

IPN

ملاحظة

عادةً يُعطى مجال تعريف دالة f بعبارة مثل :

"لتكن f دالة معرفة على المجال $[0, 1]$ ب : $f(x) = x^2$"

هذا يحدد ميدان التعريف ب $\mathcal{D}_f = [0; 1]$ إذا لم يُذكر $\mathcal{D}_f$، فهو مجموعة الأرقام الحقيقية x حيث $f(x)$ موجودة .

أمثلة :

الدالة $f : x \mapsto x^3 + 5$ معرفة على $\mathbb{R}$

$g : x \mapsto \frac{x-7}{x+3}$; معرفة على $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$ ونقرئها كل الأعداد باستثناء 3-

مثال 2:

أوجد مجال تعريف الدالتين التاليتين:

$$f(x) = \frac{-5x^2 + 4x + 1}{x(x-3)(x+2)};\ g(x) = \sqrt{(x-2)(8-x)}$$

الحل :

$f(x) = \frac{-5x^2+4x+1}{x(x-3)(x+2)}$ لإيجاد ميدان تعريفها نحل المعادلة $x(x-3)(x+2) \neq 0$

وهذا يعني $x \neq 0, x \neq -2$ و $x \neq 3 \Rightarrow \mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-2; 0; 3\}$

$g(x) = \sqrt{(x-2)(8-x)}$ لإيجاد ميدان تعريفها نحل المراجحة $(x-2)(8-x) \geq 0$

يكون حاصل الجداء موجبا، إذا كان حداه لهما نفس الإشارة مما يعني $(x-2)(8-x) \geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-2 \geq 0$ و $8-x \geq 0)$ أو $(x-2 \leq 0$ و $8-x \leq 0)$

$\Leftrightarrow (x \geq 2$ و $-x \geq -8)$ أو $(x \leq 2$ و $-x \leq -8)$

$\Leftrightarrow (x \leq 2$ و $x \geq 8)$ أو $(x \geq 2$ و $x \leq 8)$

$\Leftrightarrow 2 \leq x \leq 8$

الحل اذن هو $[2, 8]$

ومنه : $\mathcal{D}_g = [2, 8]$

يمكن تلخيص النتائج في الجدول التالي:

x	$-\infty$	2	8	$+\infty$
$x-2$	$-$	$+$	$+$	
$8-x$	$+$	$+$	$-$	
$(x-2)(x-8)$	$-$	$+$	$-$	

مثال 3:

حدد مجال تعريف الدوال التالية :

$x \mapsto 2x^2 + \frac{1}{x^2}$; $x \mapsto x + \frac{1}{x}$; $x \mapsto x^2 + \frac{1}{x}$; $x \mapsto \frac{x^2+1}{x^3-x}$; $x \mapsto 2x^2 + \frac{|x|}{x^2+1}$

$x \mapsto \sqrt{-x}$; $x \mapsto \sqrt{x} \times \sqrt{3x+1}$; $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{|x|}}$; $x \mapsto \sqrt{1-x}$; $x \mapsto \frac{2x}{\sqrt{3x+7}}$; $(3-2x)(5x+1)$

الحل :

الدالة	مجال التعريف	الدالة	مجال التعريف
$x \mapsto \sqrt{-x}$	$\mathbf{R}_-$	$x \mapsto 2x^2 + \frac{1}{x^2}$	$\mathbf{R}^*$
$x \mapsto \sqrt{x} \times \sqrt{3x+1}$	$\mathbf{R}_+ \cap \left[\frac{-1}{3}; +\infty\right[= \mathbf{R}_+$	$x \mapsto x + \frac{1}{x}$	$\mathbf{R}^*$
$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{\lvert x \rvert}}$	$\mathbf{R}^*$	$x \mapsto x^2 + \frac{1}{x}$	$\mathbf{R}^*$
$x \mapsto \sqrt{1-x}$	$]-\infty ; 1]$	$x \mapsto \frac{x^2+1}{x^3-x}$	$\mathbf{R} \setminus \{-1 ; 0 ; 1\}$
$x \mapsto \frac{2x}{\sqrt{3x+7}}$	$\left]\frac{-7}{3}; +\infty\right[$	$x \mapsto 2x^2 + \frac{\lvert x \rvert}{x^2+1}$	$\mathbf{R}$
$x \mapsto (3-2x)(5x+1)$	$\mathbf{R}$		

IPN

2. التمثيل البياني لدالة

ليكن $(O; \vec{i}, \vec{j})$ معلمًا في المستوي $\mathcal{P}$ و f دالة معرفة على $\mathcal{D}$
التمثيل البياني $\mathscr{C}_f$ لـ f هو مجموعة النقاط M(x, y) بحيث $x \in \mathcal{D}$ و $y = f(x)$
يُسمى $\mathscr{C}$ المنحنى الممثل لـ f في المعلم $(O; \vec{i}; \vec{j})$

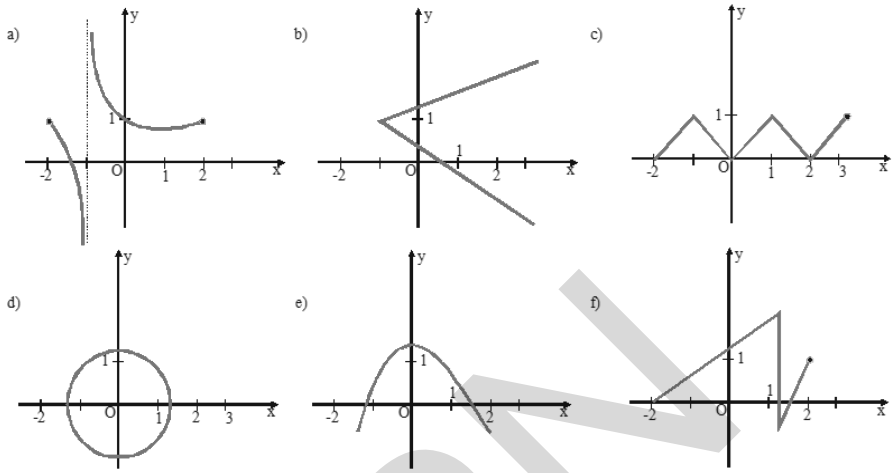
الرمز

المنحنى لـ f يُرمز له بـ $\mathscr{C}_f$ باختصار

$$\mathscr{C}_f = \{M(x,y) / x \in \mathcal{D}_f \text{ و } y = f(x)\}$$

مثال 4:

تعرف على المنحنيات التي تمثل دوالًا، وحدد مجال تعريفها.



الحل :

المنحنيات الممثلة للدوال	مجالات التعريف
(a	$[-2 ; 2] \setminus \{-1\}$
(c	$[-2 ; 3]$
(e	$\mathbf{R}$

3. تغير الدالة والقيم القصوى

أ- اتجاه التغير

- **تزايد دالة**

نقول إن الدالة f متزايدة على مجال I من ميدان تعريفها D ، عندما:
تربط الدالة f قيمًا متزايدة (سوابق) بصور متزايدة الحجم.
أي أن f تتزايد على I إذا كان $\forall x_1; x_2 \in I$

$$x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

أو بصيغة أخرى

$$x_2 - x_1 \geq 0 \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) \geq 0$$

ونقول ان الدالة f متزايدة تماما على مجال I من مجال تعريفها D ، إذا كان $\forall x_1; x_2 \in I$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

- **تناقص دالة**

نقول إن الدالة f متناقصة على مجال I من ميدان تعريفها D ، عندما:
تربط الدالة f قيمًا متزايدة (سوابق) بصور متناقصة الحجم.
أي أن f تتناقص على I إذا كان $\forall x_1; x_2 \in I$

$$x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

أو بصيغة أخرى

$$x_2 - x_1 \geq 0 \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) \leq 0$$

ونقول إن الدالة f متناقصة تماما على مجال I من مجال تعريفها D ، إذا كان $\forall x_1; x_2 \in I$

IPN

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

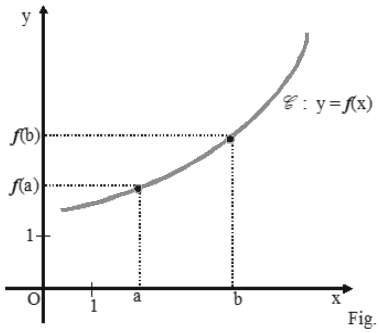


Fig. 1

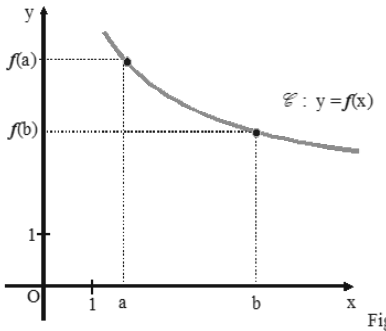


Fig. 2

ونقول إن الدالة f ثابتة على المجال I من ميدان تعريفها D،

إذا كان $\forall x_1;\ x_2 \in I$

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$$

أو بصيغة أخرى

$$x_2 \neq x_1 \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) = 0$$

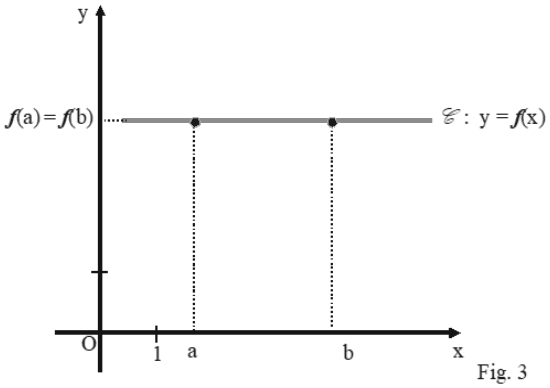


Fig. 3

ملخص

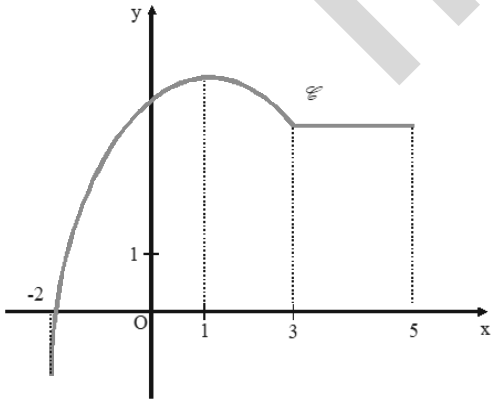
افترض أن f دالة مُعرفة على المجال I

- تكون f متزايدة تماما على المجال I إذا، وفقط إذا كان كل عنصرين a و b من I، بحيث $a < b$ يكون $f(a) < f(b)$ الشكل 1 (fig. 1)
- تكون f متزايدة على المجال I إذا، وفقط إذا كان كل عنصرين a و b من I، بحيث $a \leq b$ يكون $f(a) \leq f(b)$
- تكون f متناقصة تماما على المجال I إذا، وفقط إذا كان كل عنصرين a و b من I، بحيث $a < b$ يكون $f(a) > f(b)$ الشكل 2 (fig. 2)
- تكون f متناقصة على المجال I إذا، وفقط إذا كان كل عنصرين a و b من I، بحيث $a \leq b$ يكون $f(a) \geq f(b)$
- تكون f ثابة على المجال I إذا، وفقط إذا كان كل عنصرين a و b من I، يكون $f(a) = f(b)$ الشكل 3 (fig. 3)

مثال 5:

المنحنى أدناه يمثل دالة f :

- متزايدة تماما على $[-2, 1]$
- متناقصة تماما على $[1, 3]$
- ثابتة على $[3, 5]$



مثال 6:

ليكن الجدول التالي يمثل جدول تغيرات لدالة f :

a) صف تغيرات f

b) حدد القيم القصوى لـ f .

x	-2		2		5		10
f(x)	2	↗	5	↘	0	↗	6

IPN

الحل :

a) f متزايدية على [2, -2] و متناقصية على [5, 2] و متزايدية على [5, 10]

b) القيم القصوى النسبية :

-عظمى عند النقطة(5, 2) لأن $f(2) = 5$ على [-2, 5] ، عظمى عند النقطة, (6 , 10) لأن $f(10) = 6$ على [2, 10]

-صغرى عند النقطة(2, -2) لأن $f(-2) = 2$ على المجال [-2, 2] ، صغرى عند النقطة, (0 ، 5) لأن $f(5) = 0$ على [2, 10]

4. دراسة منحنيات الدوال

عندما تكون الدالة مكتوبة جبريا، يمكننا تحديد مجالها واتجاه تغيرها. ثم نكمل جدول القيم لإنشاء رسمها البياني.

وعلى العكس، عندما تكون الدالة مرسومة في معلم فيمكننا إيجاد مجالها واستنتاج جدول تغيرها (من المنحنى : نستنتج D_f وجدول التغيرات)

كما يمكننا استخدام الرسوم البيانية للدوال لحل المعادلات والمتراجحات أو المتباينات.

أ- قراءة صور وسوابق عدد على منحنى دالة

مثال 7:

فيما يلي جدول قيم الدالة:

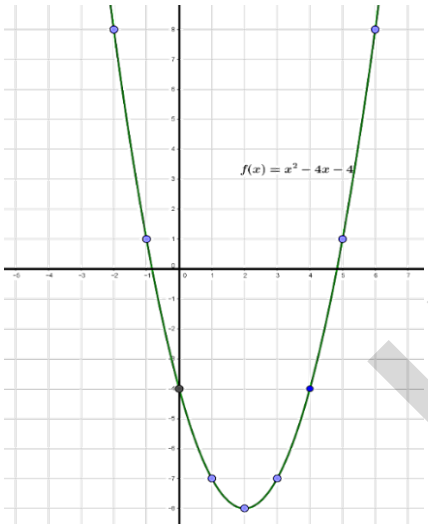
$f(x) = x^2 - 4x - 4$ يمثل كل زوج $(x; f(x))$ في هذا الجدول بنقطة على المنحنى.

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$y = f(x)$	8	1	-4	-7	-8	-7	-4	1	8

لدينا المنحنى الذي يمثل الدالة f ، والمُعرّف بالمعادلة

$f(x) = x^2 - 4x - 4$ ، مُمثَّلاً في نظام إحداثيات متعامد عمودي.

هذه الدالة كثيرة حدود من الدرجة الثانية، ومنحناها عبارة عن قطع مكافئ... والذي سندرسه لاحقًا.



8 هي صورة 2- بالدالة f

4- هي صورة 4 بالدالة f

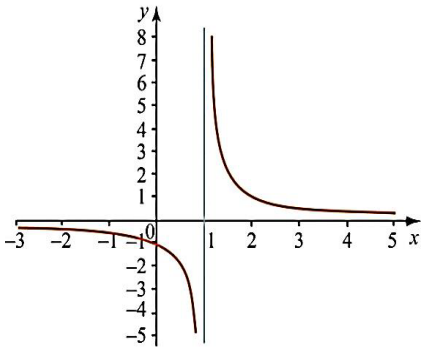
2 هي سابقة 8- بالدالة f

2- و6 هما سابقتا الدالة 8 على الدالة f.

ب - قراءة مجال التعريف من منحنى دالة

على المحور الأفقي، نقرأ الإحداثيات السينية للنقاط على المنحنى. مجموعة فواصل نقاط المنحنى على المحور الأفقي هي D_f

بمعنى آخر مجموعة **مجال التعريف** هي مجموعة هذه الإحداثيات السينية. تُكتب كفاصلة أو اتحاد مجالات.



مثال 8:

يتكون التمثيل البياني أدناه من نقاط تتراوح إحداثياتها السينية بين 3- و5، باستثناء الرقم 1.

يمثل هذا التمثيل دالة معرفة على اتحاد المجالين

: $]-3; 1[\cup]1; 5[$

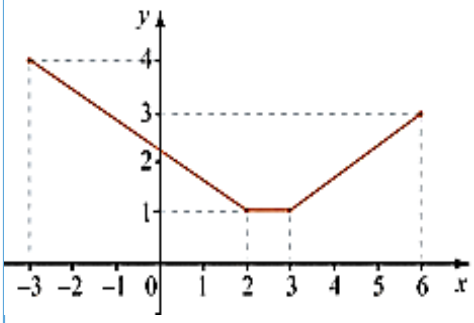
IPN

ج - إنشاء جدول التغيرات من منحنى دالة

تُعد الدالة متزايدية على المجال I. إذا زادت الصور الإحداثية عند عبور المنحنى من اليسار إلى اليمين.
تُعد الدالة متناقصية على المجال I إذا قلت الصور الإحداثية عند عبور المنحنى من اليسار إلى اليمين.
تُعد الدالة ثابتة على المجال I عندما يكون رسمها البياني قطعة أفقية.

مثال 9:

الخط الملون المتكسر يمثل دالة :



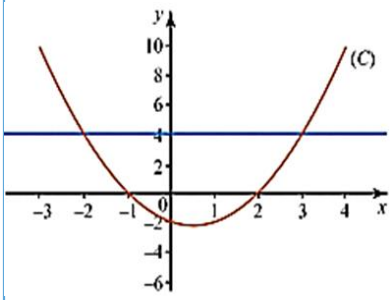
الدالة متناقصة على $[-3\ ;\ 2]$
الدالة ثابتة على $[2\ ;\ 3]$
الدالة متزايدة على $[3\ ;\ 6]$
قيمتها الصغرى على $[2\ ;\ 3]$ هي 1
نلخص كل هذا في جدول التغيرات التالي

x	-3		2		3		6
اتجاه تغيرات f	4	↘	1	↗	1	↗	3

د - قراءة حلول معادلة على منحنى دالة

•حلول المعادلة $f(x) = k$ هي الإحداثيات السينية لنقاط تقاطع المنحنى الذي يمثل الدالة f مع الخط الأفقي ذي المعادلة $y = k$
في الحالة الخاصة للمعادلة، $f(x) = 0$ تكون الحلول هي الإحداثيات السينية لنقاط تقاطع المنحنى مع محور الإحداثيات السينية.

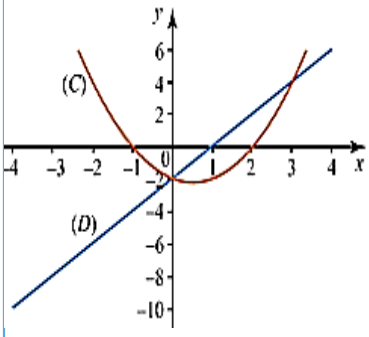
مثال 10:



المنحنى $(\mathscr{C})$ المقابل يمثل الدالة f

مجموعة حل المعادلة $f(x) = 4$ هي: $S=\{-2; 3\}$

مجموعة حل المعادلة $f(x) = 0$ هي: $S=\{-1; 2\}$



تنبيه : حلول المعادلة $f(x) = g(x)$ هي إحداثيات نقاط تقاطع المنحنى الذي يمثل f مع المنحنى الذي يمثل g.

