REPUBLIQUE ISLAMIQUE DE MAURITANIE

Honneur - Fraternité - Justice

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE

ET DE LA REFORME DU SYSTEME EDUCATIF

INSTITUT PEDAGOGIQUE NATIONAL

LIVRE MATHÉMATIQUES

5ÈME AS

2024

Préface

Collègues Educateurs,

Chers élèves,

Dans le cadre des efforts visant à améliorer la qualité du système éducatif national et en accompagnement de la révision des programmes de l'enseignement secondaire opérée en 2020 et des innovations nationales et internationales , l'Institut Pédagogique National cherche à concrétiser cette tendance à travers l' élaboration et la publication d' un manuel scolaire de qualité qui occupe une place de choix dans le développement et l'amélioration des pratiques pédagogiques .

Dans ce contexte, nous sommes heureux de mettre entre les mains des élèves de la 5ème du secondaire , le manuel de mathématique dans sa version expérimentale .

Nous espérons que ce manuel constituera une aide précieuse pour améliorer l'efficacité de construction des savoirs chez les élèves .

Tout en souhaitant recevoir de la part des collègues enseignants, toute observation, suggestion ou proposition de nature à améliorer la version finale de cet ouvrage, nous ne pouvons qu'adresser nos vifs remerciements aux concepteurs :

Mohameden O/ Bah	**Inspecteur de l'Enseignement Secondaire**
Mohameden / El Hadi	**Inspecteur de l'enseignement secondaire**
Mohamedene / Meyne	**Professeur de l'enseignement secondaire**
Yesleck / Bamba / Tiyib	**Professeur de l'enseignement secondaire**
Taregh / Ahmedou Salem	**Professeur de l'enseignement secondaire**

La Directrice Générale
Houda Babah

AVANT - PROPOS

Chers collègues professeurs, Chers élèves,

L'institut Pédagogique National a le plaisir de présenter à la famille scolaire un projet de manuel de l'élève pour la 5ème année secondaire ; -séries C et D - conformément aux nouveaux programmes réécrits selon la vision holistique.

Ce document a été réalisé dans des conditions marquées par l'urgence afin qu'il soit disponible dès la rentrée 2020 – 2021. Il sera ensuite amélioré, corrigé et mis à niveau dans sa prochaine version en tenant compte de vos remarques et suggestions.

Il a été procédé à l'adoption d'une méthodologie particulière mettant l'accent sur les points essentiels dans le programme suivant une approche pragmatique qui privilégie les aspects pratiques et les savoir-faire.

Ce choix est traduit par la segmentation du programme en terme de chapitres (16) et la mise en œuvre d'une structure de chapitre permettant aux différents utilisateurs d'en tirer profit.

Cette structure est ainsi conçue:

- " **Faire- savoir**" : permet de déterminer **l'essentiel du chapitre** sous forme de résumé des points essentiels et incontournables.
- " **Savoir – faire** ": permet à l'élève de mettre ses capacités à l'exercice, dans un premier temps, en traitant des **applications** directes du cours et dans un deuxième temps en passant aux **Exercices** de niveau avancé.

Une revision de ce manuel a été réalisée en 2023, deux ans après sa parution elle a assurée par :

Mohameden O/ Bah
Inspecteur de l'Enseignement Secondaire

Mohamed Yahya O/ Mohamed Abdallahi
Inspecteur de l'Enseignement Secondaire

L'IPN souhaite que les utilisateurs de ce projet de manuel leur fassent parvenir leurs remarques et suggestions constructives pour qu'il puisse en tenir compte dans la prochaine édition.

Les auteurs

Mohameden O/ Bah
Inspecteur de l'Enseignement Secondaire

Mohamed Yahya O/ Mohamed abdallahi
Inspecteur de l'Enseignement Secondaire

Mohameden / El hadi
Inspecteur de l'enseignement secondaire

Mohamedene / Meyne
Professeur de l'enseignement secondaire

Yesleck / Bamba / Tiyib
Professeur de l'enseignement secondaire

Taregh / Ahmedou Salem
Professeur de l'enseignement secondaire

Maquettiste:

Oumry Ahmed Bebba — Maquettiste I.P.N

TABLE DES MATIERES

CHAPITRE 1 : CALCUL DANS R

I) Rappel sur les ensembles de nombres

Activité 1 :

a) Trouver la nature de chaque nombre en spécifiant le plus petit ensemble de nombres $\mathbb{N}$; $\mathbb{Z}$; $\mathbb{D}$; $\mathbb{Q}$ *et* $\mathbb{R}$ auquel il appartient :

$$3\sqrt{64}\ ;\ \frac{5\pi}{4\pi}\ ;\ 4-10\ ;\ \frac{5+\sqrt{2}}{4+\sqrt{2}}\ ;\ 2{,}6666\ ;\ \frac{8}{3}\ ;\ \frac{-36}{1{,}5}\ ;\ 10^{-4}.$$

b) Y a-t-il des nombres égaux dans cette liste ?

Solution :

a)

	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{D}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$	Le plus petit ensemble auquel il appartient
$3\sqrt{64}=3\times 8=24$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\mathbb{N}$
$\frac{5\Pi}{4\Pi}=\frac{5}{4}=1,25$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	$\mathbb{D}$
$4-10=-6$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\mathbb{Z}$
$\frac{5+\sqrt{2}}{4+\sqrt{2}}$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\mathbb{R}$
$2,6666$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	$\mathbb{D}$
$\frac{8}{3}$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\mathbb{Q}$
$\frac{-36}{1,5}=-24$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\mathbb{Z}$
$10^{-4}=0,0001$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	$\mathbb{D}$

b) Il n'y a pas de nombres égaux dans cette liste

Résumé de cours :

a) L'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$:

$$\mathbb{N}=\{0;1;2;3;4;5;6;7;8;10;11;12;\dots\}$$

L'ensemble $\mathbb{N}-\{0\}$est l'ensemble des entiers naturels, non nuls et se note $\mathbb{N}^*$

b) L'ensemble des entiers relatifs $\mathbb{Z}$:

$$\mathbb{Z}=\{\dots;-2;-1;0;+1;+2;\dots\}$$

Avec ;

- $\mathbb{Z}_+$ l'ensemble des entiers relatifs positifs : $\mathbb{Z}_+=\{0;+1;+2;+3;\dots\}$
- $\mathbb{Z}_-$ l'ensemble des entiers relatifs négatifs : $\mathbb{Z}_-=\{\dots;-3;-2;-1;0\}$

Et ;

$$\mathbb{Z}=\mathbb{Z}_+\cup\mathbb{Z}_-\text{et }\mathbb{Z}_+\cap\mathbb{Z}_-=\{0\}$$

- L'ensemble $\mathbb{Z}-\{0\}$ est l'ensemble des entiers relatifs, non nuls et se note $\mathbb{Z}^*$
- $\mathbb{Z}_+^*$ est l'ensemble $\mathbb{Z}_+-\{0\}$ des entiers relatifs strictement positifs.
- $\mathbb{Z}_-^*$est l'ensemble $\mathbb{Z}_--\{0\}$ des entiers relatifs strictement négatifs.

c) L'ensemble des décimaux relatifs $\mathbb{D}$:

$$\mathbb{D}=\{\dots;-5{,}48;\dots;0;\dots;2{,}127;\dots;3{,}4;\dots\}\text{ou}\mathbb{D}=\{a\times 10^n;\ tel\ que\ a\ et\ n\in\mathbb{Z}\}$$

Avec ;

- $\mathbb{D}_+$ l'ensemble des décimaux relatifs positifs : $\mathbb{D}_+=\{a\times 10^n;\ tel\ que\ a\in\mathbb{Z}_+\ et\ n\in\mathbb{Z}\}$
- $\mathbb{D}_-$ l'ensemble des décimaux relatifs négatifs : $\mathbb{D}_-=\{a\times 10^n;\ tel\ que\ a\in\mathbb{Z}_-et\ n\in\mathbb{Z}\}$

Et ;

$$\mathbb{D}=\mathbb{D}_+\cup\mathbb{D}_-\text{ et }\mathbb{D}_+\cap\mathbb{D}_-=\{0\}$$

- L'ensemble $\mathbb{D}-\{0\}$ est l'ensemble des décimaux relatifs, non nuls et se note $\mathbb{D}^*$
- $\mathbb{D}_+^*$ est l'ensemble $\mathbb{D}_+-\{0\}$ des décimaux relatifs strictement positifs.
- $\mathbb{D}_-^*$ est l'ensemble $\mathbb{D}_--\{0\}$ des décimaux relatifs strictement négatifs.

d) L'ensemble des rationnels relatifs $\mathbb{Q}$:

$$\mathbb{Q}=\{{}^{a}/_{p}\ tel\ que\ a\in\mathbb{Z}\ et\ p\in\mathbb{Z}^*\}$$

Avec ;

- $\mathbb{Q}_+$ l'ensemble des nombres rationnels relatifs positifs : $\mathbb{Q}_+ = \left\{{}^{a}/_{p}\,;\ tel\ que\ a \in \mathbb{Z}, p \in \mathbb{Z}^* et\ a \times p \geq 0\right\}$
- $\mathbb{Q}_-$ l'ensemble des nombres rationnels relatifs négatifs : $\mathbb{Q}_- = \left\{{}^{a}/_{p}\,;\ tel\ que\ a \in \mathbb{Z}, p \in \mathbb{Z}^* et\ a \times p \leq 0\right\}$

$$\mathbb{Q} = \mathbb{Q}_+ \cup \mathbb{Q}_- \text{ et } \mathbb{Q}_+ \cap \mathbb{Q}_- = \{0\}$$

- L'ensemble $\mathbb{Q} - \{0\}$ est l'ensemble des rationnels relatifs, non nuls et se note $\mathbb{Q}^*$
- $\mathbb{Q}_+^*$ est l'ensemble $\mathbb{Q}_+ - \{0\}$ des nombres rationnels relatifs strictement positifs.
- $\mathbb{Q}_-^*$ est l'ensemble $\mathbb{Q}_- - \{0\}$ des nombres rationnels relatifs strictement négatifs.

Exemple 1 :

$$\frac{13}{7} \in \mathbb{Q}\ car\ ;\ \frac{13}{7} = 1{,}857142857142 \ldots = 1{,}\overline{857142}$$

Remarque 1 :

Les nombres réels n'appartenant pas à $\mathbb{Q}$ sont appelés nombres irrationnels.

Caractéristique

un nombre est irrationnel lorsque son développement décimal est illimité et non périodique

Ecriture fractionnaire d'un nombre rationnel :

Exemple 2 :

Donner l'écriture fractionnaire des nombres rationnels ; $x = 4,\overline{735}$et $y = -0,\overline{1928}$.

Réponse :

$x = 4,\overline{735} \Longrightarrow 1000x = 4735,\overline{735} = 4731 + 4,\overline{735} = 4731 + x \Longrightarrow 1000x - x = 4731$

$\Longrightarrow 999x = 4731 \Longrightarrow x = 4731 \div 999 \Longrightarrow x = \dfrac{1577}{333}$

$y = -0,\overline{1928} \Longrightarrow 10\,000y = -1\,928,\overline{1928} = -1\,928 + (-0,\overline{1928}) = -1\,928 + y$

$$\Longrightarrow 10000y - y = -1928 \Longrightarrow 9999y = -1928 \Longrightarrow y = -1928 \div 9999 \Longrightarrow y = -\frac{1928}{9999}.$$

e) L'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$;

L'ensemble des nombres rationnels et des nombres irrationnels constitue l'ensemble des nombres réels, noté $\mathbb{R}$

- $\mathbb{R}_+ = \text{l'ensemble des réels positifs}$
- $\mathbb{R}_- = \text{l'ensemble des réels négatifs}$

Et ;

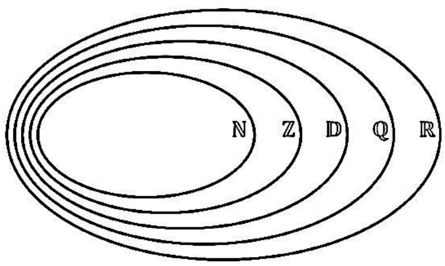
$\mathbb{R} = \mathbb{R}_+ \cup \mathbb{R}_-$ et $\mathbb{R}_+ \cap \mathbb{R}_- = \{0\}$

- L'ensemble $\mathbb{R} - \{0\}$ est l'ensemble des nombres réels, non nuls et se note $\mathbb{R}^*$
- $\mathbb{R}_+^*$ est l'ensemble $\mathbb{R}_+ - \{0\}$ des nombres réels strictement positifs.
- $\mathbb{R}_-^*$ est l'ensemble $\mathbb{R}_- - \{0\}$ des nombres réels strictement négatifs.

Exemple 3 :

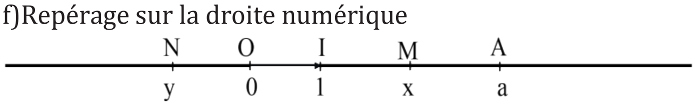
$\sqrt{2} \approx 1{,}4142135623730950488016887242097 \ldots \in \mathbb{R}$;est irrationnel car son développement décimal est illimité et non périodique(n'est pas périodique).

Et $\pi \approx 3{,}1415926535897932384626433832795 \ldots \in \mathbb{R}$; π est irrationnel car son développement décimal est illimité et non périodique



On a : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbb{R}$ *(le symbole ⊂ signifie inclus dans… ou sous-ensemble de…)*.

f)Repérage sur la droite numérique



Soit la droite (D) munie du repère $(O; I)$. L'ensemble des nombres réels permet de repérer la totalité des points de la droite(D). Autrement dit ; il existe une correspondance exacte appelée bijection, entre chaque point d'une droite graduée et un nombre réel unique. Ainsi, on peut donc définir $\mathbb{R}$ comme l'ensemble des abscisses des points d'une droite graduée.

2) Avec les racines carrées

Définition :

Soit a un nombre réel positif, on note $\sqrt{a}$ le seul nombre réel positif dont le carré est égal à a : $\left(\sqrt{\boldsymbol{a}}\right)^2 = \boldsymbol{a}$

a. Règles de calcul :

Pour tout réels positifs a et b, on a ;

- $\sqrt{a^2} = \left(\sqrt{a}\right)^2 = a$ et $\sqrt{a^n} = \left(\sqrt{a}\right)^n$ $(n \text{ entier})$
- $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$
- $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, $b \neq 0$
- $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$
- $\sqrt{a^2} = |a|$ (pour tout $a \in \mathbb{R}$)

b. Expression conjuguée :

Exemple 4 :

L'expression conjuguée de : $\sqrt{2} + 1$ *est* $\sqrt{2} - 1$

L'expression conjuguée de : $3 - 4\sqrt{5}$ *est* $3 + 4\sqrt{5}$

L'expression conjuguée de : $\sqrt{5} + \sqrt{7}$ *est* $\sqrt{5} - \sqrt{7}$

L'expression conjuguée de : $5\sqrt{3} - 3\sqrt{2}$ *est* $5\sqrt{3} + 3\sqrt{2}$

c. L'équation $x^2 = a$:

Si $a > 0$; il y a *deux* solutions; $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$

Si $a = 0$; il y a *une* solution; 0

Si $a < 0$; il n'y a pas de solution.

Exemple 5 :

1°) Simplifier : $S_1 = 5\sqrt{45} - \sqrt{80} + 2\sqrt{180}$; $S_2 = 5\sqrt{48} - 2\sqrt{75} + \sqrt{27}$.

2°) Ecrire sans radicaux aux dénominateurs :

$$A = \frac{1}{\sqrt{3}+2} \ ; \qquad B = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}} \ ; \qquad C = \frac{4\sqrt{2}-3}{5\sqrt{2}+3}$$

Réponse :

1°) $S_1 = 5\sqrt{45} - \sqrt{80} + 2\sqrt{180} = 5\sqrt{9\times 5} - \sqrt{16\times 5} + 2\sqrt{36\times 5} = 5\times 3\sqrt{5} - 4\sqrt{5} + 2\times 6\sqrt{5}$
$= 15\sqrt{5} - 4\sqrt{5} + 12\sqrt{5} = (15 - 4 + 12)\sqrt{5} = 23\sqrt{5}$

$S_2 = 5\sqrt{48} - 2\sqrt{75} + \sqrt{27} = 5\sqrt{16\times 3} - 2\sqrt{25\times 3} + \sqrt{9\times 3} = 5\times 4\sqrt{3} - 2\times 5\sqrt{3} + 3\sqrt{3}$
$= 20\sqrt{3} - 10\sqrt{3} + 3\sqrt{3} = (20 - 10 + 3)\sqrt{3} = 13\sqrt{3}$

2°) Pour écrire une fraction sans radicaux aux dénominateurs on multiplie le numérateur et le dénominateur par le conjugué du dénominateur.

$$A = \frac{1}{\sqrt{3}+2} = \frac{\sqrt{3}-2}{\left(\sqrt{3}+2\right)\left(\sqrt{3}-2\right)} = \frac{\sqrt{3}-2}{3-4} = 2 - \sqrt{3}$$

$$B = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{7}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)} = \frac{2\sqrt{21}+6}{7-3} = \frac{2\sqrt{21}+6}{4} = \frac{\sqrt{21}+3}{2}$$

$$C = \frac{4\sqrt{2}-3}{5\sqrt{2}+3} = \frac{\left(4\sqrt{2}-3\right)\left(5\sqrt{2}-3\right)}{\left(5\sqrt{2}+3\right)\left(5\sqrt{2}-3\right)} = \frac{40 - 12\sqrt{2} - 15\sqrt{2} + 9}{50-9} = \frac{49 - 27\sqrt{2}}{41}.$$

3) Intervalles et encadrements

a. Notion d'intervalle :

Définition :

Soit a et b deux réels tels que $a \leq b$;

Un intervalle est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ caractérisé par des inégalités (voir tableau ci-dessous)

Inégalité	*Representaion*	*Intervalle*
$a \leq x \leq b$		$x \in [a\ ;\ b]$
$a \leq x < b$		$x \in [a\ ;\ b[$
$a < x \leq b$		$x \in]a\ ;\ b]$
$a < x < b$		$x \in]a\ ;\ b[$
$x \geq a$		$x \in [a\ ;\ +\infty[$
$x > a$		$x \in]a\ ;\ +\infty[$
$x < a$		$x \in]-\infty\ ;\ a[$
$x \leq a$		$x \in]-\infty\ ;\ a]$
$x \in \mathbb{R}$		$x \in]-\infty;+\infty[$

b. Centre et rayon d'un intervalle :

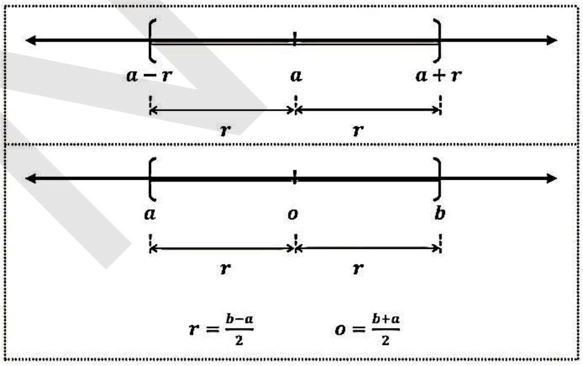
Soit a un nombre réel, et soit r un réel positif. Pour tout nombre réel x on a ;

$$|x-a| \leq r \Leftrightarrow -r \leq x-a \leq r \Leftrightarrow a-r \leq x \leq a+r \Leftrightarrow x \in [a-r; a+r]$$

a est appelé centre de l'intervalle et r son rayon et, plus généralement ;

$$a \leq x \leq b \Leftrightarrow \left|x-\frac{a+b}{2}\right| \leq \frac{b-a}{2}$$

$$\text{Centre} = \frac{a+b}{2} \quad ; \quad \text{Rayon} = \frac{b-a}{2}$$



c. Intervalles à branches extérieures :

$$x \leq a \text{ ou} x \geq b \Leftrightarrow \left|x-\frac{a+b}{2}\right| \geq \frac{b-a}{2}$$

d. Distance et intervalles dans $\mathbb{R}$:

$$a \leq x \leq b \Leftrightarrow d\left(x;\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{b-a}{2}$$

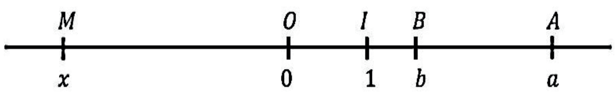
$$a < x < b \Leftrightarrow d\left(x;\frac{a+b}{2}\right) < \frac{b-a}{2}$$

e. Interprétation géométrique :

Soit a et b deux réels quelconques avec $a \leq b$ (ou $a \geq b$) sur une droite graduée (d) munie d'un repère$(O\ ;I)$. Soit A et B les points d'abscisses respectives a et b. Par définition, la distance des réels a et b, notée $d(a;b)$ est la distance AB. On a : $d(a\ ;b) = AB = |a-b| = |b-a|$.

En particulier, si M est un point d'abscisse x ($x \in \mathbb{R}$) alors, $d(x\ ;0) = |x-0| = |x| = OM$.

(***La figure suivante est faite avec*** $a > b$ ***et*** $x < 0$).



Exemple 6 :

Ecrire à l'aide d'intervalles, de la valeur absolue les inégalités suivantes:

a) $1 \leq x \leq 6$; **b)** $-5 < x < -3$; **c)** $-2 < x < 5$; **d)** $-11 < x < -1$; **e)** $-7 \leq x \leq 8$; **f)** $5 \leq x \leq 16$.

puis exprimer les en terme de distance.

Réponse :

$a)\ 1 \leq x \leq 6 \Leftrightarrow x \in [1;\ 6] \Leftrightarrow \left|x-\frac{1+6}{2}\right| \leq \frac{6-1}{2} \Leftrightarrow \left|x-\frac{7}{2}\right| \leq \frac{5}{2} d'où,\ \ d\left(x;\ \frac{7}{2}\right) \leq \frac{5}{2}.$

$b)-5 \leq x \leq -3 \Leftrightarrow x \in [-5;\ -3] \Leftrightarrow \left|x-\frac{-5+(-3)}{2}\right| \leq \frac{-3-(-5)}{2} \Leftrightarrow |x+4| \leq 1\ d'où,\ \ d(x;\ -4) \leq 1$

$c)-2 < x < 5 \Leftrightarrow x \in]-2;\ 5[\Leftrightarrow \left|x-\frac{-2+5}{2}\right| \leq \frac{5-(-2)}{2} \Leftrightarrow \left|x-\frac{3}{2}\right| \leq \frac{7}{2}\ \ d'où,\ \ d\left(x;\ \frac{3}{2}\right) \leq \frac{7}{2}$

$d)-11 < x < -1 \Leftrightarrow x \in]-11;\ -1[\Leftrightarrow \left|x-\frac{-11+(-1)}{2}\right| < \frac{-1+11}{2} \Leftrightarrow |x+6| < \frac{10}{2} \Leftrightarrow d(x;\ -6) < 5$

$e)-7 \leq x \leq 8 \Leftrightarrow x \in [-7;\ 8] \Leftrightarrow \left|x-\frac{-7+8}{2}\right| \leq \frac{8-(-7)}{2} \Leftrightarrow \left|x-\frac{1}{2}\right| \leq \frac{15}{2} \Leftrightarrow d\left(x;\ \frac{1}{2}\right) \leq \frac{15}{2}$

$f)$ $5 \le x \le 16 \Leftrightarrow x \in [5;\ 16] \Leftrightarrow \left|x - \frac{5+16}{2}\right| \le \frac{16-5}{2} \Leftrightarrow \left|x - \frac{21}{2}\right| \le \frac{11}{2} \Leftrightarrow d\left(x;\ \frac{21}{2}\right) \le \frac{11}{2}$.

4) Ordre

a. Ordre dans $\mathbb{R}$:

Définition :

Soit a et b deux nombres réels.

$a \le b$signifie que $b - a \ge 0$ ($b - a$ *est un réel positif*).

$a < b$ signifie que $b - a > 0$ ($b - a$ *est un réel strictement positif*).

$a \ge b$ signifie que $b - a \le 0$ ($b - a$ *est un réel négatif*).

$a > b$ signifie que $b - a < 0$ ($b - a$ *est un réel strictement négatif*).

b. Ordre et opérations :

Propriétés :

Pour tous réels a, b, c, x et y, on a :

☖ $a \le b$ et $b \le a \Leftrightarrow a = b$	☖ $x \le y \Leftrightarrow x \div a \ge y \div a\ (a < 0)$
☖ $a \le b$ et $b \le c \Rightarrow a \le c$	☖ $0 \le x \le y\ et\ 0 \le a \le b \Rightarrow 0 \le ax \le by$
☖ $a \le 0\ et\ 0 \le b \Rightarrow a \le b$	☖ $a \le b \le 0 \Leftrightarrow 0 \le -b \le -a$
☖ $x \le y \Leftrightarrow x + a \le y + a\ (a \in \mathbb{R})$	☖ $0 < a < b \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$
☖ $x \le y \Leftrightarrow x - a \le y - a\ (a \in \mathbb{R})$	☖ $0 < x \le y \Leftrightarrow 0 \le x^2 \le y^2$
☖ $x \le y \Leftrightarrow x \times a \le y \times a\ (a > 0)$	☖ $x \le y \le 0 \Leftrightarrow y^2 \le x^2 \le 0$
☖ $x \le y \Leftrightarrow x \times a \ge y \times a\ (a < 0)$	☖ $0 \le x \le y \Leftrightarrow 0 \le \sqrt{x} \le \sqrt{y}$
☖ $x \le y \Leftrightarrow x \div a \le y \div a\ (a > 0)$	

5) Avec la valeur absolue

Définition :

Soit x un nombre réel :

☖ $|x| = x\ si\ et\ seulement\ \ si\ x \ge 0$

☖ $|x| = -x\ \ si\ et\ seulement\ si\ x \le 0$

Règles de calcul :

Soient x, y, a et b des réels :

☖ $|x| \ge 0$ ☖ $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ☖ $|x| = |-x|$ ☖ $\sqrt{x^2} = |x|$ ☖ $|x| \times |y| = |x \times y|$	☖ $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ ☖ $|x| = |y| \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ \text{ou} \\ x = -y \end{cases}$ ☖ $|x + y| \le |x| + |y|$	☖ $|x^n| = |x|^n$ ☖ $|x| \le a \Leftrightarrow -a \le x \le a$ ☖ $|x| \ge a \Leftrightarrow x \le -a ou x \ge a$ ☖ $|x - a| \le b \Leftrightarrow a - b \le x \le a + b$

Exemple7 :

Résoudre, dans l'ensemble de nombres réels, les équations et inéquations suivantes :

a)$|x| = 7$; **b)** $|x| = -4$; **c)** $|x - 4| = 1$; **d)** $|1 - 2x| = 3$; **e)** $|x - 5| < 2$; **f)** $|x + 1| \ge 7$.

Réponse :

a)$|x| = 7 \Leftrightarrow (x = -7\ ou x = 7) \Rightarrow \boldsymbol{S} = \{\boldsymbol{-7}; \boldsymbol{7}\}$.

b)$|x| = -4$: *impossible* $\Rightarrow \boldsymbol{S} = \boldsymbol{\Phi}$ *(il n'existe pas de solutions)*.

c)$|x - 4| = 1 \ \Leftrightarrow (x - 4 = -1\ ou x - 4 = 1)$ d'où, $x = 3\ ou\ x = 5 \Rightarrow \boldsymbol{S} = \{\boldsymbol{3}; \boldsymbol{5}\}$.

d) $|1 - 2x| = 3\ \ \Leftrightarrow (1 - 2x = -3\ ou\ 1 - 2x = 3)$ d'où, $x = 2\ ou\ x = -1 \Rightarrow \boldsymbol{S} = \{\boldsymbol{-1}; \boldsymbol{2}\}$.

e)$|x - 5| < 2 \Leftrightarrow (-2 < x - 5 < 2)$ d'où, $3 < x < 7 \Rightarrow \boldsymbol{S} =]\boldsymbol{3}; \boldsymbol{7}[$

f) $|x + 1| \ge 7 \Leftrightarrow (x + 1 \le -7\ ou x + 1 \ge 7)$ d'où, $x \le -8\ ou x \ge 6 \Rightarrow \boldsymbol{S} =]-\infty;\ \boldsymbol{-8}] \cup [\boldsymbol{6};\ +\infty[$.

Exemple 8 :

Ecrire sans valeur absolue $|3 - \sqrt{13}|$; $\left|\frac{\sqrt{12}-4}{5-\sqrt{24}}\right|$.

Réponse :

Comme ; $3 < \sqrt{13} \Rightarrow 3 - \sqrt{13} < 0$.

Comme $opp(3 - \sqrt{13}) = \sqrt{13} - 3 > 0 \Rightarrow |3 - \sqrt{13}| = \sqrt{13} - 3$.

Comme ; $\sqrt{12} - 4 < 0\ et\ 5 - \sqrt{24} > 0 \Rightarrow |\sqrt{12} - 4| = 4 - \sqrt{12}\ et\ |5 - \sqrt{24}| = 5 - \sqrt{24}$

$$\Rightarrow \left|\frac{\sqrt{12} - 4}{5 - \sqrt{24}}\right| = \frac{|\sqrt{12} - 4|}{|5 - \sqrt{24}|} = \frac{4 - \sqrt{12}}{5 - \sqrt{24}}$$

Exercices Généraux

Ensembles de nombres

1.a) Les nombres rationnels suivants sont-ils décimaux ?

$\frac{21}{14}$; $\frac{216}{72}$; $\frac{497}{17}$; $4 \times \left(\frac{17}{16}+\frac{1}{4}\right)$

b) Donner dans chaque cas, si la réponse est négative, l'écriture sous forme de fractions irréductibles

2.Les nombres réels suivants sont-ils rationnels ? Décimaux ? Entiers relatifs ? Entiers naturels ?

$\sqrt{\frac{4}{25}}$; $10\sqrt{0{,}09}$; $\frac{3\pi}{10}$; $\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{8}}$; $\left(\sqrt{2}-1\right)^2$; $\frac{5}{\sqrt{0{,}01}}$

Calcul sur les puissances

3.On pose a, b, c des réels non nuls. Simplifier :

$\frac{a^{-2}a^{-3}a^{5}}{a^{-4}a^{3}a^{2}}$; $(a^3b^3)(a^2b)^{-1}$; $\frac{a^{-2}b^{-5}}{a^{3}a^{-2}}$; $\frac{a^5}{a^8}\left(\frac{a^{-2}}{a^{-4}}\right)^{-2}$; $\frac{(a^2b)^3b^2c^3}{a^2c(bc^2)^3}$

Mettre les résultats sous la forme $a^n, a^nb^p ou a^nb^pc^q$.

4. Calculer et simplifier :

$x = \left(\frac{11}{7}+\frac{7}{11}\right)^2 - \left(\frac{11}{7}-\frac{7}{11}\right)^2$

5.Sans calculatrice, simplifier :

$A = \left(\frac{2}{3}\right)^{11} \times 1{,}5^{10}$; $B = \left(\frac{1}{20}\right)^{3} \times \frac{(4\times 10^{-3})^2}{0{,}02^5}$

6.Effectuer les calculs suivants en donnant les résultats sous forme de produits de puissances de nombres premiers, simplifiés :

$A = \frac{4^3}{(-2)^5}$; $B = \frac{8^3 \times (-45)^7}{(-15)^6 \times 10^3}$; $C = \frac{2^2 \times 3^{-5} \times 25}{10 \times 3^2 \times 5^{-3}}$;

$D = \left(\frac{1}{3}-\frac{3}{4}\right) \times \frac{1}{15}$; $E = \frac{16 \times 10^{-8} \times 81 \times 10^{-5}}{2{,}43 \times 10^3 \times 256 \times 10^{-12}}$

Calculs sur les nombres premiers

7.Donner la décomposition en produit facteurs premiers 140 ; 2 500 ;1 728 000

8.a) Décomposer 84 et 630 en produits de facteurs premiers,

b) En déduire le $PGDC(84\,;630)$

c) En déduire la forme irréductibles de $\frac{84}{630}$

9.1°) Décomposer 1624 en produit de facteurs premiers

2°) Ecrire sous forme irréductible $A = \frac{1624}{70}$

3°)a) Trouver le Plus Petit Multiple Commun $PPCM(1624\,;\,70)$;

b) En déduire la valeur exacte de :

$B = \frac{-3}{1624} + \frac{4}{70}$(sous forme irréductible)

4°) Ecrire $\sqrt{1624}$ sous la forme $a\sqrt{b}$

(a et b naturels et $a \geq 1$) ;

Ecriture scientifique

10. Donner l'écriture scientifique des nombres :

593,7 ; $-0{,}051$;35×10^{-4} ;$-73{,}000$

Identités remarquables et équations

11.1°) Montrer que :

$\frac{2}{3}$ est une solution de l'équation $3x^2 + x - 2 = 0$,

y a $-$ t $-$ il une autre solution pour cette équation ?

2°) Résoudre dans $\mathbb{R}$: a)$x^2 = 5$; b)$x^2 = -3$;

3°) Résoudre dans $\mathbb{R}$: $4(2x-1)^2 = 25(5-x)^2$;

4°) Résoudre dans $\mathbb{R}$: $(x+1)(3-x) = x+1$.

12.1°) a et b sont des réels, développer :

$$A = (2a+3)^3 \;;\; B = (5b-4)^3$$

2°)x et y sont des réels, factoriser :

$$C = x^3 + 8 \;;\; D = y^3 - 27$$

3°) x et y sont des réels, factoriser :

$E = 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$; $F = 27y^3 - 54y^2 + 36y - 8$.

Développement – Réduction – Factorisation – équations produit-nul

13.1°) Développer et réduire :

$A = 4(3-2x)^2 - (2x-7)(1-5x)$

2°) Calculer la valeur exacte de : $B = -x^2 + 4x - 1$ pour $x = 2 - \sqrt{3}$

3°) Soit : $C = -2x^2 + 11x - 5$, montrer que :

$$C = (2x-1)(5-x)$$

4°) Montrer que : $x^2 - x - 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}$

14. Factoriser puis résoudre l'équation dans chaque cas :

$(2x+3)(x-4) - 3(2x+3)(3x+5) = 0$;

$4x^3 - 25x = 0$

$(2x-1)(-4x+3) - 3(2x-1)^2 = 0$

$4x^2 - 9(5x-2)^2 = 0$

$(x+1)^3 - 16(x+1) = 0$;

$x^2 - 4 + (x-2)(3-5x) = 03x^2 - x = 0$

Equations quotients

15.Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a)$\frac{2}{x+1} = \frac{-3}{x-2}$; **b)**$\frac{x^2+2x}{x+2} = 0$;

c) $\frac{2x-5}{x+1} = \frac{x+1}{2x-5}$

Mettre un problème en équation et le résoudre

16.1°) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$\begin{cases} x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3) \\ x^2 - 6x + 5 = (x-1)(x-5). \end{cases}$

2°) Trouver trois entiers consécutifs qui soient les mesures des côtés d'un triangle rectangle.

17. Trouver deux réels dont la somme est égale à 22 et la différence de leurs carrés est égale à 88.

Forme adaptée au problème posé

18. On donne $P(x) = 5(x^2 - 9) - (x-5)(6-2x)$.

1°) Développer et réduire $P(x)$.

2°)Factoriser $P(x)$.

3°) Trouver la forme convenable pour résoudre les équations : a)$P(x) = 0$;b)$P(x) = -15$;c)$P(x) = 7x + 5$.

19. Soit$A = -x^2 + 4x + 21$ (forme 1).

1°) Montrer que pour tout x, $A = (7-x)(x+3)$**(forme 2).**

2°) Montrer que pour tout x, $A = -(x-2)^2 + 25$**(forme 3).**

3°) En choisissant la bonne écriture de A:

a) Calculer la valeur exacte de Apour $x = 2 + \sqrt{2}$.

b) Résoudre $A = 0$.

c) Résoudre $A = 21$.

e)Résoudre $A = 7 - x$.

20. Soit :

$A = \dfrac{3x^2+5x+2}{x^2-4}$ (forme 1),

définie pour $x \in E = \mathbb{R} \setminus \{-2;2\}$.

1°) Montrer que pour tout $x \in E, A$

$$= 3 + \frac{5x+14}{x^2-4} \text{ (forme 2).}$$

2°) En choisissant la bonne écriture de A, résoudre

$A = \dfrac{2}{x^2-4}$

Calcul avec les quotients

21. Simplifier :

$\dfrac{\frac{3}{2}-\frac{5}{6}}{\frac{1}{4}+\frac{1}{3}}$; $\dfrac{1}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}$; $\dfrac{4-\frac{2}{3}}{4}$

22. Simplifier :

$$\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x^2-1}$$

23. Soient a, b et c trois réels non nuls.

a) Ecrire $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$ sous forme d'une seule fraction

b) Montrer que si $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=0$, alors :

$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2$

Le vérifier pour $a = 2$, $b = 3$ et $c = -1$.

c) La réciproque est –elle vraie ?

24. Vérifier l'égalité : $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 = \frac{1-x^5}{1-x}$

successivement pour $x = 0, x = -1$ et $x = \dfrac{1}{2}$

Le démontrer pour x quelconque différent de 1.

25. Donner l'écriture fractionnaire de $A = \frac{x+2}{3-x} + \frac{5+x}{x+1}$

26. Donne r la fraction correspondante au quotient rationnel dans chaque cas :

$x = 2,\overline{25}$; $y = 0,\overline{463}$; $z = 45,\overline{8473}$

Calcul sur les racines carrées

27. Simplifier :

a) $(\sqrt{2}-3)(\sqrt{2}+3)$; **b)** $(\sqrt{5}-1)^2$

c) $\sqrt{32}+\sqrt{42}$; **d)** $\sqrt{\sqrt{2}+1} \times \sqrt{\sqrt{2}-1}$

28. Ecrire chacun des nombres suivants sans radicaux aux dénominateurs :

$A = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$; $B = \dfrac{1}{\sqrt{2}-1}$; $C = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{5\sqrt{3}+3\sqrt{2}}$

29. a) Ecrire sans radicaux au dénominateur la fraction :

$\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$

b) En déduire une expression simple de la somme :

$N = \dfrac{1}{1} + \dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{100}+\sqrt{99}}$.

30. Le nombre : $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est appelé nombre d'or, on le note φ

a) Comparer $\varphi - 1$ et $\dfrac{1}{\varphi}$

b) En déduire que φ est une solution de l'équation $x^2 = x + 1$, puis calculer φ^2

c) Montrer que pour tout entier naturel n, φ est une solution de l'équation : $x^{n+2} = x^{n+1} + x^n$

d) Calculer alors φ^3 et φ^4

Valeur absolue

31. Calculer chacun des nombres suivants :

$\left|\dfrac{3}{5}-\dfrac{1}{3}\right| + \left|\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{2}\right|$ et $\left|\dfrac{5}{4}+\dfrac{1}{2}\right| - \left|\dfrac{1}{5}-\dfrac{2}{3}\right|$

Et donner le résultat sous forme d'une fraction.

32. Ecrire sans valeur absolue les réels suivants :

$a = \left|\dfrac{3}{7}-\dfrac{2}{5}\right|$; $b = |10^{-1}|$; $c = |1{,}7-\sqrt{3}|$

$d = |\pi^2 - 10|$; $e = \left|\left(\dfrac{5}{2}-\sqrt{5}\right)(-3)\right|$

33. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $|x+2| = 5$; **b)** $|x+2| = -5$

c) $|2x-1| = 3$; **d)** $|2x+1| = |x+3|$

34. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a) $|x| \leq 3$; **b)** $|5x-1| \leq 3$;

c) $|x| \geq 3$; **d)** $\left|2-\dfrac{1}{3}x\right| > 1$.

Calcul sur les intervalles

35. Ecrire sous forme d'intervalles chacun des ensembles suivants :

a) L'ensemble I_1 des x tels que $3 \geq x \geq -5$

b) L'ensemble I_2 des x tels que $0 < x < 51$

d) L'ensemble I_3 des x tels que $2 \leq x$

e) L'ensemble I_4 des x tels que $x > -3$

f) L'ensemble I_5 des x tels que $-4 \geq x$

36. On appelle intersection de deux intervalles I et J l'ensemble des réels qui appartiennent à I et à J. On la note $I \cap J$.

On appelle la réunion de deux intervalles I et J l'ensemble des réels qui appartiennent à I ou à J. On la note $I \cup J$.

1°) Soit $I =]-5;4]$ et $J = [2;7[$. Déterminer $I \cap J$ et $I \cup J$.

2°) Soit $K =]-\infty;3[$ et $L = [4;+\infty[$. Déterminer $K \cap L$ et $K \cup L$.

37. A l'aide d'un schéma adéquat, déterminer l'intersection et la réunion des deux intervalles donnés :

a) $I =]-\infty;1[$ et $J = [-3;+\infty[$

b) $I =]-5;+\infty[$ et $J = [4;+\infty[$

c) $I =]-\infty;1[$ et $J =]1;+\infty[$

38. Donner sous forme d'intervalles ou de réunion d'intervalles, les ensembles des réels x définis par les conditions suivantes :

a) $x \leq 3$ et $x > -1$;

b) $x \geq 2$ ou $x < 1$

d) $x \leq \dfrac{1}{2}$ et $x > -1$;

e) $x < 3$ et $x \neq -1$;

f) $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{2};\sqrt{2}\}$ **c)** $x \in \mathbb{R}$.