مثال 11:

المنحنى $(\mathscr{C})$ المقابل يمثل الدالة f، والمستقيم (D) يمثل الدالة g. مجموعة حلول المعادلة $f(x) = g(x)$ هي: $S = \{0, 3\}$

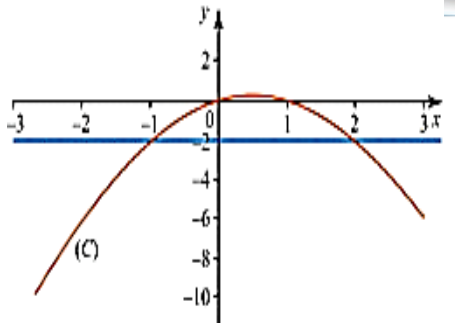
س - قراءة حلول متراجحة من منحنى دالة

•حلول المتراجحة $f(x) < k$ هي الإحداثيات السينية للنقاط الواقعة أسفل الخط المستقيم ذي المعادلة $y = k$
في الحالة الخاصة للمعادلة $f(x) < 0$، تكون الحلول هي الإحداثيات السينية للنقاط الواقعة أسفل محور الإحداثيات السينية على المنحنى.

IPN

مثال 12:

يمثل المنحنى ($\mathscr{C}$) المقابل الدالة f والخط المستقيم الدالة g



مجموعة حلول المتراجحة $f(x) > -2$ هي : $S_1 =]-1; 2[$

مجموعة حلول المتراجحة $f(x) < 0$ هي : $S_2 =]-\infty; 0[\cup]1; +\infty[$

• بشكل عام، حلول المتراجحة $f(x) < g(x)$ هي إحداثيات النقاط على المنحنى الذي يمثل f، والواقعة أسفل المنحنى الذي يمثل g و هي :

$S_3 =]-\infty; -1[\cup]2; +\infty[$

ملاحظة

الدالة المتزايدة تحافظ على الترتيب؛ والدالة المتناقصة تعكس الترتيب.

5. معدل زيادة (تغير) الدالة

التعريف

ليكن D_f مجال تعريف الدالة العددية f، وليكن I⊂D_f، وليكن $x_1, x_2 \in I$ بحيث $x_1 \neq x_2$. نسمي معدل زيادة الدالة f على المجال I، والذي نرمز له بـ Δf أو T، وهو العدد الحقيقي المعرّف بواسطة؛ $\boldsymbol{T = \Delta f = \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}}$

إذا كانت $\Delta f \geq 0$ ، فإن f تكون متزايدة على I ،

وإذا كانت $\Delta f \leq 0$ ، فإن f تكون متناقصة على I ،

وإذا كانت $\Delta f = 0$ ، فإن f تكون ثابتة على I ،

ملاحظة

يُقال إن الدالة تتزايد تزايدًا مطلقًا عندما : $\forall x_1, x_2 \in \mathcal{D}_f \Rightarrow \boldsymbol{\Delta f > 0}$

يُقال إن الدالة تتناقص تناقصًا مطلقًا عندما: $\forall x_1, x_2 \in \mathcal{D}_f \Rightarrow \boldsymbol{\Delta f < 0}$

يُقال إن الدالة ثابتة عندما : $\forall x_1, x_2 \in \mathcal{D}_f \Rightarrow \boldsymbol{\Delta f = 0}$

6. الحد الأقصى والحد الأقصى النسبي (المحلي)

أ- الحد الأقصى

التعريف

لتكن f دالة عددية و D_f مجال تعريفها، وليكن $x_0 \in D_f$ بحيث يكون $f(x_0) = M$

نقول إن M هو الحد الأقصى لـ f على D_f عندما؛ $\forall x \in \mathcal{D}_f \Rightarrow f(x) \leq M$

ب - الحد الأقصى النسبي أو المحلي

التعريف

لتكن f دالة عددية و D_f مجال تعريفها، وليكن $x_0 \in D_f$ بحيث يكون $f(x_0) = M_1$

نقول إن M_1 حد أقصى نسبي لـ f على المجال I من مجال تعريفها D_f عندما: $\forall x \in I \Rightarrow f(x) \leq M_1$

ج - الحد الأدنى

التعريف

لتكن f دالة عددية و D_f مجال تعريفها، وليكن $x_0 \in D_f$ بحيث يكون $f(x_0) = m$

نقول إن m هو الحد الأدنى لـ f على D_f عندما؛ $\forall x \in \mathcal{D}_f \Rightarrow f(x) \geq m$

د - الحد الأدنى النسبي أو المحلي

التعريف

لتكن f دالة عددية و D_f مجال تعريفها، وليكن $x_0 \in D_f$ بحيث يكون $f(x_0) = m_1$

نقول إن m_1 حد أدنى نسبي لـ f على المجال I من مجال تعريفها D_f عندما: $\forall x \in I \Rightarrow f(x) \geq m_1$

ملخص

لتكن f دالة عددية مُعرفة على المجال I ، ، وليكن $x_0 \in I$

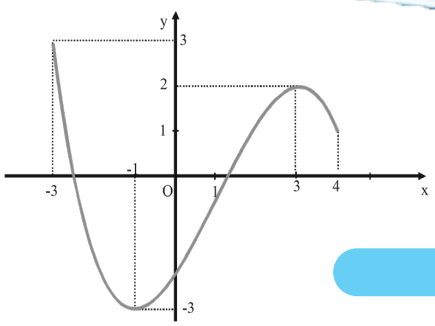
- تكون f دالة ذات قيمة عظمى أو قصوى على المجال I عند x_0 إذا، وفقط إذا كان ، لجميع $x \in I$. $f(x) \leq f(x_0)$.
- تكون f دالة ذات قيمة دنيا أو صغرى على المجال I عند x_0 إذا، وفقط إذا كان ، لجميع $x \in I$. $f(x) \geq f(x_0)$.

IPN

مثال 13:

في الشكل المقابل، ($\mathscr{C}$) هو المنحنى الذي يمثل الدالة f المُعرّفة عند I = [-3، 4].

على المجال [-3؛ 4]، للدالة f قيمة عظمى عند -3، تساوي 3؛ صغرى عند -1، تساوي -3؛ علاوة على ذلك، على المجال[4؛ 1]، على سبيل المثال، للدالة f قيمة عظمى عند 3، تساوي2 تسمى قيمة عظمي محلية.



7. الدوال الزوجية و الفردية

أ- الدالة الزوجية

D جزئ من $\mathbb{R}$ ، f دالة معرفة على D

نقول إن الدالة f دالة زوجية إذا كان لكل x من D فان $-x$ من D و $f(-x) = f(x)$

مثال 14:

لتكن الدالة $f(x) = x^2 + 3$ بين ان الدالة f دالة زوجية

الحل :

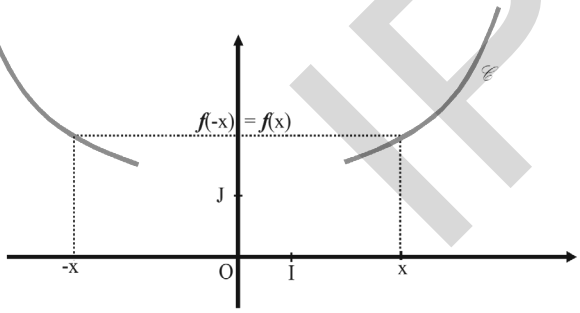
ميدان تعريف f هو $\mathbb{R}$ مما يعني أن لكل x من $\mathbb{R}$ فان $-x$ من $\mathbb{R}$

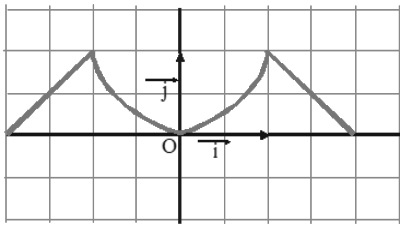
$$f(-x) = (-x)^2 + 3 = x^2 + 3 = f(x)$$

إذن f دالة زوجية

تنبيه

ليكن$(O; \vec{i},\vec{j})$ معلمًا في المستوي$\mathcal{P}$ و f دالة زوجية معرفة على $\mathcal{D}$ ، يكون المنحنى التمثيلي ($\mathscr{C}$) للدالة الزوجية متماثلًا بالنسبة للمحور الإحداثي (yy').





ب - الدالة الفردية

D جزئ من $\mathbb{R}$ ، f دالة معرفة على D

نقول إن الدالة f دالة فردية إذا كان لكل x من D فان $-x$ من D و $f(-x) = -f(x)$

مثال 15:

لتكن الدالة $f(x) = x^3 + 5x$ بين ان الدالة f دالة فردية

الحل :

ميدان تعريف f هو $\mathbb{R}$ مما يعني أن لكل x من $\mathbb{R}$ فإن $-x$ من $\mathbb{R}$

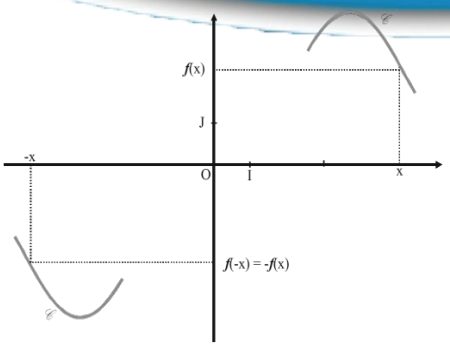
$$f(-x) = (-x)^3 + 5(-x) = -x^3 + 5(-x) = -(x^3 + 5x) = -f(x)$$

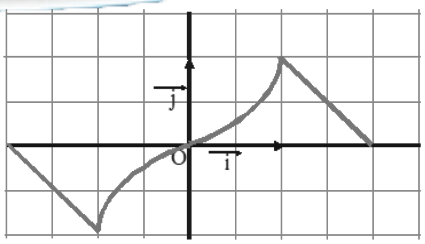
اذن f دالة فردية

تنبيه :

ليكن$(O; \vec{i},\vec{j})$ معلمًا في المستوي$\mathcal{P}$ و f دالة فردية معرفة على $\mathcal{D}$ ، يكون المنحنى التمثيلي ($\mathscr{C}$) للدالة الفردية متماثلًا بالنسبة لأصل إطار المرجع (O).

IPN

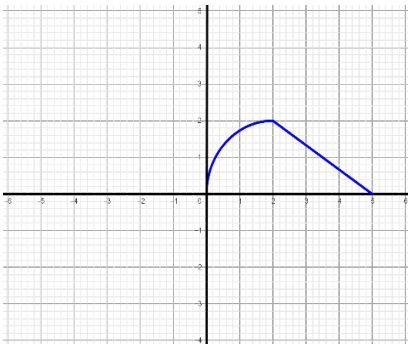




مثال 16:

A ادرس زوجية/فردية الدوال التالية :

$$x \mapsto 2x^2 + \frac{1}{x^2} \; ; \quad x \mapsto x + \frac{1}{x} \; ; \quad x \mapsto x^2 + \frac{1}{x} \; ; \quad x \mapsto \frac{x^2+1}{x^3-x} \; ; \quad x \mapsto 2x^2 + \frac{|x|}{x^2+1}$$



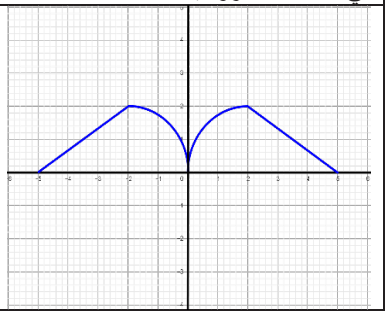
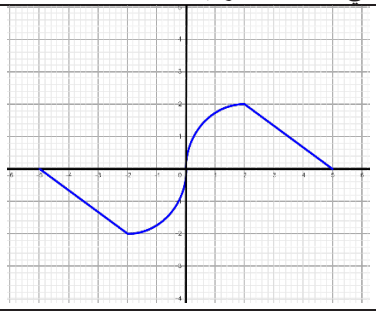
B. أكمِل المنحنى المعطى جزئيًا على [-5, 5] إذا كانت :

- زوجية
- فردية

الحل :

الدالة	النوع	الدالة	النوع
$x \mapsto 2x^2 + \frac{1}{x^2}$	زوجية	$x \mapsto x^2 + \frac{1}{x}$	لا زوجية ولا فردية
$x \mapsto x + \frac{1}{x}$	فردية	$x \mapsto 2x^2 + \frac{\|x\|}{x^2+1}$	زوجية

اكمال الجدول

في حالة الدالة زوجية	في حالة الدالة فردية
	

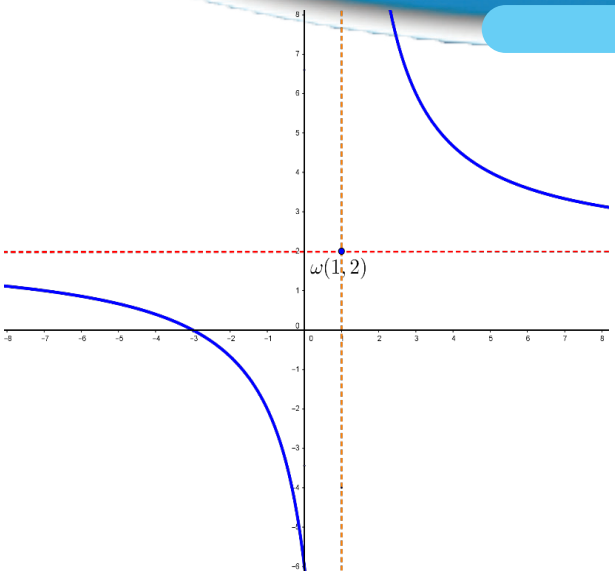
IPN

8. مركز التناظر ومحور التناظر

أ- مركز تناظر المنحنى

مبرهنة :

$\omega(a,b)$ مركز تناظر للمنحنى $\mathscr{C}_f$ يكافئ لكل x من D_f فان $2a-x$ من D_f و $f(2a-x)+f(x)=2b$



حالة خاصة :

a=b=0

العلاقة تصبح $f(-x)=-f(x)$ أي ان الدالة فردية وهذا يعني أن $\mathscr{C}_f$ متناظر حول أصل المرجع (O).

مثال 17:

لتكن f دالة معرفة ب $f(x)=\frac{5x-3}{x+2}$ بين أن $\mathcal{C}_f$ متناظرة حول النقطة $\omega(-2,\ 5)$

الحل :

أولا نبحث عن D_f

$$x+2\neq 0 \Rightarrow x\neq -2 \Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{-2\}$$

لنثبت أن $2a-x$ من D_f

$$x\neq -2 \Rightarrow -x\neq 2 \Rightarrow 2\times(-2)-x\neq 2\times(-2)+2 \Rightarrow -4-x\neq -4+2 \Rightarrow -4-x\neq -2$$

ل نثبت ان $f(2a-x)+f(x)=2b$ و

$$f(x)+f(2\times(-2)-x)=2\times 5$$

$$f(x)+f(-4-x)=\frac{5x-3}{x+2}+\frac{5(-4-x)-3}{(-4-x)+2}$$

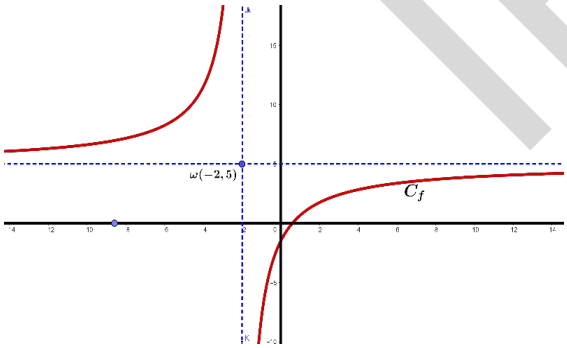
$$=\frac{5x-3}{x+2}+\frac{-20-5x-3}{-4-x+2}$$

$$=\frac{5x-3}{x+2}+\frac{-5x-23}{-x-2}$$

$$=\frac{5x-3}{x+2}+\frac{-(5x+23)}{-(x+2)}=\frac{5x-3}{x+2}+\frac{5x+23}{x+2}$$

$$=\frac{5x-3+5x+23}{x+2}$$

$$=\frac{10x+20}{x+2}=\frac{10(x+2)}{x+2}=10=2\times 5$$



اذن النقطة $\omega(-2,\ 5)$ هي نقطة تناظر ل $\mathscr{C}_f$

الرسم المقابل هو منحنى هذه الدالة والذي ستتعلمون طريقة رسمه السنة المقبلة باذن الله

ب - محور تناظر المنحنى

مبرهنة :

المستقيم ذو المعادلة $x=a$ محور تناظر للمنحنى $\mathscr{C}_f$ يكافئ لكل x من D_f فان $2a-x$ من D_f و $f(2a-x)=f(x)$

حالة خاصة :

a=0

العلاقة تصبح $f(-x)=f(x)$ أي ان الدالة زوجية وهذا يعني ان $\mathscr{C}_f$ متناظر حول محور التراتيب (yy')

مثال 18:

لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x معرفة ب $f(x)=\frac{3x^2-12x+8}{(x-1)(x-3)}$ وليكن $(\mathscr{C}_f)$ محناها البياني في المستوى المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

حدد ميدان تعريف الدالة

أثبت أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $x=2$ محور تناظر للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$

IPN

الحل :

أولا نبحث عن D_f

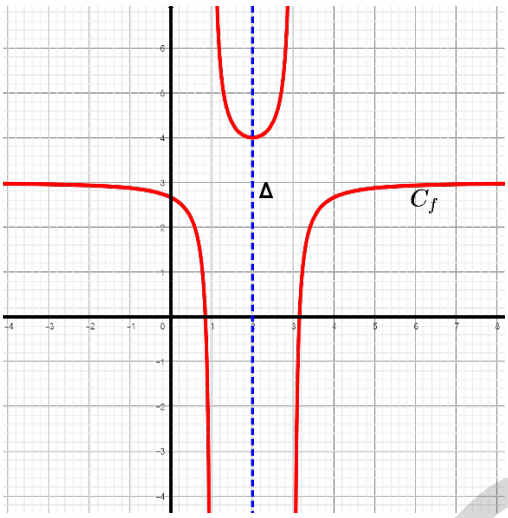
لإيجاد ميدان تعريفها نحل المعادلة $(x-1)(x-3) \neq 0$

وهذا يعني $x \neq 3 \Rightarrow \mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{1;3\}$ او $x \neq 1$

لنثبت ان $2a - x$ من D_f أي $2 \times 2 - x$

$$\begin{cases} x \neq 1 \Rightarrow -x \neq -1 \Rightarrow 2 \times 2 - x \neq 2 \times 2 - 1 \Rightarrow 4 - x \neq 3 \\ x \neq 3 \Rightarrow -x \neq -3 \Rightarrow 2 \times 2 - x \neq 2 \times 2 - 3 \Rightarrow 4 - x \neq 1 \end{cases}$$

إذن $2a - x$ هي من D_f



لنثبت ان $f(2a-x) = f(x)$

$$f(2 \times 2 - x) = f(x)$$

$$f(4-x) = \frac{3(4-x)^2 - 12(4-x) + 8}{(4-x-1)(4-x-3)}$$

$$= \frac{3(16 - 8x + x^2) - 48 + 12x + 8}{(3-x)(1-x)}$$

$$= \frac{3x^2 - 24x + 48 - 40 + 12x}{(3-x)(1-x)}$$

$$= \frac{3x^2 - 12x + 8}{(3-x)(1-x)} = \frac{3x^2 - 12x + 8}{(-1)(x-3)(-1)(x-1)} =$$

$$= \frac{3x^2 - 12x + 8}{(x-1)(x-3)} = f(x).$$

إذن المستقيم ذو المعادلة $x = 2$ محور تناظر للمنحنى $\mathscr{C}_f$

الرسم المقابل هو منحنى هذه الدالة والذي ستتعلمون طريقة رسمه السنة المقبلة بإذن الله.

IPN

تمارين تطبيقية

التمرين 1 : لتكن f دالة عددية معرفة في الجدول التالي

x	-1	-0,5	0	1	1,5	3
f(x)	2	4	3,5	2	-0,5	-14

ما صور الأعداد التالية بالدالة f : 0 و 1 و 1.5 ؟

حدد السوابق (إن وجدت) للعدد 2.

التمرين 2 :

لتكن f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ ب :

$$f(x) = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$$

أكمل الجدول التالي

x	-1	-0,5	0	0,5	2	4
f(x)						

ما الرقم الذي صورته ب f هي 4

التمرين 3 :

لتكن f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ باستثناء $\frac{4}{3}$ بالعبارة الجبرية التالية $f(x) = \frac{2x+1}{3x-4}$

حدد بواسطة f صور الأعداد التالية : 4 ، -2 ، 7، 0.5، 5

حدد سوابق العدد 2 بواسطة f

ليكن $(\mathscr{C}_f)$ هو المنحنى الذي يمثل f في المستوى المرتبط بإطار مرجعي متعامد عمودي. حدد، إن وُجدت، إحداثيات نقاط تقاطع $(\mathscr{C}_f)$ مع محور الإحداثي السيني.

التمرين 4 :

لتكن f و g دالتين معرفتين كالاتي :

$$f(x) = 2x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 5x. \qquad g(x) = \frac{2}{x^4} - \frac{3}{x^3} + \frac{4}{x^2} - \frac{5}{x}$$

حدد $\mathcal{D}_f$ و $\mathcal{D}_g$

التمرين 5 :

في كل من الحالات التالية، حدد مجموعة تعريف الدالة f.

a) $f(x) = (7 - \frac{3}{2x})(5x+1)$; b) $f(x) = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{3x+7}}$. c) $f(x) = \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x-3}$; d) $f(x) = \frac{1}{(x+2)(x-3)}$. e) $f(x) = \frac{1}{|x|+1}$

التمرين 6 :

لماذا يُمثل المنحنى $(\mathscr{C}_f)$، في الشكل المقابل، دالة؟

لتكن f هي هذه الدالة.

حدد:

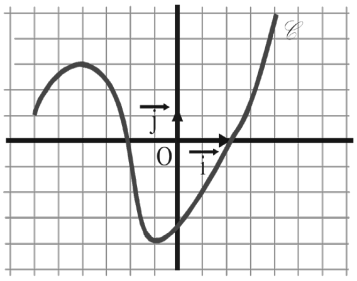
أ) ترتيب النقطة في $(\mathscr{C}_f)$ التي يساوي إحداثيها السيني 1.5؛

ب) إحداثيات السينية للنقاط في $(\mathscr{C}_f)$ التي يساوي ترتيبها -1.

ج) إحداثيات رؤوس $(\mathscr{C}_f)$؛

د) صورة -1 بواسطة f؛

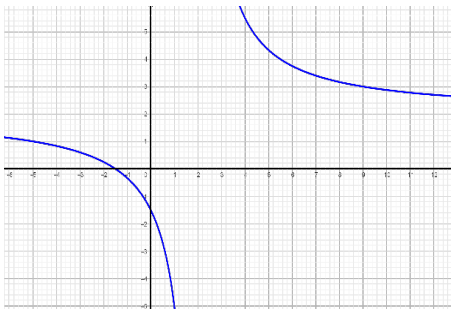
هـ) سوابق 3 بواسطة f.



IPN

التمرين 7 :

المنحنى $\mathscr{C}$ ، أدناه، يمثل الدالة المحددة على $\mathbb{R}$ بستفناء 2 ب $f(x)=\frac{2x+3}{x-2}$



1) حدد بيانيًا:

أ) صور العددين 1 و11؛

ب) السوابق، إن وجدت، للأعداد 4 و2 و0.

2) أ) احسب صور العددين 1 و11.

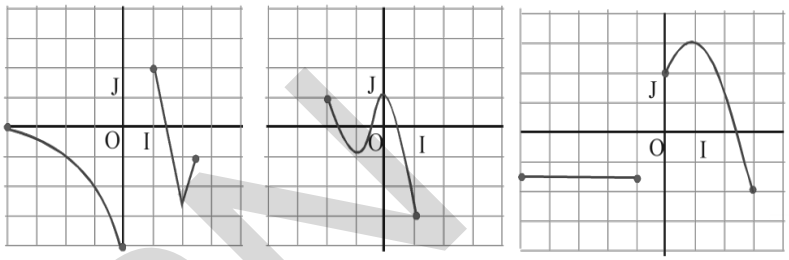
ب) احسب السوابق للأعداد 4 و2 و0.

ج) ليكن m أي عدد حقيقي. احسب سوابق m.

التمرين 8 :

الرسوم البيانية أدناه هي تمثيلات بيانية لدوال عددية.

أعطِ مجموعة تعريفات هذه الدوال.



التمرين 9 :

قم بمطابقة جداول التغييرات مع المنحنيات التمثيلية.

1.

x	-3		0		1		2
f(x)	2	↘	0	↗	1	↘	-1

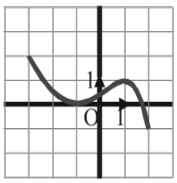
2.

x	-3		0		1		2
f(x)	2	↘	0	↗	1	↘	0

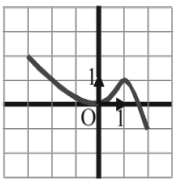
3.

x	-3		-1		1		2
f(x)	2	↘	0	↗	1	↘	-1

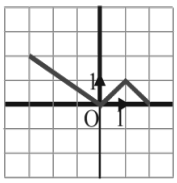
a



b)



c)



التمرين 10 :

لتكن f دالة عددية معرفة ب : $f: x \mapsto \frac{-2}{x^2}$.

أظهر، باستخدام قواعد المتراجحات، أن الدالة f تتزايد على $]-\infty\ ;\ 0]$

التمرين 11:

ادرس زوجية الدوال التالية :

1) $x\in\mathbb{R}$ و $f(x)=1+x^2$; 2) $x\in\mathbb{R}$ و $f(x)=5x^3-2x$ 3) $x\in\mathbb{R}$ و $f(x)=|x^3+x|$; 4) $x\in\mathbb{R}$ و $f(x)=x+1$

5) $x\geq 2$ و $f(x)=\sqrt{x-1}$.

IPN

التمرين 12 :

حدد مجالات تعريف كل من الدوال التالية :

$$A(x)=\frac{x^2}{x^3+2x^2};\ C(x)=\frac{2}{(x-1)(x-3)}-\frac{1}{(x-2)(x-3)}$$

$$E(x)=\frac{3}{x}+\frac{5}{x+2}-\frac{1}{x-2}+\frac{4}{x^2-4} \qquad D(x)=\frac{(2x-3)(x-1)^2-4(2x-3)}{(x+1)^2(x-3)}$$

$$G(x)=\frac{x+\frac{1}{x}-1}{\frac{1}{x}-1}\times\frac{x^2-1}{x^2+1} \qquad I(x)=\frac{x-\frac{3x}{3-x}}{x+\frac{3x}{3-x}} \qquad F(x)=\frac{16}{12x-4}-\frac{15x+5}{(3x+1)^2}+\frac{9x}{9x^3-x}$$

$$B(x)=\frac{6-2x}{x^2-6x+9}; \qquad H(x)=\left(\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x-2}\right)\times\frac{x^2-4}{2x}$$

التمرين 13 :

نعطي الدوال التالية :

$f(x)=3x-7;\quad g(x)=4x^2+5x-2;\quad h(x)=5x^3-1$ و $l(x)=-4x+6.$

1. بين أن f متزايدة على $\mathbb{R}$ و أن g متزايدة على $\mathbb{R}_+$ و أن h متزايدة على $\mathbb{R}_-$
2. بين أن l متناقصة على $\mathbb{R}$

التمرين 14 :

صنّف الدوال التالية إلى زوجية/فردية/لا هذا ولا ذاك

$f:x\mapsto x^2;\ g:x\mapsto x^3;\ h:x\mapsto\frac{1}{x};\ j:x\mapsto x+\frac{1}{x};\ k:x\mapsto 2x^2+\frac{3}{x^2};$

$l:x\mapsto x^2+\frac{5}{x};\ m:x\mapsto\frac{x^2+1}{x^3-2x}\ n:x\mapsto 2x^2+\frac{|x|}{x^2-6};\ p:x\mapsto\sqrt{-x}.$

IPN

IPN

المجال الثاني: التحليل

الفصل الخامس

دراسة الدولة الجبرية الأساسية

1. الدوال الجبرية الأساسية

التعريف :

تُسمى الدوال التالية دوالَّ جبرية أساسية أو مرجعية أو الاعتيادية :

الدوال **الخطية**، أي دالة على الشكل: $f(x) = ax \ (a \in \mathbb{R}^*)$

الدوال **"التربيعية"**، أي دالة على الشكل : $f(x) = ax^2 \ (a \in \mathbb{R}^*)$

الدوال **"المكعبة"**، أي دالة على الشكل : $f(x) = ax^3 \ (a \in \mathbb{R}^*)$

الدوال **"المقلوبة أو العكسية"**، أي دالة على الشكل : $f(x) = \frac{a}{x} \ (a \in \mathbb{R}^*)$

الدوال **"الجذرية التربيعية"**، أي دالة على الشكل : $f(x) = \sqrt{ax} \ (a \in \mathbb{R}^*)$

دراسة الدوال الثابتة والخطية والتآلفية في AS4. أتاحت لنا تحديد تمثيلاتها البيانية، وهي خطوط مستقيمة. موازية لمحور (xox') للدالة الثابتة، مارةً بالأصل للدالة الخطية، ومارةً خارج الأصل للدالة التآلفية. يسمح لنا القسم التالي بالتعمق في دراسة ما يُسمى بالدوال الأساسية.

خطوات دراسة منحنى الدالة وإنشائه

تتضمن دراسة منحنى الدالة وإنشائه الخطوات التالية:

1 تحديد مجال تعريفها.

2 تحديد مجال دراستها، من خلال دراسة تكافؤها ودورتها.

3 تحديد تباينها، وتشمل هذه الخطوة:

أ) حساب معدل تزايدها.

ب) رسم جدول تباينها.

ج) تحديد القيم القصوى، إن وجدت.

4 تمثيلها بيانيًا، وتشمل هذه الخطوة:

أ) إنشاء جدول لقيم الدالة.

ب) رسم منحنى الدالة بيانيًا.

2. الدوال الأساسية

1) الدوال التآلفية

تعريف :

تسمى دالة تآلفية كل دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بالشكل $f(x) = ax + b$ حيث a و b عددان حقيقيان مفروضان.

حالات خاصة

إذا كان $b = 0$ فإن f دالة خطية

إذا كان $a = 0$ فإن f دالة ثابة

إذا كان $a = b = 0$ فإن f دالة منعدمة أو صفرية

الخصائص

أ. **اتجاه التباين**

• إذا كانت $a > 0$، فإن الدالة التآلفية : $f(x) = ax + b$ متزايدة تماما، على $\mathbb{R}$ ويكون لدينا جدول التباين المقابل :

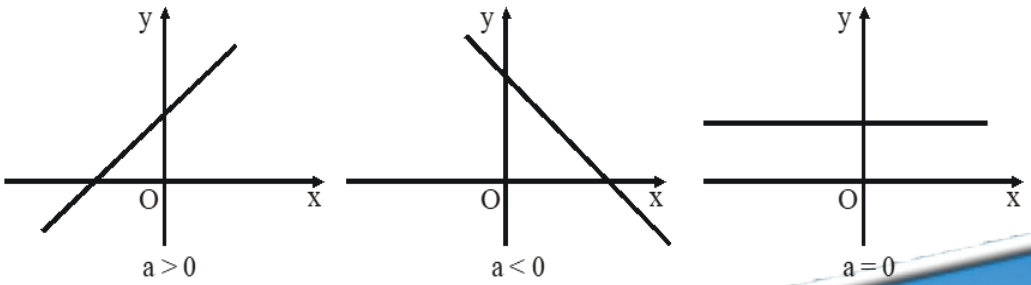
x	$-\infty$	$+\infty$
ax + b		↗

• إذا كانت $a < 0$، فإن الدالة التآلفية: $f(x) = ax + b$ متناقصة تماما على $\mathbb{R}$ ولدينا جدول التباين التالي :

x	$-\infty$	$+\infty$
ax + b		↘

ب. **التمثيل البياني**

التمثيل البياني للدالة f هو خط مستقيم يُحدَّد من خلال رسم نقطتين منه (على سبيل المثال، نقاط التقاطع مع محاور الإحداثيات إن وُجدت).

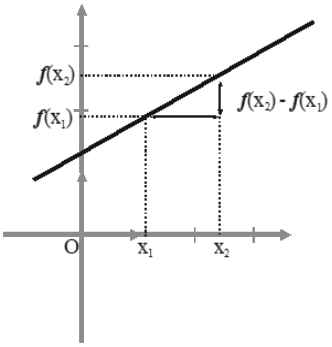


IPN

• a هو ميل الخط. b هو نقطة التقاطع مع المحور y.

$$a = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

b = $f(0)$.



الدوال التآلفية والتناسب

•**الدوال الخطية** $f(x) = ax$:

$f(x)$ متناسبة مع x . معامل التناسب هو a

•**الدوال التآلفية** $f(x) = ax + b$:

لجميع الأعداد الحقيقية المختلفة x_1 وx_2: $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = a$

النسبة $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ ثابتة (بمعنى أن تزايد الصورة متناسب مع تزايد المتغير).

2. دالة مربع

مثال 1:

لنفترض الدالة : $f(x) = x^2$

دراسة وتمثيل f بيانيًا

1- مجال التعريف

الدالة $f(x) = x^2$ مُعرّفة لكل x من $\mathbb{R}$ اذن $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$

2- مجال الدراسة

زوجية الدالة

$$\forall x \in \mathbb{R}, -x \in \mathbb{R} \ et \ f(-x) = (-x)^2 = (-x)(-x) = x^2 = f(x) \Rightarrow \boldsymbol{f(-x) = f(x)}$$

إذن f زوجية، وبالتالي يكون محور تماثلها (yoy')

ويمكننا بالتالي دراستها على المجال $[0, +\infty[$ وإكمال المنحنى باتباع التماثل (التناظر)بالنسبة ل (yoy')

3-اتجاه التغيرات

أ) معدل الزيادة

لجميع الأعداد الحقيقية المختلفة x_1 وx_2 من $\mathcal{D}_f$ فان

$$T = \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} = \frac{{x_1}^2-{x_2}^2}{x_1-x_2} = \frac{(x_1-x_2)(x_1+x_2)}{x_1-x_2} = (x_1+x_2) \Rightarrow \boldsymbol{T = x_1 + x_2}$$

اذا كان x_1 وx_2 من $\mathbb{R}_+$ فان $T > 0 \Rightarrow f \nearrow$

ب) جدول التغيرات

x	0	$+\infty$
T	+	
$f(x)$	0 ⟶	$+\infty$

ج) القيم القصوى

الدالة f متماثلة بالنسبة لـ (yoy')، وبالتالي، فإن 0 هو الحد الأدنى لـ f.

4) التمثيل البياني

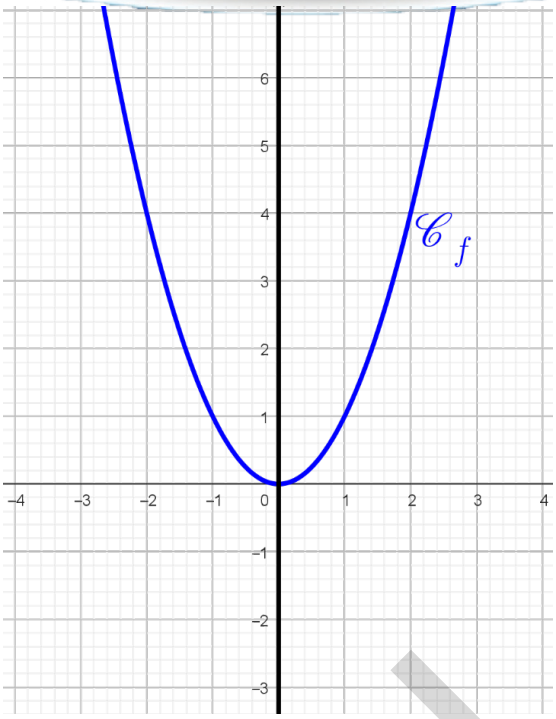
أ) جدول القيم

x	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	0	1	4	9	16	25	36

ب) **منحنى الدالة**

المنحنى الذي يمثل الدالة f هو قطعًا مكافئًا، مُمَثَّلًا في نظام إحداثيات متعامد عمودي $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

IPN



3. دالة مكعب

مثال 2:

لنفترض الدالة : $f(x) = x^3$

دراسة وتمثيل f بيانيًا

1- مجال التعريف

الدالة $f(x) = x^3$ مُعرّفة لكل x من $\mathbb{R}$ اذن $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$

2- مجال الدراسة

زوجية الدالة

$$\forall x \in \mathbb{R}, -x \in \mathbb{R} \ et \ f(-x) = (-x)^3 = (-x)(-x)(-x) = -x^3 = -f(x) \Rightarrow \boldsymbol{f(-x) = -f(x)}$$

إذن f فردية، وبالتالي يكون مركز تماثلها عند نقطة الأصل O

ويمكننا بالتالي دراستها على المجال $[0, +\infty[$ وإكمال المنحنى باتباع التماثل (التناظر) بالنسبة لنقطة الأصل O

3-اتجاه التغيرات

أ) معدل الزيادة

لجميع الأعداد الحقيقية المختلفة x_1 و x_2 من $\mathcal{D}_f$ فان

$$T = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{{x_1}^3 - {x_2}^3}{x_1 - x_2} = \frac{(x_1 - x_2)({x_1}^2 + x_1x_2 + {x_2}^2)}{x_1 - x_2} \Rightarrow \boldsymbol{T = {x_1}^2 + x_1x_2 + {x_2}^2}$$

إذا كان x_1 و x_2 من $\mathbb{R}_+$ فان $T > 0 \Rightarrow f \nearrow$

ب) جدول التغيرات

x	0		$+\infty$
T	$+$		
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

ج) **القيم القصوى**

بما أن الدالة f متزايدة تمامًا على نطاق تعريفها، فليس لها قيم قصوى.