39. Dans chacun des cas suivants, représenter les intervalles I et J sur une droite graduée.

Déterminer ensuite $I \cap J$ et $I \cup J$:

a) $I =]-5; 1[et J = \left[-\frac{5}{7}; 6\right[$

b) $I = \left]-2; -\frac{2}{3}\right[et J = [-2; +\infty[$

c) $I =]-\infty; \sqrt{2}[$ et $J =]1{,}413; 1{,}415[$

Ordre dans $\mathbb{R}$

40. Comparer les nombres réels suivants :

a) $\frac{23}{99}$ *et* $\frac{231}{990}$; *b)* $\frac{99}{23}$ *et* $\frac{990}{231}$; *c)* $\frac{23}{99}$ *et* $\frac{239}{999}$

d) 3^{11} *et* 9^5 ; *e)* $2\sqrt{3}$ *et* $3\sqrt{2}$; *f)* $(\sqrt{5})^7$ *et* 5^5

g) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ *et* $\sqrt{2}-\sqrt{3}$; *h)* $\sqrt{13}-\sqrt{8}$ *et* $\sqrt{14}+\sqrt{7}$

i) $\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$ *et* $\frac{1}{2-\sqrt{3}}$; *j)* $7-3\sqrt{5}$ *et* $\sqrt{14}+\sqrt{7}$

41. Dans chacun des deux cas suivants, ranger par ordre croissant les réels :

a) $\frac{28}{29}$; $\frac{25}{28}$; $\frac{27}{28}$; $\frac{28}{26}$; $\frac{28}{25}$; $\frac{26}{28}$

b) $\sqrt{17}+3\sqrt{2}$; $4+\sqrt{19}$; $\sqrt{5}(\sqrt{3}+2)$

42. Soient a et b deux nombres réels de $]0; 1[$

a) Quel est le signe de $(1-a)(1-b)$

b) Comparer $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ et $1+\frac{1}{ab}$

43. a, b et c sont des réels strictement positifs.

a) Comparer $\frac{a}{b}$ *et* $\frac{a+c}{b+c}$

b) Comparer par les applications :

1) $\frac{3}{7}$ *et* $\frac{3+\sqrt{2}}{7+\sqrt{2}}$; **2)** $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}}$ *et* $\frac{\sqrt{7}+\sqrt{11}}{\sqrt{5}+\sqrt{11}}$

44. x et y sont deux nombres réels strictement positifs.

Démontrer les inégalités suivantes :

a) $\frac{x}{y}+\frac{y}{x} \geq 2$; *b)* si $x < y$ alors, $x < \sqrt{xy} < y$

c) $\frac{1}{x+y} < \frac{1}{x}+\frac{1}{y}$; *d)* $\sqrt{x+y} \leq \sqrt{x}+\sqrt{y}$

45. Démontrer que pour tous nombres réels a et b.

$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

On suppose de plus que, a et b sont positifs. Démontrer qu'alors :

$\left(\frac{a+b}{2}\right)^3 \leq \frac{a^3+b^3}{2}$

Valeur absolue

46. a et b sont deux nombres réels.

a) On suppose que $|a+b| = |a|+|b|$ (**1**)

En élevant l'égalité précédente au carré, démontrer que : $|a| \times |b| = ab$

Que pouvez-vous dire des signes de a et b ?

b) On suppose que a et b sont de même signe, démontrer qu'alors, l'égalité (**1**) est vérifiée

c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation ;

$|x^2-3x+1| = |x^2|+|-3x+1|$

47. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :

a) $|4x+3| = 2$;

b) $|-x-1| = -2$;

e) $\left|\frac{2x+3}{3x-5}\right| = \frac{3}{11}$

c) $|2x+1|+|x-5| = 6$

d) $|3x+2|-|x-7| = 3$;

48. Voici cinq façons de décrire un même ensemble

1°) $x \in [2; 6]$ (en termes d'intervalle)

2°) $2 \leq x \leq 6$ (en termes d'encadrement)

3°) $|x-4| \leq 2$ (en termes de valeur absolue)

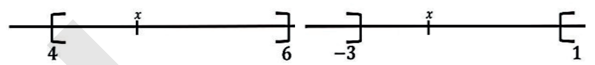
4°) $d(x; 4) \leq 2$ (en termes de distance)

5°) (représentation géométrique)

Traduire de chaque façon les ensembles suivants :

a) $x \in [2; 6]$; **b)** $x \in]1; 5[$; **c)** $-6 \leq x \leq -2$; **d)** $-5 \leq 2x \leq 5$; **e)** $|x+2| \leq 2$; **f)** $|3-x| < 4$

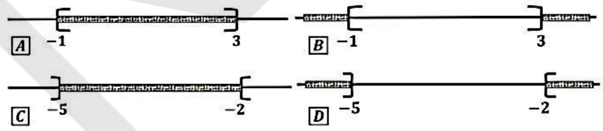
g) **h)**



49. Caractériser par une inégalité du type, (où r est un réel positif) ;

$|x-a| \leq r, |x-a| < r, |x-a| \geq r$ ou $|x-a| > r$

Les nombres réels appartenant aux ensembles A, B, C et D représentés géométriquement par :



50. Représenter graphiquement et écrire sous forme d'intervalles ou de réunion d'intervalles, l'ensemble des réels x vérifiant ;

a) $|x-2| \leq 3$; **b)** $|2x-1| \leq 2$; **c)** $|x+2| \geq 1$; **d)** $|x| > 1$; **e)** $|2x-3| \geq 5$; **f)** $1 < |3x+1| < 3$

Calcul approché

51. Soit $A(x) = 2x-5$.

Encadrer $A(\sqrt{2})$ sachant que :

$1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$.

52. Dans chacun des cas suivants, déterminer des encadrements de :

$x+y$; $x-y$; xy ; x^2 ; $\frac{1}{x}$; $\frac{x}{y}$

a) $2{,}1 < x < 2{,}2$ et $3{,}3 < y < 3{,}4$;

b) $-1{,}5 < x < -1{,}4$ et $5 < y < 5{,}1$;

c) $-4{,}1 < x < -4$ et $-0{,}9 < y < -0{,}8$.

53. On donne $1{,}732 < \sqrt{3} < 1{,}733$ et $2{,}236 < \sqrt{5} < 2{,}237$

Donner les meilleurs encadrements possibles de :

$$A = \sqrt{5}+2\sqrt{3} \quad ; \quad B = \frac{2\sqrt{5}-3\sqrt{3}}{2}.$$

Chapitre 2 : POLYNOMES

1) Les fonctions monômes :

Définition : *Caractérisation*

On appelle une fonction monôme (*ou un monôme*), toute fonction de la forme :$F(x) = ax^n$ $avec\ a \in \mathbb{R}\ et\ n \in \mathbb{N}$

a est appelé coefficient du monôme et n le degré du monôme.

Exemple 1 :

$A(x) = 5x^2$, $\quad B(x) = -\sqrt{3}x$, $\quad C(x) = -\dfrac{5}{7}x^4$;

$D(x) = 13$, $\quad E(x) = -8x^7$, $\quad F(x) = 4{,}85x^3$.

Les monômes sont de degrés respectifs : 2 ; 1 ; 4 ; 0 ; 7 ; 3.

2) Les fonctions polynômes :

Définition :

On considère comme fonction polynôme (*ou un polynôme*), toute somme algébrique de fonctions monômes.

Exemple 2 :

$F(x) = -7x^4 + 5x^3 - 2x^2 + \frac{5}{9}x + \sqrt{3} - 5x^5$.

$H(x) = 3x^2 - 8 + 2x^3 - \dfrac{2}{3}x - 5\sqrt{2}x^9$.

Simplification des fonctions polynômes :

Pour simplifier une fonction polynôme, on additionne tous ses monômes de mêmes degrés entre eux.

Exemple 3 :

Soit la fonction polynôme :

$P(x) = -12x^2 + 8 - 7x - 5x^3 + 4x^2 + 8x - 16 + x^3 - 2x^5$.

Simplifier et ranger par ordre croissant P.

Réponse :

$$P(x) = 8 - 16 - 7x + 8x - 12x^2 + 4x^2 - 5x^3 + x^3 - 2x^5$$
$$= 8 - 16 + (-7 + 8)x + (-12 + 4)x^2 + (-5 + 1)x^3 - 2x^5$$
$$= -8 + x - 8x^2 - 4x^3 - 2x^5.$$

$P(x) = -8 + x - 8x^2 - 4x^3 - 2x^5$.

3) Polynôme simplifié et ordonné :

a) La forme générale d'une fonction polynôme réduite et rangée dans l'ordre croissant :

La forme générale d'une fonction polynôme réduite et rangée dans l'ordre dans l'ordre croissant de ses puissances est ;$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n$; où $a_{i(0 \le i \le n)} \in \mathbb{R}\ et\ n \in \mathbb{N}$.

Exemple 2 :

Dans l'exemple 2, les polynômes $F(x)$ et $H(x)$ réduits et rangés dans l'ordre croissant de leurs puissances sont ;

$F(x) = \sqrt{3} + \frac{5}{9}x - 2x^2 + 5x^3 - 7x^4 - 5x^5$; $H(x) = -8 - \frac{2}{3}x + 3x^2 + 2x^3 - 5\sqrt{2}x^9$.

b) La forme générale d'une fonction polynôme réduite et rangée dans l'ordre décroissant de ses puissances :

La forme générale d'une fonction polynôme réduite et rangée dans l'ordre décroissant de ses puissances est :

$P(x) = a_nx^n + \cdots + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$; où$a_{i(0 \le i \le n)} \in \mathbb{R}\ et\ n \in \mathbb{N}$.

Exemple 3 :

Dans l'exemple 2, les polynômes $F(x)$ et $H(x)$ réduits et rangés dans l'ordre décroissant de leurs puissances sont :$F(x) = -5x^5 - 7x^4 + 5x^3 - 2x^2 + \frac{5}{9}x + \sqrt{3}$; $\quad H(x) = -5\sqrt{2}x^9 + 2x^3 + 3x^2 - \frac{2}{3}x - 8$.

Exemple 4 :

Soit la fonction polynôme : $F(x) = -7x + 3x^2 - 8 + 21x^5 - 11x + 5 - 7x^2 + 2x^4 - 6x^5$.

Simplifier le polynôme F et ranger-le dans l'ordre croissant puis décroissant des degrés de ses monômes.

Réponse :

Simplification :

$$F(x) = -7x + 3x^2 - 8 + 21x^5 - 17x + 5 - 7x^2$$
$$= -8 + 5 - 7x - 17x + 3x^2 - 7x^2 + 2x^4 + 21x^5 - 6x^5.$$

Ordre décroissant :
$F(x) = 15x^5 + 2x^4 - 4x^2 - 24x - 3.$

4) Cas particuliers

- $P(x) = 0$ (*Monôme nul de degré non défini*).
- $P(x) = a$ $(a \neq 0)$ (*Forme particulière d'un monôme constant de degré* 0).
- $P(x) = ax$ $(a \neq 0)$(*Forme particulière d'un monôme du* 1*er degré*).
- $P(x) = ax + b$ $(a \neq 0)(b \neq 0)$(*Forme particulière d'un binôme du* 1*er degré*).
- $P(x) = ax^2 (a \neq 0)$(*Forme particulière d'un monôme du* 2*ième degré*).
- $P(x) = ax^2 + b(a \neq 0)(b \neq 0)$(*Forme particulière d'un binôme du* 2*ième degré*).
- $P(x) = ax^2 + bx(a \neq 0)(b \neq 0)$(*Forme particulière d'un binôme du* 2*ième degré*).
- $P(x) = ax^2 + bx + c(a \neq 0)$(*Forme générale d'un trinôme du* 2*ième degré*).
- $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d(a \neq 0)$(*Forme générale d'un quadrinôme du* 3*ième degré*).

Exemple 5 :

$A(x) = \frac{2\sqrt{5}}{3}$; $B(x) = \frac{-5}{\sqrt{2}}x$; $C(x) = -3x + 7$; $D(x) = -4x^2$; $E(x) = -2\sqrt{3}x^2 + 7$;

$F(x) = 5{,}3x^2 - \frac{4}{3}x$; $G(x) = \frac{1}{\sqrt{5}}x^2 - 2x + 2$; $H(x) = 2x^3 + x^2 - 5x + 3.$

5) Les coefficients d'un polyôme (ou sa suite caractéristique)

Définition :
Dans un polynôme de degré n réduit et rangé suivant l'ordre croissant de ses puissances :
$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n$
La suite ordonnée des coefficients :
$(a_0 ;\ a_1 ;\ a_2 ;\ a_3 ; \ldots ;\ a_n)$est appelée la suite caractéristique des coefficients du polynôme P.

Remarque 1 :
Les coefficients des puissances qui n'apparaissent pas dans l'écriture d'un polynôme sont considérés comme étant des zéros dans sa suite caractéristique.

Exemple 6 :
Soit le polynôme :
$P(x) = -1 + 5x - \frac{2}{3}x^3 + 4\sqrt{3}x^5 - x^6 - 2x^7.$
L'écriture complète de ce polynôme est en fait ;
$P(x) = -1 + 5x + 0 \times x^2 - \frac{2}{3}x^3 + 0 \times x^4 + 4\sqrt{3}x^5 - x^6 - 2x^7;$
Et sa suite caractéristique est par conséquent : $\left(-1;\ 5; 0; -\frac{2}{3}; 0;\ 4\sqrt{3}; -1; -2\right)$

Exemple 7 :
Soit le polynôme $P(x) = 4x + 7x^2 - 12x^5 + 9x^7 - 2x^{10}$ réduit et rangé dans l'ordre croissant.
Donner l'écriture complète de ce polynôme, puis extraire sa suite caractéristique.

Réponse :
L'écriture complète de ce polynôme est :
$$P(x) = 0 + 4x + 7x^2 + 0x^3 + 0x^4 - 12x^5 + 0x^6 + 9x^7 + 0x^8 + 0x^9 - 2x^{10};$$
Et sa suite caractéristique est par conséquent : $(0\ ;\ 4\ ;\ 7\ ;\ 0\ ;\ 0\ ; -12\ ;\ 0\ ;\ 9\ ;\ 0\ ;\ 0\ ; -2)$

6) Opérations sur les polynômes

a) Somme et différence :
La somme algébrique (ou la différence) de deux polynômes $A(x)$ et $B(x)$est un polynôme. Il est obtenu par l'addition (*ou la soustraction*) des monômes de même degrés dans $A(x)$ et dans $B(x)$.

Exemple 8 :

Soient les deux polynômes :

$$F(x)=\sqrt{3}+\frac{5}{9}x-2x^2+5x^3-7x^4-5x^5 \quad et \quad H(x)=-8-\frac{2}{3}x+3x^2+2x^3-5\sqrt{2}x^9$$

Soit $H(x)$ le polynôme tel que : $H(x)=F(x)+P(x)$. Calculer $H(x)$.

Réponse :

$$\begin{aligned} H(x)=F(x)+P(x) &= \left(\sqrt{3}+\frac{5}{9}x-2x^2+5x^3-7x^4-5x^5\right)+\left(-8-\frac{2}{3}x+3x^2+2x^3-5\sqrt{2}x^9\right) \\ &= \sqrt{3}+\frac{5}{9}x-2x^2+5x^3-7x^4-5x^5-8-\frac{2}{3}x+3x^2+2x^3-5\sqrt{2}x^9 \\ &= \left(\sqrt{3}-8\right)+\left(\frac{5}{9}-\frac{2}{3}\right)x+(-2+3)x^2+(5+2)x^3-7x^4-5x^5-5\sqrt{2}x^9 \\ &= \left(\sqrt{3}-8\right)-\frac{1}{9}x+x^2+7x^3-7x^4-5x^5-5\sqrt{2}x^9. \end{aligned}$$

$H(x)=F(x)+P(x)=\left(\sqrt{3}-8\right)-\frac{1}{9}x+x^2+7x^3-7x^4-5x^5-5\sqrt{2}x^9.$

Remarque 2 :

On peut aussi utiliser les suites caractéristiques de deux polynômes pour les additionner ou les soustraire, et obtenir ainsi la suite caractéristique du polynôme somme (*ou différence*).

Remarque 3 :

Le degré de la somme ou de la différence de deux polynômes de degrés différents, est celui du polynôme ayant le plus grand degré.

Remarque 4 :

Le degré de la somme ou la différence de deux polynômes de même degré, est inférieur ou égal au degré des polynômes.

Remarque 5 :

Deux polynômes sont égaux, si et seulement si leurs suites caractéristiques sont égales.

Remarque 6 :

Un polynôme est nul, si et seulement sa suite caractéristique est constituée de zéros.

b) Produit algébrique de deux polynômes :

Soit $P(x)$ et $R(x)$ deux polynômes, et soit $Q(x)$ le polynôme tel que $Q(x)=P(x)\times R(x)$. Pour obtenir le polynôme produit $Q(x)$, on multiplie chacun des monômes de$P(x)$ par chacun des monômes de $R(x)$, on simplifie ensuite en additionnant entre eux, tous les monômes de mêmes degrés obtenus.

Exemple 4 :

Soit les deux polynômes $R(x)=-5+4x+7x^2+2x^3$ et $Q(x)=1-4x+3x^2-6x^3+9x^4$.

Calculer le polynôme$P(x)$ tel que :$P(x)=R(x)\times Q(x)$.

Réponse :

$$\begin{aligned} P(x)=R(x)\times Q(x) &= (-5+4x+7x^2+2x^3)\times(1-4x+3x^2-6x^3+9x^4) \\ &= -5(1-4x+3x^2-6x^3+9x^4)+4x(1-4x+3-6x^3+9x^4)+7x^2(1-4x+3x^2-6x^3+9x^4) \\ &\quad +2x^3(1-4x+3x^2-6x^3+9x^4) \\ &= -5\times1-5\times-4x-5\times3x^2+5\times6x^3-5\times9x^4+4x\times1-4x\times4x+4x\times3x^2-4x\times6x^3+4x\times9x^4+7x^2\times1 \\ &\quad -7x^2\times4x+7x^2\times3x^2-7x^2\times6x^3+7x^2\times9x^4+2x^3\times1-2x^3\times4x+2x^3\times3x^2-2x^3\times6x^3+2x^3\times9x^4 \\ &= -5+20x-15x^2+30x^3-45x^4+4x-16x^2+12x^3-24x^4+36x^5+7x^2-28x^3+21x^4-42x^5+63x^6+2x^3 \\ &\quad -8x^4+6x^5-12x^6+18x^7 \end{aligned}$$

$P(x)=R(x)\times Q(x)=-5+24x-14x^2+16x^3-56x^4+51x^6+18x^7.$

Remarque 7 :

Le degré du polynôme produit de deux polynômes est égal à la somme des degrés des deux polynômes.

Remarque 8 :

Un polynôme peut être donné sous une forme développée réduite ou non, mais il peut également se présenter sous une forme factorisée.

Exemple 5 :

$P(x)=(-5+12x-6x^2)(15x^2-3x^5) \quad ; \quad Q(x)=(7-9x^2-4x^3)(x+x^3-4x^4).$

7) Le zéro d'un polynôme – Factorisation

a) Le zéro d'un polynôme :

Soit $P(x)$ un polynôme. On appelle le zéro (*ou la racine*) du polynôme P, tout nombre réel α tel que $P(\alpha) = 0$.
Déterminer les racines (*ou les zéros*) d'un polynôme P, revient à résoudre l'équation $P(x) = 0$.

b) Factorisation :

Si α est une racine d'un polynôme $P(x)$ de degré $n \geq 1$, alors $P(x)$ est divisible par le facteur $x - \alpha$, et il existe un polynôme $R(x)$ de degré $n - 1$ tel que $P(x) = (x - \alpha) \times R(x)$.

Remarque 9 :

Si $\alpha_0; \alpha_1;\ \alpha_2; \alpha_3\ ; \dots ;\ \alpha_{n-1}$ sont les n racines du polynôme $P(x)$; alors celui-ci est de degré supérieur ou égal à n.

Remarque 10 :

Si $P(x) = a_0x^n + \cdots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n$est un polynôme de degré n, et si $\alpha_0\ ; \alpha_1;\ \alpha_2; \alpha_3\ ; \dots ; \alpha_{n-1}$ sont les n racines de $P(x)$, alors $P(x)$ se factorise de façon unique de la manière suivante :
$P(x) = a_0(x - \alpha_0)(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_{n-1})$

Exemple 5 :

Soit le polynôme : $P(x) = x^3 - 3x - 18$.

1. En calculant $P(3)$, montrer que $x = 2$ est une racine de P.

2. Déterminer les réels a et b tels que : $P(x) = (x - 3)(x^2 + ax + b)$

3. En utilisant le discriminant Δ, factoriser si possible le trinôme du second degré obtenu, et en déduire une factorisation du polynôme P.

Réponse :

1. $P(3) = 3^3 - 3(3) - 18 = 27 - 9 - 18 = 27 - 27 = 0$.Donc ; 3 est une racine de P.

2. Détermination des réels a et b :

A°/ Méthode 1 (*La division euclidienne*)

$$
\begin{array}{rl|l}
 & x^3 - 3x - 18 & x - 3 \\
\cline{3-3}
\mp x^3 \pm 3x^2 & & x^2 + 3x + 6 \\
\cline{1-2}
 & 3x^2 - 3x - 18 & \\
\mp 3x^2 \pm 9x & & \\
\cline{1-2}
 & 6x - 18 & \\
 & \mp 6x \pm 18 & \\
\cline{1-2}
 & = \ 0 &
\end{array}
$$

$$\Longrightarrow P(x) = (x - 2)(x^2 + 3x + 6)$$

B°/ Méthode 2 (*Identification*)

$$
\begin{aligned}
P(x) &= (x - 3)(x^2 + ax + b) \\
&= x^3 + ax^2 + bx - 3x^2 - 3ax - 3b \\
&= x^3 + (a - 3)x^2 + (b - 3a)x - 3b \\
&= x^3 - 3x - 18
\end{aligned}
$$

$$
\Longrightarrow \begin{cases} 1 = 1 \\ a - 3 = 0 \Longrightarrow a = 3 \\ b - 3a = -3 \Longrightarrow b - 9 = -3 \Longrightarrow b = 6 \\ -3b = -18 \Longrightarrow -3 \times 6 = -18 \end{cases}
$$

$$\Longrightarrow P(x) = (x - 3)(x^2 + 3x + 6)$$

C°/ Méthode 3 (*Coefficient de Hörner*)

$$P(x) = x^3 - 3x - 18 \Longrightarrow \frac{P(x)}{x-3} = \frac{x^3 - 3x - 18}{x - 3} = \frac{x^3 - 3x^2 + 3x^2 - 3x - 6x + 6x - 18}{x - 3}$$

$$= \frac{x^2(x - 3) + 3x(x - 3) + 6(x - 3)}{x - 3} = \frac{(x - 3)(x^2 + 3x + 6)}{x - 3} = x^2 + 3x + 6 \Longrightarrow P(x)$$

$$= (x - 3)(x^2 + 3x + 6)$$

Pour factoriser $x^2 + 3x + 6$, on résout l'équation$x^2 + 3x + 6$, on a ; $\Delta = (3)^2 - 4 \times 1 \times 6 = 9 - 24 = -13$
$\Longrightarrow \Delta < 0$ donc, pas de solution pour l'équation d'où, $x^2 + 3x + 6$ n'est pas factorisable.

Exemple 6 :

Développer, réduire et ordonner le polynôme $P(x) = (x - 1)(1 + x + x^2 + x^3)$

Réponse :

$P(x) = (x-1)(1+x+x^2+x^3) = x(1+x+x^2+x^3) - 1\times(1+x+x^2+x^3)$
$= x+x^2+x^3+x^4-1-x-x^2-x^3 = x^4-1$

Exemple 7 :

Soit $f(x) = x^4+4$. En écrivant $f(x) = x^4+4x^2+4-4x^2$

Mettre $f(x)$ sous forme d'un produit de deux polynômes du second degré.

Réponse :

$f(x) = x^4+4 = x^4+4x^2+4-4x^2 = (x^2+2)^2-(2x)^2 = (x^2+2+2x)(x^2+2-2x)$
$= (x^2+2x+2)(x^2-2x+2)$. D'où : $f(x) = (x^2+2x+2)(x^2-2x+2)$.

8) Courbes algébriques du second degré

a°) Types et classement :

Le plan euclidien **P**est rapporté à un repère orthonormé.

Définition :

On appelle courbe algébrique du second degré (ou conique) l'ensembleΓdes points $M(x,y)$ du plan, dont les coordonnées vérifient une équation générale du second degré du type :

$ax^2+by^2+cx+dy+e=0$ (où les coefficients réels a,b,c,d et e ne sont pas tous nuls).

Les courbes algébriques du second degré dans le plan peuvent aussi définir deux types de coniques :

Coniques dégénérées : telles que le cercle, une droite, la réunion de deux droites sécantes ou parallèles, un point isolé ou l'ensemble vide.

Coniques propres : telles que la parabole, l'ellipse ou l'hyperbole (l'ellipse et l'hyperbole sont appelées coniques à centre)

On classe les courbes algébriques du second degré d'équation $ax^2+by^2+cx+dy+e=0$de façon suivante :

Si	Conique propre	Conique dégénérée
$ab=0$	Une parabole	Une droite ou la réunion de deux droites parallèles ou l'ensemble vide.
$ab>0$	Une ellipse	Un cercle ou un point ou l'ensemble vide.
$ab<0$	Une hyperbole	La réunion de deux droites sécantes.

b°)Coniquesdégénérées :

Quelques exemples :

Soit Γ la courbe algébrique d'équation $ax^2+by^2+cx+dy+e=0$

(où les coefficients réels a,b,c,d et e ne sont pas tous nuls) dans un repère orthonormé$(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

Exemple 1 :$(a=b=e=1\ \ et\ \ c=d=0)$

$x^2+y^2+1=0 \Leftrightarrow x^2+y^2=-1$ce qui est impossible, donc $\Gamma = \Phi$ l'ensemble vide, (conique dégénérée)

Exemple 2 :$(a=b=0\ \ et\ \ c=d=e=0)$

$x+y+1=0$ce qui est l'équation cartésienne d'une droite, donc **Γest une droite,**(conique dégénérée)

Exemple 3 :$(a=1,\ b=c=d=0\ \ et\ \ e=-1)$

$x^2-1=0 \Leftrightarrow x=1\ ou\ x=-1$, donc $\Gamma = \Delta_1 \cup \Delta_2$; où $\Delta_1$et $\Delta_2$sont les droites strictement parallèles d'équations :$\Delta_1 : x=1$ et $\Delta_2 : x=-1$, (conique dégénérée)

Exemple 4 :$(a=4,\ b=-1\ \ et\ \ c=d=e=0)$

$4x^2-y^2=0 \Leftrightarrow (2x-y)(2x+y)=0 \Leftrightarrow y=2x\ ou\ y=-2x$, donc $\Gamma = \Delta_1 \cup \Delta_2$où $\Delta_1$et $\Delta_2$sont les droites sécantes d'équations : $\Delta_1 : y=2x$ et $\Delta_2 : y=-2x$, (conique dégénérée)

Exemple 5 :$(a>0,\ b>0\ \ et\ \ c=d=e=0)$

$ax^2+by^2=0 \Leftrightarrow x=y=0$, donc $\Gamma=\{O\}$ l'origine du repère, (conique dégénérée).

Exemple 6 :$(a=b=1,\ c=-2, d=4\ \ et\ \ e=-20)$

$x^2+y^2-2x+4y-20=0 \Leftrightarrow x^2-2x+1-1+y^2+4y+4-4-20=0 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y+2)^2=25$,

donc Γest le cercle de centre $\Omega(1;-2)$ et de rayon $r=5$.

c) Coniques propres :

- **Parabole :**

Définition :

Soit **P** une courbe dans le plan. On dit que **P** est une parabole si et seulement s'il existe un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ dans lequel l'équation de **P** est de la forme : $y^2=2px$,où $x^2=2py$; où $\boldsymbol{p}$ est un réel fixe.

La forme : $y^2 = 2px$ou $x^2 = 2py$ est appelée équation réduite de la parabole **P.**
Le nombre $|\boldsymbol{p}|$ est le paramètre de la parabole, $\boldsymbol{O}$ étant le sommet de la parabole.

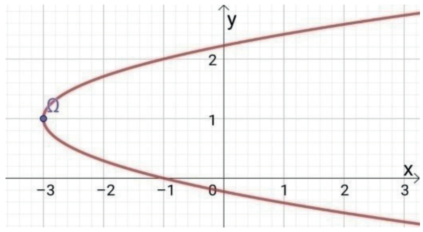
Propriété 1 :

Si la transformation d'écriture de l'équation $ax^2 + by^2 + cx + dy + e = 0$ ramène à une équation du type : $(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$ ou $(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$ où p est un réel fixe. Alors il s'agit d'une parabole de sommet $\Omega(x_0; y_0)$.

Exemple 7 :

Le plan est rapporté à un repère orthonormé$(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Montrer que la courbe **P** d'équation :
$2y^2 + 12y - x + 19 = 0$ est une parabole puis déterminer le paramètre et le sommet de **P.**

Réponse :



$2y^2 + 12y - x + 19 = 0 \Leftrightarrow 2(y^2 + 6y + 9 - 9) - x + 19 = 0$
$\Leftrightarrow 2(y+3)^2 - 18 - x + 19 = 0$
$\Leftrightarrow 2(y+3)^2 = x - 1$
$\Leftrightarrow (y+3)^2 = \frac{1}{2}(x-1) = (y+3)^2$
$= 2\left(\frac{1}{4}\right)(x-1)$, on pose $\begin{cases} X = x - 1 \\ Y = y + 3 \end{cases} \Rightarrow Y^2 = 2\left(\frac{1}{4}\right)X$

Donc l'équation de **P** est de la forme $Y^2 = 2pX$ dans le repère$(\Omega;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. D'où **P**est une parabolede sommet $\Omega(-3; 1)$ et de paramètre $\frac{1}{4}$.

Exemple 8 :

Le plan est rapporté à un repère orthonormé$(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Montrer que la courbe **P**d'équation $x^2 - 2x - 4y - 3 = 0$ est une parabole puis déterminer le paramètre et le sommet de **P.**

Réponse :

$x^2 - 2x - 4y - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 - 1 - 4y - 3 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 - 4y - 4 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 4y + 4$
$\Leftrightarrow (x-1)^2 = 4(y+1)$.

On pose $\begin{cases} \mathrm{X} = \mathrm{x} - 1 \\ \mathrm{Y} = \mathrm{y} + 1 \end{cases} \Rightarrow \mathrm{X} = 4\mathrm{Y}$. D'où **P**est une parabole de sommet $\Omega(1\,; -1)$ et de paramètre 2.

- **Ellipse :**

Définition :

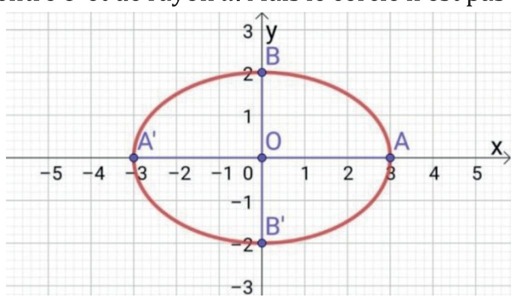
Soit **E** une courbe dans le plan. On dit que **E** est une ellipse si et seulement s'il existe un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ dans lequel l'équation de **E** est de la forme : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; où a et b sont deux réels distincts.

La forme $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ est appelé équation réduite de l'ellipse **E** .
Le point O(0 ; 0) origine du repère est le centre de l'ellipse **E.**

Remarque 11 :

Lorsque $a = b$ l'équation de l'ellipse devient celle du cercle de centre O et de rayon a. Mais le cercle n'est pas une ellipse. C'est une conique dégénérée.

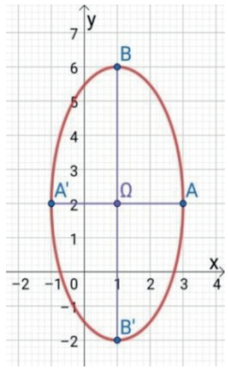
Exemple 9 :



Soit **E** la courbe d'équation $4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$
$4x^2 + 9y^2 - 36 = 0 \Leftrightarrow 4x^2 + 9y^2 = 36$
$\frac{4x^2}{36} + \frac{9y^2}{36} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$
E est une ellipse de centre $O(0; 0)$
et de sommets $A(3; 0)$, $A'(-3; 0)$, $B(0; 2)$ et $B'(0; -2)$

Propriété 2 :

Si la transformation d'écriture de l'équation $ax^2 + by^2 + cx + dy + e = 0$ ramène à une équation du type :
$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$; où a et b deux réels distincts strictement positifs.
Alors il s'agit d'une ellipse de centre $\Omega(x_0; y_0)$



Exemple 10 :

Soit **E** la courbe d'équation $4x^2-8x+y^2-4y-8=0$

$4x^2-8x+y^2-4y-8=0 \Leftrightarrow 4(x^2-2x)+y^2-4y-8=0$

$4(x^2-2x+1)-4+y^2-4y+4-4-8=0$

$4(x-1)^2+(y-2)^2-16=0 \Leftrightarrow 4(x-1)^2+(y-2)^2=16$

$\frac{4(x-1)^2}{16}+\frac{(y-2)^2}{16}=1 \Leftrightarrow \frac{(x-1)^2}{4}+\frac{(y-2)^2}{16}=1$

$\frac{(x-1)^2}{2^2}+\frac{(y-2)^2}{4^2}=1$; on pose $\begin{cases}X=x-1\\Y=y-2\end{cases}$ et $\Omega(1;2)$

l'équation de **E** dans le repère $(\Omega;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ est $\frac{X^2}{2^2}+\frac{Y^2}{4^2}=1$. Donc **E** est une ellipse de centre $\Omega(1;2)$

Les sommets de **E** dansle repère $(\Omega;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ sont : $A(2;0)$, $A'(-2;0)$, $B(0;4)$ et $B'(0;-4)$.

- **Hyperbole :**

Définition :

Soit **H** une courbe dans le plan. On dit que **H** est une hyperbole si et seulement s'il existe un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ dans lequel l'équation de H est de la forme : $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ou $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$; où a et b deux réels distincts strictement positifs.

la forme $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\pm1$ est appelé équation réduite de l'hyperbole **H**.

Le point $O(0;0)$ origine du repère est le centre de l'hyperbole **H**.

Les points $A(a;0)$, $A'(-a;0)$ sont les deux sommets de l'hyperbole **H** d'équation $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

Les points $B(b;0)$, $B'(-b;0)$ sont les deux sommets de l'hyperbole **H** d'équation $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$.

Les droites d'équations $y=\frac{b}{a}$ et $y=-\frac{b}{a}$ sont appelées asymptotes de l'hyperbole **H**.

Exemple 11 :

Soit **H** la courbe d'équation $9x^2-4y^2-36=0$.

$9x^2-4y^2-36=0$ soit $9x^2-4y^2=36$

$\frac{9x^2}{36}-\frac{4y^2}{36}=1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{2^2}-\frac{y^2}{3^2}=1$

Donc **H** est une hyperbole de centre $O(0;0)$

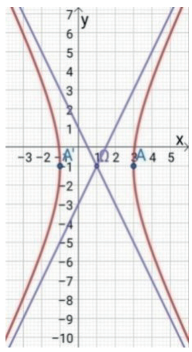
Les sommets de **H** sont $A(2;0)$, $A'(-2;0)$

Les asymptotes de **H** sont $y=\frac{3}{2}x$ et $y=-\frac{3}{2}x$

Propriété 3 :

Si la transformation d'écriture de l'équation $ax^2+by^2+cx+dy+e=0$ ramène à une équation du type :
$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=\pm1$ où a et b deux réels distincts strictement positifs.

Alors il s'agit d'une hyperbole de centre $\Omega(x_0;y_0)$



Exemple 12 :

Soit **H** la courbe d'équation $4x^2-8x-y^2-2y-13=0$

$4x^2-8x-y^2-2y-13=0 \Leftrightarrow 4(x^2-2x)-(y^2+2y)-13=0$

$4(x^2-2x+1)-4-(y^2+2y+1)+1-13=0$

$4(x-1)^2-(y+1)^2-16=0 \Leftrightarrow 4(x-1)^2-(y+1)^2=16$

$\frac{4(x-1)^2}{16}-\frac{(y+1)^2}{16}=1 \Leftrightarrow \frac{(x-1)^2}{4}-\frac{(y+1)^2}{16}=1 \Leftrightarrow \frac{(x-1)^2}{2^2}-\frac{(y+1)^2}{4^2}=1.$

On pose : $\begin{cases}X=x-1\\Y=y+1\end{cases}$ et $\Omega(1;-1)$. L'équation de **H** dans le repère $(\Omega;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ est $\frac{X^2}{2^2}-\frac{Y^2}{4^2}=1$.

H est une hyperbole de centre $\Omega(1;-1)$

Les sommets de **H** dansle repère $(\Omega;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ sont : $A(2;0)$, $A'(-2;0)$, ses asymptotes sont d'équations $y=2x$.

Exercices Généraux

1. Soit les quotients réels :

$Q(x) = \dfrac{3x+7}{x+2}$

$R(x) = \dfrac{5x^2-7x+4}{x-1}$

$K(x) = \dfrac{-4x^2+3x-12}{(x+1)(x-2)}$

$M(x) = \dfrac{3x^3-2x^2+x-6}{x(x+2)(x-3)}$

En utilisant les méthodes de l'identification, de la division euclidienne et du tableau de Hörner, déterminer

- Les réels a et b tels que : $Q(x) = a + \dfrac{b}{x+2}$
- Les réels a, b et c tels que : $R(x) = ax + b + \dfrac{c}{x-1}$
- Les réels a, b et c tels que : $K(x) = a + \dfrac{b}{x+1} + \dfrac{c}{x-2}$
- Les réels a, b, c et d tels que : $M(x) = a + \dfrac{b}{x} + \dfrac{c}{x+2} + \dfrac{d}{x-3}$

2. On donne l'encadrement :

$5{,}23 < x < 5{,}24$;

Et on donne :

$y = \dfrac{7x+3}{9-x}$ et $z = \dfrac{2x^2-3x+8}{x-3}$

Ecrire y sous la forme : $y = a + \dfrac{b}{9-x}$

Ecrire z sous la forme : $z = ax + b + \dfrac{c}{x-3}$

En déduire des encadrements pour y et z.

3. On considère le polynôme :

$$P(x) = 9x^2 - 25 + (3x+5)(x-2)$$

1°/ Factoriser $9x^2-25$, puis factoriser $P(x)$

2°/Résoudre l'équation $P(x) = 0$

3°/a)Développer et réduire $P(x)$

b) Retrouver les solutions de l'équation $P(x) = 0$

4. Soit f(x) le polynôme $\mathbf{f(x) = x^3 - 3x + 2}$

1) Montrer que f(1) = 0 puis factoriser f(x)
2) Résoudre $\mathbf{f(x) \leq 0}$

5. Soit P le polynôme défini par : $P(x) = x^3 - x^2 - 3x + 3$

1) Calculer $P(1)$
2) Factoriser $P(x)$ (3 méthodes)
3) Résoudre l'équation $P(x) = 0$
4) Résoudre l'inéquation $P(x) \leq 0$

6. Reprendre les questions de l'exercice précédent avec $P(x) = x^3 + 8x - 9$.

7. On considère le polynôme $P(x)$ tel que :

$P(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$

1°) Calculer $P(-1)$

2°) Calculer les réels a et b tels que $P(x) = (x+1)(x^2+ax+b)$

3°) Factoriser $P(x)$

8. Développer, réduire et ordonner le polynôme $P(x) = (x-1)(1+x+x^2+x^3)$.

9. Soit $f(x) = x^4 + 4$.

En écrivant $f(x) = x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^2$,

Mettre $f(x)$ sous forme d'un produit de deux polynômes du second degré.

10. Soit les fonctions rationnelles ;

$f(x) = \dfrac{-5x^3+12x^2-x-6}{2x+3}$ *et*

$g(x) = \dfrac{(3-x^2-9x)(x+1)-5x(3x-8)}{(2x-7)(5x^2+6x)}$

Déterminer les valeurs réelles pour lesquelles f et g existent.

11. Soit la fonction irrationnelle $h(x) = \sqrt{2x-7}$.

Déterminer les valeurs réelles pour lesquelles h existe.

12. Dans chacun des cas suivants.

a) Identifier le type de conique (propre ou dégénérée) donnée par son équation.

b) Donner l'équation réduite, préciser la nature et les caractéristiques (sommets, centre, asymptotes éventuelles).

1) $4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$.

2) $x^2 + y^2 + 4y + 5 = 0$.

3) $x^2 - y^2 - 4y - 4 = 0$.

4) $9x^2 - y^2 + 18 = 0$.

5) $9x^2 + 4y^2 - 36x + 8y + 4 = 0$.

6) $y^2 + 4y + 5 = 0$.

7) $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$.

8) $x^2 + y^2 + 4x + 2y + 5 = 0$.

9) $4y^2 - 24y + x + 36 = 0$.

10) $x^2 + 5x + 6 = 0$.

11) $4x^2 - y^2 + x + 4y - 48 = 0$.

12) $x^2 + 6x + y = 0$.

13) $2x^2 - y - 4 = 0$.

14) $2x^2 + 2y^2 - 5x + 4y - 6 = 0$.

15) $4x^2 - y^2 - 2y = 0$.

16) $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 17 = 0$.

17) $x^2 + y^2 + 4x + 6y - 13 = 0$.

18) $x^2 + y^2 + 4x + 9 = 0$.

Chapitre 3 : CALCUL VECTORIEL

1. Notion de vecteur :

Définition :

Soient A et B deux points.