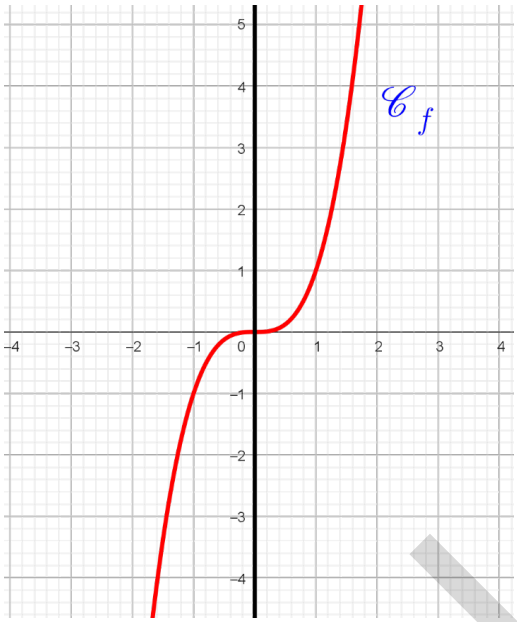
4) **التمثيل البياني**

أ) جدول القيم

x	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	0	1	8	27	64	125	216

IPN

ب) منحنى الدالة
المنحنى الذي يمثل الدالة f هو هو المنحنى التالي، مُمثَّلاً في نظام إحداثيات متعامد عمودي $(o, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.



4. دالة الجذر التربيعي

مثال 3:
لنفترض الدالة :

$$f(x) = \sqrt{x}$$

دراسة وتمثيل f بيانيًا
1) **مجال التعريف**
الدالة $f(x) = \sqrt{x}$ مُعرّفة لكل x من $\mathbb{R}_+$ اذن $\mathcal{D}_f = [0; +\infty[$
الدالة $f(x) = \sqrt{x}$ ليست زوجية ولا فردية.
وبالتالي، فإن مجال دراستها يساوي مجال تعريفها، أي $\mathbb{R}_+$
-اتجاه التغيرات
أ) معدل الزيادة
لجميع الأعداد الحقيقية المختلفة x_1 و x_2 من $\mathbb{R}_+$ فان

$$T = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}}{x_1 - x_2} = \frac{\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}}{(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2})} = \frac{1}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}} \Rightarrow \boldsymbol{T = \frac{1}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}}}$$

اذن $T > 0 \Leftarrow f \nearrow$
ب) جدول التغيرات

x	0		$+\infty$
T		$+$	
$f(x)$	0	↗	$+\infty$

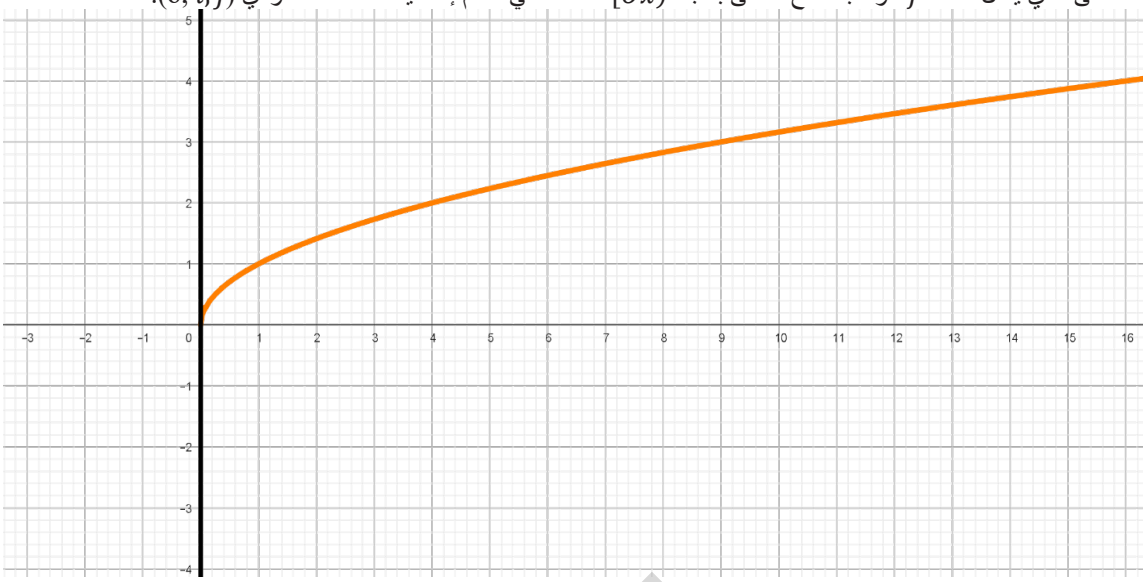
ج) **القيم القصوى**
الدالة f متزايدة تمامًا على نطاق تعريفها، وبالتالي ليس لها قيم قصوى.
4) **التمثيل البياني**
أ) جدول القيم

x	0	1	2	4	9	16	25	36
$f(x)$	0	1	$\sqrt{2}$	2	3	4	5	6

IPN

ب - منحنى الدالة

المنحنى الذي يمثل الدالة f هو شبه قطع مكافئ باتجاه $[Ox)$ ، مُمثَّلاً في نظام إحداثيات متعامد عمودي $(o, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.



5. دالة مقلوب

مثال 4:

لنفترض الدالة : $f(x) = \frac{1}{x}$

دراسة وتمثيل f بيانيًا

1- مجال التعريف

الدالة $f(x) = \frac{1}{x}$ مُعرّفة لكل x من $\mathbb{R}^*$ اذن $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

2- مجال الدراسة

زوجية الدالة

$$\forall x \neq 0, -x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \; et \; f(-x) = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x} = -\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x) \Rightarrow \boldsymbol{f(-x) = -f(x)}$$

إذن f فردية، وبالتالي يكون مركز تماثلها عند نقطة الأصل O

ويمكننا بالتالي دراستها على المجال $]0, +\infty[$ وإكمال المنحنى باتباع التماثل (التناظر) بالنسبة لنقطة الأصل O

3-اتجاه التغيرات

أ) معدل الزيادة

لجميع الأعداد الحقيقية المختلفة x_1 و x_2 من $\mathcal{D}_f$ فان

$$T = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}}{x_1 - x_2} = \frac{(x_2 - x_1)}{(x_1 x_2)(x_1 - x_2)} = \frac{-1}{x_1 x_2} \Rightarrow \boldsymbol{T = \frac{-1}{x_1 x_2}}$$

إذا كان x_1 و x_2 من $]0, +\infty[$ فان $T < 0 \Leftarrow f \searrow$

ب) **جدول التغيرات**

x	0	$+\infty$
T	$\|\|$	$-$
$f(x)$	$\|\|^{+\infty}$	$\searrow 0^+$

ج) **القيم القصوى**

بما أن الدالة f متناقصة تمامًا على نطاق تعريفها، فليس لها قيم قصوى.

4) **التمثيل البياني**

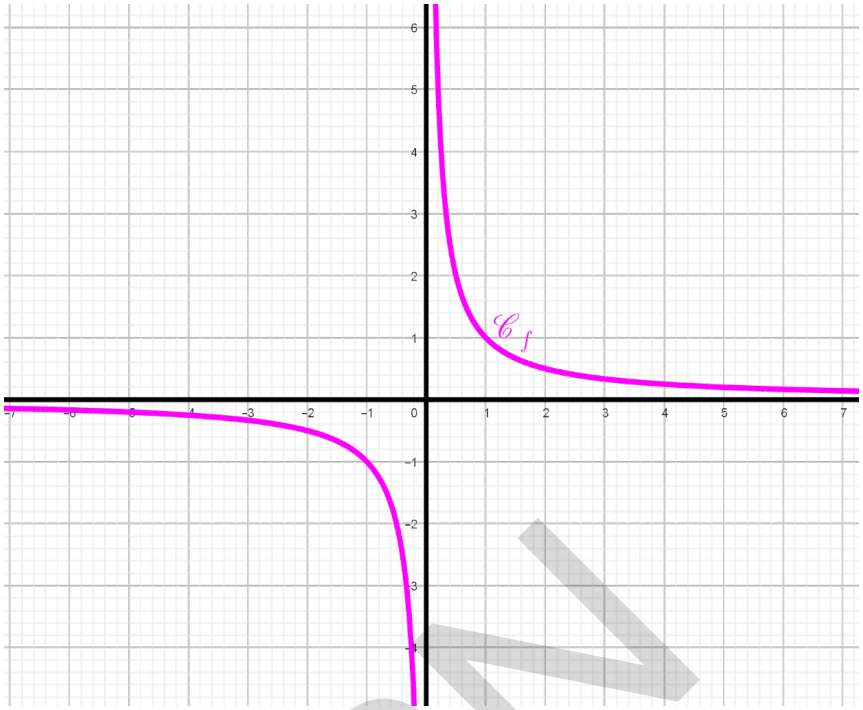
أ) جدول القيم

x	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
$f(x)$	$\|\|$	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

IPN

ب - منحنى الدالة

المنحنى الذي يمثل الدالة f هو قطع زائد، مُمثَّلاً في نظام إحداثيات متعامد عمودي $(o, \vec{i}, \vec{j})$.



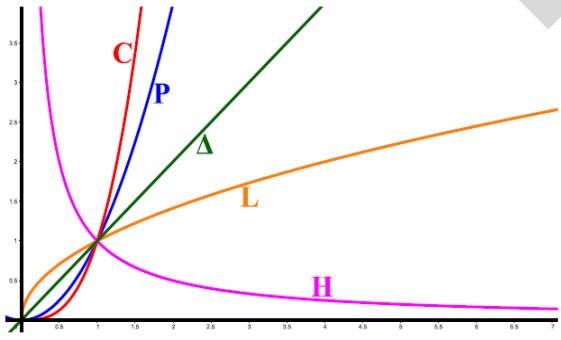
استخدامات الدوال الجبرية الأساسية

مثال 5:

مقارنة الأعداد $a ; a^2 ; a^3 ; \sqrt{a} ; \frac{1}{a}$ $(a > 0)$

باستخدام المنحنيات (الرسوم البيانية)، يُمكننا مقارنة عدد موجب، ومربعه، ومكعبه، وجذره التربيعي، ومقلوبه.

ببساطة، ارسم المنحنيات على المستوى مُمثَّلاً في نظام إحداثيات واحد متعامد عمودي $(o, \vec{i}, \vec{j})$:.



- (P) يمثل دالة معادلتها $y = x^2$ $(x \geq 0)$,
- (L) يمثل الدالة معادلتها $y = \sqrt{x}$ $(x \geq 0)$,
- (Δ) يمثل الدالة معادلتها $y = x$ $(x \geq 0)$,
- (H) يمثل الدالة معادلتها $y = \frac{1}{x}$ $(x > 0)$,
- (C) يمثل الدالة معادلتها $y = x^3$ $(x \geq 0)$,

إن المواضع النسبية لهذه المنحنيات تسمح لنا بالعثور على الخاصية التالية وتوضيحها:

- إذا كان $0 < a < 1$ فان $a^3 < a^2 < a < \sqrt{a} < \frac{1}{a}$
- إذا كان $a = 1$ فان $\frac{1}{a} = \sqrt{a} = a = a^2 = a^3$
- إذا كان $a > 1$ فان $\frac{1}{a} < \sqrt{a} < a < a^2 < a^3$

الدوال المرتبطة بالدوال الأساسية

التعريف

لنفترض أن g دالة جبرية f دالة مرتبطة بـ g إذا وفقط إذا وُجد تحويل هندسي يحول $\mathscr{C}_g$ إلى $\mathscr{C}_f$

ملاحظة 1

ما لم يُنص على خلاف ذلك، عند الحديث عن الدوال المرتبطة، فإننا نشير إلى الدوال المرتبطة بما يُسمى دوال الأساس أو المرجع.

IPN

أ) الدوال والمنحنيات المرتبطة (استنتاج رسم منحنى من منحنى آخر)

أ- الدوال المرتبطة بالتناظر المركزي

$\mathscr{C}_f$ و $\mathscr{C}_g$ متماثلتان حول النقطة A(a,b)، ($\mathscr{C}_g$ هي صورة $\mathscr{C}_f$ بتناظر المركز A)، إذا، وفقط إذا، كان

$$\forall x \in \mathcal{D}_f,\ 2a - x \in \mathcal{D}_g \text{ و } g(2a-x) + f(x) = 2b$$

مركز التماثل او التناظر

النقطة A(a,b) هي مركز تماثل المنحنى $\mathscr{C}_f$ للدالة f، إذا وفقط إذا كان لدينا:

$$\forall x \in \mathcal{D}_f,\quad 2a - x \in \mathcal{D}_f \text{ و } f(2a-x) + f(x) = 2b$$

ملاحظة 2

الدوال المرتبطة بالتناظر المركزي لها تغيرات في اتجاهين متعاكسين.

ب- الدوال المرتبطة بالتناظر المحوري

الدوال $\mathscr{C}_f$ و $\mathscr{C}_g$ متماثلتان حول المحور الرأسي Δ ذي المعادلة $x = a$، ($\mathscr{C}_g$ هي صورة $\mathscr{C}_f$ بالتناظر المحوري للمحور Δ)، إذا، وفقط إذا، كنا:

$$\forall x \in \mathcal{D}_f,\quad 2a - x \in \mathcal{D}_g \text{ و } g(2a-x) = f(x)$$

محور التماثل أو التناظر

المحور الرأسي Δ هو مركز تماثل المنحنى $\mathscr{C}_f$ للدالة f، إذا وفقط إذا كان لدينا:

$$\forall x \in \mathcal{D}_f,\quad 2a - x \in \mathcal{D}_f \text{ و } f(2a-x) = f(x)$$

ملاحظة 3

إن الدوال المرتبطة بالتناظر المحوري لها نفس التغيرات عندما يكون محور التناظر الخاص بها رأسيًا (عموديا).

د- الدوال المرتبطة بالانتقال (الازاحة)

المنحنى $\mathscr{C}_f$ هو صورة المنحنى $\mathscr{C}_f$ بالإزاحة ذات المتجه $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$، إذا وفقط إذا،كان لدينا: $f(x) = g(x-a) + b$.

ملاحظة 4

الدوال المرتبطة بالإزاحة لها تغيرات في نفس الاتجاه.

ملاحظة 5

القيمة المطلقة تُولّد أيضًا أشكالًا معينة من الدوال المرتبطة.

دراسة الدوال $x \mapsto \frac{a}{x}$ و $x \mapsto ax^2$

مثال 6:

1) ليكن a عدد حقيقي غير صفري، نريد دراسة الدالة $f(x) = ax^2$

• ميدان التعريف هو : $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$

• اتجاه التباين (جدول التغيرات): يمكننا التمييز بين اتجاهين بناءً على إشارة a كما هو موضح في الجداول التالية:

2) ليكن a عدد حقيقي غير صفري، نريد دراسة الدالة $f(x) = \frac{a}{x}$

• ميدان التعريف هو : $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^* =]-\infty\,;\,0[\cup]\,0\,;\,+\infty[$.

• اتجاه التباين (جدول التغيرات): يمكننا التمييز بين اتجاهين بناءً على إشارة a كما هو موضح في الجداول التالية:

a > 0

x	- ∞		0		+ ∞
a/x		↘	‖	↘	

a < 0

x	- ∞		0		+ ∞
a/x		↗	‖	↗	

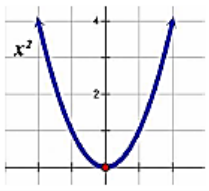
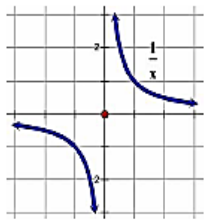
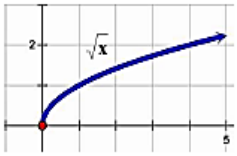
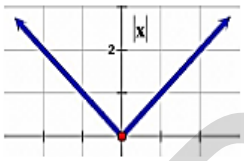
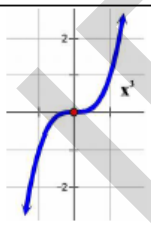
خلاصة

المنحنيات التي تمثل الدوال من النوع: $\frac{ax+b}{cx+d}$; $\sqrt{ax+b}$; ax^2+bx+c ; ax^3+bx^2+cx+d

يتم استنتاجها من منحنيات الدوال المرجعية $\frac{1}{x}$; $\sqrt{x}$; x^3 ; x^2 بتحويلات بسيطة (التناظر، الازاحة، التحاكي، إلخ).

لتغيير المرجع (الأصل؛ التكبير، التصغير) ليسمح بإيجاد منحنى دالة مرجعية في المرجع الجديد.

IPN

الدالة المرجعية	الشكل المرجعي	التمثيل البياني للدالة المرجعية
مربع $f(x)=x^2$ (زوجية)	$f(x)=a(x+b)^2+c$ لرسم الدالة: 1) نرسم المنحنى $y=ax^2$ 2) نرسم المنحنى الجديد C_f إما: • بشعاع الانسحاب: $\vec{v}(-b;c)$ • أو بمعلم جديد مبدؤه: $w(-b;c)$	
مقلوب $f(x)=\frac{1}{x}$ (فردية)	$f(x)=\frac{a}{x+b}+c$ لرسم الدالة: 1) نرسم المنحنى $y=\frac{a}{x}$ 2) نرسم المنحنى الجديد C_f إما: • بشعاع الانسحاب: $\vec{v}(-b;c)$ • أو بمعلم جديد مبدؤه: $w(-b;c)$	
جذر تربيعي $f(x)=\sqrt{x}$ (لا زوجية لا فردية)	$f(x)=a\sqrt{x+b}+c$ لرسم الدالة: 1) نرسم المنحنى $y=a\sqrt{x}$ 2) نرسم المنحنى الجديد C_f إما: • بشعاع الانسحاب: $\vec{v}(-b;c)$ • أو بمعلم جديد مبدؤه: $w(-b;c)$	
قيمة مطلقة $f(x)=\lvert x\rvert$ (زوجية)	$f(x)=a\lvert x+b\rvert+c$ لرسم الدالة: 1) نرسم المنحنى $y=a\lvert x\rvert$ 2) نرسم المنحنى الجديد C_f إما: • بشعاع الانسحاب: $\vec{v}(-b;c)$ • أو بمعلم جديد مبدؤه: $w(-b;c)$	
مكعب $f(x)=x^3$ (فردية)	$f(x)=a(x+b)^3+c$ لرسم الدالة: 1) نرسم المنحنى $y=ax^3$ 2) نرسم المنحنى الجديد C_f إما: • بشعاع الانسحاب: $\vec{v}(-b;c)$ • أو بمعلم جديد مبدؤه: $w(-b;c)$	

IPN

تنبيه : نعني بشعاع الانسحاب $\vec{v}(-b,c)$ الإزاحة ذات المتجه $\vec{v}\begin{pmatrix}-b\\c\end{pmatrix}$

مثال 7:

ادرس تغيرات الدالة التالية : $f(x)=x^2-2x+5$

وارسم المنحنى التمثيلي لها.