1. Si A et B sont distincts, le vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ est déterminé par ;

- Une longueur ; celle du segment $[AB]$ appelée norme de $\vec{u}$;
- Une direction ; celle de la droite (AB) ;
- Un sens ; celui de A vers B.

2. Si A *et* B sont confondus(A = B) le vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ est le vecteur nul, il n'a pas de direction ni sens et sa longueur est nulle

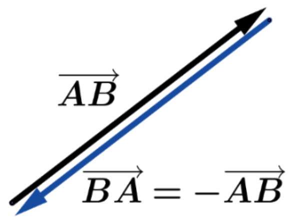
Remarque 1 :

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, sont égaux s'ils ont :

- La même longueur ;
- Le même sens ;
- La même direction.

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont opposés s'ils ont :

- La même longueur ;
- La même direction ;
- Deux sens contraires.



a) Relations vectorielles :

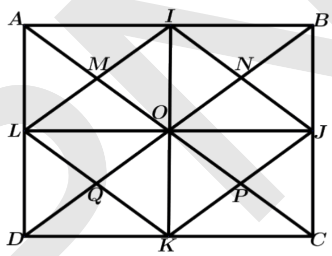
Pour tout point A du plan $\mathcal{P}$, on a : $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$ *(Vecteur nul).*

Pour tous points A et B du plan $\mathcal{P}$, on a :$-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$ ($\overrightarrow{BA}$ *est l'opposé de* $\overrightarrow{AB}$).

Exemple 1 :

Sur la figure ci-dessus, donner ;

- Tous les vecteurs égaux au vecteur $\overrightarrow{AM}$;
- Tous les vecteurs égaux au vecteur $\overrightarrow{AI}$;
- Tous les vecteurs opposés au vecteur $\overrightarrow{AL}$.



Réponse :

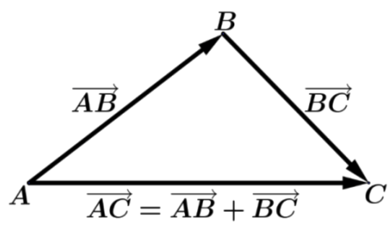
- $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MO} = \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{IN} = \overrightarrow{NJ} = \overrightarrow{LQ} = \overrightarrow{QK}$;
- $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{LO} = \overrightarrow{OJ} = \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{DK} = \overrightarrow{KC}$;
- Vecteurs opposés à $\overrightarrow{AL}$: $-\overrightarrow{AL} = \overrightarrow{LA} = \overrightarrow{DL} = \overrightarrow{QM} = \overrightarrow{KO} = \overrightarrow{OI} = \overrightarrow{PN} = \overrightarrow{CJ} = \overrightarrow{JB}$.

b) Somme de vecteurs :

Pour additionner des vecteurs, on utilise la relation de Chasles.

Pour tous points A, B et C du plan $\mathcal{P}$, on a :

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.***(Relation de Chasles).***



La relation de Chasles peut aussi s'écrire ;

Pour tous points A, B et C du plan $\mathcal{P}$, et pour tout point $M \in \mathcal{P}$, on a $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MA}$. En particulier ; $O \in \mathcal{P} \Rightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}$.

Exercice 1 :

Démontrer la deuxième écriture de la relation de Chasles.

Exemple 2 :

ABC est un triangle non aplati, P et Q sont deux points du plan définis par :

$3\overrightarrow{PA} - 2\overrightarrow{BC} = 4\overrightarrow{BP}$ et $2\overrightarrow{QA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} - 4\overrightarrow{BQ} = \vec{0}$.

En utilisant la relation de Chasles, exprimer $\overrightarrow{BP}$ *et* $\overrightarrow{BQ}$ *en fonction* $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$

Réponse :

$$3\overrightarrow{PA} - 2\overrightarrow{BC} = 4\overrightarrow{BP} \Rightarrow 3\overrightarrow{PB} + 3\overrightarrow{BA} - 2\overrightarrow{BC} = 4\overrightarrow{BP} \Rightarrow -3\overrightarrow{BP} - 4\overrightarrow{BP} = -3\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{BC}$$

$$\Rightarrow -7\overrightarrow{BP} = -3\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{BC} \Rightarrow \overrightarrow{BP} = \frac{3}{7}\overrightarrow{BA} - \frac{2}{7}\overrightarrow{BC}$$

$$2\overrightarrow{QA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} - 4\overrightarrow{BQ} = \vec{0} \Rightarrow 2\overrightarrow{QB} + 2\overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} - 4\overrightarrow{BQ} = \vec{0} \Rightarrow -2\overrightarrow{BQ} - 4\overrightarrow{BQ} = -2\overrightarrow{BA} - \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$$

$$\Rightarrow -6\overrightarrow{BQ} = -2\overrightarrow{BA} - \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} \Rightarrow \overrightarrow{BQ} = \frac{2}{6}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{18}\overrightarrow{BC}$$

Exemple 3 :

Soient A, B *et* C trois points distincts, et soit M un point quelconque du plan tel que ; $5\overrightarrow{MA} = -2\overrightarrow{MB} + 7\overrightarrow{MC}$.
En utilisant la relation de Chasles, montrer que les points A, B et C sont alignés.

Réponse :

$5\overrightarrow{MA} = -2\overrightarrow{MB} + 7\overrightarrow{MC} \Longrightarrow 5\overrightarrow{MA} = -2\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{AB} + 7\overrightarrow{MA} + 7\overrightarrow{AC}$

$$\Longrightarrow 5\overrightarrow{MA} = -2\overrightarrow{MA} + 7\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{AB} + 7\overrightarrow{AC} \Longrightarrow 5\overrightarrow{MA} = 5\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{AB} + 7\overrightarrow{AC}$$

$$\Longrightarrow 5\overrightarrow{MA} - 5\overrightarrow{MA} = 2\overrightarrow{AB} + 7\overrightarrow{AC} \Longrightarrow 2\overrightarrow{AB} + 7\overrightarrow{AC} = \vec{0}$$

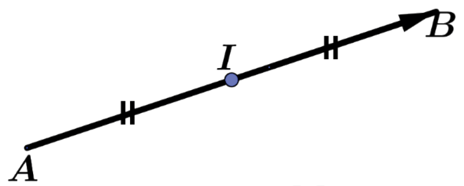
$$\Longrightarrow 2\overrightarrow{AB} = 7\overrightarrow{AC} \Longrightarrow \overrightarrow{AB} = \frac{7}{2}\overrightarrow{AC} \Longrightarrow \overrightarrow{AB} \ \ et \ \ \overrightarrow{AC} \text{ colinéaire} \Longrightarrow A, B \ et \ C \text{ alignés.}$$

c) Egalités vectorielles et configurations de base :

❖ Milieu et vecteurs :

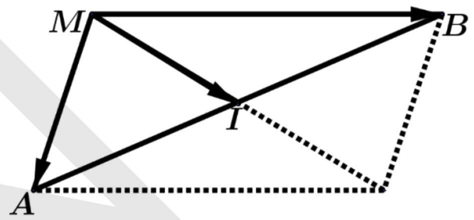
▪ Milieu d'un segment et vecteurs :

Soit $[AB]$ un segment de milieu I, on a :



- $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$;
- $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{IB}$.
- $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

Pour tout point M du plan $\mathcal{P}$, on a :



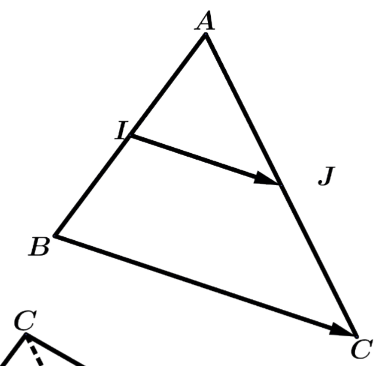
- $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$;
- $\overrightarrow{MI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB})$

Exercice 2 :

Démontrer la dernière propriété.

▪ Milieux des côtés d'un triangle et vecteurs :

Soit ABC un triangle. I et J les milieux respectifs de $[AB]$ *et* $[AC]$, alors :



- $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$;
- $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{IJ}$

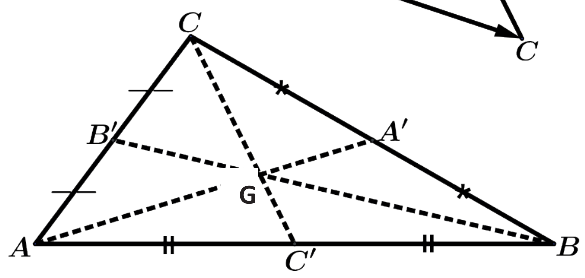
Exercice 3 :

Démontrer cette propriété.

❖ Centre de gravité et vecteurs :

Soit ABC un triangle de centre de gravité G.

Et soit A' le milieu de $[BC]$, alors :

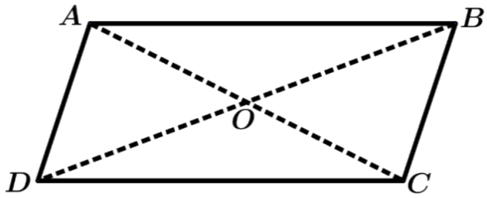


- $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}\,\boxed{\mathbf{1}}$;
- $\overrightarrow{GA} = -2\overrightarrow{GA'}\,\boxed{\mathbf{2}}$;
- $\overrightarrow{GA'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GA}\,\boxed{\mathbf{3}}$.
- $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}\,\boxed{\mathbf{4}}$;
- $\forall M \in \mathcal{P} \Longrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}\,\boxed{\mathbf{5}}$

Exercice 4 :

Démontrer les propriétés précédentes.

❖ Parallélogramme et vecteurs :



$ABCD$ est un parallélogramme de centre O ;

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ *et* $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$;

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$;

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$;

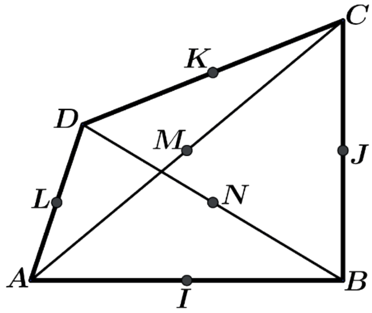
$\Leftrightarrow \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC}$ *et* $\overrightarrow{DO} = \overrightarrow{OB}$.

Exemple 4 :

Soit $ABCD$ un quadrilatère. I; J; K; L; M; N les milieux respectifs de $[AB]$; $[BC]$; $[CD]$; $[DA]$; $[AC]$; $[BD]$.

1°) Démontrer que les segments $[IK]$; $[JL]$ et $[MN]$ ont le même milieu G.

2°) Démontrer que : $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$.



Réponse :

1°) Dans le triangle ABC, on a : $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ et dans le triangle ACD, on a : $\overrightarrow{LK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$;

donc $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{LK}$. Alors $IJKL$ est un parallélogramme. D'où$[IK]$ et $[JL]$ ont le même milieu.

Dans le triangle ACD, on a : $\overrightarrow{LM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$ et dans le triangle BCD, on a : $\overrightarrow{NJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$,donc ; $\overrightarrow{LM} = \overrightarrow{NJ}$; alors$LMJN$ est un parallélogramme. D'où$[JL]$ et $[MN]$ ont le même milieu.

Par conséquence les segments $[IK]$; $[JL]$ et $[MN]$ ont le même milieu G.

2°) On a $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB}\right) + \left(\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD}\right)$

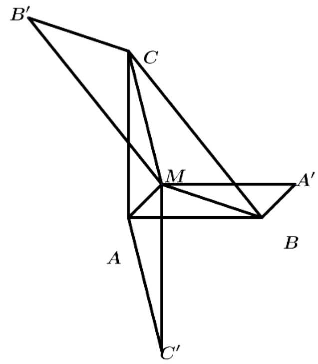
$= 2\overrightarrow{GI} + 2\overrightarrow{GK} = 2\left(\overrightarrow{GI} + \overrightarrow{GK}\right) = 2\left(\vec{0}\right) = \vec{0}$. Donc, $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$.

Exemple 5 :

Soit ABC un triangle. M un point n'appartenant ni à (AB), ni à (AC), ni à (BC).

1°) Construire les points A' ; B' ; C' tels que $MABA'$; $MBCB'$; $MCAC'$ soient des parallélogrammes.

2°) Démontrer que M est le centre de gravité du triangle $A'B'C'$.



Réponse :

1°) Construction

2°) On a : $\overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{MB'} + \overrightarrow{MC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$.

Donc, M est le centre de gravité du triangle $A'B'C'$.

Exemple 6 :

Soit ABC un triangle quelconque. A' le milieu de $[BC]$, G le centre de gravité du triangle ABC, D et E les points tels que ; $\overrightarrow{CD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

On note I le milieu de $[DE]$.

1°) Faire une figure illustrant les données précédentes.

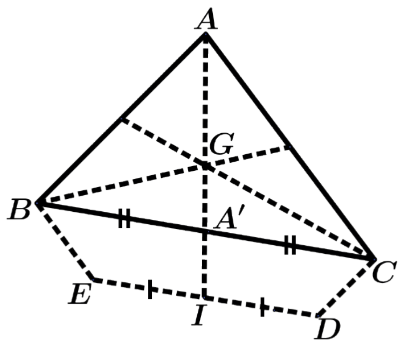
2°) a) Montrer que $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

b) Exprimer $\overrightarrow{AA'}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

3°) a) Démonter que les points A, A' et I sont alignés.

b) Démonter que le point G est le milieu de $[AI]$.

4°) Prouver que les droites (BC) et (ED) sont parallèles.



Réponse :

1°) Une construction

2° a) Calculons $\overrightarrow{AI}$ par deux chemins :

$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EI}$ et $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DI} \Rightarrow 2\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BE} + \underbrace{\overrightarrow{EI} + \overrightarrow{DI}}_{\vec{0}}$

$$\Rightarrow 2\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} \Rightarrow 2\overrightarrow{AI} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{4}{3}\overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{4}{3}\overrightarrow{AC}\right) \Rightarrow \boldsymbol{\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}}$$

b) $\boldsymbol{\overrightarrow{AA'} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)}$

3°a) $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \Rightarrow \boldsymbol{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AI}}\boxed{1}$

$\overrightarrow{AA'} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \Rightarrow \boldsymbol{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AA'}}\boxed{2}$

De $\boxed{1}$ et $\boxed{2}$ on a ; $\frac{3}{2}\overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{AA'} \Rightarrow \overrightarrow{AI} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AA'} \Rightarrow \overrightarrow{AA'}$ et $\overrightarrow{AI}$ sont colinéaires $\Rightarrow A, A'$ et I sont alignés.

b) G est le centre de gravité du triangle ABC et A' est le milieu de $[BC]$ $\Rightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'} \Rightarrow \overrightarrow{AA'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AG}$

comme on a déjà $\overrightarrow{AI} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AA'} \Rightarrow \overrightarrow{AA'} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AI} \Rightarrow \frac{3}{2}\overrightarrow{AG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AI} \Rightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AI} \Rightarrow \boldsymbol{G = A * I}$

4° on a ; $\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{BC}$

$= \frac{1}{3}\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BC} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} = \left(1 - \frac{1}{3}\right)\overrightarrow{BC} \Rightarrow \overrightarrow{ED} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} \Rightarrow \overrightarrow{ED}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires $\Rightarrow \boldsymbol{(BC)//(ED)}$

❖ Configuration de Thalès-Milet et vecteurs :

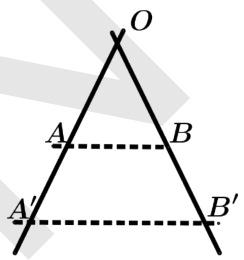
▪ Première version Thalès :

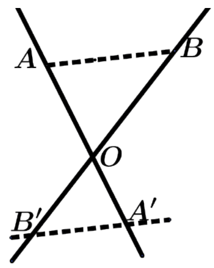
Dans le plan $\mathcal{P}$, on donne les deux droites (AA') et (BB') sécante en O de sorte que ;

$$\overrightarrow{OA'} = x.\overrightarrow{OA} \text{ et } \overrightarrow{OB'} = y.\overrightarrow{OB}$$

Alors ; les coefficients de colinéarité x et y sont égaux si et seulement si les droites (AB) et $(A'B')$ sont parallèles.Dans ce cas ; $\overrightarrow{A'B'} = x.\overrightarrow{AB}$

Démonstration :





- $\boldsymbol{x = y} \Rightarrow \overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{OB'} - \overrightarrow{OA'} = x.\overrightarrow{OB} - x.\overrightarrow{OA}$

$= x.(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = x.\overrightarrow{AB}$

$\Rightarrow (A'B')//(AB)$.

- $(A'B')//(AB) \Rightarrow \exists k \in \mathbb{R}\ tel\ \ que\ \ \overrightarrow{A'B'} = k.\overrightarrow{AB} \Rightarrow$

$\overrightarrow{A'B'} = k.(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = k.\overrightarrow{OB} - k.\overrightarrow{OA} \Rightarrow \boldsymbol{\overrightarrow{A'B'} = k.\overrightarrow{OB} - k.\overrightarrow{OA}}\boxed{1}$

D'autre part on a déjà ; $\boldsymbol{\overrightarrow{A'B'} = x.\overrightarrow{OB} - y.\overrightarrow{OA}}\boxed{2}$

$x \neq k$ ou $y \neq k \Rightarrow \overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont colinéaires ce qui est en contradiction avec les hypothèses. Donc $k = \boldsymbol{x = y}$

Remarque 2 :

1°) Si les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OA'}$ d'une part, $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OB'}$ d'autre part, sont de même sens, on a ;

$$x = \frac{OA'}{OA} \text{ et } y = \frac{OB'}{OB}$$

Sous ces conditions, on pourra énoncer : $\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} \Leftrightarrow (AB)//(A'B')$

2°) De même, lorsque les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OA'}$ sont de sens contraires, ainsi que $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OB'}$;

$x = -\frac{OA'}{OA}$ et $y = -\frac{OB'}{OB}$

Sous ces conditions, on pourra énoncer : $\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} \Leftrightarrow (AB)//(A'B')$.

▪ Deuxième version Milet :

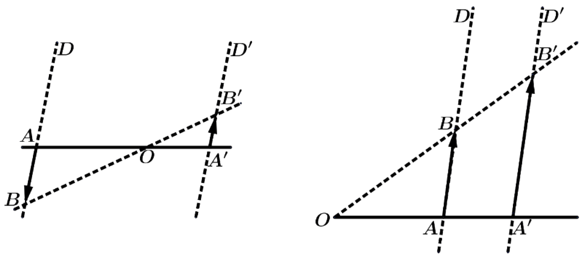
Dans le plan $\mathcal{P}$, on donne le point O et les deux droites parallèles $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ de sorte que $O \notin \mathcal{D}$ et $O \notin \mathcal{D}'$.

Soient A et B deux points de $\mathcal{D}$ et A' et B' deux points de $\mathcal{D}'$ tels que : $\overrightarrow{OA'} = x.\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{A'B'} = y.\overrightarrow{AB}$.

Alors les points O, B et B' sont alignés si et seulement si les coefficients de colinéarité x et y sont égaux.

Dans ce cas, on a aussi ; $\overrightarrow{OB'} = x.\overrightarrow{OB}$.

Démonstration :



- **Supposons que $x = y$**

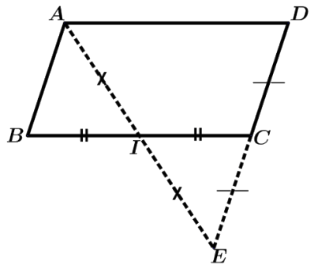
On a : $\overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{A'B'} \Longrightarrow \overrightarrow{OB'} = x.\overrightarrow{OA} + x.\overrightarrow{AB}$

$$= x.\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}\right) = x.\overrightarrow{OB}$$

$\Longrightarrow O, B$ et B' sont alignés.

- **Inversement, lorsque O, B et B' sont alignés,** d'après la version 1 (*Thalès*), les trois coefficients de proportionnalité (*de $\overrightarrow{OA'}$ par rapport à $\overrightarrow{OA}$, de $\overrightarrow{OB'}$ par rapport à $\overrightarrow{OB}$, de $\overrightarrow{A'B'}$ par rapport à $\overrightarrow{AB}$*), sont égaux.

Exercice 5 :



Soit $ABCD$ un parallélogramme non aplati et I le milieu de $[BC]$. On désigne par E le point d'intersection de (AI)et (CD). Montrer que C est le milieu de $[DE]$.

Solution :

$ABCD$est un parallélogramme non aplati, alors $(AB)//(CD)$et$\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = \overrightarrow{\boldsymbol{DC}}\boxed{1}$

$E \in (CD) \Longrightarrow (EC)//(AB)$.

$$\begin{cases}(EC)//(AB)\\ \quad et\\ I = B * C\end{cases} \Longrightarrow \frac{BI}{IC} = \frac{AI}{IE} = 1 \Longrightarrow \begin{cases}\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{IC}\\ \quad et\\ \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IE}\end{cases} \Longrightarrow I = A * E$$

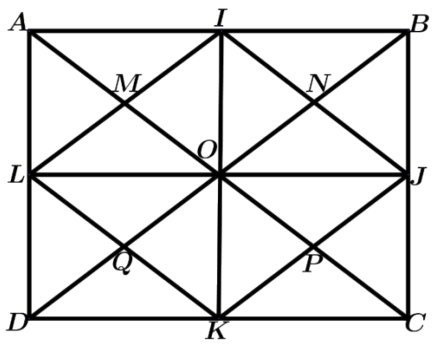
$\Longrightarrow BACE$ est un parallélogramme $\Longrightarrow \overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = \overrightarrow{\boldsymbol{CE}}\boxed{2}$

De $\boxed{1}$et$\boxed{2}$, on a ; $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CE} \Longrightarrow \boldsymbol{C = D * E}$.

d) Produit d'un vecteur par un réel :

$$* \, \forall \vec{u} \in \mathcal{V} \Longrightarrow \begin{cases}0.\vec{u} = \vec{0}\\ 1.\vec{u} = \vec{u}\\ -1.\vec{u} = -\vec{u}\end{cases} \quad * \, \forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{V}, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \Longrightarrow \begin{cases}\alpha(\beta\vec{u}) = (\alpha\beta)\vec{u}\\ (\alpha+\beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}\\ \alpha(\vec{u}+\vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}\end{cases}$$

Exemple 7 :



1°)Sur la figure ci-contre, compléter ;

$\overrightarrow{AL} + \overrightarrow{AM} = \cdots$; $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{DP} = \cdots$; $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{PC} = \cdots$;

$\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{JN} = \cdots$; $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AI} = \cdots$; $\overrightarrow{KJ} + \overrightarrow{KL} = \cdots$; $\overrightarrow{CJ} + \overrightarrow{PM} = \cdots$.

2°) Compléter :

$\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{...J}$, $\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{...} = \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{...} + \overrightarrow{IN} = \overrightarrow{QJ}$, $\overrightarrow{C\,...} + \overrightarrow{...O} = \overrightarrow{DA}$.

3°) Compléter par le nombre qui convient ;

$\overrightarrow{DQ} = \cdots \overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{AO} = \cdots \overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{BQ} = \cdots \overrightarrow{BO}$, $\overrightarrow{DB} = \cdots \overrightarrow{DN}$, $\overrightarrow{CP} = \cdots \overrightarrow{AO}$.

Réponse :

1°) On complète :

$\overrightarrow{AL} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AL} + \overrightarrow{LQ} = \overrightarrow{AQ}$; $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{DP} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MO} = \overrightarrow{AO}$,

$\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{JN} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$; $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DK} = \overrightarrow{AK}$, $\overrightarrow{KJ} + \overrightarrow{KL} = \overrightarrow{KJ} + \overrightarrow{JI} = \overrightarrow{KI}$,$\overrightarrow{CJ} + \overrightarrow{PM} = \overrightarrow{CJ} + \overrightarrow{JI} = \overrightarrow{CI}$.

2°)On complète :

$\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{...J} \Longrightarrow \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IM} = \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{NJ}$; $\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{...} = \overrightarrow{AC} \Longrightarrow \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AC}$;$\overrightarrow{...} + \overrightarrow{IN} = \overrightarrow{QJ} \Longrightarrow \overrightarrow{QN} + \overrightarrow{IN} = \overrightarrow{QJ}$;

$\overrightarrow{C\,...} + \overrightarrow{...O} = \overrightarrow{DA} \Longrightarrow \overrightarrow{CJ} + \overrightarrow{KO} = \overrightarrow{DA}$.

3°) On complète :

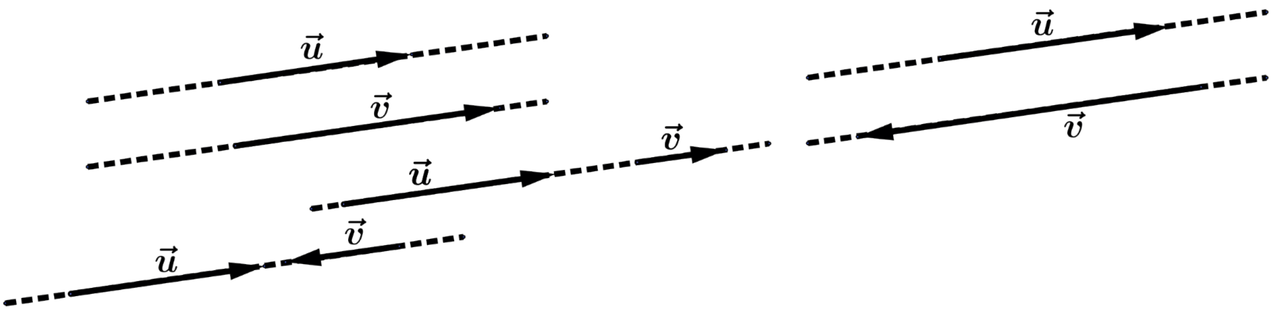
$\overrightarrow{DQ} = \dfrac{1}{4} \times \overrightarrow{DB}$; $\overrightarrow{AO} = \dfrac{2}{3} \times \overrightarrow{AP}$; $\overrightarrow{BQ} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{BO}$; $\overrightarrow{DB} = \dfrac{4}{3} \times \overrightarrow{DN}$; $\overrightarrow{CP} = -\dfrac{1}{2} \times \overrightarrow{AO}$.

e) Vecteurs colinéaires :

Définition :

Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires lorsqu'ils ont la même direction. C'est-à-dire, lorsqu'ils sont portés par deux droites parallèles ou par une même droite.
Autrement dit ; deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si, et seulement si ; $\vec{v} = k.\vec{u}(k \in \mathbb{R})$.

On a	Si et seulement si
$\vec{v} = k\,\vec{u}$ $(k \in R_+)$	$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de même sens
$\vec{v} = k\,\vec{u}$ $(k \in R_-)$	$\vec{u}$ et $\vec{v}$sont colinéaires et de sens contraires



Remarque 3 :

Pour tout vecteur $\vec{u}$, on a $0.\vec{u} = \vec{0}$. Le vecteur nul $(\vec{0})$ est colinéaire à tout vecteur.

Remarque 4 :

Si deux vecteurs sont colinéaires, alors tout vecteur colinéaire à l'un est aussi colinéaire à l'autre.

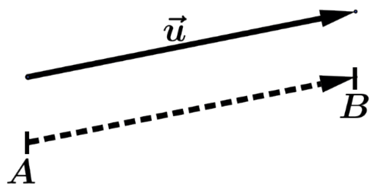
❖ **Combinaison linéaire :**

Soient$\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs quelconques de $\mathcal{V}$ et soit α et β deux réels.

Le vecteur $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$ est appelé combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ou α et β sont les coefficients respectifs de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$.

❖ **Norme d'un vecteur :**

On appelle norme d'un vecteur $\vec{u}$, et on la note $\|\vec{u}\|$, la distance entre deux points pris pour origine et extrémité correspondant au vecteur $\vec{u}$.



C'est-à-dire que, si A et B sont deux points du plan tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$,

alors ; $\|\vec{\boldsymbol{u}}\| = \|\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}\| = \boldsymbol{AB} = \boldsymbol{d}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$.

Pour tout vecteur $\vec{u}$ on a ;

$\|\vec{u}\| \geq 0$; $\|\vec{0}\| = 0$ et $\|\vec{u}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$.

$\|\vec{u}\| = \|-\vec{u}\|$; $\|\overrightarrow{AB}\| = AB$ et en particulier $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{BA}\|$.

Pour tout vecteur $\vec{u}$ et tout réel k on a ;$\|k.\vec{u}\| = |k|\|\vec{u}\|$.

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ on a ; $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$.

Exercice 6 :

Démontrer cette dernière propriété.

Exemple 8 :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. On pose $\vec{w} = 2\vec{u} - 3\vec{v}$.

1°) Montrer que : $\|\vec{w}\| \leq 2\|\vec{u}\| + 3\|\vec{v}\|$.

2°**)** On suppose que$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires. Montrer que $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires.

Réponse :

1°) On a : $\|\vec{w}\| = \|2\vec{u} - 3\vec{v}\| \leq \|2\vec{u}\| + \|-3\vec{v}\| = |2|.\|\vec{u}\| + |-3|.\|\vec{v}\| = 2\|\vec{u}\| + 3\|\vec{v}\| \Longrightarrow \|\vec{w}\| \leq 2\|\vec{u}\| + 3\|\vec{v}\|$.

2°) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si, et seulement si, $\vec{v} = k\vec{u}$ avec $k \in \mathbb{R}$.

Donc, $\vec{w} = 2\vec{u} - 3\vec{v} = 2\vec{u} - 3(k\vec{u}) = 2\vec{u} - (3k)\vec{u} = (2-3k)\vec{u}$ et $(2-3k) \in \mathbb{R}$. Donc, $\vec{w}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

Donc ; les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires.

❖ **Vecteur unitaire :**

On dit d'un vecteur $\vec{u}$ qu'il est unitaire lorsque ; $\|\vec{u}\| = 1$.

2. Base de V (V est l'ensemble des vecteurs du plan)

Définition :

On appelle base de $\mathcal{V}$, tout couple ordonné $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ de vecteurs non nuls et non colinéaires.

a) Projection vectorielle :

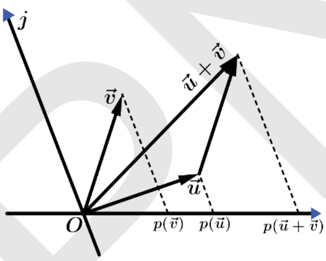
Soit $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ une base et $\vec{u}$ un vecteur de $\mathcal{V}$.

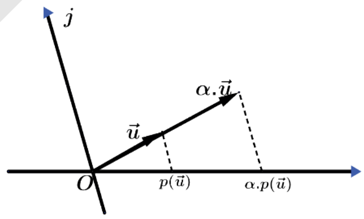
Il existe un couple unique $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ tels que ; $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$, avec $\vec{u}_1$ colinéaire à $\vec{\imath}$ et $\vec{u}_2$ colinéaire à $\vec{\jmath}$.

Le vecteur $\vec{u}_1$ est appelé le projeté de $\vec{u}$ sur $\vec{\imath}$ dans la direction de $\vec{\jmath}$ et $\vec{u}_2$ est appelé le projeté de $\vec{u}$ sur $\vec{\jmath}$ dans la direction de $\vec{\imath}$.

Définition :

L'application de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$, qui au vecteur $\vec{u}$ associe le vecteur $\vec{u}_1$ est appelé projection vectorielle de $\vec{u}$ sur $\vec{\imath}$ dans la direction de $\vec{\jmath}$.





En général, on note p une projection vectorielle, lorsque, aucune confusion sur les données n'est à craindre.

b) Propriété :

Soit p une projection vectorielle, quels que soient les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et le réel α, on a :

$$p(\vec{u}+\vec{v}) = p(\vec{u}) + p(\vec{v}) \ \boxed{1}, \qquad p(\alpha.\vec{u}) = \alpha.p(\vec{u}) \ \boxed{2}$$

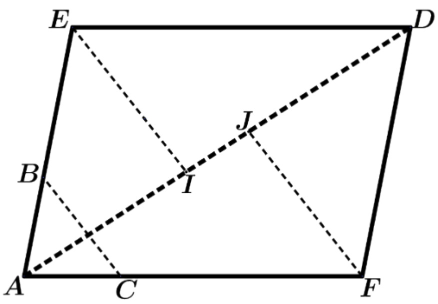
Exercice 7 :

Soit un triangle ABC, et E, F, D les points définis par : $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF}$

1°) Les parallèles à (BC) passant par E et F coupent (AD) en I et J. Montrer que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AJ}$

2°) On désigne par K le point d'intersection de (BC) et (AD). Montrer que $\overrightarrow{AD} = 5\overrightarrow{AK}$.

Solution :



1°) Soit p la projection vectorielle sur (AD) dans la direction de (BC)

On a ; $p(\overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{AD}$; $p(\overrightarrow{AE}) = \overrightarrow{AI}$; $p(\overrightarrow{AF}) = \overrightarrow{AJ}$; $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF}$

$$\Longrightarrow p(\overrightarrow{AD}) = p(\overrightarrow{AE}) + p(\overrightarrow{AF}) \Longrightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AJ}$$

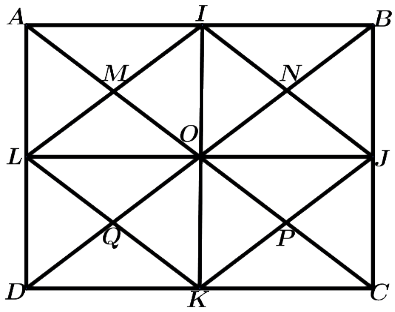
2°) $\overrightarrow{AE} = 2.\overrightarrow{AB} \Longrightarrow p(\overrightarrow{AE}) = p(2.\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AI} = 2.p(\overrightarrow{AB}) = 2\overrightarrow{AK}$

$\overrightarrow{AF} = 3.\overrightarrow{AC} \Longrightarrow p(\overrightarrow{AF}) = p(3.\overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AJ} = 3.p(\overrightarrow{AC}) = 3\overrightarrow{AK}$

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AJ} = 2.\overrightarrow{AK} + 3.\overrightarrow{AK} = 5\overrightarrow{AK}.$$

Exercices Généraux

Sur la figure ci-dessous, donner ;



► Tous les vecteurs égaux au vecteur $\overrightarrow{AM}$;

► Tous les vecteurs égaux au vecteur $\overrightarrow{AI}$;

► Tous les vecteurs opposés au vecteur $\overrightarrow{AL}$.

2. ABC est un triangle non aplati, P et Q sont deux points du plan définis par :

$3\overrightarrow{PA} - 2\overrightarrow{BC} = 4\overrightarrow{BP}$ et $2\overrightarrow{QA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} - 4\overrightarrow{BQ} = \vec{0}$

En utilisant la relation de Chasles, déterminer les coordonnées de P et Q dans le repère $(B;\ \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$

3. Soit ABC un triangle non aplati, et soit M un point quelconque du plan tel que ;$5\overrightarrow{MA} = -2\overrightarrow{MB} + 7\overrightarrow{MC}$

En utilisant la relation de Chasles, montrer que les points A, B et C sont alignés.

4. Soit $ABCD$ un quadrilatère. $I;\ J;\ K;\ L;\ M;\ N$ les milieux respectifs de $[AB]$; $[BC]$; $[CD]$; $[DA]$; $[AC]$; $[BD]$.

1°) Démontrer que les segments $[IK]$; $[JL]$ et $[MN]$ ont le même milieu G.

2°) Démontrer que : $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$.

5. Soit ABC un triangle. M un point n'appartenant ni à (AB), ni à (AC), ni à (BC).

1°) Construire les points A' ; B' ; C' tels que $MABA'$; $MBCB'$; $MCAC'$ soient des parallélogrammes.

2°) Démontrer que M est le centre de gravité du triangle $A'B'C'$.

6.1°) Sur la figure ci-dessous, compléter ;

$\overrightarrow{DL} + \overrightarrow{BN} = \cdots$;$\overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CQ} = \cdots$;$\overrightarrow{BN} + \overrightarrow{QK} = \cdots$;

$\overrightarrow{BN} + \overrightarrow{LM} = \cdots$;$\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BI} = \cdots$;$\overrightarrow{KL} + \overrightarrow{KJ} = \cdots$; $\overrightarrow{DJ} + \overrightarrow{QN} = \cdots$.

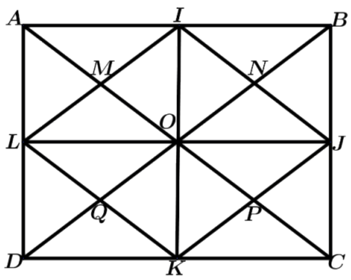
2°) Compléter :

$\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{\ldots N}$, $\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{\ldots} = \overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{\ldots} + \overrightarrow{IM} = \overrightarrow{PL}$,

$\overrightarrow{D\ldots} + \overrightarrow{\ldots O} = \overrightarrow{CB}$.

3°) Compléter par le nombre qui convient ;

$\overrightarrow{CP} = \cdots\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{BO} = \cdots\overrightarrow{BQ}$, $\overrightarrow{AP} = \cdots\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{CA} = \cdots\overrightarrow{CM}$, $\overrightarrow{DQ} = \cdots\overrightarrow{BO}$.



7. Soit $ABCD$ un parallélogramme non aplati et I le milieu de $[BC]$. On désigne par E le point d'intersection de (AI) et (CD).

Montrer que C est le milieu de $[DE]$

8. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. On pose $\vec{w} = 2\vec{u} - 3\vec{v}$.

1°) Montrer que :

$\|\vec{w}\| \leq 2\|\vec{u}\| + 3\|\vec{v}\|$.

2°) On suppose que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires. Montrer que $\vec{u}$; $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires.

9. Soit un triangle ABC, et soient E, F, D les points définis par :

$\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF}$

1°) Les parallèles à (BC) passant par E et F coupent (AD) en I et J. Montrer que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AJ}$

2°) On désigne par K le point d'intersection de (BC) et (AD).

Montrer que $\overrightarrow{AD} = 5\overrightarrow{AK}$.

10. Dans une base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ de $\mathcal{V}$, soit $\vec{u}\begin{pmatrix}6\\-7\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-5\\3\end{pmatrix}$, calculer $det(\vec{u}, \vec{v})$.

11. Dans une base orthonormé $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ de $\mathcal{V}$ on donne les deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\-7\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-12\\21\end{pmatrix}$.

Vérifier que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

12. Dans une base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ de $\mathcal{V}$, on donne les deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}-7\\3\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}$.

1°) Montrer que $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base de $\mathcal{V}$

2°) Donner les coordonnées de $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$

3°) Donner les coordonnées de $\vec{w}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$

13. Dans une base orthonormée $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ de $\mathcal{V}$, on donne le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-5\end{pmatrix}$.

Donner la norme de $\vec{u}$ et les coordonnées de son vecteur unitaire associé.

14. Soit $ABCD$ un rectangle.

On suppose que $AB = 7$ et $BC = 4$.

Soient E, F, G et H les points définis par :

$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{7}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BF} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$;

$\overrightarrow{GD} = \frac{6}{7}\overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{DH} = \frac{1}{3}\overrightarrow{HA}$.

Partie I : Outil analytique

1°) Démontrer que $(A;\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ est un repère du plan $\mathcal{P}$.

2°) Donner les coordonnées des points A, B, C, D, E, F, G et H dans le repère $(A;\ \overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AD})$

3°) Donner les composantes des vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{HG}$, puis conclure sur la nature du quadrilatère $EFGH$

Partie II : Outil vectoriel

1°) Exprimer $\overrightarrow{EF}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

2°) Exprimer $\overrightarrow{HG}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

3°) En déduire la nature du quadrilatère $EFGH$.

1) Coordonnées d'un vecteur dans une base :

Définition : ***(rappel)***

On appelle base de $\mathcal{V}$, tout couple ordonné $(\vec{u},\vec{v})$ de vecteurs non nuls et non colinéaires.

Etant donné une base $(\vec{u},\vec{v})$ de $\mathcal{V}$ et un vecteur $\vec{w}$, il existe un seul couple (x,y) de réels appelés coordonnées de $\vec{w}$ tels que ; $\vec{w} = x.\vec{u} + y.\vec{v}$.

Exercice 1 :

Démontrer l'existence et l'unicité de ces coordonnées.

Définition :

Les deux réels$x$ et y sont les coordonnées ou composantes du vecteur $\vec{w}$ dans la base $(\vec{u},\vec{v})$ et on note ; $\vec{w}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ ou $\vec{w}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}_{(\vec{u},\vec{v})}$ ou $\vec{w}(x,y)$ ou $\vec{w}\begin{vmatrix}x\\y\end{vmatrix}$

Premières propriétés :

Dans une base $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ de $\mathcal{V}$, soit $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ des vecteurs de $\mathcal{V}$, α et β deux réels, on a les propriétés suivantes :

⊠ $\boldsymbol{\vec{\imath} = 1.\vec{\imath} + 0.\vec{\jmath} \Leftrightarrow \vec{\imath}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}}$; ⊠ $\boldsymbol{\vec{\jmath} = 0.\vec{\imath} + 1.\vec{\jmath} \Leftrightarrow \vec{\jmath}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}}$; ⊠ $\boldsymbol{-\vec{\imath} = -1.\vec{\imath} + 0.\vec{\jmath} \Leftrightarrow -\vec{\imath}\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}}$;

⊠ $\boldsymbol{-\vec{\jmath} = 0.\vec{\imath} - 1.\vec{\jmath} \Leftrightarrow -\vec{\jmath}\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}}$;⊠ $\boldsymbol{\vec{0}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}}$ $\boldsymbol{et\ \vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow x = 0\ et\ y = 0}$; ⊠ $\boldsymbol{\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow x = x'ety = y'}$;

⊠ $\boldsymbol{-\vec{u}\begin{pmatrix}-x\\-y\end{pmatrix}}$;⊠ $\boldsymbol{\vec{u} + \vec{v}\begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\end{pmatrix}}$;⊠ $\boldsymbol{\alpha\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha x\\\alpha y\end{pmatrix}}$;⊠ $\boldsymbol{\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}\begin{pmatrix}\alpha x+\beta x'\\\alpha y+\beta y'\end{pmatrix}}$.

2) Déterminant de deux vecteurs

Définition :

Dans une base $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ de $\mathcal{V}$, on appelle déterminant de deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ et on note $det(\vec{u},\vec{v})$ le réel défini par ; $\boldsymbol{det(\vec{u},\vec{v}) = \begin{vmatrix}x & x'\\y & y'\end{vmatrix} = xy' - x'y}$.

Exemple 1 :

Dans une base $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ de $\mathcal{V}$, soit $\vec{u}\begin{pmatrix}6\\-7\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-5\\3\end{pmatrix}$, calculer $det(\vec{u},\vec{v})$.

Réponse :

$det(\vec{u},\vec{v}) = \begin{vmatrix}6 & -5\\-7 & 3\end{vmatrix} = 6\times 3 - (-7)\times(-5) = 18 - 35 \Longrightarrow \boldsymbol{det(\vec{u},\vec{v}) - 17}$.

Propriété :

Deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ sont colinéaires si, et seulement si, $\boldsymbol{det(\vec{u},\vec{v}) = 0}$.

Exemple 2 :

Dans une base orthonormé $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ de $\mathcal{V}$, on donne les deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\-7\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-12\\21\end{pmatrix}$.

Vérifier que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Réponse :

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si $det(\vec{u},\vec{v}) = 0$.

$det(\vec{u},\vec{v}) = \begin{vmatrix}4 & -12\\-7 & 21\end{vmatrix} = (4\times 21) - \big((-7)\times(-12)\big) = 84 - 84 = 0 \Longrightarrow \vec{u}et\vec{v}$ sont donc colinéaires.

Changement de base :

- Dans une base $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ de $\mathcal{V}$, soit deux vecteurs non nuls et non colinéaires $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}a'\\b'\end{pmatrix}$.

Par définition, $(\vec{u},\vec{v})$ constituent une base de $\mathcal{V}$, alors que les coordonnées de $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ dans la base $(\vec{u},\vec{v})$ sont données par la relation ; $\vec{\imath}\begin{pmatrix}\frac{b'}{det(\vec{u};\vec{v})}\\-\frac{b}{det(\vec{u};\vec{v})}\end{pmatrix}$; $\vec{\jmath}\begin{pmatrix}-\frac{a'}{det(\vec{u};\vec{v})}\\\frac{a}{det(\vec{u};\vec{v})}\end{pmatrix}$

- Si un vecteur $\vec{w}$ a pour coordonnées (x, y) dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$, alors les coordonnées de $\vec{w}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$ sont données par la relation ;$\vec{w}\begin{pmatrix} \frac{b'x-a'y}{det(\vec{u};\vec{v})} \\ \frac{ay-bx}{det(\vec{u};\vec{v})} \end{pmatrix}$

Exemple 3 :

Dans une base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ de $\mathcal{V}$, on donne les trois vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} -7 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

1°) Montrer que $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base de $\mathcal{V}$.
2°) Donner les coordonnées de $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$.
3°) Donner les coordonnées de $\vec{w}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$.

Réponse :

1°) $\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} -7 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = (-7) \times 4 - 3 \times 5 = -28 - 15 = -43 \neq 0$. Donc ; $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base de $\mathcal{V}$.

2°) Les coordonnées de $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ dans $(\vec{u}, \vec{v})$ sont $\vec{\imath}\begin{pmatrix} -\frac{4}{43} \\ \frac{3}{43} \end{pmatrix}$; $\vec{\jmath}\begin{pmatrix} \frac{5}{43} \\ \frac{7}{43} \end{pmatrix}$.

3°) Les coordonnées de $\vec{w}$ dans $(\vec{u}, \vec{v})$ sont : $\overrightarrow{W}\begin{pmatrix} \frac{4\times(-2)-5\times(-1)}{-43} \\ \frac{-7\times(-1)-3\times(-2)}{-43} \end{pmatrix} \Longrightarrow \vec{w}\begin{pmatrix} \frac{3}{43} \\ \frac{13}{43} \end{pmatrix}$.

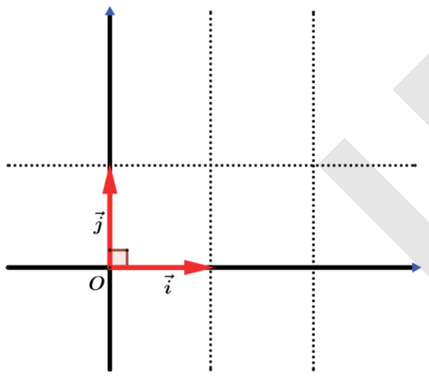
Exercice 2 :

Démontrer les deux résultats énoncés dans le présent paragraphe.

3. Base orthogonale, base orthonormale :

Définition :

La base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est dite orthogonale si les vecteurs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ sont orthogonaux (*de directions perpendiculaires*).



La base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est dite orthonormée ou orthonormale si les vecteurs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ sont orthogonaux et unitaires.
C'est-à-dire ; $\vec{\imath} \perp \vec{\jmath}$ et $\|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = 1$.

a) Norme dans une base orthonormale :

Dans une base orthonormale$(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$, soit le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ la norme de $\vec{u}$ est alors donné par ; $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

b) Vecteur unitaire adjoint à un vecteur :

Dans une base orthonormale $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$, soit le vecteur non nul $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Le vecteur $\overrightarrow{u'}\begin{pmatrix} \frac{x}{\|\vec{u}\|} \\ \frac{y}{\|\vec{u}\|} \end{pmatrix}$ est appelé vecteur unitaire adjoint au vecteur $\vec{u}$: $\overrightarrow{u'}\begin{pmatrix} \frac{x}{\|\vec{u}\|} \\ \frac{y}{\|\vec{u}\|} \end{pmatrix} \Longrightarrow \overrightarrow{u'}\begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{pmatrix}$.

Exemple 4 :

Dans une base orthonormée $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ de $\mathcal{V}$, on donne le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$.

Donner la norme de $\vec{u}$ et les coordonnées de son vecteur unitaire associé.

Réponse :

La norme de $\vec{u}$ est :$\|\vec{u}\| = \sqrt{3^2 + (-5)^2} = \sqrt{9 + 25} = \sqrt{34}$.

Les coordonnées du vecteur unitaire associé $\overrightarrow{u'}$ sont : $\begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{34}} \\ \frac{-5}{\sqrt{34}} \end{pmatrix}$

Remarque 1 :

Un vecteur et son vecteur unitaire associé sont colinéaires.

4. Repère du plan :

Définition :

Soit O un point quelconque du plan. Et soit $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ une base de $\mathcal{V}$. Le triplet $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est appelé un repère du plan. Oest appelé point origine du repère.

Soient A, B et C trois points non alignés. Le triplet $(A; B, C)$ ou $\left(A;\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ forment un repère du plan.

a) Coordonnées d'un point dans un repère :

Définition :

Le point $M(x, y)$ dans le repère $(O\ ;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ signifie ; $\overrightarrow{OM}\binom{x}{y}$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$; $\Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$.

Exercice 3 :

Soit $ABCD$ un rectangle. On suppose que $AB = 7$ et $BC = 4$. Soient E, F, G et H les points définis par :

$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{7}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BF} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{GD} = \frac{6}{7}\overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{DH} = \frac{1}{3}\overrightarrow{HA}$.

Activité 1 :

Partie I : Outil analytique

1°)Démontrer que $(A;\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ est un repère du plan $\mathcal{P}$.

2°) Donner les coordonnées des points A, B, C, D, E, F, G et H dans le repère $(A;\ \overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AD})$

3°) Donner les composantes des vecteurs $\overrightarrow{EF}$et $\overrightarrow{HG}$, puis conclure sur la nature du quadrilatère $EFGH$

Partie II : Outil vectoriel

1°) Exprimer $\overrightarrow{EF}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

2°) Exprimer $\overrightarrow{HG}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

3°) En déduire la nature du quadrilatère $EFGH$.

Solution :

Partie I : Outil analytique

1°) $(A;\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ constitue un repère du plan $\mathcal{P}$, si $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ constitue une base de $\mathcal{V}$, ce qui est le cas puisque $\overrightarrow{AB}$et $\overrightarrow{AD}$ sont non nuls et non colinéaires.

2°) Les coordonnées des points dans le repère $(A;\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$:

$A(0,0)$, $B(1,0)$, $C(1,1)$, $D(0,1)$,

$E\left(\frac{1}{7}, 0\right)$, $F\left(1, \frac{1}{4}\right)$, $G\left(\frac{6}{7}, 1\right)$, $H\left(0, \frac{3}{4}\right)$

3 °) Les composantes des vecteurs$\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{HG}$ en fonction de$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$:

$$\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix} \frac{6}{7} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{HG}\begin{pmatrix} \frac{6}{7} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG}.$$

On en conclut que le quadrilatère $EFGH$ est un parallélogramme.

Partie II : Outil vectoriel

1°) $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix} \frac{3}{4} - \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} - 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{EF}\begin{pmatrix} \frac{7}{12} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

2°) $\overrightarrow{HG}\begin{pmatrix} -\frac{1}{6}-\left(-\frac{3}{4}\right) \\ 1-\frac{3}{4} \end{pmatrix} \Longrightarrow \overrightarrow{HG}\begin{pmatrix} \frac{7}{12} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

3°) *Donc* $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG}$ Le quadrilatère $EFGH$ est un parallélogramme.

Remarque 2 :

Les trois points A, B et C sont alignés si, et seulement si ; $\boldsymbol{det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0}$.

b) Coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$:

Activité 2 :

Soit $A(x_A, y_A)$ *et* $B(x_B, y_B)$ donnés dans un repère $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, montrer alors que les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont données dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ par l'expression ; $\boldsymbol{\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}}$.

Exemple 5 :

Dans un repère $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on donne les points $A(-4, 6)$ et $B(1, -5)$.

Calculer les coordonnées du vecteurs $\overrightarrow{AB}$.

Réponse :

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-(-4) \\ -5-6 \end{pmatrix} \Longrightarrow \boldsymbol{\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 5 \\ -11 \end{pmatrix}}$.

c) Coordonnées du milieu I d'un segment[AB] :

Activité 3 :

dans un repère $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, soient $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ et I est le milieu de $[AB]$, monter alors que les coordonnées du point I sont données dans le repère$(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ par l'expression; $\boldsymbol{I\left(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2}\right)}$

Exemple 6 :

Dans un repère $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on donne les points $A(-5, -4)$ et $B(9, -3)$.

Calculer les coordonnées du point I milieu de $[AB]$.

Réponse :

Les coordonnées du milieu I d'un segment sont données par la relation ;

$I\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right) = \left(\frac{-5+9}{2}, \frac{-4+(-3)}{2}\right) = \left(\frac{4}{2}, \frac{-7}{2}\right) \Longrightarrow \boldsymbol{I\left(2, \frac{-7}{2}\right)}$

d) Coordonnées du centre de gravité d'un triangle :

Dans un repère $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, soient $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ et $C(x_C, y_C)$ et soit G le centre de gravité de ABC, montrer qu'alors les coordonnées du point G sont données dans le repère $(O\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ par l'expression ;

$$\boldsymbol{G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right)}$$

Exemple 7 :

Dans un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on donne les points $A(-4, 12)$, $B(-9, -5)$ et $C(6, 11)$.

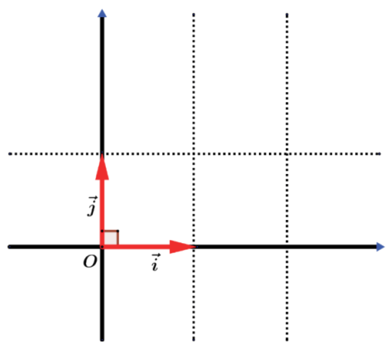
Calculer les coordonnées du points G centre de gravité du triangle ABC.

Réponse :

Les coordonnées du point G sont données par la formule ;

$\begin{cases} x_G = \frac{x_A+x_B+x_C}{3} \\ y_G = \frac{y_A+y_B+y_C}{3} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_G = \frac{(-4)+(-9)+6}{3} = -\frac{7}{3} \\ y_G = \frac{12+(-5)+11}{3} = \frac{18}{3} \end{cases} \Longrightarrow \boldsymbol{G\left(-\frac{7}{3}, \frac{18}{3}\right)}$.

e) Repère orthogonal, repère orthonormé :



Le repère $(O\ ;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est dit orthogonal si la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est orthogonale.

Soit O est un point quelconque du plan $\mathcal{P}$ et $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ une base de $\mathcal{V}$.

Le repère $(O\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ est dit orthonormé ou orthonormal si la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est orthonormale.

f) Distance entre deux points A et B :

Activité 4 :

Dans un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$, soit deux points $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$, montrer qu'alors la distance entre A et B est donnée par l'expression ; $\boldsymbol{AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}}$.

Exemple 8 :

Dans un repère $(O\ ;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$ de $\mathcal{V}$ soient les points $A(-13, 4)$et $B(-7, 9)$, calculer AB.

Réponse :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{\left((-7) - (-13)\right)^2 + (9 - 4)^2} = \sqrt{6^2 + 5^2} = \sqrt{36 + 25} \Longrightarrow \boldsymbol{AB = \sqrt{61}}$$

g) Vecteurs orthogonaux dans une base :

Activité 5 :

Dans une base orthonormée $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$,soient les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$. Monter que $\vec{u}$ et $\vec{v}$sont orthogonaux si et seulement si ; $\boldsymbol{xx' + yy' = 0}$.

Exemple 9 :

Dans une base orthonormée $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ de $\mathcal{V}$ on donne les deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} -12 \\ -6 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 5 \\ -10 \end{pmatrix}$. Montrer que $\vec{u} \perp \vec{v}$.

Réponse :

$\vec{u} \perp \vec{v}$si $xx' + yy' = 0$. $-12 \times 5 + (-6) \times (-10) = -60 + 60 = 0$. Donc, $\vec{u} \perp \vec{v}$.

5. Droites :

a) Vecteur directeur :

Définition :

Soit une droite (D), tout vecteur non nul ayant la direction de (D), est un vecteur directeur de (D).

b)Droites parallèles, droites perpendiculaires :

Soient deux droites (D) et (D') de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$et $\vec{v}$.

$(D)//(D')$ si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

$(D) \perp (D')$ si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

c) Point appartenant à une droite :

Soit (D)une droite de vecteur directeur $\vec{u}$ et soit A un point de (D), $M \in (D)$ si, et seulement si $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires. Soient A et B deux points distincts du plan ;

$M \in [AB] \iff \overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}\ ; k \in [0, 1]$.

$M \in (AB) \iff \overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}\ ; k \in \mathbb{R}$.

$M \in [AB) \iff \overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}\ ; k \in \mathbb{R}_+$.

d)Equation cartésienne d'une droite dans un repère :

(D) est une droite si, et seulement si, elle admet une équation cartésienne dans un repère $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$, de la forme :$ax + by + c = 0$; avec a, b et c des réels tels que $(a, b) \neq (0, 0)$.

Exemple 10 :

Dans un repère $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$, soit la droite (D) passant par le point $A(6, -7)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$. Donner une équation cartésienne de (D).

Réponse :

$M(x, y)$ est un point de (D), signifie que $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x - 6 \\ y + 7 \end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ sont colinéaires ; équivaut à

$$\det\left(\overrightarrow{AM}, \vec{u}\right) = \begin{vmatrix} x - 6 & -3 \\ y + 7 & 4 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 4(x - 6) + 3(y + 7) = 0 \Leftrightarrow 4x - 24 + 3y + 21 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x + 3y - 3 = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{(D): 4x + 3y - 3 = 0}.$$

Exemple 11 :
Dans un repère $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$, soit la droite (D) passant par les points $A(5,7)$ et $B(-6,9)$.
Donner une équation cartésienne de (D).
Réponse :

$M(x,y)$ est un point général de (D), signifie que ; $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-5\\y-7\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-11\\2\end{pmatrix}$ sont colinéaires

$$\Longrightarrow 2(x-5)+11(y-7)=0 \Longrightarrow 2x-10+11y-77=0 \Longrightarrow \boldsymbol{D}\colon \boldsymbol{2x+11y-87=0}.$$

e) Coordonnées du vecteur directeur d'une droite à partir de son équation cartésienne :

La droite (D) : $ax+by+c=0$ a pour vecteur directeur ; $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$.

Exemple 12 :

La droite (Δ) : $5x+6y-1=0$ a pour vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-6\\5\end{pmatrix}$.

f) Forme réduite de l'équation d'une droite :

Activité 6 :
Dans un repère orthonormé$(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$, montrer que l'équation réduite d'une droite non parallèle à l'axe des ordonnées est de la forme ;(D) : $y=mx+p$.

- m est appelé coefficient directeur de (D).
- p est appelé ordonnée à l'origine.
- $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (D).

g) Propriété :

Dans un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$, soit deux droites d'équations réduites ; $\begin{cases}(D): y=mx+p\\(D'): y=m'x+p'\end{cases}$

●$(D)//(D')$ si, et seulement si ; $m=m'$.
●$(D)\perp(D')$ si, et seulement si ; $m.m'=-1$.

Exemple 13 :
Dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$, on donne les équations cartésiennes des deux droites ; (D): $4x-2y+6=0$ et (D'): $x+2y-4=0$.
1°) Donner les formes réduites des équations des deux droites ;
2°) Donner les coefficients directeurs de ces deux droites ;
3°) En déduire les positions relatives des deux droites ;
4°) Soit (D'') une troisième droite d'équation réduite : (D'') : $y=-\frac{1}{2}x-5$. Montrer que $(D')//(D'')$;
5°) Dans le repère $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$, représenter cette situation.
Réponse :

1°)(D): $4x-2y+6=0 \Longrightarrow 2y=4x+6 \Longrightarrow y=\frac{4x+6}{2}=\frac{4x}{2}+\frac{6}{2}=2x+3 \Longrightarrow \boldsymbol{(D)\colon y=2x+3}$

$$(D')\colon x+2y-4=0 \Longrightarrow 2y=-x+4 \Longrightarrow y=\frac{-x+4}{2}=\frac{-x}{2}+\frac{4}{2}=-\frac{1}{2}x+2 \Longrightarrow \boldsymbol{(D')\colon y=-\frac{1}{2}x+2}$$

2°) Les coefficients directeurs de (D) et (D') sont :$\boldsymbol{m=2}$; $\boldsymbol{m'=-\frac{1}{2}}$

3°)$On\ a$; $m\times m'=2\times-\frac{1}{2}=-1 \Longrightarrow (D)\perp(D')$

4°)(D'') : $y=-\frac{1}{2}x-5 \Longrightarrow m''=-\frac{1}{2} \Longrightarrow \boldsymbol{m'=m''=-\frac{1}{2}} \Longrightarrow \boldsymbol{(D')//(D'')}$.

5°) Représentation de la situation

La droite (D) a pour vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ et passe par le point $A(0,3)$.

La droite (D') a pour vecteur directeur $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-0{,}5\end{pmatrix}$ et passe par le point $B(0,2)$.

La droite (D'') a pour vecteur directeur $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-0{,}5\end{pmatrix}$ et passe par le point $C(0,-5)$.

Exemple 14 :

Le plan est rapporté à un repère orthonormal$(O\ ;\ \overrightarrow{OI}\ ;\ \overrightarrow{OJ})$.

1°) Déterminer l'ensemble E dans chacun des cas suivants :

a) E d'équation cartésienne $x-a=0$; $a\in\mathbb{R}$.
b) E d'équation cartésienne $y-a=0$; $a\in\mathbb{R}$.
c) E d'équation cartésienne $y^2-x^2=0$;
d) E d'équation cartésienne $x^2+y^2-2x+4y+1=0$.

2°) a) Déterminer une équation réduite de la droite (IJ).

b) Soit D la droite d'équation $y = x$. Montrer que D est la médiatrice de [IJ].

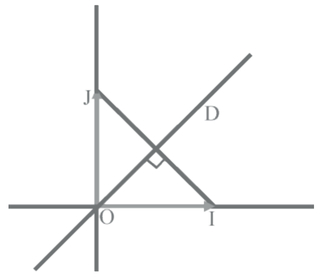
Réponse :

1) a) $x - a = 0 \Leftrightarrow x = a$. Donc, E est la droite parallèle à (OJ) passant par le point de coordonnées $(a\ ;\ 0)$.

b) $y - a = 0 \Leftrightarrow y = a$. Donc, E est la droite parallèle à (OI) passant par le point de coordonnées $(0\ ;\ a)$.

c) $y^2 - x^2 = 0 \Leftrightarrow (y - x)(y + x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y - x = 0 \\ \text{ou} \\ y + x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ \text{ou} \\ y = -x \end{cases}$

Donc ; E est la réunion des droites D_1 d'équation $y = x$ et D_2 d'équation $y = -x$



e) $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 2x) + (y^2 + 4y) + 1 = 0$

$\Leftrightarrow [(x-1)^2 - 1] + [(y+2)^2 - 4] + 1 = 0 \Leftrightarrow [(x-1)^2 + (y+2)^2 = 2^2$.

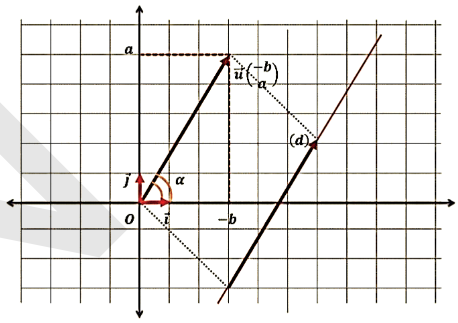
Donc, E est le cercle d centre le point $\Omega(1\ ;\ -2)$ et de rayon 2.

2) a) on a $I(1\ ;\ 0)$ et $J(0\ ;1)$.

$(IJ) : y = mx + p$; avec $\begin{cases} p = 1 \\ m + p = 0 \end{cases}$. Donc, $p = 1$ et $m = -1$. Donc ; $(IJ) : y = -x+1$.

b) $D : y = x$. on a $(1)(-1) = -1$, donc $D \perp (IJ)$.Or, OI = OJ et $O \in D$. Donc, D est la médiatrice de [IJ].

h) Interprétation géométrique du coefficient directeur :



Le coefficient directeur d'une droite (D) est la valeur de la tangente de l'angle α que fait cette droite avec l'axe des abscisses.

(d): $ax + by + c = 0$; $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (d)

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{a}{\|\vec{u}\|}}{\frac{-b}{\|\vec{u}\|}} = -\frac{a}{b}$$

i) Représentation paramétrique d'une droite :

Dans un repère orthonormé $(O;\ \vec{i}, \vec{j})$, la droite (D) passant par le point $A(x_0, y_0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Le point $M(x, y)$ appartient à (D) si, et seulement s'il existe un réel t tel que ;

$$\overrightarrow{AM} = t.\vec{u} \Rightarrow \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} at \\ bt \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x - x_0 = at \\ y - y_0 = bt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}.$$

Le système $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$ est appelé une représentation paramétrique de la droite (D) passant par le point $A(x_0, y_0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

Exemple 15 :

Soit la droite $D(A;\ \vec{u})$ tels que $A(-5, 7)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$, donner une représentation paramétrique de D.

Réponse :

Soit le paramètre t on a la représentation paramétrique de D: $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases} \Rightarrow D$: $\begin{cases} x = -5 + 2t \\ y = 7 - 4t \end{cases}$

j) Le vecteur normal :

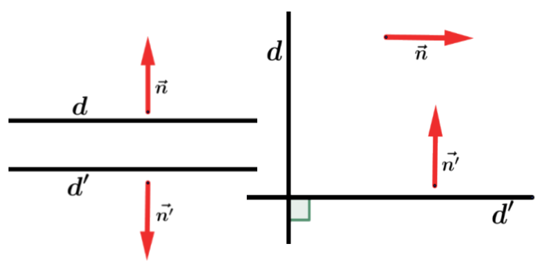
Définition :

Soit une droite (D). On appelle un vecteur normal à (D) tout vecteur non nul dont la direction est perpendiculaire à (D).

❖ **Propriété :**

Soit (D) et (D') deux droites de vecteurs normaux respectifs $\vec{n}$ et $\vec{n'}$;

- $(D)//(D')$ si, et seulement si, $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ sont colinéaires.
- $(D) \perp (D')$ si, et seulement si, $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ sont orthogonaux.



❖ **Propriété 2 :**

Le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$, soit (D) une droite de vecteur normal $\vec{n}$, et soit A un point de (D), alors ; un point $M \in (D)$ si, et seulement si, $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux.

Remarque 3 :

Le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$, la droite (D) : $ax + by + c = 0$ a pour vecteur normal $\vec{n}\binom{a}{b}$.

Exemple16 :

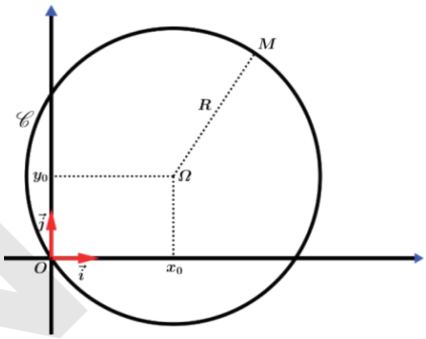
Dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$, soit les droites d'équations cartésiennes :

$(D) : -4x - 7y + 3 = 0$; $(D') :\ 12x + 21y - 5 = 0$; $(D'') :\ 7x - 4y + 1 = 0$.

1°) Donner les vecteurs $\vec{n},\ \overrightarrow{n'}\ et\ \overrightarrow{n''}$ normaux respectivement aux droites $(D), (D')\ et\ (D'')$

2°) A partir de ces vecteurs normaux montrer que $(D)//(D')$ et que $(D) \perp (D'')$.

Réponse :



$\vec{n}\binom{-4}{-7}$; $\overrightarrow{n'}\binom{12}{21}\ et\ \overrightarrow{n''}\binom{7}{-4}$

On a ; $(-4) \times 21 - (-7) \times 12 = 84 - 84 = 0 \Longrightarrow \vec{n};\ \overrightarrow{n'}$ sont colinéaires, donc $(D)//(D')$.

On a ; $(-4) \times 7 + (-7) \times (-4) = -28 + 28 = 0 \Longrightarrow \vec{n};\ \overrightarrow{n''}$ sont de directions orthogonales, donc $(D) \perp (D'')$.

6. Le cercle dans le plan

Le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$. Soit $\Omega(x_0, y_0)$ un point donné, et soit R un nombre réel positif donné.

Une équation cartésienne de cercle $\mathcal{C}$ de centre Ω et de rayon Rest :$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$.

✧ $\mathcal{C}$: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$ est le cercle de centre $\Omega(x_0, y_0)$ et de rayon R.

✧ $\mathcal{C}$: $x^2 + y^2 = R^2$ est le cercle de centre l'origine $O(0,0)$ et de rayon R.

✧ $\mathcal{C}$: $x^2 + y^2 = 1$ est le cercle de centre l'origine $O(0,0)$ et de rayon 1.

Exemple 17 :

1) Soit $(\vec{i};\vec{j})$ une base de $\mathcal{V}$.

Soit $\vec{u} = 2\vec{i}$ et $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j}$.

a) Déterminer les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans la base $(\vec{i}\ ;\ \vec{j})$.

b)Calculer det($\vec{u}$; $\vec{v}$) dans la base ($\vec{i}$; $\vec{j}$). ($\vec{u}$; $\vec{v}$) est-elle une base de $\mathcal{V}$? Justifier.

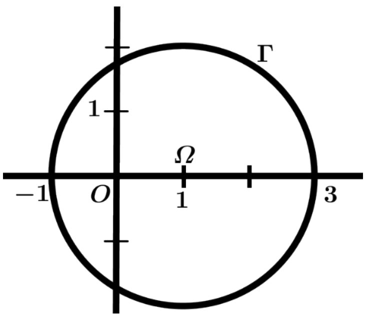
2) On suppose que $(\vec{i}\ ;\ \vec{j})$ est une base orthonormal et $\mathcal{V}$ le plan rapporté au repère orthonormal $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$.

Soit Γ l'ensemble des points M(x ; y) du plan tels que : $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$.

a) Déterminer et construire l'ensemble Γ.

b) Donner une équation cartésienne de Γ dans le repère orthonormal(Ω ; $\vec{i}\,;\vec{j}$) ; où Ω(1 ; 0) dans le repère $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$.

Réponse :



1) a) $\vec{u} = 2\vec{i} = 2\vec{i} + 0\vec{j}$; donc $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$; $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j} = 1\vec{i} + 1\vec{j}$; donc $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

b) $\det(\vec{u}\ ;\ \vec{v}) = \begin{vmatrix}2 & 1\\0 & 1\end{vmatrix}$ = 2(1) –(0) (1) = 2. Comme $\det(\vec{u}\ ;\ \vec{v}) \neq 0$;

donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaire, par conséquent, $(\vec{u}\ ;\ \vec{v})$ est une base de $\mathcal{V}$.

2) a)$x^2+y^2-2x-3=0 \Leftrightarrow (x^2-2x)\ +y^2-3=0 \Leftrightarrow (x-1)^2-\ 1+y^2-3=0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2+y^2=4 \Leftrightarrow (x-1)^2+y^2=2^2$.

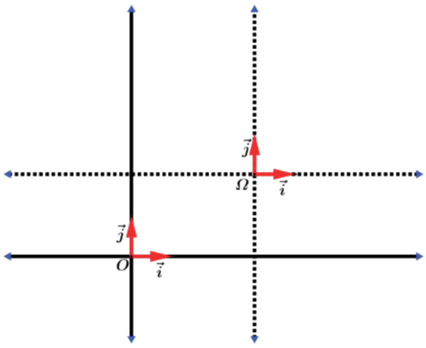
Donc, Γ est le cercle de centre le point $\Omega(1\ ;\ 0)$ et d e rayon 2.

b)$\Gamma : (x-1)^2+(y-0)^2=4$.

$M(x\ ;\ y)$ dans $\left(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\right)$; $M(X\ ;Y)$ dans $(\Omega\ ;\ \vec{i}\ ;\vec{j})$; donc $\begin{cases} X=x-1 \\ Y=y \end{cases}$;

d'où, l'équation cartésienne de Γ dans le repère $(\Omega\ ;\ \vec{i}\ ;\vec{j})$ est $X^2+Y^2=4$.

7. Changement de repère :



a) Changement *de l'origine seulement* :

Dans ce repère $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$ de $\mathcal{P}$, soit $\Omega(x_0,y_0)$ un point donné de $\mathcal{P}$.

$M(x,y)$ dans $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath}) \Leftrightarrow\ M(X,Y)$ dans $(\Omega;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$ avec ;

$\begin{cases} X=x-x_0 \\ Y=y-y_0 \end{cases}$. $En\ effet\ ;\ \overrightarrow{\Omega M}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{O\Omega}$.

b) Changement de l'origine et de la base :

Activité 7 :

Soit un repère $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$ de $\mathcal{P}$, et soit deux vecteurs non nuls et non colinéaires $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}$, et un point $\Omega(x_0,y_0)$ de $\mathcal{P}$. Par définition, le triplet $(\Omega;\ \vec{u},\vec{v})$ constitue une base de $\mathcal{P}$.

Dans le repère $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$, on donne le point $A(x_A,y_A)$, montrer que les coordonnées de A dans le nouveau repère $(\Omega;\ \vec{u},\vec{v})$ sont données par la relation ; $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} \dfrac{(x_A-x_0)b'+(y_0-y_A)a'}{det(\vec{u};\vec{v})} \\ \dfrac{(x_0-x_A)b+(y_A-y_0)a}{det(\vec{u};\vec{v})} \end{pmatrix}$

Exemple 18 :

Dans un repère $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$ du plan $\mathcal{P}$, on donne les deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ et les deux points $A(-3,7)$ et $B(-8,-2)$.

1°) Montrer que $(\vec{u},\vec{v})$ constitue une base de $\mathcal{P}$;

2°) Donner les coordonnées de $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ dans la base $(\vec{u},\vec{v})$;

3°) Calculer les coordonnées du point A dans le repère $(B\ ;\ \vec{u},\vec{v})$;

4°) Calculer les coordonnées du point B dans le repère $(A\ ;\ \vec{u},\vec{v})$.

Réponse :

1°) Pour montrer que $(\vec{u},\vec{v})$ est une base, on a ; $D\ et\ (\vec{u};\ \vec{v})=\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ -5 & 3 \end{vmatrix}=6\times 3-(-5)\times 4=38$

$\Longrightarrow Det(\vec{u};\ \vec{v})\neq 0 \Longrightarrow \vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, donc, $(\vec{u}\ ;\ \vec{v})$ constitue une base du plan.

2°) Coordonnées de $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ dans la base $(\vec{u},\vec{v})$: $\begin{cases} \vec{\imath}=\frac{3}{38}\vec{u}+\frac{5}{38}\vec{v} \Longrightarrow \vec{\imath}\begin{pmatrix} \frac{3}{38} \\ \frac{5}{38} \end{pmatrix} \\ \vec{\jmath}=-\frac{4}{38}\vec{u}+\frac{6}{38}\vec{v} \Longrightarrow \vec{\jmath}\begin{pmatrix} -\frac{4}{38} \\ \frac{6}{38} \end{pmatrix} \end{cases}$

3°) Coordonnées de A dans le repère $(B;\ \vec{u},\vec{v})$:

$$A\begin{pmatrix}\frac{(x_A-x_B)b'+(y_B-y_A)a'}{38}\\ \frac{(x_B-x_A)b+(y_A-y_B)a}{38}\end{pmatrix} \Rightarrow A\begin{pmatrix}\frac{3(-3+8)+4(-2-7)}{38}\\ \frac{-5(-8+3)+6(7+2)}{38}\end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{A}\left(-\frac{\mathbf{21}}{\mathbf{38}};\frac{\mathbf{79}}{\mathbf{38}}\right)$$

4°) Coordonnées de B dans le repère $(A\,;\,\vec{u},\vec{v})$:

$$B\begin{pmatrix}\frac{(x_B-x_A)b'+(y_A-y_B)a'}{38}\\ \frac{(x_A-x_B)b+(y_B-y_A)a}{38}\end{pmatrix} \Rightarrow B\begin{pmatrix}\frac{3(-8+3)+4(7+2)}{38}\\ \frac{-5(-3+8)+6(-2-7)}{38}\end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{B}\left(\frac{\mathbf{21}}{\mathbf{38}};-\frac{\mathbf{79}}{\mathbf{38}}\right)$$

Exemple 18 :

ABCD est un carré de centre O. M un point du segment [BD] qui se projette orthogonalement en P sur (AB) et Q sur (AD). On se propose de montrer que le triangle OPQ est isocèle rectangle en O.

Le plan est rapporté au repère orthonormal $(\mathrm{A}\,;\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}\,;\,\overrightarrow{\mathrm{AD}})$ et on désigne par x l'abscisse du point M.

1°) Exprimer en fonction de x l'ordonnée du point M. En déduire les coordonnées des points P et Q.

2°) a) Donner les coordonnés du point O.

b) Calculer OP^2 ; OQ^2 et PQ^2 ; conclure.

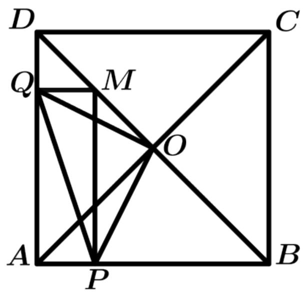
Réponse :

1) On a M $\in$(BD). Or B(1 ; 0) et D(0 ; 1). Donc : l'équation réduite de (BD) est $y=-x+1$.

Donc : l'ordonnée du point M est $1-x$. Or ; les points P et M ont la même abscisse

et les points Q et M ont la même ordonnée. Donc ; P(x ; 0) et P(0 ; $1-x$).

2) a)$\mathrm{O}\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ (O milieu de [BD]).



b)$\mathrm{OP}^2=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(0-\frac{1}{2}\right)^2=x^2-x+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=x^2-x+\frac{1}{2}.$

$\mathrm{OQ}^2=\left(0-\frac{1}{2}\right)^2+\left(1-x-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{2}-x\right)^2=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-x+x^2$

$=x^2-x+\frac{1}{2}.$

$\mathrm{PQ}^2=(x-0)^2+(0-1+x)^2=x^2+(x-1)^2=x^2+x^2-2x+1=x^2-2x+1.$

Comme $\mathrm{OP}^2=\mathrm{OQ}^2$ et $\mathrm{OP}^2+\mathrm{OQ}^2=\mathrm{PQ}^2$. Donc, le triangle OPQ est isocèle rectangle en O.

Exercices Généraux

1. Dans une base orthonormée $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ de $\mathcal{V}$ on donne les deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}-12\\-6\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}5\\-10\end{pmatrix}$.
Montrer que $\vec{u}\perp\vec{v}$.

2. Dans un repère $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$, soit la droite (D) passant par le point $A(6,-7)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$.
Donner une équation cartésienne de (D).

3. Dans un repère $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$, soit la droite (D) passant par les points $A(5,7)$ *et* $B(-6,9)$.
Donner une équation cartésienne de (D).

4. soit la droite $(\Delta): 5x+6y-1=0$.
Donner son vecteur directeur.

5. Dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$, on donne les équations cartésiennes des deux droites ;
$(D): 4x-2y+6=0$; $(D'): x+2y-4=0$
1°) Donner les formes réduites des équations des deux droites ;
2°) Donner les coefficients directeurs de ces deux droites ;
3°) En déduire les positions relatives des deux droites ;
4°) Soit (D'') une troisième droite d'équation réduite :
$(D''): y=-\frac{1}{2}x-5$. Montrer que $(D')//(D'')$;
5°) Dans le repère $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$, représenter cette situation.

6. Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O;\ \overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$.
1°) Déterminer l'ensemble E dans chacun des cas suivants :
a) E d'équation cartésienne $x-a=0$; $a\in\mathbb{R}$.
b) E d'équation cartésienne $y-a=0$; $a\in\mathbb{R}$.
c) E d'équation cartésienne $y^2-x^2=0$;
d) E d'équation cartésienne $x^2+y^2-2x+4y+1=0$
2°)a) Déterminer une équation réduite de la droite (IJ).
b) Soit D la droite d'équation $y = x$. Montrer que D est la médiatrice de [IJ].

7. Soit la droite $D(A;\ \vec{u})$ tels que $A(-5,7)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix}$, donner une représentation paramétrique de D.

8. Dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$, soit les droites d'équations cartésiennes :
$(D): -4x-7y+3=0$; $(D'): 12x+21y-5=0$;
$(D''): 7x-4y+1=0$.
1°) Donner les vecteurs $\vec{n}$, $\vec{n'}$ *et* $\vec{n''}$ normaux respectivement aux droites (D), (D') *et* (D'')
2°) A partir de ces vecteurs normaux montrer que $(D)//(D')$ et que $(D)\perp(D'')$.

9.1°) Soit $\left(\vec{i}\ ;\ \vec{j}\right)$ une base de $\mathcal{V}$. Soit $\vec{u}=2\vec{i}$ et $\vec{v}=\vec{i}+\vec{j}$.

a) Déterminer les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans la base $\left(\vec{i}\ ;\ \vec{j}\right)$.

b) calculer $\det(\vec{u}\ ;\ \vec{v})$ dans la base $\left(\vec{i}\ ;\ \vec{j}\right)$.

$(\vec{u}\ ;\ \vec{v})$ est-elle une base de $\mathcal{V}$? Justifier.

2°) On suppose que $\left(\vec{i}\ ;\ \vec{j}\right)$ est une base orthonormal et

$\mathcal{V}$ le plan rapporté au repère orthonormal $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$.

Soit Γ l'ensemble des points $M(x\ ;\ y)$ du plan tels que :
$x^2+y^2-2x-3=0$.
a) Déterminer et construire l'ensemble Γ.
b) Donner une équation cartésienne de Γ dans le repère orthonormal $\left(\Omega;\ \vec{i}\ ;\vec{j}\right)$; où $\Omega(1\ ;\ 0)$ dans le repère $\left(O;\ \vec{i}\ ;\vec{j}\right)$.

10. Dans un repère $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$ du plan $\mathcal{P}$, on donne les deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}6\\-5\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$ et les deux points $A(-3,7)$ et $B(-8,-2)$.
1°) Montrer que $(\vec{u},\vec{v})$ constituent une base de $\mathcal{P}$;
2°) Donner les coordonnées de $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ dans la base $(\vec{u},\vec{v})$;
3° Calculer les coordonnées du point A dans le repère $(B\ ;\ \vec{u},\vec{v})$;
4° Calculer les coordonnées du point B dans le repère $(A;\ \vec{u},\vec{v})$.

11. Soit ABC et A'B'C' deux triangles.
1°) Démontrer que ces deux triangles ont même centre de gravité si, et seulement si, $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=\vec{0}$.
2°) ABC un triangle de centre de gravité G. A' ; B' ; C' les milieux respectifs de [BC] ; [CA] ;[AB].
Montrer que G est le centre de gravité du triangle A'B'C'.