الحل :

$f(x)=x^2-2x+5=(x-1)^2+4$ ***(forme canonique)***

لنفرض ان $1\leq u<v$

$\Rightarrow 0\leq u-1<v-1$

$\Rightarrow 1\leq u<v$

$\Rightarrow (u-1)^2<(v-1)^2$

$\Rightarrow (u-1)^2+4<(v-1)^2+4$

$\Rightarrow f(u)<f(v)$

اذن f متزايدة على $[1;+\infty[$

لنفرض ان $u<v\leq 1$:

$\Rightarrow u-1<v-1\leq 0$

$\Rightarrow u<v\leq 1$

$\Rightarrow (u-1)^2>(v-1)^2$

$\Rightarrow (u-1)^2+4>(v-1)^2+4$

$\Rightarrow f(u)>f(v)$

اذن f متناقصة على $]-\infty;1]$

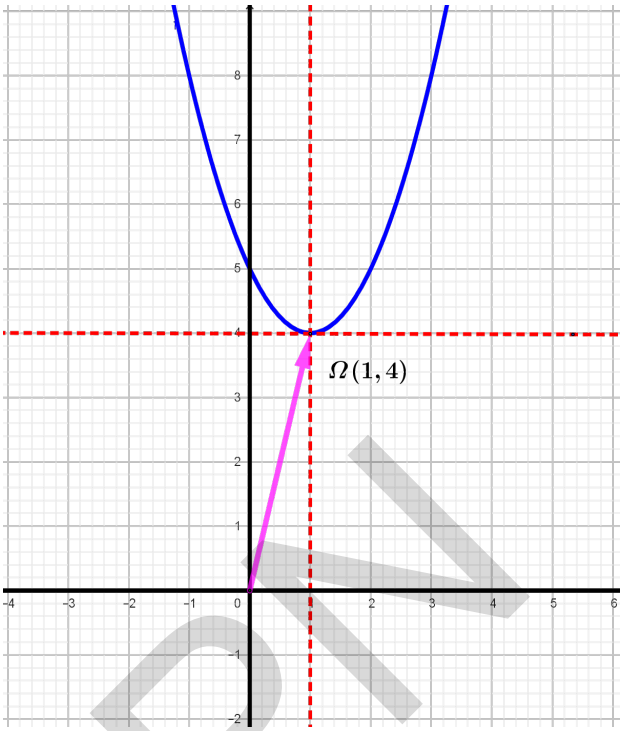
جدول القيم

x	-2	-1	0	1	2	3	4
f(x)	13	8	5	4	5	8	13

جدول التغيرات

x	$-\infty$ 1 $+\infty$
f(x)	↘ 4 ↗

منحنى الدالة



نلاحظ أن رسم الدالة f في في نظام إحداثيات متعامد عمودي $(o, \vec{i}, \vec{j})$ المقابل هو رسم الدالة x^2 في نظام إحداثيات متعامد أصله Ω(1 ؛4) بنفس الأساس .

يمكننا القول ان $\mathscr{C}_f$ هو صورة لمنحنى الدالة x^2 بواسطة الازاحة ذات المتجه $\vec{u} = \binom{1}{4}$

مثال 8:

لتكن f دالة معرفة ب $f(x) = \frac{2x+3}{x+1}$

أ) بين أنه لكل $x \neq -1$ فإن $f(x) = 2 + \frac{1}{x+1}$

ب) ادرس تغيرات الدالة وارسم المنحنى التمثيلي لها.

الحل :

أ) $2 + \frac{1}{x+1} = \frac{2x+2+1}{x+1} = \frac{2x+3}{x+1}$

إذن لكل $x \neq -1$ فإن $f(x) = 2 + \frac{1}{x+1}$

ب) $Df = \mathbb{R} - \{-1\} =]-\infty ; -1[\cup]-1 ; +\infty[$

اتجاه التغيرات

$-1 < u < v \Rightarrow$ $0 < u + 1 < v + 1$ $\Rightarrow \frac{1}{u+1} > \frac{1}{v+1}$ $\Rightarrow 2 + \frac{1}{u+1} > 2 + \frac{1}{v+1}$ $\Rightarrow f(u) > f(v)$ اذن f متناقصة على $]-1 ; +\infty[$	$u < v < -1$ $\Rightarrow u + 1 < v + 1 \leq 0$ $\Rightarrow \frac{1}{u+1} > \frac{1}{v+1}$ $\Rightarrow 2 + \frac{1}{u+1} > 2 + \frac{1}{v+1}$ $f(u) > f(v) \Rightarrow$ اذن f متناقصة على $]-\infty ; -1[$

IPN

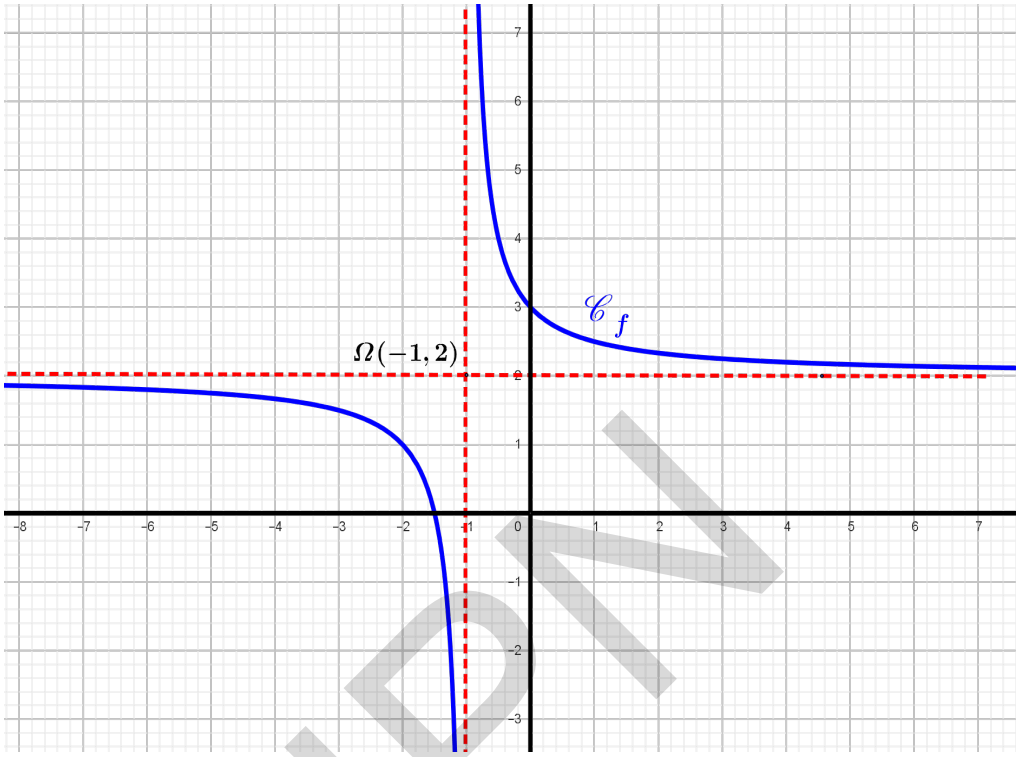
جدول القيم

x	-3,5	-3	-2,5	-2	-1,5	-0,5	0	0,5	1	1,5
f(x)	1,6	1,5	1,3	1	0	4	3	2,6	2,5	2,4

جدول التغيرات

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$\frac{1}{x}$	↘		‖	↘	

منحنى الدالة



نلاحظ أن رسم الدالة f في في نظام إحداثيات متعامد عمودي $(o, \vec{i}, \vec{j})$ المقابل هو رسم الدالة $\frac{1}{x}$ في نظام إحداثيات متعامد أصله $\Omega(-1\ ;\ 2)$ بنفس الأساس .

مثال 9:

لتكن g دالة معرفة ب $g(x) = 2 + \sqrt{x+3}$

ادرس تغيرات الدالة وأرسم المنحنى التمثيلي لها.

الحل :

مجال التعريف

الدالة $g(x) = 2 + \sqrt{x+3}$ مُعرّفة لكل $x + 3 \geq 0$ اذن $\mathcal{D}_g = [-3\ ;\ +\infty[$.

اتجاه التغيرات

لنفرض ان

$$-3 \leq u \leq v$$
$$0 \leq u + 3 \leq v + 3$$
$$0 \leq \sqrt{u+3} \leq \sqrt{v+3}$$
$$2 \leq 2 + \sqrt{u+3} \leq 2 + \sqrt{v+3}$$
$$g(u) \leq g(v)$$

إذن g متزايدة على ميدان تعريفها

جدول القيم

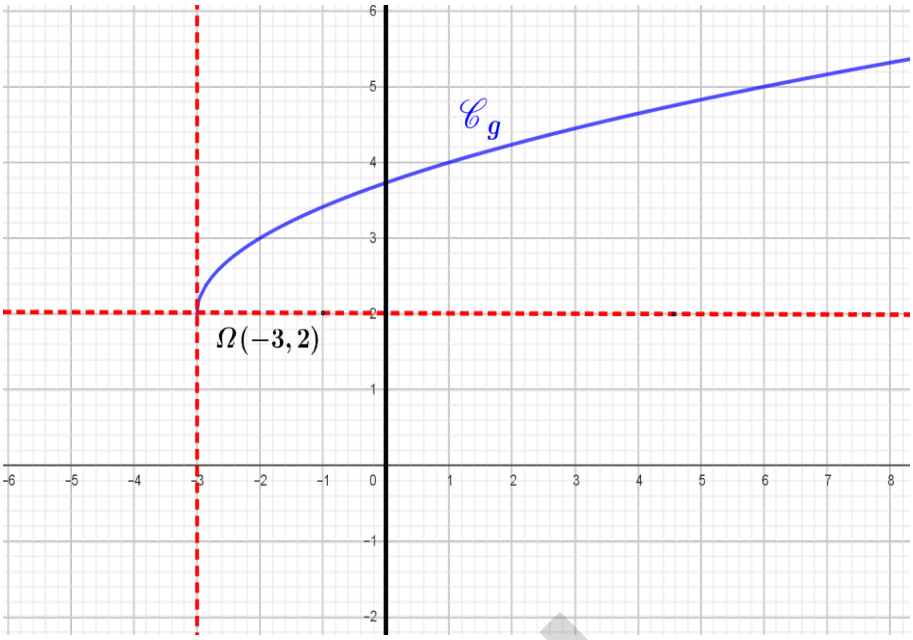
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
g(x)	2	3	3,41	3,73	4	4,23	4,44

جدول التغيرات

x	-3	$+\infty$
g(x)	2	↗

IPN

منحنى الدالة



نلاحظ أن رسم الدالة f في نظام إحداثيات متعامد عمودي $(o, \vec{i}, \vec{j})$ المقابل هو رسم الدالة $\sqrt{x}$ في نظام إحداثيات متعامد أصله Ω(-3 ؛ 2) بنفس الأساس.

IPN

التمرين 1:

لتكن f دالة معرفة ب $f(x)=\frac{4x-3}{x+2}$

بين أن النقطة $\Omega(-2\ ;\ 4)$ هي مركز تناظر لمنحنى f .

التمرين 2:

حدد مراكز تماثل منحنيات الدوال :

$$f(x)=x^3-6x^2+12x-5;\ g(x)=\frac{6x-3}{x+2}$$

التمرين 3:

لتكن g دالة معرفة ب $g(x)=x^2-5x-6$

بين أن المستقيم $\Delta: x=\frac{5}{2}$ هو محور تناظر لمنحنى g .

التمرين 4:

لتكن f دالة معرفة ب $f(x)=x^3-6x^2+12x-2$

أ) بين أن f تكتب على الشكل $f(x)=(x-2)^3+6$

ب) باستخدام الصيغة الأخيرة ل f بين ان النقطة $\Omega(2\ ;\ 6)$ هي مركز تناظر لمنحنى f .

التمرين 5:

لتكن f دالة معرفة ب $f(x)=3x^2-5x+1$

أ) حدد معادلة المستقيم (D) محور تناظر منحنى f

ب) ارسم منحنى الدالة f

التمرين 6:

نعطي الدوال التالية

☒ $g(x)=x^2-4x+5$;

☒ $h(x)=\frac{2x-3}{x+1}$;

☒ $k(x)=(x+1)^3-3$;

☒ $l(x)=5+\sqrt{x-3}$.

أ) حدد الإزاحات التي تسمح بتحويل الدوال الجبرية الأساسية إلى الدوال l و g h k

ب) استخدم هذه الدوال الأساسية لرسم منحنيات الدوال l و g h k

التمرين 7:

لتكن لدينا الدوال التالية :

$$f(x)=x-3,\quad g(x)=x^2-6x-1;$$
$$h(x)=x^3+6x^2+12x+10,\quad k(x)=\frac{3x-1}{x+2}$$

أ) باستخدام دوال أساسية وانتقالات مناسبة، أنشئ منحنيات هذه الدوال.

ب) استنتج بناء المنحنيات البيانية للدوال:

$$L(x)=|x-3|,\quad M(x)=|x^2-6x-1|$$
$$N(x)=|x^3+6x^2+12x+10|,\quad Q(x)=\left|\frac{3x-1}{x+2}\right|$$

التمرين 8:

لتكن الدوال:

$$f(x)=x^2-6x+7,\quad g(x)=x^3+6x^2+12x+9$$
$$h(x)=\frac{3x-1}{x+2},\quad k(x)=2+\sqrt{x-3}$$

ادرس وأنشئ منحنيات هذه الدوال باستخدام معدل التغير T.

التمرين 9:

انطلاقًا من التمثيل البياني لمنحنى الدالة

$$f(x)=\sqrt{x},$$

استنتج منحنيات الدوال التالية في نفس الرسم البياني:

$$g(x)=-\sqrt{x};\quad h(x)=\sqrt{-x};\quad k(x)=-\sqrt{-x}$$

IFN

التمرين 10:

لتكن f دالة معرفة بـ

$$f(x)=\frac{2x+1}{3x-4}$$

1) حدد مجال التعريف $\mathcal{D}_f$ للدالة f.
2) حدد صور: 4; -2; 7; 0,5 و5 بالدالة f.
3) حدد السوابق المحتملة للعدد 2 بالدالة f إن وجدت.
4) ليكن $\mathscr{C}$ المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المزود بمعلم متعامد. حدد إن وجدت إحداثيات نقاط تقاطع $\mathscr{C}$ مع محور الفواصل.

التمرين 11:

لتكن الدالة $f(x)=ax^2+bx+12$, (حيث a و b عددان حقيقيان).

1) احسب a و b علما أن $f(1)=-6$ و $f(-2)=30$.
2) حل في $\mathbb{R}$: $f(x)=0$ و $f(x)\geq 0$
3) حلل $f(x)$ إلى عوامل.
4) بين أن المستقيم $D: x=\frac{-5}{2}$ هو محور تماثل المنحنى C_f للدالة f

التمرين 12:

لتكن f الدالة المعرفة بـ $f(x)=ax^2+bx+c$ ، حيث a, b و c من $\mathbb{R}$
علما أن $f(0)=3$، وأن جدول تغيرات f هو:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
Δf		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-1	↗	$+\infty$

1) حدد الأعداد الحقيقية a, b و c .
2) بين أن C_f يقبل محور تماثل D، وحدد معادلته.
3) ارسم D و C_f.

IPN

المجال الثالث: الهندسة

الفصل السادس

الهندسة في المستوي

IPN

1. المستقيم

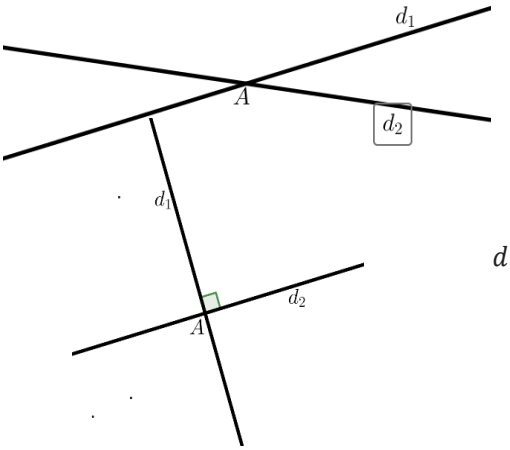
أ - تعريف

المستقيم هو مجموعة من النقاط غير المنتهية فهو خط هندسي مستقيم ليس له بداية ولا نهاية.

يرمز للمستقيم عادة بالأحرف الكبيرة (AB) حيث A و B نقطتان منه أو بحرف صغير مثل d

كما يمكن تسمية المستقيم بنقطتين لا تنتميان إليه ولكن تحددان اتجاهه مثل (xx')

ب - وضعية مستقيمين



- **التقاطع**

نقول إن مستقيمين متقاطعان إذا كانت بينهما نقطة واحدة مشتركة وتكتب:

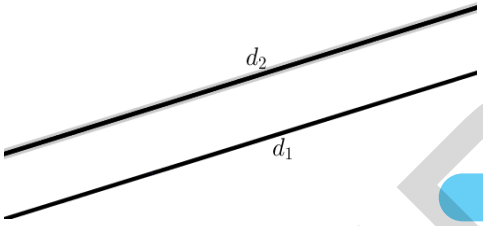
$d \cap d'$

- **التعامد:**

إذا تقاطع مستقيمان d و d' في زاوية قائمة نقول إنهما متعامدان وتكتب: $d \perp d'$

وتقرأ d يعامد d'

- **التوازي:**



إذا كان d_1 و d_2 مستقيمين لا يتقاطعان أبدا فإنهما متوازيان وتكتب

$d_1 // d_2$ **و نقرأ** d_1 **يوازي** d_2

2. المرجع القائم و المنتظم

أ - مفهوم المرجع

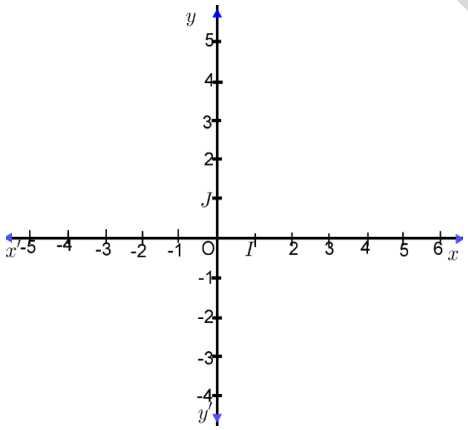
إذا كان لدينا محوران (yy') و (xx') حيث:

المحور (xx') ممعلم ب (o,i)

المحور (yy') ممعلم ب (o,j)

يتعامدان في نقطة O نسميها أصل حيث $Oi = Oj = 1$

فإننا نسمي (o, i, j) مرجعا قائما ومنتظما.