12. ABC un triangle. I ; J ; K les points tels que :
$\overrightarrow{AI}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BJ}=\frac{2}{5}\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{CK}=\frac{2}{5}\overrightarrow{CA}$.
1°) Faire une figure.
2°) a) Montrer que : $\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{BJ}+\overrightarrow{CK}=\vec{0}$.
b) En déduire que les deux triangles ABC et IJK ont le même centre de gravité.

13. ABC un triangle tel que $AB = 5$; $AC = 6$.
D est le symétrique de A par rapport au milieu de [BC].
1°) a) Quelle est la nature du quadrilatère ABDC ?
b) Montrer que $AD\leq 11$.
2°) Soit E le symétrique de C par rapport à D.
Montrer que $BE\leq 11$ *et* $AE\leq 16$.

14. Soit $\left(\vec{i}\ ;\ \vec{j}\right)$ une base de $\mathcal{V}$.

1°) Montrer que $(\vec{i}+\vec{j};\ \vec{j})$;$(2\vec{i};2\vec{j})$;$(\vec{i}-\vec{j}\ ;\ \vec{i}+\vec{j})$;$(\vec{j}\ ;-\vec{j})$ sont des bases.

2°) Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}a'\\b'\end{pmatrix}$ deux vecteurs donnés par leurs coordonnées dans base $\left(\vec{i}\ ;\ \vec{j}\right)$

a) Calculer les coordonnées de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans chacune des bases $(\vec{i}+\vec{j};\ \vec{j})$;$(2\vec{i};2\vec{j})$;$(\vec{i}-\vec{j}\ ;\ \vec{i}+\vec{j})$;$(\vec{j}\ ;-\vec{j})$.

b) Calculer $\det(\vec{u}\ ;\ \vec{v})$ dans chacune des bases.

c) Montrer que si $\det(\vec{u}\ ;\ \vec{v})=0$ dans l'une de ces bases alors, $\det(\vec{u}\ ;\ \vec{v})=0$ dans les autres bases.

15. Soit $(O\ ;\vec{i}\ ;\ \vec{j})$ un repère du plan. Soit D la droite d'équation : $2x-3y+1=0$.
1°) Les points suivants appartiennent- ils à D.
$A(1;1)$; $B\left(\frac{1}{2};\frac{-1}{3}\right)$; $C\left(0;\frac{1}{3}\right)$; $D(-1;3)$.
2°) Donner :

a) $\vec{u}$ vecteur directeur de D.
b) l'équation réduite de D.
c) une droite D' parallèle à D.

16. Le plan est muni d'un repère orthogonal $\left(O;\ \vec{i}\ ;\vec{j}\right)$.
Soit D la droite d'équation y = 3x -2.
1°) Donner :
a) le coefficient directeur de D.
b) un vecteur directeur de D.
2°) Donner :
a) une équation de la droite D' parallèle à D et passant par le point A(0 ; 4).
b) une équation de la droite D'' perpendiculaire à D et passant par le point B(0 ; 1)..
3°) Tracer D ; D' et D''.

17. Le plan est muni d'un repère orthogonal $\left(O;\ \vec{i}\ ;\vec{j}\right)$.
1°) Placer les points A(3 ; 2) ; B(0 ; 3) ; C(-2 ; 0).
2°) Déterminer les coordonnées du point D tel que ABCD est un parallélogramme, puis donner les coordonnées de son centre I.
3°) Soit G et H les centres de gravités respectifs des triangles ABC et ACD.
a°) Déterminer les coordonnées de G et H.
b) Montrer que I est milieu de [GH].

18. Le plan est muni d'un repère $\left(O\ ;\ \vec{i}\ ;\vec{j}\right)$. A ; B ; C trois points de coordonnées respectives :
(a_1 ; a_2) ; (b_1 ; b_2) ; (c_1 ; c_2).
I ; J ; K sont les milieux respectifs de [AB] ; [BC] ; [CA].
1°) Exprimer les coordonnées des points I ; J ; K à l'aide des réels a_1 ; b_1 ; c_1 ; a_2 ; b_2 ; c_2.
2°) Démontrer que les deux triangles ABC et IJK ont le même centre de gravité.

19. Le plan est rapporté à un repère orthogonal $\left(O;\ \vec{i}\ ;\vec{j}\right)$.
1°) Placer les points suivants :
$A(2;0)$; $B\left(-1;\sqrt{3}\right)$ et $C\left(-1;-\sqrt{3}\right)$.
2°) Démontrer que le triangle ABC est équilatéral de centre O.

20. ABCD un carré. BCE et CDF sont deux triangles équilatéraux respectivement à l'intérieur et à l'extérieur de ABCD.
On se propose de montrer que les points A, E , F sont alignés.
On considère le repère (B ; C ; A).
1°) Quelles sont les coordonnées des points A ; B ; C ; D ?
2°) Calculer les coordonnées des points E et F.
3°) Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AF}$.
.Calcule det $\left(\overrightarrow{AE}\ ;\ \overrightarrow{AF}\right)$ et conclus.

21. Soit $\left(O;\ \vec{i}\ ;\vec{j}\right)$ un repère du plan. Déterminer les équations des droites suivantes puis représente ces droites.
1°) la droite D_1 est la droite (AB) avec A(1 ; 2) ; B(-2 ; 1).
2°) la droite D_2 est la droite (AC) avec A(1 ; 2) ; C(1 ; -2).
3°) la droite D_3 passe par A(1 ; 2) et est dirigée par $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$
4°) la droite D_4 passe par $A(1;2)$ et est dirigée par $\vec{i}$.
5°) la droite D_5 passe par $A(1;2)$ et est dirigée par $\vec{j}$.

22. La droite D a pour équation 2x + 3y -1 = 0 dans un repère $\left(O;\ \vec{i}\ ;\vec{j}\right)$. Donner, pour D, les précisions suivantes :
a) un vecteur directeur
b) un vecteur directeur dont la première coordonnée est 1.
c) un vecteur directeur dont la seconde coordonnée est -3.
d) deux points
e) l'équation réduite.
f) le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine.

23. Soit $\left(O;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\right)$ un repère orthonormal du plan, et les points $A(-3\ ;1)$; $B(-2;-2)$ et $C\left(5;\frac{1}{2}\right)$.
Soit D le quatrième sommet du parallélogramme ABCD.
Déterminer les coordonnées de D et faire la figure.
Le parallélogramme ABCD est-il un rectangle.
Vérifier l'égalité $2(AB^2 + BC^2) = AC^2 + BD^2$.
Déterminer une équation du cercle de diamètre [AB].
Détermine et construis l'ensemble Γ des points M(x ; y) tels que : $x^2 + y^2 - 10x - y + 25 = 0$.

24. Le plan est rapporté à un repère $\left(O;\ \vec{i}\ ;\vec{j}\right)$.
Soit D_m la droite d'équation $y = x + 1 - m^2$ où $m \in \mathbb{R}$.
Soit M_n le point de coordonnées (2^n ; $2^{2+n}\sqrt{2}$) ; où $n \in \mathbb{N}$.
1°) a) que peut-on remarquer sur la direction de D_m ?
b) Déterminer les valeurs de m, pour lesquelles D_m passe par O.
2°) Montrer que le point M_n appartient à une droite fixe passant par O.

251°) Soit $\left(\vec{i}\ ;\ \vec{j}\right)$ une base de $\mathcal{V}$.
Soit $\vec{u} = 3\vec{i}$ et $\vec{v} = \vec{i} - 2\vec{j}$.
a) Déterminer les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans la base $\left(\vec{i}\ ;\ \vec{j}\right)$.
b) calculer det($\vec{u}$; $\vec{v}$) dans la base $\left(\vec{i}\ ;\ \vec{j}\right)$.
($\vec{u}$; $\vec{v}$) est-elle une base de $\mathcal{V}$? Justifier.

26. Soit $\left(O;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\right)$ un repère du plan. Déterminer des représentations paramétriques des droites suivantes puis représente ces droites.
1°) la droite D_1 est la droite (AB) avec A(1 ; 2) ; B(-2 ; 1).
2°) la droite D_2 est la droite (AC) avec A(1 ; 2) ; C(1 ; -2).
3°) la droite D_3 passe par A(1 ; 2) et est dirigée par $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$

Chapitre 5 : EQUATIONS ET INEQUATIONS

1.Notion d'équation :

Définition :

Une équation est une relation d'égalité qui existe entre deux expressions algébriques en fonction de certaines valeurs de variables (*inconnues*)

La résolution d'une équation est la détermination de l'ensemble des solutions (*ici nombres réels*) qui vérifient cette équation.

2. Equations du premier degré à une inconnue :

a. Forme générale :

Définition :

On appelle équation du premier degré à une inconnue, toute équation dont la forme générale est :

$ax + b = 0$ (*Où b est un réel et a un réel différend de* 0, *et x est l'inconnue*).

b. Méthode de résolution :

$$ax + b = 0 \Leftrightarrow ax = -b \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = -\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}} \ (a \neq 0).$$

Si	alors l'ensemble des solutions est
$a = 0$ et $b = 0$	$\mathbb{R}$
$a = 0$ et $b \neq 0$	$\emptyset$
$a \neq 0$	$\left\{-\frac{b}{a}\right\}$

Remarque 1 :

Une équation du premier degré peut également se présenter sous différentes écritures qui nécessitent d'être développées et simplifiée avant de se ramener à l'une des formes générales :$ax + b = 0$ ou; $ax = b$*(avec* $a \neq 0$*)*.

Exemple 1 :

Actuellement, un père a 35 ans et son fils 7 ans

a) Dans combien d'années l'âge du père sera-t-il le double de celui de son fils ?

b) Sera-t-il possible que l'âge du père soit égal à 8 fois celui de son fils ?

Réponse :

On désigne par x le nombre d'années, cherché ($x \in \mathbb{N}$) ; $35 + x$ et $7 + x$ seront les âges respectifs du père et du fils après x années.

a)$35 + x = 2(7 + x) \Leftrightarrow 35 + x = 14 + 2x \Leftrightarrow 2x - x = 35 - 14 \Leftrightarrow x = 21$.

Donc au bout de 21 ans l'âge du père sera le double de celui de son fils.

$$35 + x = 8(7 + x) \Leftrightarrow 35 + x = 56 + 8x \Leftrightarrow 8x - x = 35 - 56 \Leftrightarrow 7x = -21 \Leftrightarrow x = \frac{-21}{7}$$

$x = -3$ (à rejeter car $x \in \mathbb{N}$)

Donc, il est impossible que l'âge du père soit égale à 8 fois celui de son fils.

Exemple 2 :

Résoudre les équations suivantes :

$(\boldsymbol{A}) : \ 2x + 3 = 5 - 4x$; $(\boldsymbol{B}): \ 5(3x - 2) = 7(6x + 1)$; $(\boldsymbol{C}): \ 3(4 - 5x) + 12(2x + 3) = 7(1 - 3x) - 6(x + 2)$.

Réponse :

$$(\boldsymbol{A}): 2x + 3 = 5 - 4x \Rightarrow 2x + 4x = 5 - 3 \Rightarrow 6x = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \Rightarrow S = \left\{\frac{1}{3}\right\}$$

$$(\boldsymbol{B}): 5(3x - 2) = 7(6x + 1) \Rightarrow 15x - 10 = 42x + 7 \Rightarrow 15x - 42x = 10 + 7 \Rightarrow -27x = 17 \Rightarrow x = \frac{17}{-27} \Rightarrow S = \left\{-\frac{17}{27}\right\}$$

$$(\boldsymbol{C}): 3(4 - 5x) + 12(2x + 3) = 7(1 - 3x) - 6(x + 2) \Rightarrow 12 - 15x + 24x + 36 = 7 - 21x - 6x - 1$$

$$\Rightarrow -15x + 24x + 21x + 6x = 7 - 12 - 12 - 36 \Rightarrow (-15 + 24 + 21 + 6)x = -53$$

$$\Rightarrow -36x = -53 \Rightarrow x = \frac{-53}{-36} = \frac{53}{36} \Rightarrow \boldsymbol{S} = \left\{\frac{\boldsymbol{53}}{\boldsymbol{36}}\right\}$$

3. Equations du second degré à une inconnue : Equations-trinômes

a. Forme générale :

Définition :

On appelle équation du deuxième degré à une inconnue, toute équation dont la forme générale est :
$ax^2 + bx + c = 0$ (*où $a \neq 0$, b et c sont des réels et x est l'inconnue*)

b. Cas particuliers :

Une équation du deuxième degré peut être aussi de la forme ;
$ax^2 = 0$ (*Lorsque* $b = 0$ *et* $c = 0$) ; $ax^2 + c = 0$ (*Lorsque* $b = 0$)ou$ax^2 + bx = 0$ (*Lorsque* $c = 0$)

c. Méthodes de résolution :

Les cas particuliers :

- **L' équation de la forme $ax^2 = 0$ ($a \neq 0$)**

Elle a une seule solution qui est 0, quelle que soit la valeur de a.

- **L'équation de la forme $ax^2 + c = 0$ ($a \neq 0, c \neq 0$)**

Elle a :Deux solutions : $\begin{cases} x_1 = \sqrt{\frac{-c}{a}} \\ \quad et \\ x_2 = -\sqrt{\frac{-c}{a}} \end{cases}$ lorsque a et c sont de signes contraires

Elle n'a pas de solution lorsque a et c ont le même signe.

- **L' équation de la forme $ax^2 + bx = 0$($a \neq 0, b \neq 0$)**

$ax^2 + bx = 0 \Leftrightarrow x(ax + b) = 0 \Rightarrow$

$\begin{cases} x_1 = 0 \\ \quad et \\ x_2 = \frac{-b}{a} \end{cases}$

Plus généralement, l'équation $x^2 = k$ où k est un réel donné.

Si	alors l'ensemble des solutions est
$k < 0$	ϕ
$k = 0$	$\{0\}$
$k > 0$	$\{-\sqrt{k}; \sqrt{k}\}$

- **Le cas général $ax^2 + bx + c = 0$**

Pour résoudre cette forme d'équation, on utilise la méthode générale du discriminant Δ qui peut être aussi appliquée aux cas particuliers précédents. Le discriminant de cette équation est soit le nombre Δ, soit le nombre Δ'tel que $\Delta = b^2 - 4ac$ et $\Delta' = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac$; mais d'où vient – il ?

Si on revient à la forme canonique, on a :

$$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = 0, \qquad a \neq 0 \Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0 \Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \begin{cases} \sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}} = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \\ \quad ou \\ -\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}} = -\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases} (\Delta = b^2 - 4ac) \Rightarrow \begin{cases} si\ \Delta > 0 \Rightarrow x = \begin{cases} -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ \quad ou \\ -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases} \\ si\ \Delta = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{2a} \\ si\ \Delta < 0 \Rightarrow pas\ de\ solution \end{cases}$$

En conclusion :

$$\begin{cases} \text{Si } \Delta > 0 ; \text{l'équation a deux solutions} \begin{cases} x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \\ x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases} \\ \text{Si } \Delta = 0 \text{ ; l'équation a une solution double } x_0 = \frac{-b}{2a} \\ \text{Si } \Delta < 0 \text{ ; l'équation n'a aucune solution dans } \mathbb{R} \end{cases}$$

Si	alors l'ensemble des solutions est
$\Delta < 0$ ($\Delta' < 0$)	$\varnothing$
$\Delta = 0$ ($\Delta' = 0$)	$\left\{\frac{-b}{2a}\right\}$
$\Delta > 0$ ($\Delta' > 0$)	$\{x_1 ; x_2\}$ **avec** $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ **et** $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ **Ou** $x_1 = \frac{-\frac{b}{2}-\sqrt{\Delta'}}{a}$ **et** $x_2 = \frac{-\frac{b}{2}+\sqrt{\Delta'}}{a}$

Remarque 2 :

Dans une équation $ax^2 + bx + c = 0$ (où $a \neq 0$).

Lorsque $a + b + c = 0$, alors l'équation admet comme solutions : $x_1 = 1 \;\; et \;\; x_2 = \frac{c}{a}$

Remarque 3 :

Dans une équation $ax^2 + bx + c = 0$, (où $a \neq 0$)

Lorsque $a - b + c = 0$, alors l'équation admet comme solutions : $x_1 = -1 \;\; et \;\; x_2 = -\frac{c}{a}$

Exemple 3 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :

a) $x^2 - 6x + 5 = 0$; **b)** $x^2 - 2x - 1 = 0$; **c)** $x^2 - 5x + 6 = 0$;

d) $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$; **e)** $x - 5\sqrt{x} + 6 = 0$

Réponse :

Méthode 1 :

a) $x^2 - 6x + 5 = 0$

Comme $1 - 6 + 5 = 0$ alors les solutions sont : $x_1 = 1 \; et \; x_2 = \frac{5}{1} = 5 \Longrightarrow S = \{1\,;5\}$.

Méthode 2 :

$x^2 - 6x + 5 = 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 - 9 + 5 = 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 = 4 \Leftrightarrow x - 3 = \sqrt{4}$ ou $x - 3 = \sqrt{4} \Leftrightarrow x = 5 \; ou \; x = 1$

$S = \{1\,;5\}$.

Méthode 3 :

$\Delta = (-6)^2 - 4(1)(5) = 36 - 20 = 16\,;\sqrt{\Delta} = 4$; les solutions sont $x_1 = \dfrac{6-4}{2} et x_2 = \dfrac{6+4}{2} \Longrightarrow S = \{1\,;5\}$

b) $x^2 - 2x - 1 = 0.$

$\Delta = (-2)^2 - 4(1)(-1) = 8 \;;\; \sqrt{\Delta} = 2\sqrt{2} \;;\; x_1 = \dfrac{2-2\sqrt{2}}{2} et x_2 = \dfrac{2+2\sqrt{2}}{2} \Longrightarrow S = \{1-\sqrt{2}\,;1+\sqrt{2}\}.$

c) $x^2 - 5x + 6 = 0.$

$\Delta = (-5)^2 - 4(1)(6) = 1 \;;\; \sqrt{\Delta} = 1 \;;\; x_1 = \dfrac{5-1}{2} et x_2 = \dfrac{5+1}{2} \Longrightarrow S = \{2\,;3\}.$

d) $x^4 - 5x^2 + 6 = 0.$

On pose : $X = x^2$, on trouve $X^2 - 5X + 6 = 0 \Longrightarrow X = 2 \; ou \; X = 3 \Longrightarrow x^2 = 2 \; ou \; x^2 = 3 \Longrightarrow x = \pm\sqrt{2} \; ou \; x = \pm\sqrt{3}$

$$S = \{-\sqrt{2}\,;\sqrt{2}\,;-\sqrt{3}\,;\sqrt{3}\}.$$

- **Somme et produit des racines d'un polynôme :**

Lorsque l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ admet deux racines x_1 et x_2, alors ;

$$\begin{cases} s = x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \;;\; p = x_1.x_2 = \dfrac{c}{a} \boxed{1} \\ \text{et} \\ ax^2 + bx + c = a(x-x_1)(x-x_2) = 0 \boxed{2} \end{cases}$$

Si	**alors**
x_1 **et** x_2 **sont les solutions de l'équation** $ax^2 + bx + c = 0$	$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$ **et** $x_1.x_2 = \frac{c}{a}$
$a + b + c = 0$	**L'ensemble des solutions de l'équation** $ax^2 + bx + c = 0$ **est** $\left\{1\,;\,\frac{c}{a}\right\}$.
$a - b + c = 0$	**L'ensemble des solutions de l'équation** $ax^2 + bx + c = 0$ **est** $\left\{-1\,;\,\frac{-c}{a}\right\}$.
$\begin{cases} x+y=S \\ xy=P \end{cases}$ **où** S **et** P **sont deux réels donnés**	**Les nombres x et y** ***(s'ils existent)*** **sont les solutions de l'équation du second degré d'inconnue X :** $X^2 - SX + P = 0$

On considère l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, tels que $a \neq 0$ et $\Delta > 0$, on a :

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \Longrightarrow x^2 - sx + p = 0$$

Exemple 4 :
Déterminer les dimensions d'un rectangle d'aire 15 et de périmètre 16.
Réponse :
On désigne par x et y les dimensions, on a :
$\begin{cases} x + y = \dfrac{16}{2} = 8 \\ xy = 15 \end{cases}$. Donc x et y sont les solutions de l'équation $x^2 - 8x + 15 = 0$.

$\Delta = (-8)^2 - 4(1)(15) = 4$; $\sqrt{\Delta} = 2$; $x_1 = \dfrac{8-2}{2} = 3 et x_2 = \dfrac{8+2}{2} = 5$, donc les dimensions sont 3 et 5.

Remarque 4 :
Lorsque l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, $(a \neq 0)$ admet une seule solution double x_0, alors :
$ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$

Exemple 5 :
⌂ $2x^2 - 4x + 2 = 2(x-1)^2$

- **Equations du second degré avec un paramètre réel**

Exemple 6 :
Soit l'équation paramétrique :E_m : $2x^2 - (5+m)x + 7 + 3m = 0$.
Discuter suivant les valeurs du paramètre m, le nombre de solutions de l'équation E_m.
Réponse :
$\Delta_{E_m} = (5+m)^2 - 4 \times 2(7+3m) = 25 + 10m + m^2 - 56 - 24m = -31 - 14m + m^2$
On considère l'équation du second degré, en m , : $m^2 - 14m - 31 = 0$

$$\Longrightarrow \Delta_m = (-14)^2 - 4 \times 31 = 196 + 124 = 320$$

$$\Longrightarrow \sqrt{\Delta} = 8\sqrt{5} \Longrightarrow \begin{cases} m_1 = \dfrac{14 - 8\sqrt{5}}{2} = 7 - 4\sqrt{5} \\ m_2 = \dfrac{14 + 8\sqrt{5}}{2} = 7 + 4\sqrt{5} \end{cases}$$

Conclusion :
⌂ Si $m = 7 - 4\sqrt{5} ou m = 7 + 4\sqrt{5}$, alors l'équation E_m admet une solution double ($car \Delta_{E_m} = 0$).
⌂ Si $m \in \left]7 - 4\sqrt{5};\ 7 + 4\sqrt{5}\right[$, alors l'équation E_m n'admet aucune solution ($car\ \Delta_{E_m} < 0$).
⌂ Si $m \in \left]-\infty;\ 7 - 4\sqrt{5}\right[\cup \left]7 + 4\sqrt{5};\ +\infty\right[$, alors l'équation E_m admet deux solutions distinctes ($car\ \Delta_{E_m} > 0$).

3. Les équations du premier degré à deux inconnues :

Forme générale :
Forme générale : $ax + by + c = 0$ $(a; b) \neq (0; 0)$
Une équation du premier degré à deux inconnues, a une infinité de solutions.
Pour chaque valeur qu'on donne à x, on obtient une valeur correspondante pour y, et inversement.

Exemple 7: $5x - 3y + 11 = 0$; $x - 7y = 8$; $4x - 9y = 0$; $x = -3y + 1$; $y = \dfrac{2}{9}x - 7\sqrt{3}$.

Exemple 8 :
Pour l'équation $5x - 3y + 11 = 0$, si on donne $x = 4$, on a ; $5 \times 4 - 3y + 11 = 0$.
$\Longrightarrow 20 - 3y + 11 = 0 \Longrightarrow -3y + 31 = 0 \Longrightarrow 3y = 31 \Longrightarrow y = \dfrac{31}{3}$.

Le couple ordonné $\left(4\ ;\ \dfrac{31}{3}\right)$ est une solution de l'équation $5x - 3y + 11 = 0$.

4. Système linéaire de deux équations à deux inconnues :

a. Forme générale :
$\begin{cases} ax + by + c = 0 \ \boxed{1} \\ a'x + b'y + c' = 0 \ \boxed{2} \end{cases}$; où ; a, b, c, a', b' et c' sont des nombres réels.

Définition :
On appelle système linéaire de deux équations du premier degré à deux inconnues, toute paire d'équations du premier degré à deux inconnues qu'on se doit de résoudre simultanément.
C'est-à-dire, trouver la ou(les) solution(s) qui satisfait(satisfont) aux deux équations en même temps.

b. Méthodes de résolution :

Il existe quatre méthodes de résolution d'un système linéaire.

- Méthode de combinaison

- Méthode de substitution

- Méthode graphique

- Méthode des déterminants (Cramer)

Exemple 9 :

Soit le système : $\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$

On définit les déterminants suivants :

$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b$ $\quad \Delta_x = \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix} = bc' - b'c$ et $\Delta_y = \begin{vmatrix} c & a \\ c' & a' \end{vmatrix} = ca' - c'a$

Si $\Delta \neq 0$, le système a une solution unique $(x\,;y)$:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}} = \frac{bc' - b'c}{ab' - a'b}$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} c & a \\ c' & a' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}} = \frac{ca' - c'a}{ab' - a'b}$$

Si $\Delta = 0$, avec $\Delta_x = 0$ et $\Delta_y = 0$: le système a une infinité de solutions,

Si $\Delta = 0$, avec $\Delta_x \neq 0$ ou $\Delta_y \neq 0$: le système n'a pas de solution.

Un système d'équations peut être résolu aussi par la méthode graphique lorsque les équations sont relativement simples. La solution simultanée lorsqu'elle existe, est l'intersection des deux droites caractérisées par les équations du système.

Exemple 10 :

Résoudre par les trois méthodes : combinaison, substitution et déterminant le système suivant

$:\begin{cases} 5x + 3y - 4 = 0 \; \boxed{1} \\ 2x - 7y + 11 = 0 \, \boxed{2} \end{cases}$

Méthode de combinaison :

$$7 \times \boxed{1} + 3 \times \boxed{2} \Longrightarrow \begin{cases} 35x + 21y - 28 = 0 \; \boxed{1'} \\ \;6x - 21y + 33 = 0 \, \boxed{2'} \end{cases} \Longrightarrow 41x + 5 = 0 \Longrightarrow x = \frac{-5}{41}$$

$$2 \times \boxed{1} - 5 \times \boxed{2} \Longrightarrow \begin{cases} \;10x + 6y - 8 = 0 \; \boxed{1''} \\ -10x + 35y - 55 = 0 \, \boxed{2''} \end{cases} \Longrightarrow 41y - 63 = 0 \Longrightarrow y = \frac{63}{41}$$

On peut aussi remplacer avec la valeur de x dans l'une des deux équations pour avoir la valeur de y.

$$5 \times \frac{-5}{41} + 3y - 4 = 0 \Longrightarrow \frac{-25}{41} + 3y - 4 = 0 \Longrightarrow 3y = \frac{25}{41} + 4 \Longrightarrow 3y = \frac{25}{41} + \frac{164}{41} = \frac{189}{41} \Longrightarrow y = \frac{189}{41} \div 3$$

$$\Longrightarrow y = \frac{63}{41}$$

$$\Longrightarrow S = \left\{\left(\frac{-5}{41}; \frac{63}{41}\right)\right\}$$

Méthode de substitution :

$$\begin{cases} 5x + 3y - 4 = 0 \; \boxed{1} \\ 2x - 7y + 11 = 0 \, \boxed{2} \end{cases} \Longrightarrow de\,\boxed{1} : 5x = -3y + 4$$

$$\Longrightarrow x = \frac{-3y + 4}{5} \Longrightarrow 2 \times \frac{-3y + 4}{5} - 7y + 11 = 0 \Longrightarrow \frac{-6y + 8}{5} - \frac{35y}{5} + \frac{55}{5} = 0 \Longrightarrow \frac{-6y + 8 - 35y + 55}{5} = 0$$

$$\Longrightarrow \frac{-41y + 63}{5} = 0 \Longrightarrow -41y + 63 = 0 \Longrightarrow 41y = 63 \Longrightarrow y = \frac{63}{41} \Longrightarrow \text{de}\,\boxed{1} : 3y = -5x + 4 \Longrightarrow y = \frac{-5x + 4}{3}$$

$$\text{de}\,\boxed{2} \Longrightarrow 2x - 7 \times \frac{-5x + 4}{3} + 11 = 0 \Longrightarrow \frac{6x}{3} - \frac{-35x + 28}{3} + \frac{33}{3} = 0 \Longrightarrow \frac{6x + 35x - 28 + 33}{3} = 0$$

$$\Longrightarrow \frac{41x + 5}{3} = 0 \Longrightarrow 41x + 5 = 0 \Longrightarrow 41x = -5 \Longrightarrow x = \frac{-5}{41}$$

On pouvait aussi remplacer y dans l'expression de $x = \frac{-3y+4}{5}$ pour avoir sa valeur directement.

$$\Rightarrow x = \frac{-3 \times \frac{63}{41} + 4}{5} \Rightarrow x = \frac{\frac{-189+164}{41}}{5} \Rightarrow x = \frac{\frac{-25}{41}}{5} = \frac{-25}{41} \div 5 = \frac{-25}{41} \times \frac{1}{5} \Rightarrow x = \frac{-5}{41} \Rightarrow S = \left\{\left(\frac{-5}{41}; \frac{63}{41}\right)\right\}.$$

Méthode des déterminants :

$$\begin{cases} 5x + 3y - 4 = 0 \\ 2x - 7y + 11 = 0 \end{cases}$$

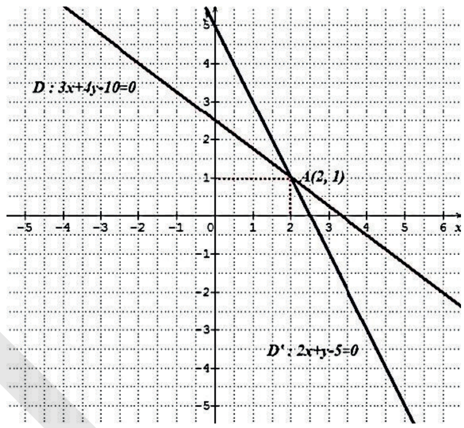
$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & -7 \end{vmatrix} = 5 \times (-7) - 2 \times 3 = -35 - 6 = -41$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -7 & 11 \end{vmatrix} = 3 \times 11 - (-7 \times -4) = 33 - 28 = 5 \qquad \Delta_y = \begin{vmatrix} -4 & 5 \\ 11 & 2 \end{vmatrix} = -4 \times 2 - 11 \times 5 = -8 - 55 = -63$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{5}{-41} = \frac{-5}{41}\ ; y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-63}{-41} = \frac{63}{41} \Rightarrow S = \left\{\left(\frac{-5}{41}; \frac{63}{41}\right)\right\}.$$

Exemple 11 :

Résoudre par la méthode graphique le système : $\begin{cases} 3x + 4y - 10 = 0 \\ 2x + y - 5 = 0 \end{cases}$



Réponse :

Il suffit de remarquer que la solution simultanée du système, c'est les coordonnées du point d'intersection des deux droites (D) et (D')d'équations.

$(D) : 3x + 4y - 10 = 0$ et$(D') :\ 2x + y - 5 = 0$, point dont les coordonnées $(x_0\ ;\ y_0)$ vérifient les deux équations à la fois.

On pose : $y_0 = \dfrac{-3x_0 + 10}{4}$ $\quad et\ \ y_0 = -2x_0 + 5$

En égalisant y_0 avec y_0 on obtient $\dfrac{-3x_0 + 10}{4} = -2x_0 + 5 \Rightarrow x_0 = 2$

En remplaçant dans l'une des deux équations, on obtient $y_0 = 1$

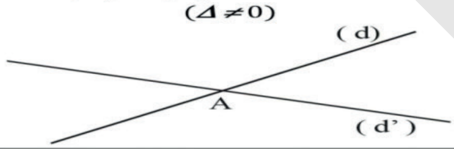
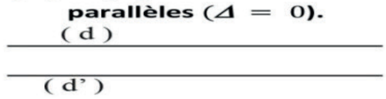
En représentant ces deux équations de droite dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on remarque que les deux droites sont concourantes.

Les coordonnées de leur point d'intersection $(x_0 = 2\ ;\ y_0 = 1)$ constituent donc la solution du système.

Solutions possibles d'un système linéaire donné :

Interprétation graphique

Soit (d) et (d') les droites d'équations cartésiennes$ax + by = c$ et $a'x + b'y = c'$ dans un repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ du plan.

Si	alors
$(d\ )$ **et** (d') **sont sécantes** $(\Delta \neq 0)$ 	**Le système a un couple solution unique qui est le couple des coordonnées du point A commun à** $(d\ )$ **et** (d')**.**
$(d\ )$ **et** (d') **sont strictement parallèles** $(\Delta = 0)$**.**  **Les droites n'ont pas de points communs**	**Le système n'a pas de solution.**
$(d\ )$ **et** (d') **sont confondues** $(\Delta = 0)$**.** **(d) = (d')** **Les droites ont une infinité de points communs**	**Le système a une infinité de solution qui sont tous les couples de coordonnées des points de** (d) **(ou de** d'**).**

Exemple 12 :

On se propose ici de trouver les ensembles de solutions (*s'ils existent*) des trois systèmes suivants :

$I.\ \begin{cases} 3x + 5y - 7 = 0 \\ 4x - 6y - 12 = 0 \end{cases};\qquad II.\ \begin{cases} 4x + 2y - 5 = 0 \\ -8x - 4y + 13 = 0 \end{cases};\qquad III.\ \begin{cases} 3x - 5y + 6 = 0 \\ -12x + 20y - 24 = 0 \end{cases}$

Réponse :

On utilisera au choix l'une des méthodes précédentes pour résoudre les systèmes.

I. $\begin{cases} 3x + 5y - 7 = 0 \ \boxed{1} \\ 4x - 6y - 12 = 0 \ \boxed{2} \end{cases}$

$$6 \times \boxed{1} + 5 \times \boxed{2} \Longrightarrow \begin{cases} 18x + 30y - 42 = 0 \ \boxed{1'} \\ 20x - 30y - 60 = 0 \ \boxed{2'} \end{cases} \Longrightarrow 38x - 102 = 0 \Longrightarrow x = \frac{102}{38} \Longrightarrow x = \frac{51}{19}$$

$$3 \times \frac{51}{19} + 5y - 7 = 0 \Longrightarrow \frac{153}{19} + 5y - 7 = 0 \Longrightarrow 5y + \frac{153}{19} - \frac{133}{19} = 0 \Longrightarrow 5y + \frac{20}{19} = 0$$

$$\Longrightarrow 5y = -\frac{20}{19} \Longrightarrow y = -\frac{20}{19} \div 5 \Longrightarrow y = -\frac{20}{19} \times \frac{1}{5} \Longrightarrow y = -\frac{4}{19} \Longrightarrow \mathcal{S} = \left\{\left(\frac{51}{19}\,;\,-\frac{4}{19}\right)\right\}$$

Le système a donc une solution unique.

Le système correspond à deux équations de droites concourantes (*ayant un point commun*).

II. $\begin{cases} 4x + 2y - 5 = 0 \ \boxed{1} \\ -8x - 4y + 13 = 0 \ \boxed{2} \end{cases} \Longrightarrow 2 \times \boxed{1} + \boxed{2} \Longrightarrow \begin{cases} 8x + 4y - 10 = 0 \ \boxed{1'} \\ -8x - 4y + 13 = 0 \ \boxed{2'} \end{cases} \Longrightarrow 3 = 0$, c'est impossible

D'où le système n'a pas de solution, $\mathcal{S} = \emptyset$.

Le système correspond à deux équations de droites parallèles (*n'ayant aucun point commun*).

III. $\begin{cases} 3x - 5y + 6 = 0 \ \boxed{1} \\ -12x + 20y - 24 = 0 \ \boxed{2} \end{cases} \Longrightarrow 4 \times \boxed{1} + \boxed{2} \Longrightarrow \begin{cases} 12x - 20y + 24 = 0 \ \boxed{1'} \\ -12x + 20y - 24 = 0 \ \boxed{2'} \end{cases} \Longrightarrow 0 = 0$, toujours possible.

Le système a une infinité de solutions. Toute solution de la première équation est aussi solution de la deuxième, et inversement.

Le système correspond à deux équations de droites confondues (*ayant tous les points communs*).

5) Inéquations

Une inéquation est une expression algébrique qui fait intervenir une relation d'inégalité ($<$; $\leq$; $>$ *ou* $\geq$) et une ou plusieurs variables (*inconnues*) de degré 1 ou plus.

La résolution d'une inéquation est la détermination de l'ensemble des nombres réels vérifiant cette inéquation.

1. Les inéquations du premier degré à une inconnue :

a. Formes générales :

La forme générale d'une inéquation du premier degré à une inconnue développée et réduite est :

$$ax + b < 0 \ \ ; \ \ ax + b \leq 0 \ \ ; \ \ ax + b > 0 \ \ ou \ \ ax + b \geq 0 \quad (a \neq 0)$$

b. Méthode de résolution :

$$ax + b < 0 \Longrightarrow ax < -b \Longrightarrow \begin{cases} x < \dfrac{-b}{a} \ \ si\ a > 0 \\ x > \dfrac{-b}{a} \ \ si\ a < 0 \end{cases}$$

On a déjà vu le tableau de l'étude des signes du polynôme $\boldsymbol{P(x) = ax + b}$; ainsi :

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax+b$	$-$signe de a	0	signe de a

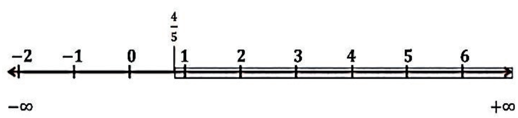
Si $a > 0 \Longrightarrow \mathcal{S} = \left]-\infty; \frac{-b}{a}\right[$. Si $a < 0 \Longrightarrow \mathcal{S} = \left]\frac{-b}{a}; +\infty\right[$

Exemple 13 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $5x - 4 \geq 0$

Réponse : $5x - 4 \geq 0 \Longrightarrow x \geq \frac{4}{5}$. Le tableau de l'étude des signes donne ;

x	$-\infty$	$\frac{4}{5}$	$+\infty$
$ax+b$	$-$	0	$+$

$\mathcal{S} = \left[\frac{4}{5}; +\infty\right[$



Exemple 14 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $-33 \leq 4x + 7 < 27$.

Réponse :

$-33 \leq 4x + 7 < 27 \Longrightarrow -33 - 7 \leq 4x + 7 - 7 < 27 - 7 \Longrightarrow -40 \leq 4x < 20$

$\Longrightarrow -40 \div 4 \leq 4x \div 4 < 20 \div 4 \Longrightarrow -8 \leq x < 5 \Longrightarrow \mathcal{S} = \{x / -8 \leq x < 5\} = [-8; 5[.$

2. Les inéquations du deuxième degré à une inconnue :

a. Formes générales :

La forme générale d'une inéquation du deuxième degré à une inconnue développée et réduite est ;

$\boldsymbol{ax^2 + bx + c \geq 0}$ (ou$>$ ou $\leq ou <$) Avec ($\boldsymbol{a \neq 0}$)

Cas particuliers :

1) $\boldsymbol{ax^2} < 0$ (ou$>$ ou $\leq ou \geq$) Avec ($\boldsymbol{a \neq 0}$)

2) $\boldsymbol{ax^2 + c} > 0$ (ou$<$ ou $\leq ou \geq$) Avec ($\boldsymbol{a \neq 0}$)

3) $\boldsymbol{ax^2 + bx \leq 0}$ (ou$>$ ou $< ou \geq$) Avec ($\boldsymbol{a \neq 0}$)

b. Méthode de résolution :

- Tableau de l'étude des signes du polynôme : $\boldsymbol{P(x) = ax^2 + c}$:

1°) Si $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{c}$ sont du même signe

x	$-\infty$	$+\infty$
ax^2+c	signe de a	

2°) Si $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{c}$ sont de signes contraires

x	$-\infty$	$-\sqrt{\frac{-c}{a}}$		$\sqrt{\frac{-c}{a}}$	$+\infty$
ax^2+c	signe de a	0	$-$ signe a	0	signe de a

- Tableau de l'étude des signes du polynôme : $\boldsymbol{p(x) = ax^2 + bx}$

1°) Si $\frac{-b}{a} < 0$

x	$-\infty$	$\frac{-b}{a}$		0	$+\infty$
x	$-$	|	$-$	0	$+$
$ax+b$	$-$signe de a	0	signe a	|	signe de a
ax^2+bx	signe de a	0	$-$ signe a	0	signe de a

2°) Si $\frac{-b}{a} > 0$

x	$-\infty$	0		$\frac{-b}{a}$	$+\infty$
x	$-$	0	$+$	|	$+$
$ax+b$	$-$signe de a	|	$-$ signe a	0	signe de a
ax^2+bx	signe de a	0	$-$ signe a	0	signe de a

- Tableau de l'étude des signes du polynôme : $\boldsymbol{p(x) = ax^2 + bx + c}$

1° Si $\Delta > 0$	x	$-\infty$	$inf(x_1; x_2)$		$sup(x_1; x_2)$	$+\infty$
	ax^2+bx+c	signe de a	0	$-$ signe a	0	signe de a
2° Si $\Delta = 0$	x	$-\infty$	x_0			$+\infty$
	ax^2+bx+c	signe de a	0	signe de a		
3° Si $\Delta < 0$	x	$-\infty$				$+\infty$
	ax^2+bx+c	signe de a				

Exemple 15 :

Résoudre, dans l'ensemble de nombres réels, l'inéquation : $2x^2 - 5x + 2 \leq 0.$

Réponse :

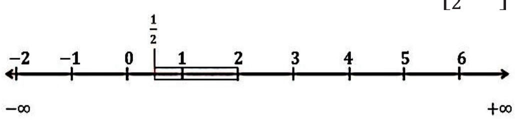
Résolvons d'abord l'équation associée à l'inéquation : $2x^2 - 5x + 2 = 0$

$\Delta = (-5)^2 - 4 \times 2 \times 2 = 25 - 16 = 9 \Longrightarrow \Delta > 0$ et $\sqrt{\Delta} = 3 \Longrightarrow x_1 = \frac{5-3}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ et $x_2 = \frac{5+3}{4} = \frac{8}{4} = 2$

Le tableau de l'étude des signes donne :

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$		2	$+\infty$
$2x^2-5x+2$	$+$	0	$-$	0	$+$

L'ensemble de solutions de l'inéquation : $2x^2 - 5x + 2 \leq 0$ est donc $\mathcal{S} = \left[\frac{1}{2}; 2\right]$



Exemple 16 : Résoudre, dans l'ensemble de nombres réels, l'inéquation $-2x^2+6x-\frac{9}{2}>0$

Réponse :

Résolvons d'abord l'équation associée à l'inéquation :

$$-2x^2-6x-\frac{9}{2}=0 \Longrightarrow \Delta=6^2-4\times -2\times\frac{-9}{2}=36-36=0 \Longrightarrow \Delta=0 \Longrightarrow x=\frac{-6}{4}=-\frac{3}{2}$$

Le tableau de l'étude des signes donne :

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$+\infty$
$-2x^2+6x-\frac{9}{2}$		$-$	0	$-$	

L'ensemble de solutions de l'inéquation :

$-2x^2+6x-\frac{9}{2}>0$ est donc $\mathcal{S}=\emptyset$

Exemple 17 : Résoudre, dans l'ensemble de nombres réels, l'inéquation : $3x^2-4x+12\geq 0$

Réponse :

Résolvons d'abord l'équation associée à l'inéquation :

$3x^2-4x+12=0 \Longrightarrow \Delta=(-4)^2-4\times 3\times 12=16-144=-128 \Longrightarrow \Delta<0$ pas de solution dans $\mathbb{R}$

Le tableau de l'étude des signes donne :

x	$-\infty$		$+\infty$
$3x^2-4x+12$		$+$	

L'ensemble de solutions de l'inéquation : $3x^2-4x+12>0$ est donc $\mathcal{S}=\mathbb{R}$

Exemple 18 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations :

1) $(2x-1)(x+1)\geq 0$; 2) $x^2-4x+3<0$; 3) $(x^2+x+1)(1-x^2)>0$.

Réponse :

1)

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$2x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$(2x-1)(x+1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$S=]-\infty\,;-1]\cup[\frac{1}{2}\,;+\infty[$

2)

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
x^2-4x+3		$+$	0	$-$	0	$+$	

$S=]1\,;3[$.

3)

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
x^2+x+1		$+$		$+$		$+$	
$1-x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$(x^2+x+1)(1-x^2)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$S=]-1\,;1[$.

3. Système de deux inéquations à deux inconnues :

Méthode de résolution :

Pour résoudre un système de deux inéquations à deux inconnues, on utilise la méthode graphique comme expliqué précédemment pour chaque équation. Ensuite, on cherche l'intersection des deux demi-plans solutions.

4. Inéquation produit – Inéquation quotient :

a. Inéquation produit :

Définition :

On appelle inéquation produit, toute inéquation composée d'un produit de deux polynômes ou plus.

Méthode de résolution :

Pour résoudre une inéquation produit, on commence par résoudre son équation associée. En fonction des racines obtenues pour l'équation associée, on dresse ensuite un tableau d'étude de signes.

Le résultat de l'étude des signes nous permet alors de déterminer le ou les intervalle(s) de réels qui sont solution de l'inéquation.

b. Inéquation quotient :

Définition :

On appelle inéquation rationnelle ou inéquation quotient, toute inéquation caractérisée par un quotient de deux ou plusieurs polynômes.

Méthode de résolution :

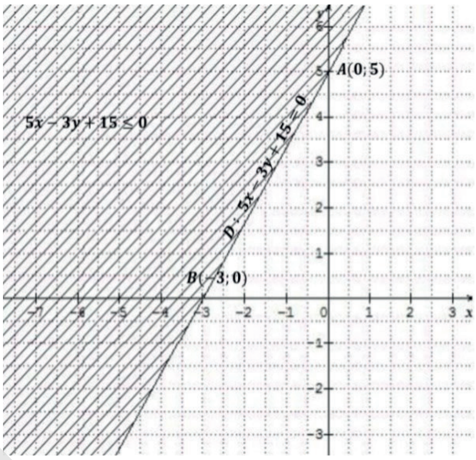
Pour résoudre une inéquation rationnelle, on commence par résoudre ses équations associées dans le numérateur et dans le dénominateur, en excluant les éventuelles valeurs qui annulent le dénominateur.
En fonction des racines obtenues pour les équations associées, on dresse un tableau d'étude des signes.
Le résultat de l'étude des signes nous permet alors de déterminer le ou les intervalle(s) de réels qui sont solution de l'inéquation.

Exemple 19 :

Soit l'inéquation : $5x - 3y + 15 \leq 0$
Les coordonnées des points $A(0,5)$ et $B(-3,0)$ sont deux solutions de l'équation associée.
Dans un repère $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$ du plan, la droite (AB) partage le plan en deux demi-plans.
Pour déterminer celui qui est la solution de l'inéquation, on remplace par les coordonnées de $O(0,0)$,On a :

$$5 \times 0 - 3 \times 0 + 15 = 15$$

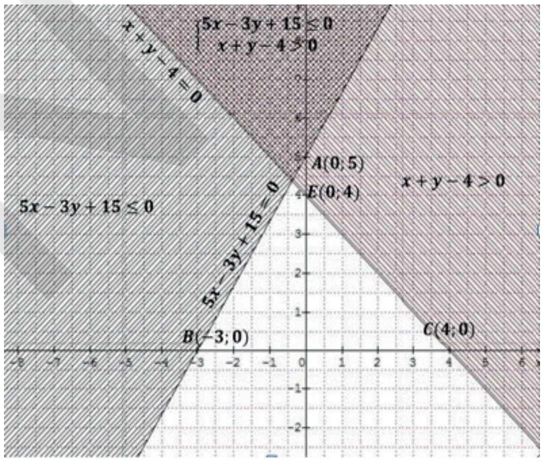
Donc ; le point O appartient au demi-plan qui n'est pas solution de l'inéquation.
La solution de l'inéquation $5x - 3y + 15 \leq 0$ est le demi-plan fermé de frontière la droite (AB) et ne contenant pas l'origine.



Exemple 20 :

Soit le système : $\begin{cases} 5x - 3y + 15 \leq 0 \\ x + y - 4 > 0 \end{cases}$

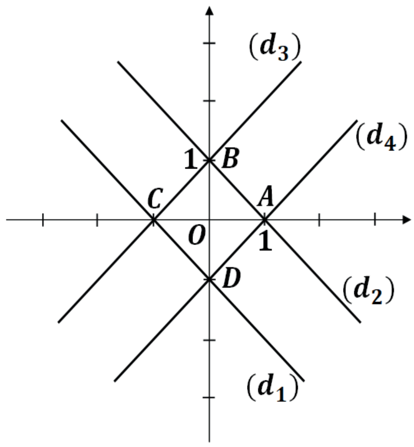
La solution de ce système est la zone du plan doublement hachurée, fermée du côté de la droite (AB), et ouverte du côté de la droite (CE).



Exemple 21 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé$(\ O;\vec{I};\vec{J}\ )$

Déterminer l'ensemble des points $M(x\ ;\ y)$ tels que $\begin{cases} -1 \leq x + y \leq 1 \\ -1 \leq x - y \leq 1 \end{cases}$



Réponse :

$$\begin{cases} -1 \leq x + y \leq 1 \\ -1 \leq x - y \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 1 \geq 0 \\ x + y - 1 \leq 0 \\ x - y + 1 \geq 0 \\ x - y - 1 \leq 0 \end{cases}.$$

Or :

- $x\ +\ y\ +\ 1 \geq 0$est l'équation cartésienne du demi-plan contenant O de frontière la droite(d_1)d'équation
$$x\ +\ y\ +\ 1\ =\ 0$$
- $x\ +\ y\ -\ 1 \leq 0$est l'équation cartésienne du demi-plan contenant O de frontière la droite (d_2) d'équation
x + y – 1 = 0
- $x\ -\ y\ +\ 1 \geq 0$ est l'équation cartésienne du demi-plan contenant O de frontière la droite (d_3) d'équation
$x\ -\ y\ +\ 1\ =\ 0$
- $x\ -\ y\ -\ 1 \leq 0$ est l'équation cartésienne du demi-plan contenant O de frontière la droite (d_4) d'équation
$x\ -\ y\ -\ 1\ =\ 0$

En conclusion, l'ensemble demandé est la partie du plan limitée par le carré $ABCD$ *(voir figure).*

Exercices Généraux

1. Une personne dépense dans un premier magasin le quart de la somme dont elle dispose.

Dans un second magasin, elle dépense la moitié du reste.

Et après avoir ensuite acheté un objet à 300 UM, il lui reste 400 UM. De quelle somme disposait –elle au départ ?

2. Trouver les dimensions d'un champ rectangulaire d'aire 1200 m^2, sachant que sa longueur dépasse sa largeur de 10 m.

3. Un producteur de spectacle loue une salle à 53170 UM pour organiser un spectacle.

Chaque billet d'entrée est vendu 300 UM. A partir de quel nombre de spectateurs aura-t-il un bénéfice ?

4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$x^2 - 4x + 3 = 0$; $x^2 + x + 1 = 0$; $x^2 + 1 = 0$; $x^2 + 3x - 4 = 0$; $x^2 - 2x - 2 = 0$; $x^4 - 4x^2 + 3 = 0$; $x^2 - 3x - 4 = 0$; $x^2 - 1 = 0$; $x^2 - 2x - 2 = 0$; $x^4 - 4x^2 + 3$; $x + 3\sqrt{x} + 1 = 0$; $2x^2 - x - 1 = 0$; $(x - 1)(x + 3) = 0$; $(2x + 1)^2 - 3(2x + 1) - 4 = 0$; $1 - 4x^2 = 0$; $(1 - 2x)^2(1 + x) = 0$; $x(1 - x^2) = 0$.

5. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations :

$x + 1 \geq 0$; $2x - 1 \leq 0$; $\frac{1}{3}x + 1 \geq 0$;

$x^2 - 4x + 3 > 0$; $x^2 + x + 1 < 0$

$2x^2 - x - 1 < 0$; $x^2 - 1 \geq 0$;

$(x - 1)(x + 3) \leq 0$; $(1 - 2x)^2(1 + x) < 0$

6. Soit m un réel. Soit E_m l'équation : $mx^2 - x + 1 = 0$

Déterminer, suivant les valeurs de m, l'ensemble des solutions de E_m.

7. Soit g_m le trinôme défini pour tout x réel, par :

$g_m(x) = x^2 + 2x - 2m$, où m est un paramètre réel non nul.

1°) Discuter suivant les valeurs de m le nombre de solution dans $\mathbb{R}$, de l'équation $g_m(x) = 0$.

2°) Dans le cas où l'équation $g_m(x) = 0$ admet deux solutions réelles x' et x'' telles que $x' < x''$;

Montrer que si $m < 0$ alors $-2 < x' < x''$ et que si $m > 0$ alors $x' < -2 < 0 < x''$.

8. On considère l'équation (E): $x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 5x + 1 = 0$

1) Montrer que (E) $\Leftrightarrow \begin{cases} X = x + \frac{1}{x} \\ X^2 - 5X + 6 = 0 \end{cases}$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E)

9. Résoudre dans $\mathbb{R}^2$, les systèmes :

1) $\begin{cases} 3x + 2y = 2 \\ 4x - 5y = 6 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} 3x - 6y = 1 \\ 4x - 8y = 3 \end{cases}$; 3) $\begin{cases} 2x - 6y = 8 \\ 3x - 9y = 12 \end{cases}$

10. 1) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$, le système :

$$\begin{cases} 5a + 2b = 26 \\ 2a - 3b = -1 \end{cases}$$

2) Déduire de la question précédente, la résolution, dans $\mathbb{R}^2$, des systèmes suivants :

$\begin{cases} 5x^2 + 2y^2 = 26 \\ 2x^2 - 3y^2 = -1 \end{cases}$;

$\begin{cases} 5\sqrt{x} + 2\sqrt{y} = 26 \\ 2\sqrt{x} - 3\sqrt{y} = -1 \end{cases}$;

$\begin{cases} \frac{5}{x} + \frac{2}{y} = 26 \\ \frac{2}{x} - \frac{3}{y} = -1 \end{cases}$

11. Le plan est rapporté à un repère ($O; \vec{I}; \vec{J}$)

Déterminer l'intersection des droites (d) et (d') données par leurs équations :

1) $(d) 4x + 5y - 1 = 0$; $(d')\ 3x + 4y - 2 = 0$

2) $(d) 2x - 10y - 4 = 0$; $(d') - 3x + 15y + 6 = 0$

3) $(d) 4x - 2y - 1 = 0$; $(d')\ y = 2x + 1$

12. Résoudre dans $\mathbb{R}^3$, chacun des systèmes :

1) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 3x + 2y + 4z = 5 \\ -2x - 5y + 2z = 6 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x + y + z = 12 \\ 3x - 2y + 3z = 12 \\ 5x - y + z = 12 \end{cases}$

13. Soit ($O; \vec{I}; \vec{J}$) un repère du plan.

1°) Les droites (d_1) ; (d_2) ; (d_3) d'équations respectives :

$x + y - 2 = 0$; $3x - y - 1 = 0$; $2x - 3y + 2 = 0$

Sont-elles concourantes ?

2°) Vérifier graphiquement la réponse.

14. 1) Quelles valeurs faut-il donner au nombre réel m pour que les droites (d_1) ; (d_2) ; (d_3) d'équations respectives :

$x + y - 2 = 0$; $3x - y - 1 = 0$; $2x - 3y + m = 0$ soient concourantes ?

2) faite la figure pour la valeur de m trouvée.

15. Dans chacun des cas suivants, où P est un polynôme de degré 2.

Mettre $P(x)$ sous la forme canonique.

Déterminer les racines éventuelles de P

Etudier le signe de $P(x)$.

1°) $P(x) = x^2 + 2x - 1$ 2°) $P(x) = -x^2 + x - 1$

3°) $P(x) = x^2 - 7x + 6$ 4°) $P(x) = -5x^2 + x + 1$

5°) $P(x) = x^2 + 2x + 2$ 6) $P(x) = \frac{1}{2}x^2 + 5x - 1$

7) $P(x) = 3x^2 + 5x - 1$ 8) $P(x) = 169x^2 + 13x - 1$

16. On donne un polynôme P et un nombre réel a. Dans chacun des cas suivants :

Vérifier que $P(x)$ est factorisable par $x - a$.

Déterminer le quotient de $P(x)$ par $x - a$.

Factoriser, si possible, ce quotient.

Etudier le signe de $P(x)$.

1°) $P(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$ et $a = 2$

2°) $P(x) = -2x^3 + 7x^2 - 12x + 9$ et $a = \frac{3}{2}$.

3°) $P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 9$ et $a = -3$

4) $P(x) = -3x^3 + 2x^2 + 9x - 6$ et $a = \sqrt{3}$.

17. Développer, simplifier, transposer les inconnues et des valeurs constantes, puis résoudre les équations suivantes :

$2x + 3 = 5 - 4x$;

$5(3x - 2) = 7(6x + 1)$;

$3(4 - 5x) + 12(2x + 3) = 7(1 - 3x) - 6(x + 2)$.

18. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes ;

a) $4x^2 = 0$. **b)** $2x^2 + 32 = 0$.

c) $3x^2 - 27 = 0$ **d)** $-2x^2 + 8 = 0$.

e) $-7x^2 - 21 = 0$. **f)** $4x^2 + 3x = 0$

19. Chercher les solutions des trois équations suivantes :

a) $3x^2 - 5x - 2 = 0$ **b)** $x^2 + 2x + 1 = 0$

c) $5x^2 + 3x + 4 = 0$

20. Soit l'équation : $ax^2 + bx + c = 0$ (où $a \neq 0$)

En utilisant l'écriture canonique d'un trinôme du second degré : $P(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$

Faire une discussion et extraire le discriminant Δ.

21. Déterminer deux nombres réels dont la somme est 7 et le produit est 6, puis vérifier le résultat.

22. Trouver les deux nombres réels x et y tels que :

$$x + y = 6 \text{ et } xy = 8$$

23. Trouver deux nombres x et y ayant pour somme 25 et pour produit 144.

24. L'équation $2x^2 + 3x - 5 = 0$ admet-elle deux solutions ?

a) Si oui sans calculer ces solutions x' et x'', déterminer leur somme $\mathcal{S}$ et leur produit $\mathcal{P}$.

b) En déduire :

$\frac{1}{x'x''}$; $x'^2 + x''^2$; $\frac{1}{x'} + \frac{1}{x''}$

25. Résoudre les systèmes homogènes :

$\begin{cases} x + y = -1 \\ xy = -1 \end{cases}$; $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ xy = -2 \end{cases}$

$\begin{cases} x - y = 2 \\ xy = 35 \end{cases}$; $\begin{cases} x^2 + y^2 = 20 \\ \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{5}{2} \end{cases}$

$\begin{cases} \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} = 0 \\ xy = -1 \end{cases}$; $\begin{cases} x^4 + y^4 = 17 \\ xy = 2 \end{cases}$

26. Sachant que : $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$.

Déterminer les couples (x, y) vérifiant :

$\begin{cases} x^3 + y^3 = 98 \\ x + y = 2 \end{cases}$.

27. Soit l'équation paramétrique

E_m : $(m + 1)x^2 - (2m - 3)x + m - 4 = 0$

Discuter suivant les valeurs du paramètre m, les solutions de l'équation E_m.

28. Résoudre l'équation paramétrique E_m :

$2x^2 - (m - 3)x + 2m - 14 = 0$

29. Résoudre l'équation paramétrique E_m : $(2m + 3)x^2 - (m + 5)x - 21m - 42 = 0$

30. Soit l'équation E : $2x^2 - ax - 3a - 6 = 0$

Déterminer la valeur de a pour que l'équation E admet 2 comme solution et donner sa deuxième solution.

31. $ABCD$ est un rectangle déterminer le réel k tel que :

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AB + BC}{AB} = k$$

32. Déterminer les réels p, q et r pour que -2 et 3 soient les solutions de l'équation :

E : $x^2 - (2p + q)x + 3p - 2q = 0$

33. Résoudre dans $\mathbb{R}$ suivant les valeurs du paramètre réel m, les équations suivantes :

$x^2 - (m + 1)x + m = 0$

$(3m - 5)x^2 - (m + 2)x + m + 2 = 0$

$(m - 3)x^2 - (7 - 4m)x + 20 = 0$

$(6 - m)x^2 - (3m + 1)x - 3 - 9m = 0$

$(4m + 1)x^2 - 2(7 - 2m)x + 3 + m = 0$

$(m^2 - 4)x^2 - 2(m + 2)x + (m - 1) = 0$

34. Déterminer m pour que 1 soit solution des équations suivantes :

$(m + 1)x^2 - 2mx + 5 = 0$

$mx^2 - (2m + 1)x + 2 = 0$

$(m^2 + 1)x^2 + 3(m - 1)x + m = 0$

35. Déterminer m pour que -1 soit solution de l'équation suivante : $(2m - 1)x^2 - 2mx + 5 = 0$

36. Soit le polynôme : $P(x) = 2x^3 - 14x - 12$

1° Calculer $P(-1)$

2° Résoudre l'équation $P(x) = 0$

a) En factorisant $P(x)$

b) Par la méthode euclidienne.

37. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$\frac{3x - 2}{2x + 5} = \frac{2x + 5}{3x - 2}$; $\frac{9x^2 + 6x}{3x + 2} = -5$;

$\frac{-12}{7x - 3} = \frac{5}{2x + 9}$; $\frac{3x^2 - 2x}{x - 9} = 0$.

I. Barycentre d'un système de deux points :

Physiquement, on appelle barycentre G d'un ensemble de points pesants, le point d'équilibre de cet ensemble de points. Mathématiquement, la notion est étendue à des coefficients qui peuvent être négatifs.

a. Point pondéré :

Définition :

Soit A un point du plan $\mathcal{P}$, et soit α un nombre réel. La notation $A(\alpha)$ ou $(A;\ \alpha)$ signifie que le point A est affecté du coefficient α, ou que le point pondéré A est affecté de la masse α.

Exemple 1 :

$(A,5)$; $(B,-3)$; $(C,2)$; $\left(D,-\frac{3}{4}\right)$; $(E,0)$; $\left(F,\sqrt{2}\right)$ sont des points pondérés.

b. Barycentre de deux points :

Définition :

Soient A et B deux points du plan $\mathcal{P}$. Soient α et β deux nombres réels tels que ;$\alpha+\beta\neq 0$.

Il existe un point unique G vérifiant ; $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}$

Le point G est appelé barycentre des deux points A et B affectés respectivement des coefficients α et β.

On peut aussi dire que ; G est le barycentre du système des deux points pondérés ; $A(\alpha)$; $B(\beta)$ ou $\{(A,\alpha)\,;(B,\beta)\}$.

c. Propriété caractéristique :

Le point G est le barycentre des deux points A et B affectés respectivement des deux coefficients α et β si et seulement si ; $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}$.

d. Notations

G est le barycentre de A et B affectés respectivement des coefficients α et β se note ; $G=bar\{(A;\ \alpha),(B;\ \beta)\}$,

ou encore ; $G=bar\begin{array}{|c|c|}\hline A & B\\\hline \alpha & \beta\\\hline\end{array}$

Exemple 2 :

$G=bar\begin{array}{|c|c|}\hline A & B\\\hline 3 & 2\\\hline\end{array}\Leftrightarrow 3\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GB}=\vec{0}$

e. Construction du barycentre G de deux points :

Exercice 1 :

Montrer que $G=bar\begin{array}{|c|c|}\hline A & B\\\hline \alpha & \beta\\\hline\end{array}\Leftrightarrow\overrightarrow{AG}=\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow\overrightarrow{BG}=\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}\overrightarrow{BA}$

Remarque 1 :

Dans le repère $\left(A\,;\ \overrightarrow{AB}\right)$, le point G a pour abscisse ; $G\left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}\right)$.Dans le repère $\left(B\,;\ \overrightarrow{BA}\right)$, le point G a pour abscisse ; $G\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)$.

Exemple 3 :

A et B deux points distincts. Soit $F=bar\begin{array}{|c|c|}\hline A & B\\\hline 5 & 7\\\hline\end{array}$. Donner l'abscisse du point F dans le repère $\left(A;\ \overrightarrow{AB}\right)$.

Réponse :

$F=bar\begin{array}{|c|c|}\hline A & B\\\hline 5 & 7\\\hline\end{array}\Leftrightarrow\overrightarrow{AF}=\dfrac{7}{5+7}\overrightarrow{AB}=\dfrac{7}{12}\overrightarrow{AB}\Longrightarrow F\left(\dfrac{7}{12}\right)$

Exemple 4 :

A et B sont deux points distincts.Donner les abscisses des points E, F et G dans le repère $\left(A;\ \overrightarrow{AB}\right)$, sachant que ;

$E=bar\begin{array}{|c|c|}\hline A & B\\\hline 4 & 5\\\hline\end{array}$ $F=bar\begin{array}{|c|c|}\hline A & B\\\hline -10 & -6\\\hline\end{array}$ $G=bar\begin{array}{|c|c|}\hline A & B\\\hline -8 & 1\\\hline\end{array}$

Réponse :

$E=bar\begin{array}{|c|c|}\hline A & B\\\hline 4 & 5\\\hline\end{array}\Leftrightarrow\overrightarrow{AE}=\dfrac{5}{9}\overrightarrow{AB}\Longrightarrow \boldsymbol{E}\left(\dfrac{\mathbf{5}}{\mathbf{9}}\right)$

$F=bar\begin{array}{|c|c|}\hline A & B\\\hline -10 & -6\\\hline\end{array}\Leftrightarrow\overrightarrow{AF}=\dfrac{-6}{-16}\overrightarrow{AB}=\dfrac{3}{8}\overrightarrow{AB}\Longrightarrow \boldsymbol{F}\left(\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{8}}\right)$

$G=bar\begin{array}{|c|c|}\hline A & B\\\hline -8 & 1\\\hline\end{array}\Leftrightarrow\overrightarrow{AG}=\dfrac{1}{-7}\overrightarrow{AB}\Longrightarrow \boldsymbol{G}\left(-\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{7}}\right)$

Exemple 5 :

A et B sont deux points distincts.Donner les abscisses des points F, G et H dans le repère $(A;\ \overrightarrow{AB})$, tels que ;

$F = bar \begin{array}{|c|c|}\hline A & B \\ \hline 3 & 2 \\ \hline\end{array}$; $G = bar \begin{array}{|c|c|}\hline A & B \\ \hline -5 & 4 \\ \hline\end{array}$; $H = bar \begin{array}{|c|c|}\hline A & B \\ \hline 11 & -6 \\ \hline\end{array}$

Réponse :

$$F = bar \begin{array}{|c|c|}\hline A & B \\ \hline 3 & 2 \\ \hline\end{array} \Leftrightarrow \overrightarrow{AF} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB} \Longrightarrow F\left(\frac{2}{5}\right)$$

$$G = bar \begin{array}{|c|c|}\hline A & B \\ \hline -5 & 4 \\ \hline\end{array} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{4}{-1}\overrightarrow{AB} \Longrightarrow G(-4)$$

$$H = bar \begin{array}{|c|c|}\hline A & B \\ \hline 11 & -6 \\ \hline\end{array} \Leftrightarrow \overrightarrow{AH} = \frac{-6}{5}\overrightarrow{AB} \Longrightarrow H\left(-\frac{6}{5}\right)$$

f. Méthodes de construction du barycentre de deux points :

- **Méthode de l'abscisse :**

$$G = bar \begin{array}{|c|c|}\hline A & B \\ \hline \alpha & \beta \\ \hline\end{array} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB} \Longrightarrow G \in (AB), \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$$\Longrightarrow G \text{ a pour abscisse } \frac{\beta}{\alpha+\beta} \text{ dans le repère } (A;\ \overrightarrow{AB})$$

Exemple 6 :

Construisons le point $G = bar \begin{array}{|c|c|}\hline A & B \\ \hline 2 & 3 \\ \hline\end{array}$

Réponse :

$$\Longrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{3}{2+3}\overrightarrow{AB} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$$

- **Méthode du parallélogramme :**

Soit $G = bar \begin{array}{|c|c|}\hline A & B \\ \hline \alpha & \beta \\ \hline\end{array}$

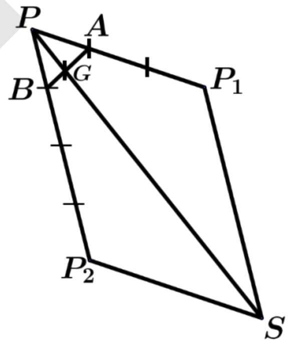
et soit P un point du plan $\mathcal{P}$ tel que ; $P \notin (AB)$ on définit les points P_1 et P_2

par ; $\overrightarrow{PP_1} = \alpha\overrightarrow{PA}$ et $\overrightarrow{PP_2} = \beta\overrightarrow{PB}$

Soit S le point tel que $\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{PP_1} + \overrightarrow{PP_2}$ et PP_1SP_2 est un parallélogramme.

$\overrightarrow{PS} = \alpha\overrightarrow{PA} + \beta\overrightarrow{PB} = (\alpha+\beta)\overrightarrow{PG} \Longrightarrow G \in (PS)$

Or, $G \in (AB) \Longrightarrow G = (AB) \cap (PS)$



Exemple 7 :

Soit [AB] un segment.

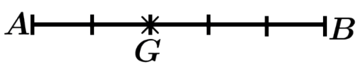
1°) Construire le point G = bar $\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 3 & 2 \end{array}$.

2°) « Méthode du parallélogramme »

Soit P un point non situé sur la droite (AB). P_1 et P_2 les points tels que : $\overrightarrow{PP_1} = 3\overrightarrow{PA}$ et $\overrightarrow{PP_2} = 2\overrightarrow{PB}$.

S est le point tel que PP_1SP_2 est un parallélogramme. Montrer que G est le point d'intersection des droites (AB) et (PS).

Réponse:



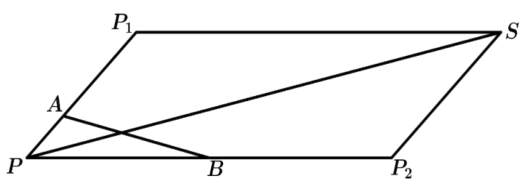
1°) G = bar$\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 3 & 2 \end{array}$ $\Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$.

2°) G = bar$\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 3 & 2 \end{array}$; donc G $\in$ (AB).

Or, $\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{PP_1} + \overrightarrow{PP_2} = 3\overrightarrow{PA} + 2\overrightarrow{PB} = 5\overrightarrow{PG}$.

Donc, le point G $\in$ (PS).

D'où G est le point d'intersection des droites (AB) et (PS).



- **Méthode des parallèles :**

Cette méthode consiste à ;

• Tracer le segment $[AB]$,

• Choisir un vecteur unité $\vec{u}$,

- Sur les droites $d_1(A,\vec{u})$ et $d_2(B,\vec{u})$, tracer les deux vecteurs $\beta\vec{u}$ et $-\alpha\vec{u}$ respectivement à partir des points A et B,
- Joindre les deux extrémités des deux vecteurs $-\alpha\vec{u}$ et $\beta\vec{v}$, soit P_1 et P_2 leurs extrémités respectives.

Le point de concours des deux droites (AB) et (P_1P_2) est le point G barycentre du système

Justification :

Construisons le point $G = bar \begin{array}{|c|c|}\hline A & B \\ \hline \alpha & \beta \\ \hline\end{array}$

Sur les droites parallèles $d_1(A,\vec{u})$ et $d_2(B,\vec{u})$,construisons les points P_1 et P_2 définis par ;

$\overrightarrow{AP_1} = \beta\vec{u} \Rightarrow \vec{u} = \frac{1}{\beta}\overrightarrow{AP_1}\boxed{1}$; $\overrightarrow{BP_2} = -\alpha\vec{u} \Rightarrow \vec{u} = -\frac{1}{\alpha}\overrightarrow{BP_2}\boxed{2}$

$$\boxed{1} = \boxed{2} \Rightarrow \frac{1}{\beta}\overrightarrow{AP_1} = -\frac{1}{\alpha}\overrightarrow{BP_2} \Rightarrow \alpha\overrightarrow{AP_1} = -\beta\overrightarrow{BP_2} \Rightarrow \alpha\overrightarrow{AP_1} + \beta\overrightarrow{BP_2} = \vec{0}.$$

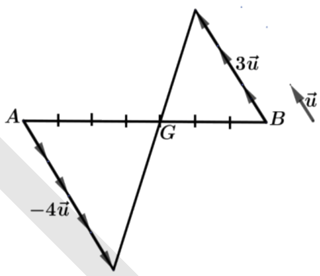
$$\Rightarrow \alpha\left(\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GP_1}\right) + \beta\left(\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GP_2}\right) = \vec{0} \Rightarrow \alpha\overrightarrow{AG} + \alpha\overrightarrow{GP_1} + \beta\overrightarrow{BG} + \beta\overrightarrow{GP_2} = \vec{0}.$$

Comme ; $\alpha\overrightarrow{AG} + \beta\overrightarrow{BG} = \vec{0} \Rightarrow \alpha\overrightarrow{GP_1} + \beta\overrightarrow{GP_2} = \vec{0}$.

$\Rightarrow G = bar \begin{array}{|c|c|}\hline P_1 & P_2 \\ \hline \alpha & \beta \\ \hline\end{array} \Rightarrow G \in (P_1P_2) \Rightarrow G = (AB) \cap (P_1P_2)$.

Exemple 8 :

Construire le point $G = bar \begin{array}{|c|c|}\hline A & B \\ \hline 3 & 4 \\ \hline\end{array}$



Réponse :

Voir figure ci-contre.

g. Existence et unicité de G :

Le point $G = bar \begin{array}{|c|c|}\hline A & B \\ \hline \alpha & \beta \\ \hline\end{array}$ existe si, et seulement si ; $\alpha + \beta \neq 0$.

La relation ; $\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$ établit l'existence et l'unicité de G.

h. Lien géométrique du barycentre$G$ de deux points :

L'égalité $\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$ implique que $G \in (AB)$.

$G = bar \begin{array}{|c|c|}\hline A & B \\ \hline \alpha & \beta \\ \hline\end{array} \Leftrightarrow G, A \text{ et } B \text{ sont alignés} \Leftrightarrow G \in (AB)$

i. L'ensemble des barycentres de A et B génère la droite (AB) :

Soit A et B deux points distincts ; la droite (AB) est l'ensemble des barycentres des deux points A et B.

Autrement dit ; $\forall\, M \in (AB)$ ils existent deux réels α et β tels que ;

$M = bar \begin{array}{|c|c|}\hline A & B \\ \hline \alpha & \beta \\ \hline\end{array}$, avec, $\alpha + \beta \neq 0$

Exercice 2 : Démontrer la propriété précédente.

Remarque 2 :

Pour montrer que trois points sont alignés, il suffit de montrer que l'un d'eux peut s'exprimer comme barycentre des deux autres.

On a	Si, et seulement si
$\propto = 0$	$G = B$
$\beta = 0$	$G = A$
$\propto\beta > 0$ ($\propto$ *et* βsont de même signe)	$G \in [AB] \setminus \{A,B\}$
$\propto\beta < 0$ ($\propto$ *et* βsont de même signe)	$G \in (AB) \setminus [AB]$
$\propto\beta < 0(\lvert\propto\rvert > \lvert\beta\rvert)$	$G \in [BA) \setminus]AB[$
$\propto\beta < 0(\lvert\propto\rvert < \lvert\beta\rvert)$	$G \in [AB) \setminus]AB[$

Remarque 3 :

- Si $G = bar \begin{array}{|c|c|} \hline A & B \\ \hline \alpha & \beta \\ \hline \end{array}$; avec $\alpha > \beta > 0$, alors ; G est plus proche de A que de B.
- Si $G = bar \begin{array}{|c|c|} \hline A & B \\ \hline \alpha & \beta \\ \hline \end{array}$; avec $\beta > \alpha > 0$, alors ; G est plus proche de B que de A.

j. Opérations conservant le barycentre :

Théorème de l'homogénéité :(*Proportionnalité du barycentre*)

En multipliant ou en divisant les coefficients α et β par un même nombre réel non nul$k$, le barycentre G est conservé ;

$$G = bar \begin{array}{|c|c|} \hline A & B \\ \hline \alpha & \beta \\ \hline \end{array} \Leftrightarrow G = bar \begin{array}{|c|c|} \hline A & B \\ \hline k.\alpha & k.\beta \\ \hline \end{array} \boxed{1} \quad \Leftrightarrow \quad G = bar \begin{array}{|c|c|} \hline A & B \\ \hline \frac{\alpha}{k} & \frac{\beta}{k} \\ \hline \end{array} \boxed{2}$$

Exercice 3 :Démontrer les propriétés précédentes.

Exemple 9 :

$$G = bar \begin{array}{|c|c|} \hline A & B \\ \hline 3 & 2 \\ \hline \end{array} = bar \begin{array}{|c|c|} \hline A & B \\ \hline 9 & 6 \\ \hline \end{array} = bar \begin{array}{|c|c|} \hline A & B \\ \hline \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \hline \end{array}$$

Propriété 1 :

$$G = bar \begin{array}{|c|c|} \hline A & B \\ \hline \alpha & \beta \\ \hline \end{array} = bar \begin{array}{|c|c|} \hline A & B \\ \hline \alpha' & \beta' \\ \hline \end{array} (avec\ \alpha, \beta) \neq (0,0) \Leftrightarrow \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{\beta'}{\beta}.$$

Exercice 4 : Démontrer la propriété précédente.

Propriété 2 :

$$G = bar \begin{array}{|c|c|} \hline A & B \\ \hline \alpha & \beta \\ \hline \end{array} \Leftrightarrow A = bar \begin{array}{|c|c|} \hline G & B \\ \hline \alpha + \beta & -\beta \\ \hline \end{array} \Leftrightarrow B = bar \begin{array}{|c|c|} \hline G & A \\ \hline \alpha + \beta & -\alpha \\ \hline \end{array}$$

Exercice 5 :

Démontrer la propriété précédente.

k. Isobarycentre de deux points :

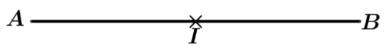
On définit l'isobarycentre de deux points comme le barycentre de deux points affectés du même coefficient non nul, c'est –à-dire ;

$$G = bar \begin{array}{|c|c|} \hline A & B \\ \hline \alpha & \alpha \\ \hline \end{array} ; (avec\ \alpha \neq 0) \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{\alpha}{2\alpha}\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow G = A * B$$

G est isobarycentre de A et B si, et seulement si ;

$$G = bar \begin{array}{|c|c|} \hline A & B \\ \hline 1 & 1 \\ \hline \end{array} \Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow G\ est\ le\ milieu\ de\ [AB]$$

$$[AB] \text{ a pour milieu } I \Leftrightarrow I = bar \begin{array}{|c|c|} \hline A & B \\ \hline 1 & 1 \\ \hline \end{array} \Leftrightarrow A = bar \begin{array}{|c|c|} \hline I & B \\ \hline 2 & -1 \\ \hline \end{array} \Leftrightarrow B = bar \begin{array}{|c|c|} \hline I & A \\ \hline 2 & -1 \\ \hline \end{array}$$



Exercice 6 : Démontrer la propriété précédente

l. Fonction vectorielle de Leibniz :

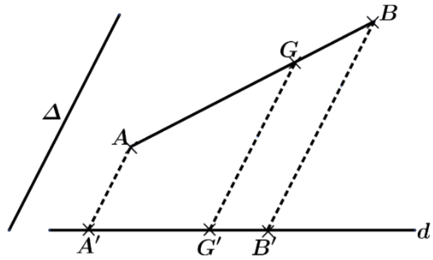
Soient A et B deux points du plan $\mathcal{P}$, et soient α et β deux nombres réels.

Pour tout point M du plan $\mathcal{P}$, on définit la fonction ; $\overrightarrow{f(M)} = \alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB}$ appelée fonction vectorielle de Leibniz, associée au système de points pondérés ; $\{(A, \alpha);\ (B, \beta)\}$.

Si	Alors
$\propto + \beta \neq 0$	$\overrightarrow{f(M)} = (\propto + \beta)\ \overrightarrow{GM}$ Avec G = bar $\{(A, \propto); (B, \beta)\}$
$\propto + \beta = 0$	$\overrightarrow{f(M)} = -\propto \overrightarrow{AB}$ $\overrightarrow{f(M)}$ est constante ; (indépendant de)

m. La projection conserve le barycentre :

La projection conserve le barycentre ; c'est-à-dire ; si



$$G = bar \begin{array}{|c|c|}\hline A & B \\ \hline \alpha & \beta \\ \hline\end{array}$$

Et A', B' et G' sont les projetés respectifs de A, B et G sur la droite (d) parallèlement à (Δ). Alors ; $G' = bar \begin{array}{|c|c|}\hline A' & B' \\ \hline \alpha & \beta \\ \hline\end{array}$

n. Caractérisation du barycentre :

Propriété 3 :

Soient (A,α) et (B,β) deux points pondérés tels que $\alpha+\beta \neq 0$ et G est le barycentre du système $\{(A,\alpha);\ (B,\beta)\}$.

Alors pour tout point M du plan $\mathcal{P}$ on a ; $(\alpha+\beta)\overrightarrow{MG} = \alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB}$, que l'on peut écrire ;

$$\overrightarrow{MG} = \frac{\alpha}{(\alpha+\beta)}\overrightarrow{MA} + \frac{\beta}{(\alpha+\beta)}\overrightarrow{MB}$$

Exercice 7 :

Démontrer la propriété précédente.

2. Barycentre d'un système de trois points :

Définition :

Soient A, B et C trois points du plan $\mathcal{P}$. Et soient α, β et γ trois nombres réels tels que ; $\alpha+\beta+\gamma \neq 0$.

Il existe un point unique G vérifiant ; $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

Le point G est appelé barycentre des trois points A, B et C affectés respectivement des coefficients α, β et γ.

Propriété 3 :

Le point G est le barycentre des trois points A, B et C affectés respectivement des trois coefficients α, β et γ si et seulement si ; $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

Remarque 4 :

On peut aussi dire que ; G est le barycentre du système de points pondérés $A(\alpha); B(\beta); C(\gamma)$ ou $\{(A,\alpha);\ (B,\beta);\ (C,\gamma)\}$.