ب - احداثيات نقطة في المستوى

يتكون المرجع القائم والمنتظم (O,i,j) من نقطة أصل O

محور **الفواصل** مثلا (xx')

محور **التراتيب** مثلا (yy')

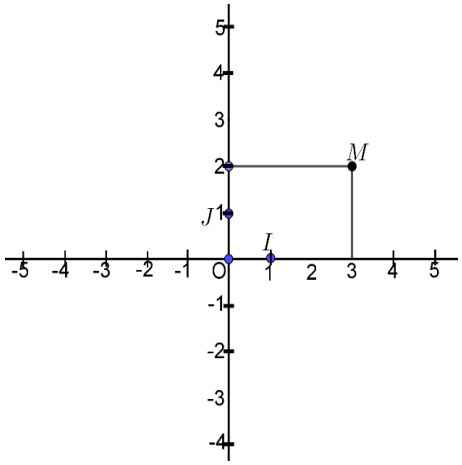
Oi تمثل وحدة قياس على محور **الفواصل**

Oj تمثل وحدة قياس على محور **التراتيب**

- إذا كانت **M** نقطة من المستوى فإنها تمثل **بزوج من النقاط** (x_m , y_m) نسميه **مركبات** M حيث x_m تسمى فاصلة النقطة M و y_m تسمى ترتيب النقطة **M**.

IPN

مثال 1 :



- النقطة O (**نقطة الأصل**) فاصلتها 0 وترتيبها 0
- النقطة I فاصلتها 1 وترتيبها 0
- النقطة J فاصلتها 0 وترتيبها 1
- نحدد النقطة M فاصلتها 3 وترتيبها 2

ج - احداثيات منتصف قطعة

خاصية 1:

ليكن A, B نقطتين في مرجع قائم ومنتظم (O,I,J) محددتان بإحداثياتهما على التوالي

(x_A, y_A) و (x_B, y_B)

إذا كانت النقطة I هي منتصف القطعة [AB] مزودة بإحداثياتها (x_I, y_I)

فان:

$$x_I = \frac{x_A + x_B}{2} \quad \text{و} \quad y_I = \frac{y_A + y_B}{2}$$

مثال 2: نحدد النقطتين $A(-2;-3)$ و $B(-1;4)$ و I منتصف [AB]

حدد إحداثيات I ؟

الحل:

$$x_I = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-2-1}{2} = \frac{-3}{2} = -1{,}5$$

$$y_I = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{-3+4}{2} = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

إذاً $I\,(-1{,}5\ ;\ 0{,}5)$

د - مركبات متجه

تعريف: ليكن A و B نقطتين في مرجع قائم ومنتظم مركباتهما على التوالي (x_A, y_A) و (x_B, y_B) نسمي مركبات المتجه $\overrightarrow{AB}$ المركبات (x_M, y_M) للنقطة M حيث $(OMAB)$ متوازي أضلاع و:

$$x_M = x_B - x_A$$

و $y_M = y_B - y_A$

وتكتب: $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$

مثال 3: (O,i,j) مرجع قائم ومنتظم نحدد نقطتين A و B إحداثياتهما على التوالي (3;4) و (5;2)

احسب مركبات المتجهات $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$ و $\overrightarrow{AB}$

الحل:

$$\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix} x_A - x_O \\ y_A - y_O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-0 \\ 4-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix} x_B - x_O \\ y_B - y_O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-0 \\ 2-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-3 \\ 2-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

IPN

هـ ـ المسافة بين نقطتين في المستوى

ليكن A , B نقطتين من مستوى ذي مرجع قائم ومنتظم حيث:

$A\ (x_A, y_A)$ و $B\ (x_B, y_B)$ فإن المسافة بين النقطتين A و B تحسب بالعبارة التالية:

$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$$

مثال : في مرجع قائم ومنتظم لدينا النقطتان A(-13;4) و B(-7;9)

احسب المسافة **AB** ؟

الحل:

$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$$

$$=\sqrt{(-7-(-13))^2+(9-4)^2}$$

$$=\sqrt{6^2+5^2}=\sqrt{36+25}=\sqrt{61}$$

$$AB=\sqrt{61}$$

و ـ متجه التوجيه

إذا كان (D) مستقيما فإن كل متجه غير منعدم مُوَازٍ لـ D يمكن اعتباره متجها توجيها لهذا للمستقيم (D) .

إذا متجه التوجيه هو متجه يحدد اتجاه المستقيم يكتب عادة

$$\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$$

حيث a و b مركبتا المتجه.

- كل مستقيم له عدد لا نهائي من المتجهات الموجهة؛ لأنها متجهات موازية له.

مثال :

لدينا نقطتان في المستوى B(4;6) A(1;2) المطلوب إيجاد متجه توجيه للمستقيم المار بالنقطتين A و B.

الحل :

لحساب متجه التوجيه نستخدم المتجه $\overrightarrow{AB}$ الذي يعطى ب:

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4-1\\6-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$$

إذا المتجه $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ هو متجه توجيه للمستقيم المار ب A و B

ز ـ المستقيمات المتوازية والمستقيمات المتعامدة

خاصية :

ليكن (D) و (D') مستقيمين ومتجهيهما التوجيهيين على التوالي $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ و $\vec{v}\begin{pmatrix}a'\\b'\end{pmatrix}$ نقول إن:

- (D) و (D') متوازيان إذا و فقط إذا كان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ أحدهما مضاعفا للآخر ($\vec{v}=k\,\vec{u}$) k عدد حقيقي
- (D) و (D') متوازيان إذا و فقط إذا كان $ab'-ba'=0$
- (D) $\perp$ (D') متعامدين إذا كان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدين.
- (D) $\perp$ (D') متعامدين إذا كان $aa'+bb'=0$.

IPN

2. معادلة كرتيزية لمستقيم في مرجع

أ ـ كيفية كتابة معادلة مستقيم

في مستوى مزود بمرجع قائم ومنتظم (o,i,j)كل مستقيم غير عمودي على محور الفواصل (ox) يمكن تمثيله بمعادلة كرتيزيه من الشكل:

$$ax + by + c = 0$$

حيث a, b, c أعداد حقيقية و a, b يختلفان عن الصفر.

مثال:

في مرجع قائم ومنتظم (o,i,j) المستقيم (D)يمر من النقطة $A(6,-7)$ وله متجه توجيه $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$

أعط المعادلة الكرتيزية للمستقيم.

الحل:

المتجه التوجيهي هو $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$ وهو يمثل $\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$

إذا يكون $(3,4) = (-(-3),4)$

والمستقيم يمر بالنقطة $A(6,-7)$

ومعادلة المستقيم $ax + by + c = 0$

بالتعويض في المتعادلة نجد $4x + 3y + c = 0$

$$4 \times 6 + 3 \times (-7) + c = 0$$
$$24 - 21 + c = 0$$
$$3 + c = 0$$
$$c = -3$$

لذا تصبح المعادلة $4x + 3y - 3 = 0$

هي معادلة المستقيم المطلوبة حيث b و a يختلفان عن الصفر.

ب ـ معامل توجيه المستقيم

التعريف:

ليكن D مستقيم يمر بين نقطتين $A(x_1, y_1)$; $B(x_2; y_2)$ مع $x_1 \neq x_2$ فإن معامل التوجيه هو:

$$M = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

مثال :

AوB نقطتان من مستقسم حيث $A(1,2)$; $B(4,8)$

احسب معامل التوجيه للمستقيم المار بينهما.

الحل :

$$m = \frac{8-2}{4-1} = \frac{6}{3} = 2$$

ج ـ تحديد الصيغة المختصرة لمعادلة المستقيم

في مرجع قائم ومنتظم (o,i,j) نحدد الصيغة المختصرة لمعادلة كرتيزية لمستقيم (D) بالشكل الثاني:

$$(D): y = mx + p$$

حيث :

- m **معامل التوجيه**
- y **ترتيبة الأصل أو قيمة** y **عندما** $x = 0$

في هذه الحالة يكون:

$\vec{u}\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$ هو متجه توجيه المستقيم (D)

IPN

مثال:

نحدد الصيغة المختصرة لمعادلة مستقيم بمعرفة نقطتين منه:

ليكن A و B نقطتين من مستقيم (D) حيث $B(4,7)$ و $A(2,3)$

أعط الصيغة المختصرة لمعادلة هذا المستقيم.

الحل:

الصيغة المختصرة:

$$y = mx + p$$

نحدد الآن m و p :

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{7-3}{4-2} = \frac{4}{2} = 2$$

اذا $m = 2$

نحسب p :

نستخدم النقطة $A(2,3)$

$$P = y1 - mx_1$$

$$P = 3 - 2 \times 2$$

$$= 3 - 4 = -1$$

$$P = -1$$

كتابة المعادلة $y = mx + p$

$$y = 2x - 1$$

د ـ خاصيات التوازي والتعامد

في مرجع قائم ومنتظم (O,i,j) لدينا مستقيمان (D) و (D')

حيث :

$(D): y = mx + p$ و $(D') : y' = m'x + p'$

خاصية 1 : (D) يوازي (D') اذا وفقط اذا كان $m = m'$

خاصية 2 : (D) يعامد (D') اذا وفقط اذا كان $m \times m' = -1$

مثال :

في مستوى مزود بمرجع قائم ومنتظم (O,i,j) نعطي المعادلتين الكرتيزيتين للمستقيمين (D) و (D')

$$D: 4x - 2y + 6 = 0$$

$$D': x + 2y - 4 = 0$$

1- أعط الصيغتين المختصرتين لمعادلتي المستقيمين.

2- أعط معاملي التوجيه للمستقيمين (D) و (D') .

3- بين الوضعية النسبية للمستقيمين (D) و (D') .

IPN

الحل :

-1

$$D: 4x - 2y + 6 = 0$$

$$y = \frac{4x+6}{2} \Rightarrow y = 2x + 3$$

إذا المعادلة المختصرة ل (D): $y = 2x + 3$

$$(D'): x + 2y - 4 = 0 \Rightarrow y = \frac{-x+4}{2} = -½\,x + 2$$

⇨ $(D'): y = -½\,x + 2$

-2 معامل توجيه المستقيم (D) : $m = 2$

معامل توجيه المستقيم (D) : $m' = -1/2$

-3 لدينا $m \times m' = 2 \times -1/2 = -1$

إذا (D) يعامد (D')

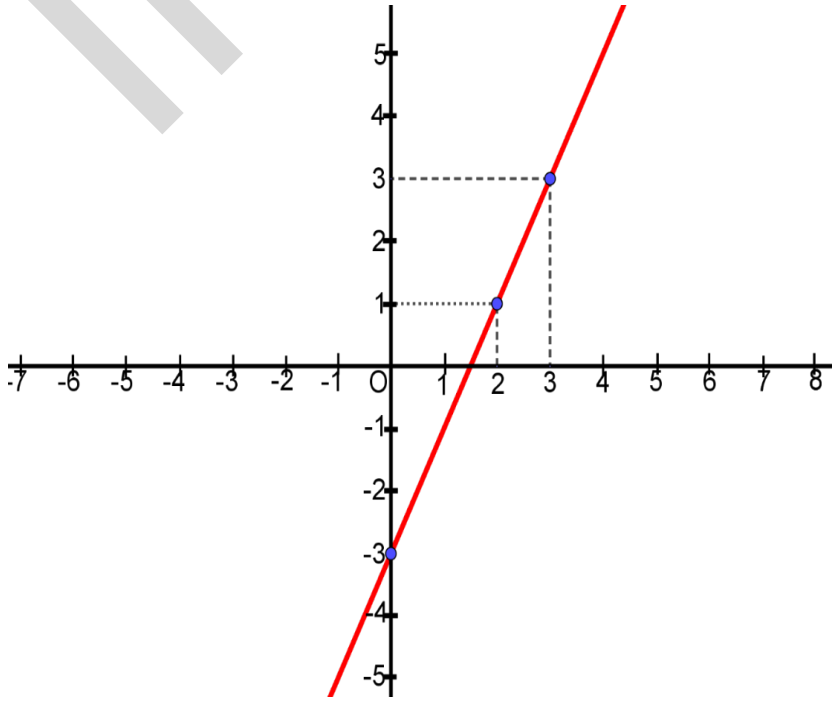
هـ - التمثيل البياني لمستقيم بمعرفة معادلة له

ليكن d مستقيم معادلته $y = 2x - 3$

مثل بيانيا المستقيم d

نبحث عن إحداثيات نقطتين من d

	A	B
x	2	3
y	1	3



IPN

تمارين تطبيقية

تمرين 1:

في مرجع قائم ومنتظم نعطي النقطتين M(2,5) و N(-1,3) . مثل النقطتين N و M على هذا المرجع؟ احسب المسافة MN؟

تمرين 2:

إذا كانت النقطة $K(x,y)$ تنتمي إلى محور الفواصل فماذا نستنتج عن الإحداثيتين yو x و ماذا لو كانت تنتمي لمحور التراتيب

تمرين 3 :

في مرجع قائم ومنتظم لدينا النقطتان A(1,2) و B(4,6) احسب المسافة AB حدد إحداثيات M منتصف القطعة [AB]

تمرين 4:

لتكن G و H نقطتين من مرجع قائم ومنتظم حيث G مركباتها هي (5,-2) و I منتصف GH ومزودة ب (1,3) . ماهي إحداثيات H ؟

تمرين 5:

أعط متجه التوجيه لمستقيم يمر من النقطتين B(6,9) و A(2,5).

تمرين 6 :

هل المتجهان $\vec{v}\begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix}$ و $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ يمكن أن يكونا متجهي توجيه لنفس المستقيم؟

تمرين 7:

اكتب معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطتين B(2,2) و A(0,-2)

تمرين 8:

هل النقطة M (4,10) تنتمي إلى المستقيم الذي معادلته $y = 2x + 1$ ؟

تمرين 9:

أوجد معادلة المستقيم الذي معامل توجيهه $a = -2$ ويمر بالنقطة A(1,3) ؟

تمرين 10:

ما معامل التوجيه للمستقيم المار P(0,-1) Q(3,2) ؟

تمرين 11:

هل النقاط التالية تقع على نفس المستقيم؟ E(0,1) F(2,5) G(4,9)

تمرين 12:

ليكن (d) مستقيم يمر بالنقطة $P(1,4)$ ويقطع محور التراتيب في النقطة التي إحداثياتها (1,0)

أوجد معامل التوجيه المستقيم (d) ؟ اكتب معادلته بالصورة المختصرة.

تمرين 13:

ليكن المستقيم d الذي يمر بالنقطة M(4,2) وعموديا على d_1 الذي معادلته:

$$y = -\frac{3}{4}x + 1$$

احسب معامل توجيه المستقيم d؟

استنتج معادلة المستقيم d على الشكل المختصر $y = ax + b$ ؟

IPN

المجال الرابع: تنظيم المعطيات

الفصل السابع

الإحصـــــــاء

IPN

1. مصطلحات الإحصاء الفصل

التعريفات

أ - المجتمع الإحصائي (population)

المجتمع الإحصائي هو المجموعة التي تجري عليها الدراسة الإحصائية. تُسمى عناصره **أفرادًا** وتُسمى المجموعة الجزئية من المجتمع **عيّنة**

ب - المتغير أو السمة (Caractère)

الخاصية أو المعيار الذي تُجرى عليه الدراسة لتحليل المجتمع يُسمى **متغيرًا**. إذا كانت قيمه رقمية، نقول إن المتغير **كمّي أو عددي** (مثال: طول الطلاب في فصل). وإلا، نقول إنه **نوعي** أو وصفي (مثال: هوايات الشخص، مهنته). دراستنا هنا ستقتصر على المتغيرات الكمية.

ج - الفئة (Classe)

عند تقسيم المجتمع المدروس إلى عدد محدود من الفئات، بحيث يأخذ المتغير نفس القيمة أو نفس مجموعة القيم. ينبغي أن تكون البيانات دقيقة بما يكفي بحيث ينتمي كل فرد إلى فئة واحدة فقط .

د - التكرار (الحصيص)، التردد، التردد النسبي

التكرار أو الحصيص n لفئة هو عدد الأفراد الذين لوحظت لديهم هذه القيمة للمتغير .

-التردد f لفئة هو حاصل قسمة التكرار n على التكرار الكلي N للمجتمع المدروس : $f = \frac{n}{N}$

التردد النسبي : قائمة التكرارات النسبية لقيم المتغير .

النسبة المئوية p لفئة تُحسب بضرب التكرار النسبي f في 100 :

$$p = 100 \times f = 100 \times \frac{n}{N}$$

ملاحظة

أي تكرار نسبي (تردد نسبي) محصور بين 0 و1، وأي نسبة مئوية محصورة بين 0 و100. بما أن مجموع تكرارات جميع الفئات يساوي N ، فإن مجموع تكراراتها النسبية يساوي 1 ومجموع نسبها المئوية يساوي 100 .

هـ - التكرارات التراكمية، التكرارات النسبية التراكمية

التعريفات

نعتبر متغيرًا كميًا :

1التكرار التراكمي (الحصيص المتراكم)المرتبط بعدد x هو عدد الأفراد الذين قيمة المتغير لديهم أقل من أو تساوي x (تكرار تراكمي تصاعدي)، أو أكبر من أو تساوي(x تكرار تراكمي تنازلي) .

2التكرار النسبي التراكمي المرتبط بعدد حقيقي x يُحصل بقسمة التكرار التراكمي على التكرار الكلي N.

2. سلاسل إحصائية بمتغير واحد

أ - معايير النزعة المركزية

السلسلة الإحصائية

التعريف

نعتبر متغيرًا كميًا مطبقًا على مجتمع مدروس. مجموعة البيانات المحصل عليها تشكل سلسلة إحصائية بمتغير واحد. بشكل عام، تُسمى سلسلة إحصائية أي مجموعة من الأزواج$(x_i; n_i)$ ، حيث x_i هي القيمة (المتغير) و n_i هو التكرار. $(1 \leq i \leq n)$.

-إذا ارتبطت كل فئة بقيمة واحدة للمتغير$(x_i \in \mathbb{N})$ ، نقول إن المتغير منفصل .