Notation :

G est barycentre du système(A,α) ;(B,β) et (C,γ) se note ; $G = bar\{(A;\ \alpha),(B;\ \beta),(C;\ \gamma)\}$,

Ou encore ; $G = bar \begin{array}{|c|c|c|}\hline A & B & C \\ \hline \alpha & \beta & \gamma \\ \hline\end{array}$

Exemple 10 :

$Soit\ G = bar \begin{array}{|c|c|c|}\hline A & B & C \\ \hline 8 & 4 & -5 \\ \hline\end{array} \Leftrightarrow 8\overrightarrow{GA} + 4\overrightarrow{GB} - 5\overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

Construction de barycentre de trois points :

- **Méthode des coordonnées**

$$G = bar \begin{array}{|c|c|c|}\hline A & B & C \\ \hline \alpha & \beta & \gamma \\ \hline\end{array} \Leftrightarrow \alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AB} + \frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AC}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{BG} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{BA} + \frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{BC}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{CG} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{CA} + \frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{CB}$$

Exemple 11 :

ABCest un triangle non aplati. En utilisant la méthode des coordonnées, construire les points E et F tels que ;

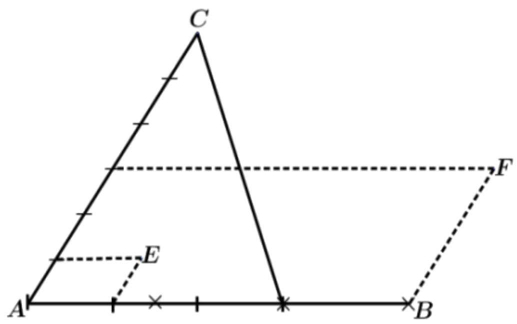
$E = bar \begin{array}{|c|c|c|}\hline A & B & C \\ \hline 3 & 2 & 1 \\ \hline\end{array}$; $\qquad F = bar \begin{array}{|c|c|c|}\hline A & B & C \\ \hline -2 & 3 & 1 \\ \hline\end{array}$

Réponse :

$E = bar\begin{array}{|c|c|c|}\hline A & B & C\\\hline 3 & 2 & 1\\\hline\end{array} \Leftrightarrow \overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$;

$F = bar\begin{array}{|c|c|c|}\hline A & B & C\\\hline -2 & 3 & 1\\\hline\end{array} \Leftrightarrow \overrightarrow{AF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

Construction



Remarque 5 :

Dans le repère $(A;\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, G a pour coordonnées ; $\boldsymbol{G}\left(\frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}, \frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\right)$

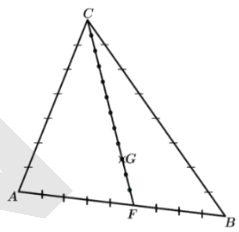
- **Méthode du barycentre partiel (*Associativité du barycentre*)**

G est conservé lorsqu'on remplace deux points par leur barycentre affecté de la somme de leurs coefficients.

$G = bar\begin{array}{|c|c|c|}\hline A & B & C\\\hline \alpha & \beta & \gamma\\\hline\end{array} \Leftrightarrow G = bar\begin{array}{|c|c|}\hline H & C\\\hline \alpha+\beta & \gamma\\\hline\end{array}$; $avec\ \alpha + \beta \neq 0\ et\ H = bar\begin{array}{|c|c|}\hline A & B\\\hline \alpha & \beta\\\hline\end{array}$

Exemple 12 :

Soit$G = bar\begin{array}{|c|c|c|}\hline A & B & C\\\hline 4 & 5 & 3\\\hline\end{array}$. Construire le barycentre G.

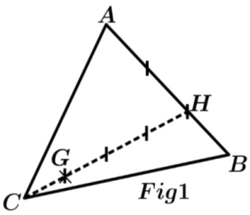


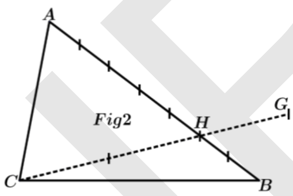
Réponse :

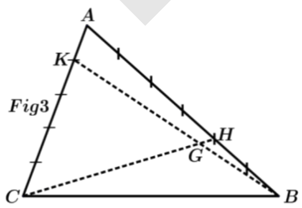
Soit $F = bar\begin{array}{|c|c|}\hline A & B\\\hline 4 & 5\\\hline\end{array} \Rightarrow G = bar\begin{array}{|c|c|}\hline F & C\\\hline 9 & 3\\\hline\end{array}$

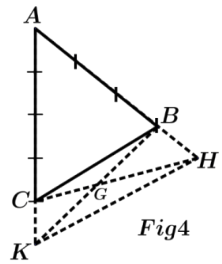
Exemple 13 :

Etant données les figures suivantes, exprimer G comme barycentre de A, B et C.









Réponse :

Fig. 1 :

$H = bar\begin{array}{|c|c|}\hline A & B\\\hline 1 & 2\\\hline\end{array}$ et $G = bar\begin{array}{|c|c|}\hline C & H\\\hline 3 & 1\\\hline\end{array} \Rightarrow G = bar\begin{array}{|c|c|}\hline C & H\\\hline 9 & 3\\\hline\end{array} \Rightarrow \boldsymbol{G = bar}\begin{array}{|c|c|}\hline \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\\hline \boldsymbol{1} & \boldsymbol{2}\\\hline\end{array}$

Fig. 2 :

$H = bar\begin{array}{|c|c|}\hline A & B\\\hline 2 & 5\\\hline\end{array}$ et $G = bar\begin{array}{|c|c|}\hline C & H\\\hline \frac{-7}{3} & 7\\\hline\end{array} \Rightarrow G = bar\begin{array}{|c|c|c|}\hline A & B & C\\\hline 2 & 5 & \frac{-7}{3}\\\hline\end{array} \Rightarrow \boldsymbol{G = bar}\begin{array}{|c|c|c|}\hline \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} & \boldsymbol{C}\\\hline \boldsymbol{6} & \boldsymbol{15} & \boldsymbol{-7}\\\hline\end{array}$

Fig. 3 :

$H = bar\begin{array}{|c|c|}\hline A & C\\\hline 2 & 4\\\hline\end{array}$ et $K = bar\begin{array}{|c|c|}\hline A & B\\\hline 4 & 1\\\hline\end{array} \Rightarrow G = bar\begin{array}{|c|c|}\hline B & H\\\hline \beta & 6\\\hline\end{array} = bar\begin{array}{|c|c|}\hline C & K\\\hline \gamma & 5\\\hline\end{array}$

$\Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{\beta}{1} = \frac{\gamma}{4} \Rightarrow \boldsymbol{\beta = \frac{1}{2}}\ et\ \boldsymbol{\gamma = 4} \Rightarrow G = bar\begin{array}{|c|c|c|}\hline A & B & C\\\hline 2 & \frac{1}{2} & 4\\\hline\end{array} = bar\begin{array}{|c|c|c|}\hline A & B & C\\\hline 4 & 1 & 8\\\hline\end{array} \Rightarrow \boldsymbol{G = bar}\begin{array}{|c|c|c|}\hline \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} & \boldsymbol{C}\\\hline \boldsymbol{4} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{8}\\\hline\end{array}$

Fig. 4 :

$K = bar\begin{array}{|c|c|}\hline A & C\\\hline -1 & 5\\\hline\end{array}$ et $H = bar\begin{array}{|c|c|}\hline A & B\\\hline -1 & 4\\\hline\end{array} \Rightarrow G = bar\begin{array}{|c|c|}\hline B & K\\\hline \beta & 4\\\hline\end{array} = bar\begin{array}{|c|c|}\hline C & H\\\hline \gamma & 3\\\hline\end{array}$

$\Rightarrow 1 = \frac{\beta}{4} = \frac{\gamma}{5} \Rightarrow \boldsymbol{\beta = 4}\ et\ \boldsymbol{\gamma = 5} \Rightarrow \boldsymbol{G = bar}\begin{array}{|c|c|c|}\hline \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} & \boldsymbol{C}\\\hline \boldsymbol{1} & \boldsymbol{4} & \boldsymbol{5}\\\hline\end{array}$

d. Existence et unicité de G :

Le point $G = bar \begin{array}{|c|c|c|} \hline A & B & C \\ \hline \alpha & \beta & \gamma \\ \hline \end{array}$ existe si, et seulement si ; $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$.

L'égalité : $\overrightarrow{CG} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{CA} + \frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{CB}$ établit l'existence et l'unicité du barycentre G.

e. Lien géométrique du barycentreGde trois points :

$$G = bar \begin{array}{|c|c|c|} \hline A & B & C \\ \hline \alpha & \beta & \gamma \\ \hline \end{array} (\alpha + \beta + \gamma \neq 0) \Leftrightarrow G, A, B\ et\ C\ sont\ \ coplanaire \Leftrightarrow G \in (ABC)$$

	On a	Si, et seulement si
	$\alpha = \beta = 0$	$G = C$
	$\alpha = \gamma = 0$	$G = B$
	$\beta = \gamma = 0$	$G = A$
	$\alpha = 0$	$G \in (BC)$
	$\beta = 0$	$G \in (AC)$
	$\gamma = 0$	$G \in (AB)$
ABC un triangle non	$\alpha + \beta = 0$	G appartient à la parallèle à (AB) passant par C
	$\alpha + \gamma = 0$	G appartient à la parallèle à (AC) passant par B
	$\beta + \gamma = 0$	G appartient à la parallèle à (BC) passant par A
	$\alpha, \beta et \gamma$ du même signe	G est à l'intérieur du triangle ABC
	Deux seulement de $\alpha, \beta et \gamma$ sont du même signe	G est à l'extérieur du triangle ABC

Théorème de l'homogénéité : (*Proportionnalité du barycentre*)
En multipliant ou en divisant les coefficients α, β et γ par un même nombre réel non nul k, le barycentre G est conservé ;

$$G = bar \begin{array}{|c|c|c|} \hline A & B & C \\ \hline \alpha & \beta & \gamma \\ \hline \end{array} \Leftrightarrow G = bar \begin{array}{|c|c|c|} \hline A & B & C \\ \hline k.\alpha & k.\beta & k.\gamma \\ \hline \end{array} \Leftrightarrow G = bar \begin{array}{|c|c|c|} \hline A & B & C \\ \hline \frac{\alpha}{k} & \frac{\beta}{k} & \frac{\gamma}{k} \\ \hline \end{array}$$

Exercice 8 :
Démontrer cette propriété.

Propriété 4 :

$$G = bar \begin{array}{|c|c|c|} \hline A & B & C \\ \hline \alpha & \beta & \gamma \\ \hline \end{array} = bar \begin{array}{|c|c|c|} \hline A & B & C \\ \hline \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \hline \end{array} avec\ (\alpha, \beta, \gamma) \neq (0,0,0) \Leftrightarrow \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{\beta'}{\beta} = \frac{\gamma'}{\gamma}.$$

Exercice 9 :
Démontrer cette propriété.

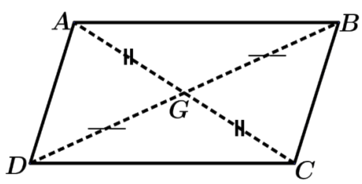
Propriété 5 :

$$G = bar \begin{array}{|c|c|c|} \hline A & B & C \\ \hline \alpha & \beta & \gamma \\ \hline \end{array}$$

$$\Leftrightarrow A = bar \begin{array}{|c|c|c|} \hline G & B & C \\ \hline \alpha+\beta+\gamma & -\beta & -\gamma \\ \hline \end{array} \Leftrightarrow B = bar \begin{array}{|c|c|c|} \hline G & A & C \\ \hline \alpha+\beta+\gamma & -\alpha & -\gamma \\ \hline \end{array} \Leftrightarrow C = bar \begin{array}{|c|c|c|} \hline G & A & B \\ \hline \alpha+\beta+\gamma & -\alpha & -\beta \\ \hline \end{array}$$

g. Sommets d'un parallélogramme et barycentre :

$ABCD$est un parallélogramme si, et seulement si ;



$$A = bar \begin{array}{|c|c|c|} \hline B & C & D \\ \hline 1 & -1 & 1 \\ \hline \end{array} \quad B = bar \begin{array}{|c|c|c|} \hline A & C & D \\ \hline 1 & 1 & -1 \\ \hline \end{array}$$

$$C = bar \begin{array}{|c|c|c|} \hline A & B & D \\ \hline -1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}, D = bar \begin{array}{|c|c|c|} \hline A & B & C \\ \hline 1 & -1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$G = bar \begin{array}{|c|c|c|} \hline A & B & C \\ \hline \end{array} \Leftrightarrow A, B, C\ et\ G$ sont les sommets d'un parallélogramme, G et C en sont des sommets

h. L'ensemble des barycentres de trois points non alignés A, B et C, génère le plan (ABC) :

Soient$A$, B et C trois points distincts et non alignés. Le plan (ABC) est l'ensemble des barycentres des trois points A, B et C. Autrement dit ; $\forall\, M \in (ABC)$ ils existent trois réels α, β et γ tels que ;

$$M = bar \begin{array}{|c|c|c|}\hline A & B & C \\ \hline \alpha & \beta & \gamma \\ \hline\end{array} \quad \text{avec, } \alpha+\beta+\gamma \neq 0$$

Exercice 10 :

Démontrer cette propriété.

i. Caractérisation du barycentre de trois points :

Propriété 6 :

Soient (A,α),(B,β)et (C,γ)trois points pondérés tels que $\alpha+\beta+\gamma \neq 0$ et G le barycentre du système ; $\{(A,\alpha);\ (B,\beta);\ (C,\gamma)\}$.

Alors pour tout point M du plan $\mathcal{P}$ on a ;

$(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG} = \alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC}$, que l'on peut écrire ; $\overrightarrow{MG} = \frac{\alpha}{(\alpha+\beta+\gamma)}\overrightarrow{MA} + \frac{\beta}{(\alpha+\beta+\gamma)}\overrightarrow{MB} + \frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{MC}$

Exercice 11 : Démontrer cette propriété.

Exemple 14 :

$$\text{Soit } G = bar \begin{array}{|c|c|c|}\hline A & B & C \\ \hline 2 & -3 & 4 \\ \hline\end{array} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{MG} = 2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC}$$

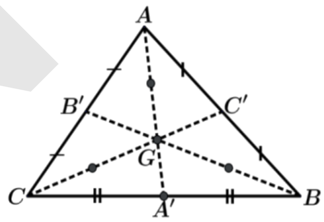
j. Isobarycentre de trois points :

Définition :

$G = bar \begin{array}{|c|c|c|}\hline A & B & C \\ \hline \alpha & \alpha & \alpha \\ \hline\end{array}$ $(\alpha \neq 0)$ G est l'isobarycentre des points A, B,C appelé aussi centre de gravité du triangle ABC.

Propriété 7 :

G est centre de gravité de ABC si, et seulement si ;



$$G = bar \begin{array}{|c|c|c|}\hline A & B & C \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline\end{array} \Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'} \Leftrightarrow \overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BB'}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{CG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CC'} \;\Big|\; \Leftrightarrow G = bar \begin{array}{|c|c|}\hline A & A' \\ \hline 1 & 2 \\ \hline\end{array} = bar \begin{array}{|c|c|}\hline B & B' \\ \hline 1 & 2 \\ \hline\end{array} = bar \begin{array}{|c|c|}\hline C & C' \\ \hline 1 & 2 \\ \hline\end{array}$$

k. Fonction vectorielle de Leibniz :

Soient A, B et C trois points du plan $\mathcal{P}$, et soient α, β et γ trois nombres réels.

Pour tout point M du plan $\mathcal{P}$, on définit la fonction ; $\overrightarrow{f(M)} = \alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC}$ appelée fonction vectorielle de Leibniz, associée au système de points pondérés ; $\{(A,\alpha)\,;\ (B,\beta)\,;\ (C,\gamma)\}$.

Si	Alors
$\propto + \beta + \gamma \neq 0$	$\overrightarrow{f(M)} = (\propto + \beta + \gamma)\overrightarrow{GM}$ avec $G = bar\{(A,\propto);\ (B,\beta);(C,\gamma)\}$
$\propto + \beta + \gamma = 0$	$\overrightarrow{f(M)} = \begin{cases} \beta\overrightarrow{AB} + \gamma\overrightarrow{AC} \\ \alpha\overrightarrow{BA} + \gamma\overrightarrow{BC} \\ \alpha\overrightarrow{CA} + \beta\overrightarrow{CB} \end{cases}$; f est constante ; (indépendante de M)

Exemple15 :

ABC un triangle ; $I = bar \begin{array}{|c|c|}\hline A & B \\ \hline 1 & 2 \\ \hline\end{array}$ et $\overrightarrow{BJ} = \frac{2}{5}\overrightarrow{BC}$. Les droites (IC) et (JA) se coupent en G. (BG) et (AC) se coupent en K.

1°) Faire une figure.

2°) a) Déterminer des réels α ; β ; γ tels que $G = bar \begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \hline \alpha & \beta & \gamma \end{array}$

b) Déterminer α_1 ;β_1 ; γ_1 tels que $G = bar \begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \hline \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \end{array}$; et $\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 1$.

3°) Déterminer la position du point K sur la droite (AC).

4°) Déterminer et construire les ensembles :

a) Δ des points M du plan tels que : $\left\|5\overrightarrow{MA} + 10\overrightarrow{MB}\right\| = \left\|9\overrightarrow{MB} + 6\overrightarrow{MC}\right\|$

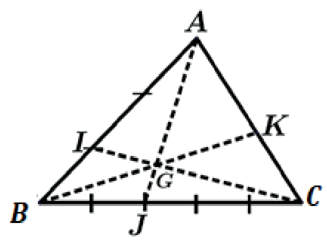
b) Γ des points M du plan tels que : $\left\|3\overrightarrow{MA} + 6\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC}\right\| = \frac{13}{3}\left\|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC}\right\|$

Réponse :

1) I = bar $\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 1 & 2 \end{array}$ $\Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BJ} = \frac{2}{5}\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow$ J = bar

2) a) G ∈ (IC) $\Leftrightarrow$ G = bar $\begin{array}{c|c} I & C \\ \hline 3 & \gamma \end{array}$ $\Leftrightarrow$ G = bar $\begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \hline 1 & 2 & \gamma \end{array}$

G ∈ (JA) $\Leftrightarrow$ G = bar $\begin{array}{c|c} A & J \\ \hline \alpha & 5 \end{array}$ $\Leftrightarrow$ G = bar $\begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \hline \alpha & 3 & 2 \end{array}$



Donc, $\frac{\alpha}{1} = \frac{3}{2} = \frac{2}{\gamma}$; d'où $\alpha = \frac{3}{2}$. Donc G = bar $\begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \hline \frac{3}{2} & 3 & 2 \end{array}$ $\Leftrightarrow$ G = bar $\begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \hline 3 & 6 & 4 \end{array}$

b) G = bar $\begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \hline 3 & 6 & 4 \end{array}$ et 3 + 6 + 4 = 13. Donc, G = bar $\begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \hline \frac{3}{13} & \frac{6}{13} & \frac{4}{13} \end{array}$ et $\frac{3}{13} + \frac{6}{13} + \frac{4}{13} = \frac{13}{13} = 1$

3) G = bar $\begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \hline 3 & 6 & 4 \end{array}$. Soit N = bar $\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline 3 & 4 \end{array}$. On a N ∈ (AC) et G = bar $\begin{array}{c|c} N & B \\ \hline 7 & 6 \end{array}$. Donc N ∈ (AC) et N ∈ (BG). D'où N=K; donc K = bar $\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 5 & 10 \end{array}$ =bar $\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline 9 & 6 \end{array}$

4) a) On a I = bar $\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 1 & 2 \end{array}$ et J = bar $\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline 3 & 2 \end{array}$. Donc, M ∈Δ si, et seulement si, $\|15\overrightarrow{MI}\| = \|15\overrightarrow{MJ}\| \Leftrightarrow$ IM = MJ.

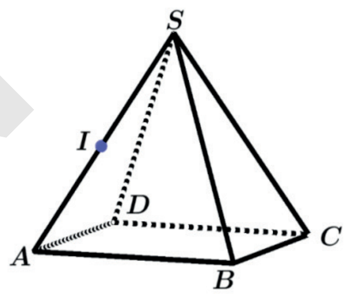
Donc, Δ est la médiatrice du segment [IJ]

b) On a G = bar $\begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \hline 3 & 6 & 4 \end{array}$ et $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB} = 3\overrightarrow{CI}$, donc $M \in \Gamma$ si, et seulement si, $\|13\overrightarrow{MG}\| = \frac{13}{3}\|3\overrightarrow{CI}\|$.

$\Leftrightarrow$ MG = IC. Donc, Γ est le cercle de centre G et de rayon IC.

Exemple 16 : Alignement

SABCD une pyramide de base un parallélogramme ABCD. I est le milieu de [SA] :
G est le centre de gravité du triangle BDS.
Démontrer que les points I ; G ; C sont alignés.



Réponse :

Comme ABCD est un parallélogramme, alors, C = bar $\begin{array}{c|c|c} A & B & D \\ \hline -1 & 1 & 1 \end{array}$

Donc, C = bar $\begin{array}{c|c|c|c|c} A & S & S & B & D \\ \hline -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{array}$. Or, I=bar $\begin{array}{c|c} A & S \\ \hline -1 & -1 \end{array}$ et G = bar $\begin{array}{c|c|c} S & B & D \\ \hline 1 & 1 & 1 \end{array}$

Donc, C = bar $\begin{array}{c|c} I & G \\ \hline -2 & 3 \end{array}$; d'où les points I ; G et C sont alignés.

Exemple 17 : Droites concourantes

ABCD un tétraèdre. G_1 ; G_2 ; G_3 ; G_4 les centres de gravité respectifs des triangles ABC ; ABD ; ACD ; BCD.
Démontrer que les droites (G_1D) ; (G_2C) ; (G_3B) ; (G_4A) sont concourantes.

Réponse:

On a : G_1= bar $\begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \hline 1 & 1 & 1 \end{array}$; G_2 = bar $\begin{array}{c|c|c} A & B & D \\ \hline 1 & 1 & 1 \end{array}$; G_3 = bar $\begin{array}{c|c|c} A & C & D \\ \hline 1 & 1 & 1 \end{array}$; G_4 = bar $\begin{array}{c|c|c} B & C & D \\ \hline 1 & 1 & 1 \end{array}$ Soit G = bar $\begin{array}{c|c|c|c} A & B & C & D \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}$. On a :

$G = bar \begin{array}{c|c} G_1 & D \\ \hline 3 & 1 \end{array}$; G = bar $\begin{array}{c|c} G_2 & C \\ \hline 3 & 1 \end{array}$; G = bar $\begin{array}{c|c} G_3 & B \\ \hline 3 & 1 \end{array}$; G = bar $\begin{array}{c|c} G_4 & A \\ \hline 3 & 1 \end{array}$. . Donc $G \in (G_1D)$; $G \in (G_2C)$; $G \in (G_3B)$; $G \in (G_4A)$.

Donc, les droites (G_1D) ; (G_2C) ; (G_3B) ; (G_4A) sont concourantes en G.

I. Barycentre et géométrie analytique :

Coordonnées du barycentre dans un repère :

- **Barycentre de deux points :**

Dans le plan $\mathcal{P}$ rapporté à un repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$; si $G = bar$ $\begin{array}{|c|c|} \hline A & B \\ \hline \alpha & \beta \\ \hline \end{array}$ $(\alpha + \beta \neq 0)$;

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B}{\alpha + \beta} \\ y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B}{\alpha + \beta} \end{cases}$$ *(Moyenne pondérée des coordonnées de A et B)*

Exemple 18 :

Dans un repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ de $\mathcal{P}$, on donne $A(5; -7)$ et $B(3; 4)$ tels que ; $G = bar$ $\begin{array}{|c|c|} \hline A & B \\ \hline 3 & 4 \\ \hline \end{array}$

Calculer les coordonnées de G.

Réponse :

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{3 \times 5 + 4 \times 3}{3 + 4} = \dfrac{27}{7} \\ y_G = \dfrac{3 \times -7 + 4 \times 4}{3 + 4} = \dfrac{-5}{7} \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{G}\left(\frac{\mathbf{27}}{\mathbf{7}}; \frac{\mathbf{-5}}{\mathbf{7}}\right).$$

- **Barycentre de trois points :**

Dans le plan $\mathcal{P}$ rapporté à un repère $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$;Si $G = bar$

A	B	C
α	β	γ

$(\alpha+\beta+\gamma \neq 0)$;

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \frac{\alpha x_A+\beta x_B+\gamma x_C}{\alpha+\beta+\gamma} \\ y_G = \frac{\alpha y_A+\beta y_B+\gamma y_C}{\alpha+\beta+\gamma} \end{cases}$$ *(Moyenne pondérée des coordonnées de A, B et C)*

Exercice 11 :
Démontrer ces résultats.

Exemple 19 :
Dans le plan $\mathcal{P}$ rapporté à un repère $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$, on donne les points $A(2;\ -3)$, $B(-4;\ -5)$ et $C(6;\ -2)$ tels que ;

Si $G = bar$

A	B	C
7	-8	10

Calculer les coordonnées de G

Réponse :

$$\begin{cases} x_G = \frac{7\times 2 - 8\times(-4) + 10\times 6}{7-8+10} = \frac{106}{9} \\ y_G = \frac{7\times(-3) - 8\times(-5) + 10\times(-2)}{7-8+10} = \frac{-1}{9} \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{G}\left(\frac{\mathbf{106}}{\mathbf{9}};\ \frac{\mathbf{-1}}{\mathbf{9}}\right).$$

Remarque 7 :
Pour montrer que trois points distincts sont alignés, il suffit de montrer que l'un d'eux peut s'écrire comme barycentre des deux autres.

3.Centre d'inertie d'une plaque homogène :

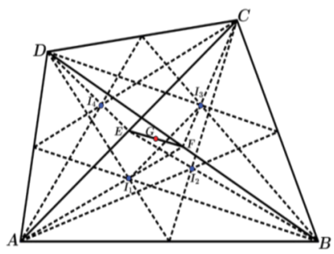
a. Principes généraux :

Soit P une plaque d'épaisseur négligeable. Le centre d'inertie I de la plaque est l'isobarycentre de tous les points de la plaque. *(C'est donc un barycentre d'une infinité de points)*. Il s'agit d'une notion mathématique difficile à définir. Cependant, il est souvent facile de construire le centre d'inertie d'une plaque homogène grâce aux propriétés suivantes (*admis à ce niveau*).

On donne quelques principes utilisés en physique concernant les centres d'inertie des plaques homogènes :

b. Cas simples :

- Le centre d'inertie d'une tige homogène est le point milieu de cette tige.
- Le centre d'inertie d'une plaque homogène triangulaire est le centre de gravité des sommets de ce triangle.
- **Attention !** Le centre d'inertie d'une plaque quadrilatère $ABCD$ est, en général différente de l'isobarycentre des sommets A, B, C et D.

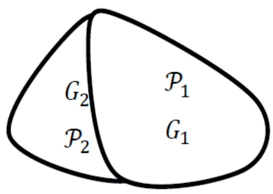


c. Principes de symétrie :

- Si la plaque admet un centre de symétrie I, le centre d'inertie est le point I.
- Si la plaque admet comme axe de symétrie la droite Δ, le centre de symétrie est sur la droite Δ.

d. Principes de juxtaposition et de décomposition :

- Le centre d'inertie d'une juxtaposition de morceaux de tiges homogènes est le barycentre des centres d'inertie de ces morceaux de tige.
- Si une plaque homogèneP_1 d'aire a_1 a pour centre d'inertie I_1 et une plaque P_2 d'aire a_2 a pour centre d'inertie I_2, alors la plaque $P_1 \cup P_2$ admet pour centre d'inertie le barycentre G du système (I_1, a_1) et (I_2, a_2). Comme les plaques sont homogènes, leurs aires a_1 et a_2 sont proportionnelles à leurs masse m_1 et m_2, on a donc aussi *(d'après l'homogénéité des coefficients)* ;$G = bar\{(I_1, m_1);\ (I_2, m_2)\}$.



- Si la plaque $\mathbb{P}$ est décomposable en deux plaques $\mathbb{P}_1$ et $\mathbb{P}_2$, alors le centre d'inertie G de la plaque $\mathbb{P}$ est le barycentre du système $\{(G_1, m_1);\ (G_2, m_2)\}$ où la plaque $\mathbb{P}_1$ a pour masse m_1 et pour centre d'inertie G_1, la plaque $\mathbb{P}_2$ a pour masse m_2 et pour centre d'inertie G_2.

Si la plaque $\mathbb{P}$ est décomposable en plusieurs plaques, on lui applique le même principe.

Exercices Généraux

1. Construire le point $G = bar$

A	B
3	-2

2. A et B sont deux points distincts.

Soit $F = bar$

A	B
2	1

Donner l'abscisse du point F dans le repère $(A\,;\ \overrightarrow{AB})$.

3. A et B sont deux points distincts.

Donner les abscisses des points E, F et G dans le repère $(A;\ \overrightarrow{AB})$, sachant que ;

$E = bar$

A	B
2	3

$F = bar$

A	B
-2	-3

$G = bar$

A	B
-2	3

4. A et B sont deux points distincts.

Donner les abscisses des points F, G et H dans le repère $(A;\ \overrightarrow{AB})$, tels que ;

$F = bar$

A	B
2	5

$G = bar$

A	B
-3	5

$H = bar$

A	B
4	-1

5. Construisons le point $G = bar$

A	B
-2	3

6. Construire le point $G = bar$

A	B
-3	2

7. Soit le triangle ABC.

On considère $G = bar$

A	B	C
1	1	2

Construire G

8. ABC est un triangle non aplati.

$G = bar$

A	B	C
1	2	3

Construire G en utilisant la méthode des coordonnées de G dans le repère $(A;\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, puis en utilisant la méthode de l'associativité (*barycentre partiel*).

9. Soit ABC un triangle non aplati. En utilisant la méthode des barycentres partiels, construire le barycentre G du système $\{(A,3);\ (B,4);\ (C,5)\}$.

Problème d'alignement

10. Soit ABC et $A'B'C'$ deux triangles non aplatis de centre de gravité respectifs G et G'.

1°) Montrer que ; $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = 3\overrightarrow{GG'}$

2°) En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que $G = G'$.

11. ABC est un triangle non aplati. I, J et K sont des points tels que ; $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{CJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CB}$ $\ et\ $ $\overrightarrow{CK} = \frac{2}{5}\overrightarrow{CA}$.

1°) Faire une figure ;

2°) Démontrer que les droites (AJ),(BK) et (CI) sont concourantes.

12. Soit ABC un triangle non aplati. Soient :

$I = bar$

A	B
1	2

$J = bar$

B	C
-1	3

$K = bar$

A	C
1	-6

1°) Placer les points $I, J\ et\ K$;

2°) Montrer que (IC), (AJ) et (BK) sont concourantes.

13. ABC est un triangle non aplati de centre de gravité le point G.

Soit $I = B * C$. La parallèle à (BC) passant par G coupe (AC)en E.

1°) Placer le point D tel que ; $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB}$

2°) Montrer que ; $E = bar$

A	C
1	2

3°) Montrer que $B = A * D$

4°) Montrer que ; $I = bar$

A	D	C
1	1	2

En déduire que D, I et E sont alignés, puis préciser la position de I sur (DE).

14. ABC est un triangle non aplati. D, E et F sont des points définis par les relations ;

$\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AE} = -3\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{CF} = 2\overrightarrow{CB}$.

1°) a) Exprimer D, E et F sous forme de barycentres ;

b) Placer D, E et F sur la figure ;

2°) a) Montrer que D, E et F sont alignés ;

b) Exprimer $\overrightarrow{ED}$ et $\overrightarrow{EF}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$;

c) En utilisant le résultat $3\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{CE} + 2\overrightarrow{CD}$,

Montrer que ; $B = bar$

C	D	E
3	2	1

3°)(EB) coupe (CD)en G, préciser la position de G sur (CD).

15. Soit ABC un triangle non aplati. On désigne par D le symétrique de B par rapport à A.

Soit $I = A * C$ et J le point tel que ; $\overrightarrow{BJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.

1°) Démontrer que D, I et J sont alignés ;

2°) Faire une figure.

16. ABC est un triangle non aplati. I est le point tel que ; $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$. D est le symétrique de B par rapport à A.

(BI) et (CD) se coupent en G.

La parallèle à (AB) menée de C coupe (BI) en H.

$F = bar$

A	B	C
3	-2	1

1°) Faire une figure ;

2°) a) Déterminer les réels α, β et γ tels que ;

$G = bar$

A	B	C
α	β	γ

b) Déterminer x, y et z tels que ;

$H = bar$

A	B	C
x	y	z

Problème de concours de droites

17. ABC est un triangle non aplati, les points P, Q et R sont tels que ; $\overrightarrow{AP} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BQ} = \frac{4}{7}\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AR} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

Montrer que les droites (AQ) ; (BR) et (CP) sont concourantes.

Problème de parallélisme de droites

18. ABC est un triangle non aplati, les points E et F sont définis par ; $\overrightarrow{AE} = \frac{5}{7}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AF} = \frac{7}{5}\overrightarrow{AC}$

Montrer que les droites (CE) et (BF) sont parallèles.

Parallélisme de trois droites

19. ABC est un triangle non aplati.

On donne $\vec{u} = \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC}$.

1°) Montrer que le vecteur $\vec{u}$ est indépendant du choix du point M.

2°) Soit $P = bar$

A	B
1	2

, $Q = bar$

A	C
1	-3

$R = bar$

B	C
2	-3

Montrer que les droites ; (AR); (BQ) et (CP) sont parallèles.

20. $ABCD$ est un carré de centre O.

I, J, K et L sont les milieux respectifs des côtés $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$. On pose ; $P = (AJ) \cap (DI)$;

$$Q = (AJ) \cap (BK)$$

$$R = (CL) \cap (BK) \ ; \qquad S = (CL) \cap (DI)$$

1°) a) Faire une figure

b) Exprimer P comme ;

- Barycentre de A et J,
- Barycentre de D et I,
- Barycentre de A, B et C,
- Barycentre de A, B et D,

2°) Exprimer Q comme ;

a) Barycentre de A et J,
b) Barycentre de B et K,
c) Barycentre de A, B et C,
d) Barycentre de B, C et D,

3°) Peut-on exprimer P, Q, R ou S comme barycentres des points A, B, C et D ?

4°) En utilisant le point O, montrer que $PQRS$ est un carré.

Fonction vectorielle de Leibniz

Détermination du lieu géométrique

21. ABC est un triangle non aplati.

1°) Construire les points

$E = bar$

A	B	C
2	3	-1

2°) Déterminer et construire l'ensemble Γ des points M tels que ;

$\|2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\| = 2\|3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\|$.

3°) Déterminer et construire l'ensemble Π des point M tels que ;

$\|2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\| = 4$.

22. Soit A, B et C trois points fixés du plan $\mathcal{P}$.

A tout point M du plan $\mathcal{P}$ on associe les fonctions vectorielles ;

$\overrightarrow{f(M)} = 2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$.

Et $\overrightarrow{g(M)} = \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$

1°) Calculer $\overrightarrow{f(A)}$, $\overrightarrow{f(B)}$ et $\overrightarrow{f(C)}$,

2°) Soit $G = bar$

A	B	C
2	3	-1

Calculer $\overrightarrow{f(G)}$,

3°) Exprimer $\overrightarrow{f(M)}$ en fonction de $\overrightarrow{MG}$,

4°) Soit $F = bar$

A	B	C
1	3	1

Déterminer l'ensemble des points M tels que ;

$\|\overrightarrow{f(M)}\| = \|\overrightarrow{g(M)}\|$,

5°) Déterminer l'ensemble des points M tels que ;

$\|\overrightarrow{f(M)}\| = AB$ et $\|\overrightarrow{g(M)}\| = BC$.

23. $ABCD$ est un carré de côté 5cm. On définit les fonctions suivantes ; $\overrightarrow{f(M)} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$ et

$$\overrightarrow{g(M)} = 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD}$$

1°) Déterminer ; $\overrightarrow{f(A)}$, $\overrightarrow{f(B)}$, $\overrightarrow{f(C)}$ et $\overrightarrow{f(D)}$,

2°) Déterminer $\overrightarrow{f(O)}$, O centre du carré ;

3°) Déterminer ; $\overrightarrow{g(A)}$, $\overrightarrow{g(B)}$, $\overrightarrow{g(C)}$ et $\overrightarrow{g(D)}$;

4°) Soit $G = bar$

A	B	C	D
2	-1	4	-1

Déterminer $\overrightarrow{g(G)}$,

5°) Déterminer puis construire les ensembles suivants ;

E_1: $\|\overrightarrow{f(M)}\| = 10\sqrt{2}$

E_2: $\|\overrightarrow{f(M)}\| = 10$

E_3: $\|\overrightarrow{f(M)}\| = \|\overrightarrow{g(M)}\|$

6°) Faire une figure.

Barycentre et géométrie analytique

24. Le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on donne les points $A(-3,2)$, $B(4,5)$ et $C(2,-4)$ et soit les points ;

$P\left(\frac{11}{6}, 0\right)$; $Q\left(8, \frac{-11}{2}\right)$; $R(-5,-7)$.

1°) Montrer que ;$P = bar$ $\begin{array}{|c|c|c|} \hline A & B & C \\ \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline \end{array}$

2°) Montrer que ; $Q = bar$ $\begin{array}{|c|c|c|} \hline A & B & C \\ \hline -2 & 1 & 3 \\ \hline \end{array}$

3°) Montrer que ; $R = bar$ $\begin{array}{|c|c|c|} \hline A & B & C \\ \hline 1 & -1 & 1 \\ \hline \end{array}$

4°) Quelle est la nature du quadrilatère $ABCR$?

25. Etant donné un triangle ABC non aplati et un réel k, on considère les points A'; B' et C' tels que ;

$\overrightarrow{AB'} = k\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BC'} = k\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{CA'} = k\overrightarrow{CA}$.

Démontrer que les triangles ABC et $A'B'C'$ ont le même centre de gravité.

26. On se donne un triangle ABC non aplati et un point O vérifiant ;$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$ et $OA = OB = OC$.

Montrer que le triangle ABC est équilatéral en montrant que les médianes sont aussi les médiatrices.

27. On se donne un triangle ABC non aplati.Pour tout point M de $\mathcal{P}$ on pose ;$\overrightarrow{f(M)} = 2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$

1°) P désignant un point quelconque de $\mathcal{P}$, prouver que ;

$\overrightarrow{f(M)} = \overrightarrow{f(P)}$ $(f\ constante)$

2°) Construire G_1 barycentre de $(B;\ -3)$ et $(C; 1)$

Montrer que ; $\overrightarrow{f(M)} = 2\overrightarrow{G_1A}$.

3°) Construire G_2 barycentre de $(A;\ 2)$ et $(C; 1)$

Montrer que ; $\overrightarrow{f(M)} = 3\overrightarrow{BG_2}$.

4°) On désigne par G_3 le barycentre de $(B;\ -3)$ et $(A; 2)$. Montrer que les droites ;(AG_1) ; (BG_2) et (CG_3) sont parallèles.

5°) En déduire une construction de G_3.

28. Etant donné un triangle ABC non aplati, construire les points I, J et K définis par ;

- I est le barycentre de $(A\ ; 2)$ et $(C\ ; 1)$;
- J est le barycentre de $(A\ ; 1)$ et $(C\ ; 2)$;
- K est le barycentre de $(C\ ; 1)$ et $(B\ ; -4)$.

1°) Démontrer que B est le barycentre de $(K\ ; 3)$ et $(C\ ; 1)$.

2°) Quel est le barycentre de $(A\ ; 2), (K\ ; 3)$ et $(C; 1)$?

3°) Déduire du 2° que I, J, K sont alignés et que J est le milieu de $[IK]$.

4°)L étant le milieu de $[CI]$, et M celui de $[KC]$, démontrer que $IJML$ est un parallélogramme dont le centre G est l'isobarycentre de A, B, C.

29. On se donne deux points A et B distints, deux réels α et β $(\alpha + \beta \neq 0 et \beta \neq 0)$ et un vecteur $\vec{u}$ non nul. I est le barycentre de $(A;\ \alpha)$ et $(B;\ \beta)$.

1°) M_0 étant un point fixé, construire N_0 tel que I soit le barycentrede $(M_0;\ \alpha)$ et $(N_0;\ \beta)$.

2°) Un point M décrit la droite Δ passant par M_0 et de vecteur directeur $\vec{u}$.

On désigne par N les points tel que I soit le barycentre de $(M;\ \alpha)$ et $(N;\ \beta)$.

Quel est l'ensemble des points N ?

30.1°) On désigne par ABC un triangle non aplati et par G le barycentre de $(A; \alpha), (B; \beta), (C; \gamma) (\alpha + \beta + \gamma \neq 0)$

Donner les coordonnées de G dans le repère (A, B, C).

2°) Un point M a pour coordonnées (x, y) dans le repère (A, B, C). Déterminer α, β et γ de façon que M soit le barycentre $(A; \alpha), (B; \beta), (C; \gamma)$ et que $\alpha + \beta + \gamma = 1$.

3°) Quel est l'ensemble $\mathcal{D}$ des points G barycentres de $(A; \alpha), (B; 2\alpha), (C; 1 - 3\alpha)$ lorsque α décrit $\mathbb{R}$?

4°) Donner l'équation de $\mathcal{D}$ dans le repère (A, B, C).

31. Dans chacun des cas suivants, construire les barycentres indiqués.

1°) [AB] un segment ; $G = \text{bar} \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 1 & 2 \end{array}$

2°) [AB] un segment ; $I = \text{bar} \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 2 & -1 \end{array}$; $J = \text{bar} \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline -1 & 2 \end{array}$

Montrer que les segments [AB] et [IJ] ont même milieu G.