-إذا ارتبطت كل فئة بفترة من القيم$((x_i \in \mathbb{D}))$ ، نقول إن المتغير متصل .

-إذا لم يكن (x_i) رقميًا، نقول إن السلسلة نوعية .

مثال 1

تم تسجيل عدد الإخوة والأخوات لمجموعة من 50 طالبًا. النتائج كالآتي:

عدد الإخوة	0	1	2	3	4
التكرار	13	19	15	2	1

-المجتمع المدروس: مجموعة الـ 50 طالبًا .

-المتغير المدروس: عدد الإخوة والأخوات؛ وهو متغير كمي منفصل.

مثال 2

خلال فحص طبي، تم وزن 60 شخصًا (بالكيلوغرام):

الوزن (كغ)	]45;40]	]50;45]	]55;50]	]60;55]	]65;60]	] 70;65]
التكرار	6	10	12	19	9	4

IPN

-المجتمع المدروس: مجموعة الـ 60 شخصًا .
-المتغير المدروس: الوزن؛ وهو متغير كمي متصل .

ب - خصائص الموقع أو معايير النزعة المركزية

أ- **المدى** (Étendue)

مدى السلسلة الإحصائية بمتغير واحد هو الفرق بين القيمتين القصوى والدنيا للمتغير .

-**مثال 1**: المدى 4 = 0 - 4

-**مثال 2**: المدى 30 = 40 - 70 المثالين السابقين

ج - المنوال أو الفئة المنوالية (Mode)

-إذا كان المتغير منفصلًا يكون المنوال هو قيمة المتغير المقابلة لأكبر تكرار (قد يكون هناك عدة منوالات) .

في المثال 1: المنوال هو 1 (لأنه يقابل التكرار الأقصى 19) .

-إذا كان المتغير متصلًا، تكون الفئة المنوالية هي فترة القيم المقابلة لأكبر تكرار (قد يكون هناك عدة فئات منوالية) .

في المثال 2: الفئة المنوالية هي ([60;55[) (تتكرار 19 .

د - الوسيط (Médiane)

الوسيط M للسلسلة الإحصائية يقسمها إلى جزأين بحيث :

-نصف القيم على الأقل أقل من أو تساوي الوسيط .

-نصف القيم على الأقل أكبر من أو تساوي الوسيط .

مثال :

-السلسلة: (2, 3, 5, 10, 12, 19, 20) ← الوسيط .(M= 10)

-السلسلة: (2, 3, 5, 10, 12, 19) ← الوسيط .(M= $\frac{5+10}{2}$= 7.5)

حساب الوسيط :

إذا كانت السلسلة تحتوي على (n) قيمة مرتبة تصاعديًا أو تنازليا :

-إذا كان n فرديًا: الوسيط هو القيمة رقم $\frac{n+1}{2}$

-إذا كان n زوجيًا: الوسيط هو نصف مجموع القيمتين رقم $\frac{n}{2}$ و$\frac{n+1}{2}$

مثال :

القيمة	1	2	3	7
التكرار	3	5	4	9

n = 3+5+4+9 = 21 فردي ← $\frac{21+1}{2}$ = 11 ← (الوسيط Me=3 عند القيمة 11 .

القيمة	1	2	3	7
التكرار	3	5	4	12

n = 3+5+4+12 = 24 زوجي

$\frac{n}{2}$ = 12 و $\frac{n}{2}$ + 1 = 13

Me = $\frac{\text{القيمة13} + \text{القيمة12}}{2} = \frac{3+7}{2} = 5$

بشكل عام، الوسيط هو العدد الحقيقي M الذي يقسم المجتمع إلى مجموعتين متساويتين في التكرار.

ذ - المتوسط الحسابي او المعدل الحسابي (Moyenne arithmétique)

التعريف

المتوسط الحسابي هو مجموع جميع القيم مقسومًا على عددها.

نعتبر متغيرًا كميًا x_i

نعرض البيانات بالشكل:

القيمة أو مركز الفترة	x_1	x_2	x_3	…	x_p
التكرار	n_1	n_2	n_3	…	n_p

IPN

التكرار الكلي:

$$N = n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_p$$

المتوسط الحسابي للسلسلة هو العدد الحقيقي :

$$\bar{X} = \frac{x_1 n_1 + x_2 n_2 + x_3 n_3 + \cdots + x_p n_p}{N}$$

باستخدام التكرارات :

ر - خطية المتوسط الحسابي

الخاصية

-إذا جمعنا قيم متغيرين لكل فرد، فإن متوسط القيم الجديدة يساوي مجموع متوسطي المتغيرين الأصليين .

-إذا ضربنا جميع قيم متغير في عدد حقيقي ثابت k ، فإن متوسط القيم الجديدة يساوي k ضرب متوسط القيم الأصلية .

مثال :

تم رمي نرد 100 مرة، النتائج :

4; 6; 1; 2; 5; 2; 1; 2; 3; 5; 4; 3; 1; 6; 6; 4; 2; 2; 3; 3;
1; 4; 6; 4; 2; 6; 4; 3; 6; 4; 6; 3; 3; 4; 4; 6; 2; 3; 1; 2;
5; 6; 5; 5; 3; 3; 5; 4; 1; 3; 1; 3; 2; 4; 5; 6; 4; 4; 6; 1;
3; 6; 2; 6; 5; 6; 3; 4; 6; 3; 4; 5; 3; 1; 5; 1; 3; 5; 2; 3;
6; 1; 5; 3; 4; 2; 2; 4; 1; 5; 1; 4; 6; 1; 2; 3; 2; 1; 3; 3.

1. رتب البيانات.
2. حدد المجتمع المتغير.
3. تحديد الفئات (Modalités).
4. احسب التكرار والتكرارالنسبي (التردد) لكل فئة.
5. هل النرد متوازن؟
6. مثل البيانات بمخطط أعمدة.

الحل :

1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 2; 2; 2; 2; 2;
2; 2; 2; 2; 2; 2; 2; 2; 2; 2; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 3;
3; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 4; 4; 4; 4; 4; 4; 4; 4; 4;
4; 4; 4; 4; 4; 4; 4; 4; 4; 5; 5; 5; 5; 5; 5; 5; 5; 5; 5; 5;
5; 5; 5; 6; 6; 6; 6; 6; 6; 6; 6; 6; 6; 6; 6; 6; 6; 6; 6; 6.

الفئة	1	2	3	4	5	6
التكرار	15	15	22	18	13	17
التكرار النسبي	0.15	0.15	0.22	0.18	0.13	0.17

5.التكرارات النسبية غير متساوية ← النرد غير متوازن .

IPN

مثال :

الجدول التالي يظهر درجات طلاب في اختبار (من 10) :

الدرجة	3	4	5	6	7	8	9
التكرار	1	4	8	9	7	5	2

المطلوب :

1. إنشاء جدول يحتوي: التكرارات التراكمية، التكرارات النسبية، التكرارات النسبية التراكمية .
2. تحديد :
   - عدد الطلاب الحاصلين على درجة أقل من 5 .
   - عدد الطلاب الحاصلين على درجة أكبر من 7 .
   - نسبة الطلاب الذين حصلوا على معدل النجاح "المتوسط" (درجة > 6) .

الحل :

الدرجة	3	4	5	6	7	8	9
التكرار	1	4	8	9	7	5	2
التكرار التراكمي	1	5	13	22	29	34	36
التكرار النسبي	0.028	0.111	0.222	0.25	0.194	0.139	0.056
التكرار النسبي التراكمي	0.028	0.139	0.361	0.611	0.806	0.944	1

2.

-الطلاب بدرجة > 5: 5 طلاب .

-الطلاب بدرجة > 7: 7 طالبًا .

-نسبة الطلاب بدرجة > 6: 86.1 من خلال الجدول يمكن أن نعرف أن 13.9% هي نسبة التلاميذ الحاصلين على درجة أكبر أو تساوي 4 وبالتالي نسبة الحاصلين على درجة 6 هو 100-13.9=86.1 % (حيث 13.9% ≥ 4) .

مثال آخر

درجات 25 طالبًا :

14; 15; 4; 7; 11; 14; 9; 10; 12; 12; 16; 10; 18; 13; 12; 3;
11; 14; 12; 13; 13; 6; 12; 10; 7.

المطلوب :

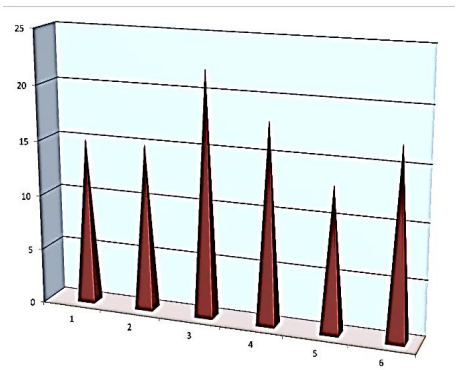
1. المدى والمنوال .
2. المتوسط الحسابي .
3. نسبة الطلاب بدرجة ≤ 10 .

الحل :

الدرجة	3	4	6	7	9	10	11	12	13	14	15	16	18
التكرار	1	1	1	2	1	4	2	5	2	3	1	1	1

1- المدى = 18 - 3 = 15 ، المنوال = 12 (أعلى تكرار) .

2-المتوسط الحسابي:



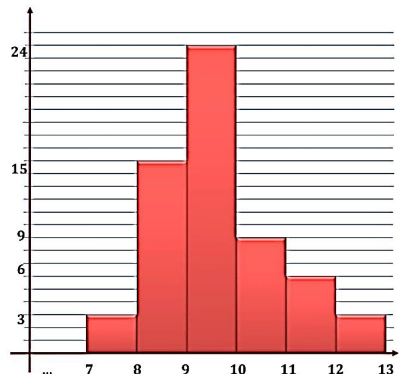
IPN

$$\bar{X} = \frac{1\times3+1\times4+1\times6+2\times7+\cdots+18\times1}{25} \Rightarrow \bar{X} = \frac{275}{25} = 11$$

3. الطلاب بدرجة ≤ 10: 19 طالبًا ← النسبة = $\frac{19}{25}\times100$ =76%

مثال (أعواد قمح)

تم قياس طول 60 عود قمح (بالسنتيمتر) وكانت النتيجة مبينة في الشكل التالي:

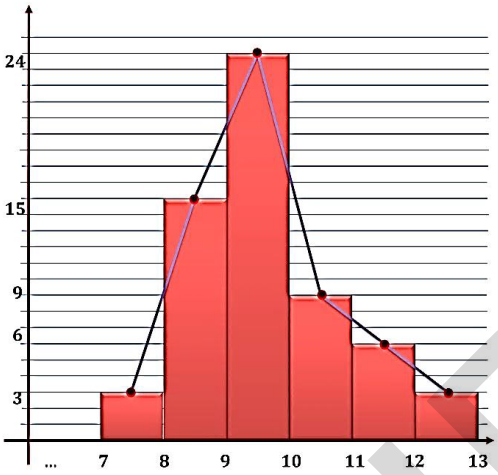


1. حدد المدى والفئة المنوالية.
2. حدد المتوسط الحسابي.
3. في مجموعة أخرى (140 عودًا)، المتوسط ≈ 8.9 سم. ما متوسط الـ 200 عود؟

الحل :

وفقًا للشكل الموضح للبيانات، يبلغ أقصى طول للعود 13 سم، وأدنى طول 7 سم

1. المدى = 13 - 7 = 6 سم، الفئة المنوالية =]9; 10] لأنها الفئة التي تحتوي على أكبر عدد من السنابل (تكرار 24)



2. المتوسط:

مركز الفترة	7.5	8.5	9.5	10.5	11.5	12.5
التكرار	3	15	24	9	6	3

التكرار الكلي 60

المتوسط الحسابي

$$\bar{X} = \frac{1}{60}(3\times7{,}5 + 15\times8{,}5 + 24\times9{,}5 + 9\times10{,}5 + 6\times11{,}5 + 3\times12{,}5) = \frac{579}{60} \Rightarrow \bar{X} = 9{,}65cm$$

3. مجموع أطوال المجموعة الأولى = 579 سم .

مجموع أطوال المجموعة الثانية =140 سم يحقق $\frac{s}{140} = 8.9cm$

مما يعني أن $s = 8.9 \times 140 = 1246\ cm$

نستنتج إذا أن أطوال الـ 200 عود يساوي 1246+579 = 1825 cm

إذا متوسط أطوال الـ 200 هو $\frac{1\,825}{200} = 9{,}1cm$

ز ـ خصائص التشتت

أ- **التباين** (Variance)

للسلسلة الإحصائية $(x_i;\ n_i)_{1\le i\le p}$ بمتوسط $\bar{X}$: هوالرقم الحقيقي Vالمعرف ب

$$V = \frac{n_1(x_1-\bar{X})^2 + n_2(x_2-\bar{X})^2 + \cdots + n_p(x_p-\bar{X})^2}{n_1+n_2+n_3+\cdots+n_p} \Rightarrow V = \frac{\sum_{i=1}^{p} n_i\,(x_i-\bar{X})^2}{\sum_{i=1}^{p} n_i}$$

ط ـ **الانحراف المعياري** (Écart type)

هو الرقم الحقيقي الموجب المعرف بـ $\boxed{\sigma = \sqrt{V}}$

IPN

3. التمثيل البياني

أهمية التمثيلات تكمن في أنها طريقة مختصرة وشاملة تزودنا بمعلومات بسرعة وبصورة أوضح .
هناك العديد من الطرق لتمثيل البيانات الإحصائية بيانياً.

أ - مخطط الأعمدة(Diagramme en bâtonnets)

في نظام مرجعي متعامد، يُرسم لكل فئة عمود ارتفاعه متناسب مع تكرارها .

مثال :

عدد الكتب المقروءة لـ20 :

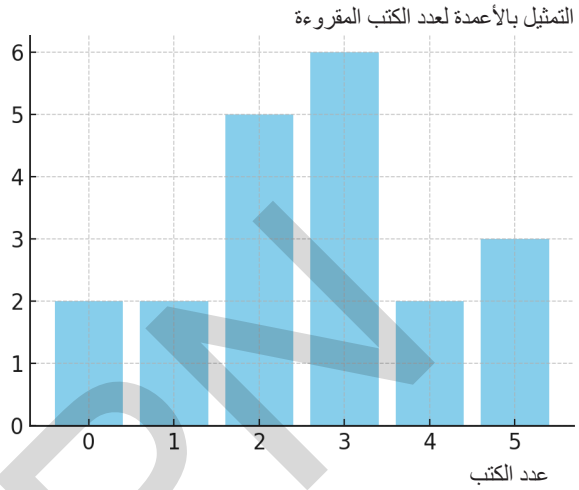
3, 5, 2, 0, 4, 2, 3, 5, 1, 2, 3, 3, 0, 2, 4, 1, 3, 5, 2,3

مثل البيانات من هذه السلسلة باستخدام مخطط الأعمدة:

الحل :

عدد الكتب	0	1	2	3	4	5
التكرار	2	2	5	6	2	3

التمثيل :



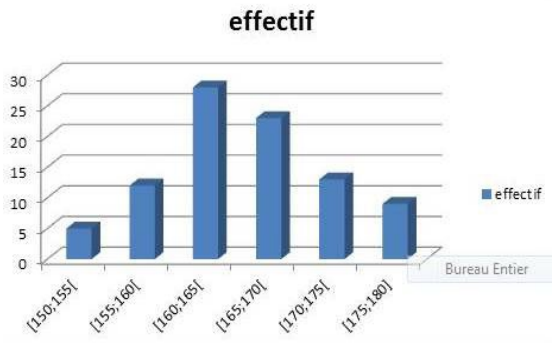
ملاحظة: يمكن ربط رؤوس الأعمدة بخط لنحصل على **مضلّع التكرارات** .

ب - المدرج التكراري(Histogramme)

وهو عبارة عن مجموعة من المستطيلات قاعدة كل منها تمثل طول الفئة في التوزيع التكراري وارتفاعها يمثل التكرار المقابل لتلك الفئة أي أن المحور السيني (X) تستقر فيه الفئات والمحور الصادي (Y) تستقر فيه التكرارات هذه المستطيلات تكون منفصلة عن بعضها في حالة المتغير المتقطع ومتصلة مع بعضها في حالة المتغير المستمر وحسب تسلسل فئات التوزيع.

مثال:

الطول (سم)	[155;150[	[160;155[	[165;160[	[170;165[	[175;170[	[180;175[
التكرار	5	12	28	23	13	9



IPN

ج - المصنع التكراري(Polygon)

ج) **المضلع التكراري** (Polygon)

وهو عبارة عن عدد من المستقيمات التي تتصل ببعضها بواسطة نقاط هذه النقاط تمثل مراكز الفئات أي أن المحور السيني (X) تستقر فيه مراكز الفئات والمحور الصادي (Y) تستقر فيه التكرارات مع مراعاة غلق المضلع بمركزي فئة وهميين وبتكرارين مساويين للصفر.

مثال:

س / ارسم المضلع التكراري من البيانات الاتية

الفئات	التكرار	مراكز الفئات
9-5	0	7
14-10	8	12
19-15	28	17
24-20	27	22
29-25	12	27
34-30	4	32
39-35	1	37
40-36	0	38

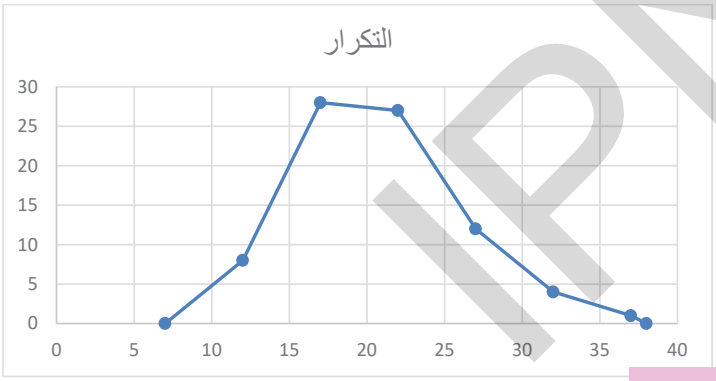
لإنشاء مضلع تكراري يجب أن تقوم بالتالي:

1. أوجد مراكز الفئات

$$\text{مركز الفئة} = \frac{\text{الحد الأدنى للفئة} + \text{الحد الأعلى للفئة}}{2}$$

2. مراكز الفئات تمثل على محور السينات بينما التكرارات تمثل على محور الصادات. حدد النقط .

3. اربط النقاط بعضها البعض بقطع مستقيمة



د - المخطط الدائري(Diagramme circulaire)

وهي عبارة عن شكل هندسي ولكن يتم هنا تمثيل البيانات بقطاعات داخل دائرة بحيث إن مجموع هذه القطاعات تمثل مساحة الدائرة الكلية ويتم تحديد زاوية القطاع وفق الصيغة التالية:

مثال:

فيما يلي النفقات الاستثمارية لبلدية ما بالأوقية، موضحة بالجدول التالي:

البند	المبلغ
الأشغال العمومية	9,592,836
الشؤون الاجتماعية	2,838,411
تسديد القروض	4,962,561
التعليم–الرياضة–الثقافة	5,456,333
التخطيط العمراني	8,204,686

المطلوب مثل البيانات التالية بالدائرة البيانية (المخطط الدائري)

الحل :

أولا حساب إجمالي الإنفاق

31054827=8204686+5456333+4962561+2838411+9592836

حساب نسبة كل بند

$$\text{الصيغة: نسبة البند} = \frac{\text{مبلغ البند}}{\text{المبلغ الإجمالي}} \times 100$$

IPN

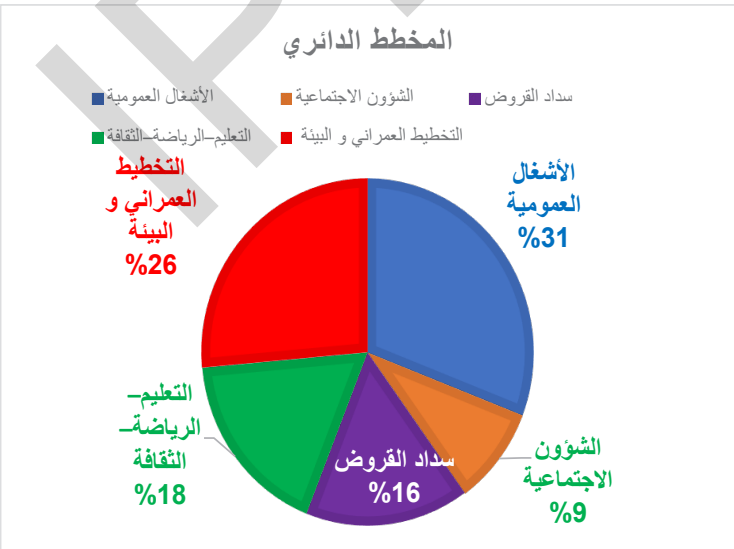
البند	الحساب	النسبة المئوية
الأشغال العمومية	$100 \times \frac{9,592,836}{31054827}$	30.89%
الشؤون الاجتماعية	$100 \times \frac{2,838,411}{31054827}$	9.14%
سداد القروض	$100 \times \frac{4,962,561}{31054827}$	15.98%
التعليم–الرياضة–الثقافة	$100 \times \frac{5,456,333}{31054827}$	17.57%
التخطيط العمراني والبيئة	$100 \times \frac{8,204,686}{31054827}$	26.42%

تحويل النسب إلى زوايا (للمخطط الدائري)

الصيغة: زاوية البند $= \frac{\text{مبلغ البند}}{\text{المبلغ الإجمالي}} \times 100$

البند	الحساب	الزاوية
الأشغال العمومية	$360 \times \frac{9,592,836}{31054827}$	111.2°
الشؤون الاجتماعية	$360 \times \frac{2,838,411}{31054827}$	32.9°
سداد القروض	$360 \times \frac{4,962,561}{31054827}$	57.5°
التعليم–الرياضة–الثقافة	$360 \times \frac{5,456,333}{31054827}$	63.3°
التخطيط العمراني و البيئة	$360 \times \frac{8,204,686}{31054827}$	95.1°

ملاحظة مجموع الزوايا يساوي 360°



مثال (درجات الحرارة)

الدرجات الصغرى والعظمى لـ 31 يومًا (يناير 1992) :

الصغرى: 1,0,3,3,3,3,6,4,5,6,3,3,7–,2,2,4,4,5,5,3,1,0,3,4,5,8,0–,2–,0,0,1

العظمى: 1,2,3,2,3,5,7,6,8,8,6,3,3,5,7,9,9,10,8,5,7,10,8,9,10,12,6,9,10,10,10

IPN

المطلوب :

1. المتوسط والانحراف المعياري للصغرى .
2. نفس السؤال للعظمى .
3. تجميع الصغرى في فئات عرضها (2 سم)مثل ([-2; 0[, [0; 2[)، ورسم المدرج التكراري .

الحل :

1. الصغرى :

الصغرى	8	7	6	5	4	3	2	1	0	−1	−2
التكرار	1	1	2	4	4	8	1	2	5	1	2

- المتوسط

$$\bar{X} = \frac{1}{31}(2\times -2 + 1\times -1 + 5\times 0 + 2\times 1 + 1\times 2 + 8\times 3 + 4\times 4 + 4\times 5 + 2\times 6 + 1\times 7 + 1\times 8)$$
$$= \frac{1}{31}(-4 - 1 + 2 + 2 + 24 + 16 + 20 + 12 + 7 + 8) = \frac{1}{31}\times 86 = \frac{86}{31} \Rightarrow \boxed{\bar{X} \approx 2.7742}$$

- التباين

$$V = \frac{2\left(-2-\frac{86}{31}\right)^2 + 1\left(-1-\frac{86}{31}\right)^2 + 5\left(0-\frac{86}{31}\right)^2 + \cdots + 1\left(8-\frac{86}{31}\right)^2}{2+1+5+2+1+8+4+4+2+1+1}$$
$$= \frac{2\left(-\frac{148}{31}\right)^2 + 1\left(-\frac{117}{31}\right)^2 + 5\left(-\frac{86}{31}\right)^2 + \cdots + 1\left(\frac{162}{31}\right)^2}{31}$$
$$= \frac{2\left(-\frac{148}{31}\right)^2 + 1\left(-\frac{117}{31}\right)^2 + 5\left(-\frac{86}{31}\right)^2 + \cdots + 1\left(\frac{162}{31}\right)^2}{31}$$
$$\boldsymbol{V \approx 6.3683}$$

- الانحراف المعياري

$$\sigma = \sqrt{V} \approx \sqrt{6.3683} \approx 2.5235$$

2. العظمى :

العظمى	12	10	9	8	7	6	5	3	2	1
التكرار	1	6	4	4	3	3	3	4	2	1

- المتوسط

$$\bar{X} = \frac{1}{31}(1\times 1 + 2\times 2 + 4\times 3 + 3\times 5 + 3\times 6 + 3\times 7 + 4\times 8 + 4\times 9 + 6\times 10 + 1\times 12)$$
$$= \frac{1}{31}(1 + 4 + 12 + 15 + 18 + 21 + 32 + 36 + 60 + 12) = \frac{1}{31}\times 197 = \frac{197}{31} \Rightarrow \boxed{\bar{X} \approx 6.3548}$$

- التباين

$$V = \frac{1\left(1-\frac{197}{31}\right)^2 + 2\left(2-\frac{197}{31}\right)^2 + 4\left(3-\frac{197}{31}\right)^2 + \cdots + 1\left(12-\frac{197}{31}\right)^2}{1+2+4+3+3+3+4+4+6+1}$$
$$= \frac{1\left(-\frac{166}{31}\right)^2 + 2\left(-\frac{135}{31}\right)^2 + 4\left(-\frac{104}{31}\right)^2 + \cdots + 1\left(\frac{175}{31}\right)^2}{1+2+4+3+3+3+4+4+6+1}$$
$$\boldsymbol{V \approx 5.5477}$$

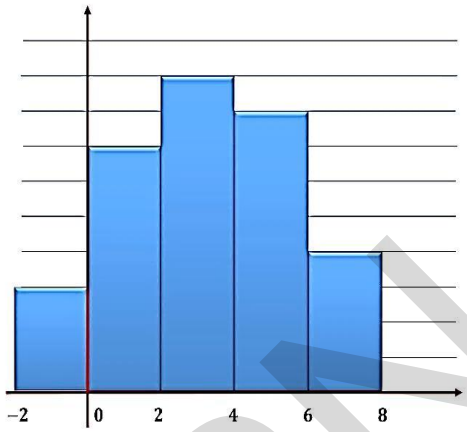
IPN

- الانحراف المعياري

$$\sigma = \sqrt{V} \approx \sqrt{5.5477} \approx 2.3553$$

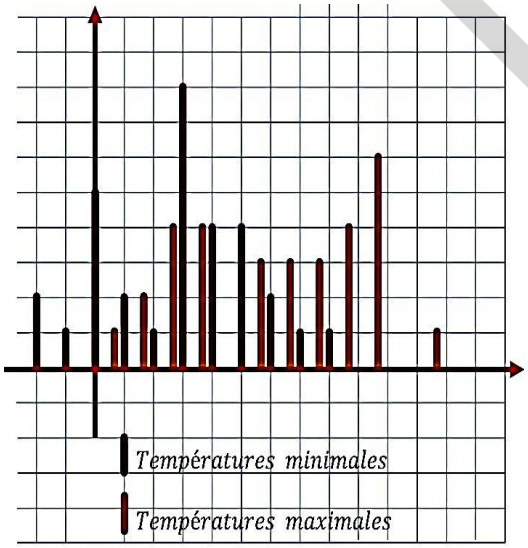
الفئات الصغرى :

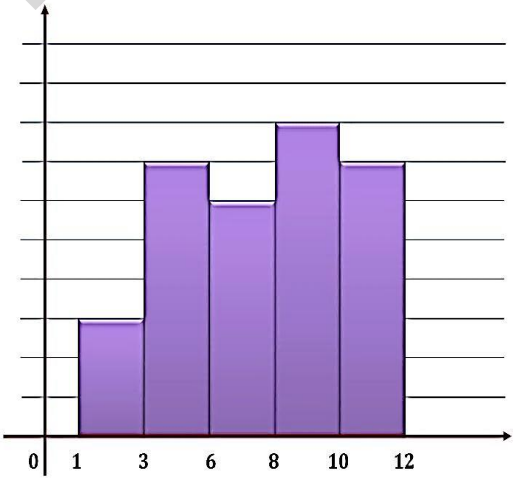
المجال	[6; 8]	[4; 6[	[2; 4[	[0; 2[	[−2; 0[
التكرار	4	8	9	7	3



الفئات العظمى :

المجال	[10; 12]	[8; 10[	[6; 8[	[3; 6[	[1; 3[
التكرار	7	8	6	7	3





IPN

مفردات إحصائية

المصطلحات المستعملة:	الملاحظات:
Effectif جمع إحصائي:	هو المجموعة التي من خلالها نحصل على المعلومات
Individu فرد :	هو عنصر من الجمع الإحصائي
Effectif total حصيص كلي أو التكرار الكلي:	هو عدد أفراد جمع إحصائي
Caractere ميزة :	هو ما يتميز به فرد من الجمع الإحصائي الذي تجرى دراسته
Caractere quantitative ميزة كمية:	القيم اعداه
Caractere quantit dicret مميزة كمية منقطعة:	يوجد عنده منتهى من القيم
Caractere quantit continu مميزة كمية متصلة:	القيم تنتمي إلى مجال من R أوهي عده كبير من القيم منته
Groupement par classe تشكيل أصناف:	الصنف هو مجال من R مختار من أجل الحصول على توزيع سلائم للقيم عادة من الشكل] A,B[
Effectif حصيص أو تكرار:	هو عدد الأفراد الموجودين في صنف واحد أو قيم واحدة
Effectif cumuli حصيص متراكم:	هو عدد الأفراد الذي هو أصغر قطعا من قيم معينة (Nj)
Fréquence تردد:	هو عدد أفراد صنف / حصيص كلي أي $fj=\frac{xi}{N}$ وهي عادة نسبية مئوية
Diagrame polaire مخطط قطبي:	يمن من إعطاء تصور عام لبعض عناصر المتسلسلات الإحصائيت ذات الميزة المنفصلة
Diagrame circulaire مخطط دائري:	يمثل الجمع الإحصائي بواسطة نصف دائرة أو دوائر وكل قيمة تمثل بواسطة قطاع زاوي تتناسب مع حصيصها
Mode منوال:	منوال متسلسلة إحصائية هو قيمة الميزة المرادة الأكبر حصيص (أولاً كبر تردد)
صنف منوالي:Classe modale	اذا كانت المعطيات مجمعة في أصناف فإن المنوال في هذه الحالة يسمى صنفا منواليا:
وسع صنف إحصائي:Amplitude d'une classe	هو (b-a)
مسلسلة إحصائية :Serie statistique	هو مجموعة الأزواج (القيمة, الحصيص) (n_j-x_j)
موسط إحصائي:Mediane	وهو كل عنده m يتوفر على الخاصية التالية خصيص القيم الأكبر من M وحصيص الفيم الأصغر منها لا يتجاوز أي منها نصف الحصيص الكلي
مركز صنف:CENTRE D'une classe	$\frac{a+b}{2}$ (c_j) وهي القيمة المختارة في الصنف التمثيل الميزة
تردد متراكم:Frequence culee	هو حصيص متراكم / حصيص كلي (F_j)
مسلسلة احصائية:Serie statistique des frequencies	مجموع الأزواج : (fj-Xj) (القيم والتردد)
مخطط عصري : Diagramme en batons	يمثل المسلسلة الإحصائية
مخطط الأشرطة: Digramme a bande	يوضح تدخل ميزتين
قيمة مميزة:Valeur d'un caractere	كل ميزة يمكن أن تأخذ قيما مختلفة
X: وسط Moyenne	وهي خارج قسمة مجموع القيم على عددها
مميزة كيفية: Caractere quality	القيم لا يعبر عنها بأعداد عادة
م دارج:Histogramme	كل صنف له وسع متخذ الجميع الأصناف الارتفاع ومساحة المستطيلات تتناسب مع الحصائص

IBN

تنظيم البيانات - التكرارات - التكرارات النسبية

التمرين 1 :

عندنا السلسلة الاحصائية التالية:

x_i	3	4	5	6	7	8	9
n_i	5	8	9	11	9	8	5

المطلوب :

- المنوال، الوسيط، المتوسط .
- جدول التكرارات النسبية والتراكمية .
- مخطط أعمدة ومضلّع التكرارات .
- عدد القيم < 7 .
- نسبة القيم < 5 .
- التباين والانحراف المعياري.

التمرين 2 :

أطوال 68 طالبًا (بالسم) :

173 ; 180 ; 160 ; 174 ; 170 ; 173 ; 163 ; 154 ; 170 ; 176 ; 170 ; 169 ; 164 ; 174 ; 165 ; 177 ; 158 ; 180 ; 162 ;
169 ; 163 ; 170 ; 180 ; 163 ; 170 ; 171 ; 167 ; 184 ; 173 ; 166 ; 174 ; 180 ; 183 ; 171 ; 181 ; 163 ; 173 ; 184 ;
163 ; 178 ; 162 ; 175 ; 161 ; 163 ; 175 ; 172 ; 179 ; 178 ; 180 ; 172 ; 164 ; 162 ; 181 ; 172 ; 179 ; 170 ; 184 ;
182 ; 177 ; 179 ; 177 ; 181 ; 180 ; 178 ; 163 ; 183 ; 177 ; 181 ; 172.

المطلوب :

- رتّب القياسات
- ما المجتمع؟
- من الأفراد؟
- ما المتغير قيد الدراسة؟
- التجميع في فئات عرضها 4 سم.
- جدول التكرارات التراكمية والنسبية التراكمية.
- عدد الطلاب بطول < 170 سم.

التمرين 3 :

نرمي نرد 100 مرة :

x_i	1	2	3	4	5	6
n_i	20	10	26	14	10	20

المطلوب:

التكرارات النسبية والتراكمية.

التمرين 4 :

في التمرين 2: حدد المنوال، المتوسط، الوسيط، المدى.

التمرين 5 :

درجات اختبار(موحد) تجريبي للبكالوريا في مادة الرياضيات ل3 فصول (Bac C). الدرجات التي حصل عليها الطلاب هي كما يلي:

Terminale	6,5	8	9	10	11	12,5	14	16
C_1	**3**	**7**	**5**	**3**	**3**	**4**	**1**	**1**

Terminale	7	8	9	10	11	12,5	14	15	17
C_2	**2**	**5**	**6**	**5**	**3**	**4**	**2**	**1**	**2**

Terminale	6	7,5	9	10	11	12	14	15	17
C_3	**4**	**4**	**5**	**4**	**2**	**3**	**4**	**2**	**3**

المطلوب :

- المعدل المتوسط لكل قسم $(m_3; m_2; m_1;)$
- استنتج المتوسط العام للأقسام الثلاثة m

IPN

التمرين 6 :

تم تسجيل أعمار عشرين شخصًا في الشركة و كانت على النحوي التالي

20 ; 18 ; 36 ; 30 ; 20 ; 24 ; 60 ; 26 ; 40 ; 24 ; 30 ; 32 ; 18 ; 24 ; 50 ; 26 ; 42 ; 28 ; 52 ; 28.

المطلوب:

- جدول إحصائي (التكرار، التكرار النسبي، التراكمي)، المنوال، المتوسط، الوسيط، المدى .

التمرين 7 :

متوسط درجات طالب هو12.5 من 20. إذا حصل على16 من 20 في الاختبار التالي، يصبح المتوسط 13 من 20 .

المطلوب: عدد الاختبارات السابقة .

التمرين 8 :

متوسط درجات طالب في اللغة الفرنسية بعد أول تسعة اختبارات هو 11.75 من 20.

ما أعلى معدل يمكن أن يتوقعه بعد الاختبار العاشر والأخير؟

هل يمكن أن يكون معدله أقل من 10 بعد هذا الاختبار الأخير؟

خصائص التشتت

التمرين 9 :

يتم رمي نردين 60 مرة على التوالي ويتم تسجيل مجموع النقاط التي تم الحصول عليها لكل رمية.

النقاط المجموعة	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2
التكرار	3	3	5	8	9	11	8	5	3	3	2

المطلوب:

- المتوسط، الانحراف المتوسط، الانحراف المعياري .
- مخططات التكرار التراكمي (تصاعدي/تنازلي)، والوسيط .

التمرين 10 :

عدد الكتب المقروءة لـ 180 طالبًا:

18 طالبًا لم يقرؤا أي كتاب.

72 طالبًا كل منهم قرأ كتابا واحدا.

45 طالبًا كل منهم قرأ كتابين.

36 طالبًا كل منهم قرأ ثلاثة كتب.

9 طلاب كل منهم قرأ أربعة كتب.

المطلوب :

- انسخ وأكمل الجدول التالي:

عدد الكتب	0	1	2	3	4
التكرار					
التردد					
التردد النسبي					
التكرار التراكمي المتصاعد					
التكرار التراكمي المتناقص					

- عدد الطلاب الذين قرأوا كتابين فما فوق،
- عدد الطلاب الذين قرأوا أقل من كتابين.
- المنوال، المتوسط، الانحراف المتوسط، الانحراف المعياري.
- تمثيل دائري(المخطط الدائري).

IPN

IPN