3°) ABC un triangle ; $I = \text{bar} \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline -2 & 3 \end{array}$; $J = \text{bar} \begin{array}{c|c} B & C \\ \hline 1 & 4 \end{array}$; $K = \text{bar} \begin{array}{c|c} A & C \\ \hline 1 & -2 \end{array}$

32. Soit A et B deux points du plan. Construire les points suivants :

$G_1 = \text{bar} \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 1 & 2 \end{array}$; $G_2 = \text{bar} \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline -3 & 2 \end{array}$; $G_3 = \text{bar} \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 1 & -3 \end{array}$

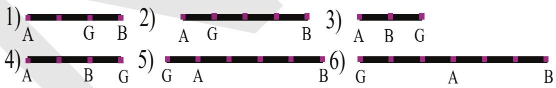
33. Exprimer le point G comme barycentre des points A et B dans chacun des cas :

1)$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$; 4)$\overrightarrow{BG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$; 7)$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG} = \vec{0}$

2)$\overrightarrow{AG} = -\overrightarrow{AB}$; 5)$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$; 8)$3\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{AG} = \vec{0}$

3)$\overrightarrow{AG} = \frac{-2}{5}\overrightarrow{AB}$; 6)$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$; 9)$-2\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{AG} = \vec{0}$

34. Dans les cas suivants exprimer G comme barycentre des points A et B.



35.ABC un triangle, I, J , K les points tels que :

$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BJ} = -\frac{4}{5}\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{CK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

1°) Faire une figure.

2°) Compléter les tableaux :

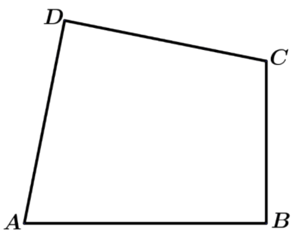
$I = \text{bar} \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline & \end{array}$; $J = \text{bar} \begin{array}{c|c} B & C \\ \hline & \end{array}$; $K = \text{bar} \begin{array}{c|c} A & C \\ \hline & \end{array}$

36.ABC trois points tels que : $5\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$

1°) Exprimer A comme barycentre des points B et C.

2°) Exprimer B comme barycentre des points A et C.

3°) Exprimer C comme barycentre des points A et B.



Placer le point G sachant qu'il est barycentre des points A et C d'une part et des points B et D d'autre part. Justifier.

37.A et B deux points distincts, déterminer le réel x dans chacun des cas :

1) $\text{bar} \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 2 & 3 \end{array} = \text{bar} \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 10 & x \end{array}$

2) $\text{bar} \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 1 & 3 \end{array} = \text{bar} \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline x+2 & x-3 \end{array}$

3) $\text{bar} \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 2x+1 & x-3 \end{array}$ est le milieu de [AB].

38. A et B deux points distincts donnés dans le plan. D est une droite dans le plan ;
Déterminer l'ensemble (E) des barycentre des points A et B, appartenant à D.

39. ABC un triangle ; I milieu de [AB].

$H = \text{bar}\begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \hline 1 & 1 & 2 \end{array}$; $Z = \text{bar}\begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \hline 1 & 1 & -1 \end{array}$

1°) Faire une figure.
2°) Soit G le centre de gravité du triangle ZAH.
Exprimer G comme barycentre des points A ; B ; C.

40. ABC un triangle $I = \text{bar}\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 1 & 3 \end{array}$; $J = \text{bar}\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline 2 & 3 \end{array}$
$K = \text{bar}\begin{array}{c|c} C & A \\ \hline 1 & -2 \end{array}$
Les droites (AJ) et (BK) se coupent en G_1
Les droites (AJ) et (CI) se coupent en G_2
Les droites (BK) et (CI) se coupent en G_3.
Placer les points cités sur une figure.
Exprimer chacun des points G_1 ; G_2 ; G_3 comme barycentre des points A ; B ; C.

41. ABCD un quadrilatère dans le plan. G est l'isobarycentre des points ABC. O est l'isobarycentre des points A ; B ; C ; D.
Montrer que les points O ; G ; D sont alignés.

42. ABC un triangle. $I = \text{bar}\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 1 & 2 \end{array}$; $J = \text{bar}\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline -1 & 3 \end{array}$ et $K = \text{bar}\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline 1 & -6 \end{array}$
1°) Placer les points cités sur une figure.
2°) Démontrer que les droites (IC) ; (JA) et (KB) sont concourantes.

43. ABC un triangle non aplati. $I = \text{bar}\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 2 & 1 \end{array}$ et $J = \text{bar}\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline 3 & 2 \end{array}$
.
Les droites (IC) et (JB) se coupent en G.
On muni le plan du repère (A ; B ; C).
1°) a) Donner les coordonnées de chacun des points A ; B ; C ; I ; J.
b) Déterminer une équation cartésienne de chacune des droites (IC) et (JB).
c) En déduire les coordonnées du point G.
2°) Exprimer G comme barycentre des points A ; B ; C.

44. ABC un triangle. D est symétrique de A par rapport au milieu de [BC]. $I = \text{bar}\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 1 & 2 \end{array}$. La parallèle à (AD) passant par B coupe (IC) en G.
1°) Faire une figure.
2°) Exprimer G comme barycentre des points A ; B ; C.
3°) Déterminer et construire l'ensemble (Δ) des points M du plan tels que $\left\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right\| = \left\|-3\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}\right\|$.
4°) Déterminer et construire l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que : $\left\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\| = \left\|2\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}\right\|$.

45. Soient A ; B ; C trois points donnés. M étant un point quelconque, exprimer chacun des vecteurs suivants en fonction de $\overrightarrow{MG}$ ou G est un point à préciser.
1) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$;
4) $\overrightarrow{AM} + 3\overrightarrow{MB}$
2) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$;
5) $2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$
3) $2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB}$;
6) $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}$

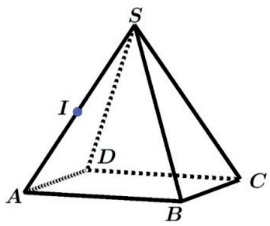
46. Soit A ; B ; C trois points donnés. M étant un point quelconque, déterminer le vecteur indiqué dans chacun des cas suivants :
1) $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}$;
3) $3\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB}$
2) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}$;
4) $-2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MC}$

47. ABC un triangle. t est un réel. Soit G_t le barycentre du système $\{(A ; 2t+1) ; (B ; -t) ; (C ; 1)\}$
1°) Déterminer l'ensemble des valeurs de t pour lesquelles le point G_t est défini.
2°) Le point G_t peut-il être
a) l'un des sommets du triangle ABC ?
b) situé sur l'une des droites (AB) ; (AC) ; (BC) ?
c) centre de gravité de ABC ?
3°) Construire G_0 ; G_{-1} ; G_1

48. ABC un triangle. m un réel. On pose :
$G_m = \text{bar}\{(A ; 1) ; (B ; m) ; (C ; -m)\}$
$H_m = \text{bar}\{(A ; 1-2m);(B ; m); (C ; m)\}$
1°) a) Montrer que G_m et H_m existent pour toute valeur de m. Que peut-on dire des points G_0 et H_0.
b) Pour $m \neq 0$, peut-on avoir $G_m = H_m$?
2°) a) Déterminer et construire le lien géométrique du point G_m lorsque m varie dans $\mathbb{R}$.
b) Déterminer et construire le lien géométrique du point H_m lorsque m varie dans $\mathbb{R}$.

Alignement

49. SABCD une pyramide de base un parallélogramme ABCD.
I est le milieu de [SA] :
G est le centre de gravité du triangle BDS. Démontrer que les points I ; G ; C sont alignés.



Droites concourantes

50. ABCD un tétraèdre. G_1 ; G_2 ; G_3 ; G_4 les centres de gravité respectifs des triangles ABC ; ABD ; ACD ; BCD. Démontrer que les droites (G_1D) ; (G_2C) ; (G_3B) ; (G_4A) sont concourantes.

Chapitre 7 : ANGLES ORIENTES –TRIGONOMETRIE

I. Trigonométrie :

1. Angles orientés et cercle trigonométrique :

a. Le cercle trigonométrique :

Définition :

Soit (O, I, J) un repère orthonormé tel que $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OJ}$ sont deux vecteurs unitaires.
Le cercle trigonométrique (Γ)est le cercle de centre O(*origine du repère*) et de rayon $OI = OJ = 1$.

b. Mesure d'un angle en radian :

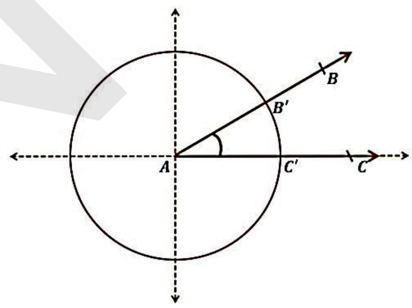
Soit un angle géométrique $\widehat{BAC}$ (*mesuré en degré*).Le cercle trigonométrique de centre A, est de périmètre 2π.
Il coupe les demi-droites $[AB)$ et $[AC)$ respectivement en C'et B'.
La mesure en radian de l'angle $\widehat{BAC}$ est égale à la longueur de l'arc **BC**
Le tableau suivant donne la correspondance entre différentes unités de mesures angulaires.

Mesure en degré (°)	180	90	60	45	30	0	x
Mesure en radian	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0	y
Mesure en grade	200	100	$\frac{200}{3}$	50	$\frac{100}{3}$	0	z

Il s'agit d'un tableau de proportionnalité : $y = \frac{\pi}{180}x,\ z = \frac{10}{9}x$

Exemple 1 : Compléter le tableau

Mesure en degré	75		
Mesure en radian		$\frac{\pi}{2}$	
Mesure en grade			40



Réponse :

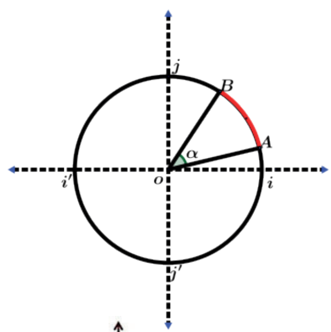
Comme ce tableau présente un tableau de proportionnalité, on a :

$y = \frac{\pi}{180}x$ et $z = \frac{10}{9}x$. Avec x = 75, on a $y = \frac{\pi}{180}(75) = \frac{5\pi}{12}$; $z = \frac{10}{9}(75) = \frac{250}{3}$.

Avec $y = \frac{\pi}{12}$, on a $x = \frac{180}{\pi}\frac{\pi}{12} = 15$; $z = \frac{10}{9}(15) = \frac{50}{3}$.Avec z = 40, on a $x = \frac{9}{10}40 = 36$; $y = \frac{\pi}{180}(36) = \frac{\pi}{5}$.

Dans la suite de ce chapitre sauf précision contraire, les mesures des angles seront données en radian.
Sur un cercle de rayon R, la longueur de l'arc $\widehat{AB}$ intercepté par un angle au centre de mesure α*(en radian)* est $R\alpha$.Le périmètre de ce cercle est $2\pi R$.

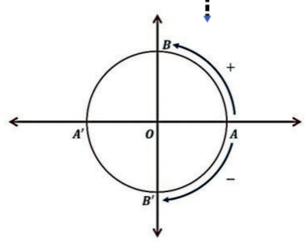
Mesure en degré	**75**	**15**	**36**
Mesure en radian	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{5}$
Mesure en grade	$\frac{250}{3}$	$\frac{50}{3}$	**40**



c. Le plan orienté :

Un plan est orienté lorsqu'on distingue deux sens de parcours sur chacun de ses cercles.

- Un sens positif ou direct qui est le sens contraire à la rotation des aiguilles d'une montre*(sens antihoraire)*.
- Un sens négatif ou indirect qui est le sens de la rotation des aiguilles d'une montre *(sens horaire)*.



d. Mesure principale de l'angle orienté :

Définition :

Soit α un nombre réel et $\hat{A}$ un angle orienté de mesure α. On considère x comme mesure principale de l'angle orienté $\hat{A}$ si ;

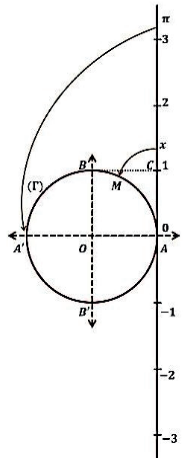
$$\boldsymbol{\alpha = x\ [2\pi]}$$
$$ou$$
$$\boldsymbol{\alpha = x + 2k\pi}\quad (avec\ k \in \mathbb{Z})$$

Tel que ; $-\pi < x \leq \pi$ ou $-180° < x \leq 180°$(x *comprise entre* $-180°$ *et* $180°$ *ou entre* $-\pi$ *et* π *radians).*

Exemple 2 :

Donner les mesures principales des angles orientés suivants :

$\frac{25\pi}{2}$; $\frac{-31\pi}{5}$; $\frac{7\pi}{4}$; $-\frac{121\pi}{3}$



Réponse :

- $\frac{25\pi}{2} = \frac{24\pi + \pi}{2} = \frac{24\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = 12\pi + \frac{\pi}{2} = 6 \times (2\pi) + \frac{\pi}{2} \Rightarrow \boldsymbol{\frac{25\pi}{2} = \frac{\pi}{2}[2\pi]}$
- $\frac{-31\pi}{5} = \frac{-30\pi - \pi}{5} = \frac{-30\pi}{5} + \frac{-\pi}{5} = -6\pi + \frac{-\pi}{5} \Rightarrow \boldsymbol{\frac{-31\pi}{5} = \frac{-\pi}{5}}\ [2\pi]$
- $\frac{7\pi}{4} = \pi + \frac{3\pi}{4} \Rightarrow \boldsymbol{\frac{7\pi}{4} = -\frac{\pi}{4}[2\pi]}$
- $-\frac{121\pi}{3} = \frac{-120\pi - \pi}{3} = -\frac{120\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = -40\boldsymbol{\pi} - \frac{\pi}{3} \Rightarrow -\boldsymbol{\frac{121\pi}{3} = -\frac{\pi}{3}[2\pi]}$

Exemple 3 :

Sachant que$(\widehat{\vec{u};\vec{v}}) = \frac{200\pi}{3}$. Déterminer la mesure principale α de l'angle $(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$.

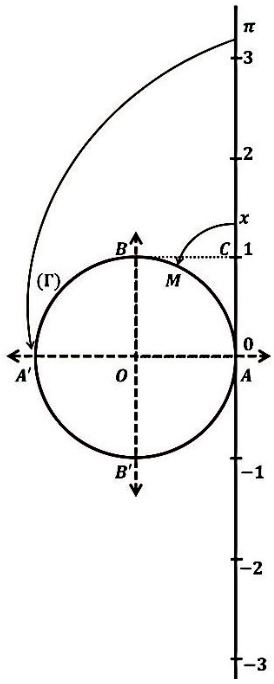
Réponse :

On a : $\alpha = \frac{200\pi}{3} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, et $-\pi<\alpha\leq\pi$. Donc, $-\pi< \frac{200\pi}{3} + 2k\pi\leq\pi$;

$-1 - \frac{200}{3} < 2k \leq 1 - \frac{200}{3} \Leftrightarrow \frac{-203}{6} < k \leq \frac{-197}{6}$. Donc, $-33{,}8 < k \leq -32{,}8$. ; Or $k \in \mathbb{Z}$, donc $k = -33$.

D'où $\alpha = \frac{200\pi}{3} + 2(-33)\ \pi = \frac{200\pi}{3} - 66\pi = \frac{200\pi - 198\pi}{3} \Rightarrow \alpha = \frac{2\pi}{3}$.

e. Représentation des réels sur le cercle trigonométrique :



Le cercle trigonométrique est un cercle (Γ) de rayon 1.

Son périmètre est donc égal à 2π.

A tout réel x, on associe un point M de (Γ) de la façon suivante :

Au réel 0, on associe le point A (*voir figure ci-contre*).

A un réel $x > 0$, on associe le point M tel que l'arc $\widehat{AM}$ parcouru dans le sens positif sur (Γ), ait pour longueur x.

A un réel $x < 0$, on associe le point M tel que l'arc $\widehat{AM}$ parcouru dans le sens négatif sur (Γ), ait pour longueur $|x|$.

Pour visualiser cette fonction de $\mathbb{R}$ dans (Γ), soit (Δ) la tangente à (Γ) en A.

Munissons (Δ) du repère (A ; C) tel que $OACB$ soit un carré.

On peut considérer que (Δ) est un fil gradué représentant $\mathbb{R}$ que l'on enroule sur (Γ).

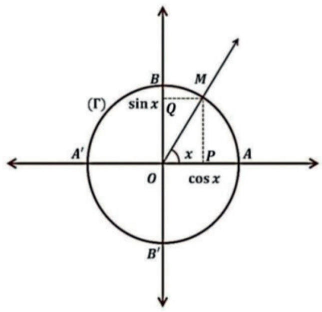
A tout réel x correspond bien un seul point M du cercle trigonométrique (Γ) (*voir figure*).

Soit x un réel et M le point correspondant du cercle trigonométrique, on dit que x est une mesure en radian de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OM}})$.

L'ensemble des mesures en radian de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OM}})$ est l'ensemble des réels de la forme $x + 2k\pi$avec $k \in \mathbb{Z}$.

$(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}}) = x \Leftrightarrow (\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}}) = x + 2k\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

2) Cosinus et sinus d'un réel :



Soit x un réel et M le point du cercle trigonométrique tel que : $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OM}\right)=x$

Dans le repère orthonormal direct $(O;A;B)$, on a :

- $\cos x$ est l'abscisse du point M.
- $\sin x$ est l'ordonnée du point M.

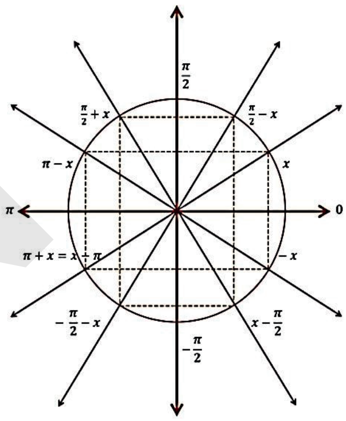
Avec P et Q projetés orthogonaux de M respectivement sur (OA)et (OB).

On a : $\cos x=\overline{OP}$ et $\sin x=\overline{OQ}$.

a. Propriétés :

- Des réels x et y vérifient $\begin{cases}\cos x=\cos y\\ \sin x=\sin y\end{cases}$ si et seulement si il existe un entier relatif k tel que : $x=y+2k\pi$.
- Pour tout réel x, on a : $-1\leq\cos x\leq 1$; $-1\leq\sin x\leq 1$; $\cos^2 x+\sin^2 x=1$.
- $\forall x\in\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$; $\cos x\geq 0$ etsin $x\geq 0$
- $\forall x\in\left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]$; $\cos x\geq 0$
- $\forall x\in[0\,;\pi]$; $\sin x\geq 0$.

b. Lignes trigonométriques –Angles associés – Angles remarquables :



Soit $\hat{A}$ un angle orienté de mesure α. Les angles $-\alpha,\ \pi-\alpha,\ \pi+\alpha,\ \frac{\pi}{2}+\alpha$;

sont habituellement appelés angles associés à $\hat{A}$.

Propriétés :

Pour tout réel x (*fig. ci-contre*) on a :

- $\cos(-x)=\cos(x)$, et $\sin(-x)=-\sin(x)$.
- $\cos(\pi+x)=-\cos x$, et $\sin(\pi+x)=-\sin x$.
- $\cos(\pi-x)=-\cos x$, et $\sin(\pi-x)=\sin x$.

Pour tout réel x (*fig. ci-contre*) on a :

- $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x$, et $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x$.
- $\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin x$, et $\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x$.

Remarque 1 :

Les tangentes des angles associés se déduisent des formules précédentes.

Ainsi : $tan(\pi-\alpha)=\dfrac{sin(\pi-\alpha)}{cos(\pi-\alpha)}=\dfrac{sin\,\alpha}{-cos\,\alpha}=-tan\,\alpha$.

Exemple 4 :

Sachant que : $\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$, calculer $\cos\frac{5\pi}{6}$, $\cos\frac{7\pi}{6}$ et $\cos\frac{2\pi}{3}$.

1) $\cos\frac{5\pi}{6}$ *et* $\sin\frac{5\pi}{6}$; **2)** $\cos\frac{7\pi}{6}$ *et* $\sin\frac{7\pi}{6}$; **3)** $\cos\frac{\pi}{3}$ *et* $\sin\frac{\pi}{3}$; **4)** $\cos\frac{2\pi}{3}$ *et* $\sin\frac{2\pi}{3}$

Réponse :

1) $\cos\frac{5\pi}{6}=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=-\cos\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\frac{5\pi}{6}=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$

2) $\cos\frac{7\pi}{6}=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=-\cos\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ *et* $\sin\frac{7\pi}{6}=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2}$

3) $\cos\frac{\pi}{3}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$ *et* $\sin\frac{\pi}{3}=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

4) $\cos\frac{2\pi}{3}=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2}$ *et* $\sin\frac{2\pi}{3}=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

Exemple 5 :

1) Compléter le tableau suivant :

x	$\frac{-\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{6}$
$cos\,x$			
$sin\,x$			
$tan\,x$			
$cotan x$			

2) Déterminer θ dans chacun des cas suivants :

a) $\begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$; **b)** $\begin{cases} \cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \frac{-\sqrt{2}}{2} \end{cases}$; **c)** $\begin{cases} \cos\theta = \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = \frac{1}{2} \end{cases}$; **d)** $\begin{cases} \cos\theta = \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \frac{-1}{2} \end{cases}$

Réponse :

1) Voici le tableau complété

$pour\ x = \frac{-\pi}{3}$

$$\cos\left(\frac{-\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\sin\left(\frac{-\pi}{3}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan\left(\frac{-\pi}{3}\right) = \frac{\sin\left(\frac{-\pi}{3}\right)}{\cos\left(\frac{-\pi}{3}\right)} = \frac{\frac{-\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = -\sqrt{3}$$

$$cotan\left(\frac{-\pi}{3}\right) = \frac{\cos\left(\frac{-\pi}{3}\right)}{\sin\left(\frac{-\pi}{3}\right)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{-\sqrt{3}}{2}} = \frac{-\sqrt{3}}{3}$$

$pour\ x = \frac{3\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{4}$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)}{\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = -1$$

$$cotan\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -1$$

x	$\frac{-\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{6}$
$cosx$	$\frac{1}{2}$	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$
$sinx$	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{-1}{2}$
$tanx$	$-\sqrt{3}$	-1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$cotanx$	$\frac{-\sqrt{3}}{3}$	-1	$\sqrt{3}$

$pour\ x = \frac{7\pi}{6} = \pi + \frac{\pi}{6}$

$$\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{-1}{2}$$

$$\tan\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \frac{\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)}{\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)} = \frac{\frac{-1}{2}}{\frac{-\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$cotan\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \frac{\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)}{\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)} = \frac{\frac{-\sqrt{3}}{2}}{\frac{-1}{2}} = \sqrt{3}$$

2)a) $\begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\theta = \cos\frac{\pi}{3} \\ \sin\theta = \sin\frac{\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$ **b)** $\begin{cases} \cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \frac{-\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\theta = \cos\frac{-\pi}{4} \\ \sin\theta = \sin\frac{-\pi}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \theta = \frac{-\pi}{4}$

c) $\begin{cases} \cos\theta = \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\theta = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) \\ \sin\theta = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \theta = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$

d) $\begin{cases} \cos\theta = \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = \frac{-1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\theta = \cos\left(-\pi + \frac{\pi}{6}\right) = cos\left(\frac{-5\pi}{6}\right) \\ \sin\theta = \sin\left(-\pi + \frac{\pi}{6}\right) = sin\left(\frac{-5\pi}{6}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \theta = \frac{-5\pi}{6}.$

c. Tableau de valeurs trigonométriques de certains angles remarquables :

- **Pour les mesures principales positives :**

α en radian	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{-1}{2}$	-1
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0
$\tan x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	⊠	$\frac{-1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	0
$\text{cotan}\, x$	⊠	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\sqrt{3}$	-1	$\frac{-1}{\sqrt{3}}$	⊠

- **Pour les mesures principales négatives :**

α en radian	0	$\frac{-\pi}{6}$	$\frac{-\pi}{4}$	$\frac{-\pi}{3}$	$\frac{-\pi}{2}$	$\frac{-5\pi}{6}$	$\frac{-3\pi}{4}$	$\frac{-2\pi}{3}$	$-\pi$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{-1}{2}$	-1
$\sin x$	0	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	-1	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	0
$\tan x$	0	$\frac{-1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	⊠	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	0
$\text{cotan}\, x$	⊠	$-\sqrt{3}$	-1	$\frac{-1}{\sqrt{3}}$	0	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	⊠

3.Equations trigonométriques :

a. Type $\sin x = a$, avec $-1 \leq a \leq 1$:

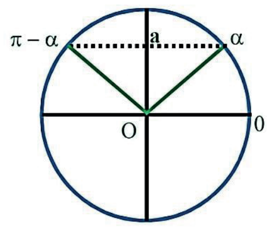
On distingue les cas suivants :

⌂ Si $a < -1$ ou $a > 1$, pas de solution, car, pour tout nombre réel x, on a : $-1 \leq \sin x \leq 1$.

⌂ Si $a \in [-1\,;\ 1]$, il existe un nombre réel α tel que $\sin\alpha = a$.

C.-à-d. si $a \notin [-1; 1]$, alors l'ensemble des solutions de l'équation $\sin x = a$ est $S = \phi$

Si $a \in [-1; 1]$, alors il existe un réel α tel que $\sin\alpha = a$. On a donc ;



$\sin x = a \Leftrightarrow \sin x = \sin\alpha \Leftrightarrow x \equiv \alpha\,[2\pi]\ \ ou\ x \equiv \pi - \alpha\,[2\pi],$

c'est-à-dire : $\begin{cases} x = \alpha + 2k\pi \\ \quad ou \\ x = \pi - \alpha + 2k\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$

Exemple 6 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations : **1°)** $\sqrt{3}\sin x = \frac{3}{2}$ **2°)** $3\sin 2x = 0$ **3°)** $5\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{\frac{75}{4}}$

Réponse :

$$\mathbf{1°)}\ \sqrt{3}\sin x = \frac{3}{2} \Longrightarrow \sin x = \frac{3}{2} \times \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Longrightarrow \sin x = \sin\frac{\pi}{3} \Longrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + 2k_1\pi \\ \quad ou \\ x = \frac{2\pi}{3} + 2k_2\pi \end{cases} \quad k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$$

$$\Longrightarrow S = \left\{\frac{\pi}{3} + 2k_1\pi \ \ ;\ \ \frac{2\pi}{3} + 2k_2\pi \ /\ k_1, k_2 \in \mathbb{Z}\right\}$$

$\mathbf{2°)}$ $3\sin 2x = 0 \Longrightarrow \sin 2x = \sin 0 \Longrightarrow \begin{cases} 2x = 2k_1\pi \\ ou \\ 2x = (2k_2+1)\pi \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2k_1\pi}{2} = k\pi \\ ou \\ x = \dfrac{(2k_2+1)\pi}{2} \end{cases}$

$\Longrightarrow \mathcal{S} = \left\{k_1\pi ou \dfrac{(2k_2+1)\pi}{2} \;/\; k_1, k_2 \in \mathbb{Z}\right\}$

$\mathbf{3°)}$ $5\sin\left(3x+\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{5\sqrt{3}}{2} \Longrightarrow \sin\left(3x+\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Longrightarrow \sin\left(3x+\dfrac{\pi}{4}\right) = \sin\dfrac{\pi}{3}$

$\Longrightarrow \begin{cases} 3x+\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{3} + 2k_1\pi \\ ou \\ 3x+\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{2\pi}{3} + 2k_2\pi \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 3x = \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4} + 2k_1\pi \\ ou \\ 3x = \dfrac{2\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4} + 2k_2\pi \end{cases}$

$\Longrightarrow \begin{cases} 3x = \dfrac{\pi}{12} + 2k_1\pi \\ ou \\ 3x = \dfrac{5\pi}{12} + 2k_2\pi \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{36} + \dfrac{2k_1\pi}{3} \\ ou \\ x = \dfrac{5\pi}{36} + \dfrac{2k_2\pi}{3} \end{cases} \Longrightarrow \mathcal{S} = \left\{\dfrac{\pi}{36} + \dfrac{2k_1\pi}{3} \;;\; \dfrac{5\pi}{36} + \dfrac{2k_2\pi}{3} \;/\; k_1, k_2 \in \mathbb{Z}\right\}$

Exemple 7 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$(\boldsymbol{E_1}) : \sin x = -\dfrac{1}{2}$; $(\boldsymbol{E_2}) : \sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $(\boldsymbol{E_3}) : \sin x = \dfrac{\pi}{3}$; $(\boldsymbol{E_4}) : \sin^2 x = \dfrac{3}{4}$

Réponse :

$(\boldsymbol{E_1}) : \sin x = -\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2} \in [-1;1]$, et $\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) = -\sin\dfrac{\pi}{6} = -\dfrac{1}{2}$. Donc, $\sin x = -\dfrac{1}{2} \Longrightarrow \sin x = \sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)$

$\Longrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{\pi}{6} + 2k_1\pi \\ ou \\ x = -\dfrac{5\pi}{6} + 2k_2\pi \end{cases} \Longrightarrow \mathcal{S} = \left\{-\dfrac{\pi}{6} + 2k_1\pi \;;\; -\dfrac{5\pi}{6} + 2k_2\pi \;/\; k_1, k_2 \in \mathbb{Z}\right\}$

$(\boldsymbol{E_2}) : \sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2} \in [-1;1]$, et $\sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Donc, $\sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Longrightarrow \sin x = \sin\dfrac{\pi}{4} \Longrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{4} + 2k_1\pi \\ ou \\ x = \dfrac{3\pi}{4} + 2k_2\pi \end{cases} \Longrightarrow \mathcal{S} = \left\{\dfrac{\pi}{4} + 2k_1\pi \;;\; \dfrac{3\pi}{4} + 2k_2\pi \;/\; k_1, k_2 \in \mathbb{Z}\right\}$

$(\boldsymbol{E_3}) : \sin x = \dfrac{\pi}{3}$

Comme $\dfrac{\pi}{3} \approx 3{,}14 > 3 \Longrightarrow \dfrac{\pi}{3} > 1 \Longrightarrow \dfrac{\pi}{3} \notin [-1;1]$. Donc, la solution $(\boldsymbol{E_3})$ dans $\mathbb{R}$ est ϕ

$(\boldsymbol{E_4}) : \sin^2 x = \dfrac{3}{4} \Longrightarrow \begin{cases} \sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} (\in [-1;1]) \\ ou \\ \sin x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} (\in [-1;1]) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \sin x = \sin\dfrac{\pi}{3} \\ ou \\ \sin x = \sin\dfrac{-\pi}{3} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{3} + 2k_1\pi \\ ou \\ x = \dfrac{2\pi}{3} + 2k_2\pi \end{cases} ou \begin{cases} x = \dfrac{-\pi}{3} + 2k_3\pi \\ ou \\ x = \dfrac{-2\pi}{3} + 2k_4\pi \end{cases}$

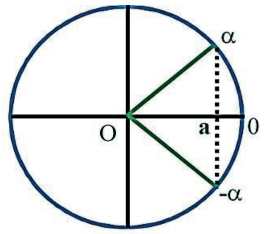
$\Longrightarrow \mathcal{S} = \left\{\dfrac{\pi}{3} + 2k_1\pi \;;\; \dfrac{2\pi}{3} + 2k_2\pi \;;\; \dfrac{-\pi}{3} + 2k_3\pi \;;\; \dfrac{-2\pi}{3} + 2k_4\pi / \; k_1, k_2, k_3, k_4 \in \mathbb{Z}\right\}$

b. Type $\cos x = a$, avec $-1 \leq a \leq 1$:

On distingue les cas suivants :

⌂ Si $a < -1$ ou $a > 1$, pas de solution, car, pour tout nombre réel x, on a : $-1 \leq \cos x \leq 1$.

⌂ Si $a \in [-1\ ;\ 1]$, il existe un nombre réel α tel que $\cos\alpha = a$.



C.-à-d. si $a \notin [-1; 1]$, alors l'ensemble des solutions de l'équation $\cos x = a$ est $S = \phi$
Si $a \in [-1; 1]$, alors il existe un réel α tel que $\cos\alpha = a$. On a donc ;

$\cos x = a \Leftrightarrow \cos x = \cos\alpha \Leftrightarrow x \equiv \alpha\,[2\pi]\,ou\ x \equiv -\alpha\,[2\pi]$, c'est-à-dire : $\begin{cases} x = \alpha + 2k\pi \\ \quad ou \\ x = -\alpha + 2k\pi \end{cases}$

Exemple 8 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$(\boldsymbol{E_1}) : \cos x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $(\boldsymbol{E_2}) : \cos x = \dfrac{1}{2}$; $(\boldsymbol{E_3}) : \cos x = 3 - \sqrt{2}$

Réponse :

$(\boldsymbol{E_1}) : \cos x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\quad -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \in [-1; 1]$, $\quad$ et $\cos\dfrac{5\pi}{6} = \cos\left(\pi - \dfrac{\pi}{6}\right) = -\cos\dfrac{\pi}{6} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ Donc, $\cos\dfrac{5\pi}{6} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$$\Rightarrow \cos x = \cos\frac{5\pi}{6} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{5\pi}{6} + 2k_1\pi \\ \quad ou \\ x = -\dfrac{5\pi}{6} + 2k_2\pi \end{cases} \Rightarrow \mathcal{S} = \left\{\frac{5\pi}{6} + 2k_1\pi\ ;\ -\frac{5\pi}{6} + 2k_2\pi\ /\ k_1, k_2 \in \mathbb{Z}\right\}$$

$$(\boldsymbol{E_2}) : \cos x = \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2} \in [-1; 1], \text{et } \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}. \ \Rightarrow \cos x = \cos\frac{\pi}{3} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{3} + 2k_1\pi \\ \quad ou \\ x = -\dfrac{\pi}{3} + 2k_2\pi \end{cases} \quad (k_1, k_2 \in \mathbb{Z})$$

$(\boldsymbol{E_3}) : \cos x = 3 - \sqrt{2}$. Comme :$1 < \sqrt{2} < 2 \Rightarrow -2 < -\sqrt{2} < -1 \ \Rightarrow 1 < 3 - \sqrt{2} < 2 \Rightarrow 3 - \sqrt{2} \notin [-1; 1]$
Donc, l'ensemble des solutions de $(\boldsymbol{E_3})$ dans $\mathbb{R}$ est ϕ.

Exemple 9 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :**1°)** $4\cos x = \sqrt{12}$; **2°)** $10\cos(5x) = 5$; **3°)** $4\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{8}$

Réponse :

$$\textbf{1°)}\ 4\cos x = \sqrt{12} \Rightarrow \cos x = \frac{\sqrt{12}}{4} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \cos x = \cos\frac{\pi}{6} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{6} + 2k_1\pi \\ \quad ou \\ x = \dfrac{-\pi}{6} + 2k_2\pi \end{cases}$$

$$\Rightarrow \mathcal{S} = \left\{\frac{\pi}{6} + 2k_1\pi\ ou\ \frac{-\pi}{6} + 2k_2\pi\ /\ k_1, k_2 \in \mathbb{Z}\right\}$$

$$\textbf{2°)}\ 10\cos(5x) = 5 \Rightarrow \cos(5x) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos(5x) = \cos\frac{\pi}{3} \Rightarrow \begin{cases} 5x = \dfrac{\pi}{3} + 2k_1\pi \\ \quad ou \\ 5x = \dfrac{-\pi}{3} + 2k_2\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{15} + \dfrac{2k_1\pi}{5} \\ \quad ou \\ x = \dfrac{-\pi}{15} + \dfrac{2k_2\pi}{5} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \mathcal{S} = \left\{\frac{\pi}{15} + \frac{2k_1\pi}{5}\, ou\, \frac{-\pi}{15} + \frac{2k_2\pi}{5}\ /\ k_1, k_2 \in \mathbb{Z}\right\}$$

$$\textbf{3°)}\ 4\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{8} \Rightarrow \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{8}}{4} = \frac{2\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{4} + 2k_1\pi \\ \quad ou \\ 2x - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{-\pi}{4} + 2k_2\pi \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{6} + 2k_1\pi \\ \quad ou \\ 2x = \dfrac{-\pi}{4} + \dfrac{\pi}{6} + 2k_2\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = \dfrac{5\pi}{12} + 2k_1\pi \\ \quad ou \\ 2x = \dfrac{-\pi}{12} + 2k_2\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{5\pi}{24} + k_1\pi \\ \quad ou \\ x = \dfrac{-\pi}{24} + k_2\pi \end{cases}$$

$$\Rightarrow \mathcal{S} = \left\{\frac{5\pi}{24} + k_1\pi ou \frac{-\pi}{24} + k_2\pi\ /\ k_1, k_2 \in \mathbb{Z}\right\}$$

Exemple 10 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :**1°)** $\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$; **2°)** $\cos\left(\frac{\pi}{3}-2x\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

Réponse :

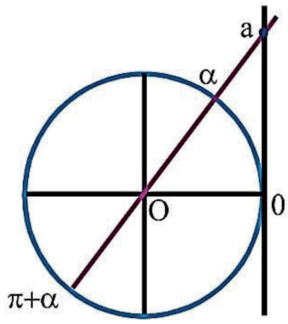
$$\textbf{1)}\ \sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}\Rightarrow \sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{6}\Rightarrow\begin{cases}3x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{6}+2k_1\pi\\ \quad ou\\ 3x+\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{6}+2k_2\pi\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3x=\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}+2k_1\pi\\ \quad ou\\ 3x=\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{4}+2k_2\pi\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}3x=\frac{-\pi}{12}+2k_1\pi\\ \quad ou\\ 3x=\frac{7\pi}{12}+2k_2\pi\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{-\pi}{36}+\frac{2k_1\pi}{3}\\ \quad ou\\ x=\frac{7\pi}{36}+\frac{2k_2\pi}{3}\end{cases}\Rightarrow\mathcal{S}=\left\{\frac{-\pi}{36}+\frac{2k_1\pi}{3}\ ;\ \frac{7\pi}{36}+\frac{2k_2\pi}{3}\ /\ k_1,k_2\in\mathbb{Z}\right\}$$

$$\textbf{2)}\ \cos\left(\frac{\pi}{3}-2x\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\cos\left(\frac{\pi}{3}-2x\right)=\cos\frac{\pi}{6}\Rightarrow\begin{cases}\frac{\pi}{3}-2x=\frac{\pi}{6}+2k_1\pi\\ \quad ou\\ \frac{\pi}{3}-2x=\frac{-\pi}{6}+2k_2\pi\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-2x=\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}+2k_1\pi\\ \quad ou\\ -2x=-\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}+2k_2\pi\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}2x=\frac{\pi}{6}+2k_1\pi\\ \quad ou\\ 2x=\frac{\pi}{2}+2k_2\pi\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{\pi}{12}+k\pi\\ \quad ou\\ x=\frac{\pi}{4}+k\pi\end{cases}\Rightarrow\mathcal{S}=\left\{\frac{\pi}{12}+k_1\pi\ ;\ \frac{\pi}{4}+k_2\pi\ /\ k_1,k_2\in\mathbb{Z}\right\}.$$

c. Equation type $\tan x = a$:



La fonction tangente prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$. Donc pour tout nombre réel a, il existe un nombre réel α tel que :

$\tan\alpha=a.\tan x=a\Leftrightarrow\tan x=\tan\alpha\Leftrightarrow x\equiv\alpha[2\pi]ou x\equiv\pi+\ \alpha[2\pi]$.

C – à – d. $\begin{cases}x=\alpha+2k\pi\\ \quad ou\\ x=\pi+\alpha+2k\pi\end{cases}\Leftrightarrow x=\alpha+k\pi\ ;\ k\in\mathbb{Z}$.

Exemple11 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :

$(\boldsymbol{E_1}):\tan x=\sqrt{3}$; $(\boldsymbol{E_2}):\sqrt{3}\tan x=-1$; $(\boldsymbol{E_3}):\tan^2 x-\tan x=0$

Réponse :

$(\boldsymbol{E_1}):\tan x=\sqrt{3}$

$$\Rightarrow\tan x=\tan\frac{\pi}{3}\Rightarrow x=\frac{\pi}{3}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{\pi}{3}+2k_1\pi\\ \quad ou\\ x=\frac{-\pi}{3}+2k_2\pi\end{cases}(k_1,k_2\in\mathbb{Z})\Rightarrow x=\frac{\pi}{3}+k\pi(k\in\mathbb{Z})\Rightarrow\mathcal{S}=\left\{\frac{\pi}{3}+k\pi\ \ /k\in\mathbb{Z}\right\}$$

$$(\boldsymbol{E_2}):\sqrt{3}\tan x=-1\Rightarrow\sqrt{3}\tan x=-1\Rightarrow\tan x=\frac{-1}{\sqrt{3}}\Rightarrow\tan x=\tan\left(\frac{-\pi}{6}\right)\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{-\pi}{6}+2k_1\pi\\ x=\frac{5\pi}{6}+2k_2\pi\end{cases}(k_1,k_2\in\mathbb{Z})$$

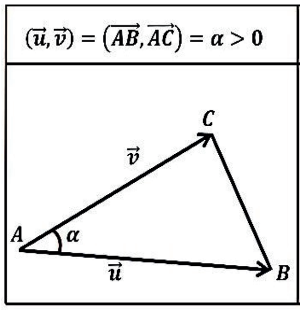
$$\Rightarrow x=\frac{-\pi}{6}+k\pi\quad(k\in\mathbb{Z})\Rightarrow\mathcal{S}=\left\{\frac{-\pi}{6}+k\pi\ \ /k\in\mathbb{Z}\right\}$$

$$(\boldsymbol{E_3}):\tan^2 x-\tan x=0\Rightarrow\tan x\,(\tan x-1)=0\Rightarrow\begin{cases}\tan x=0\\ \quad ou\\ \tan x-1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\tan x=0\\ \quad ou\\ \tan x=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\tan x=\tan 0\\ \quad ou\\ \tan x=\tan\frac{\pi}{4}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=0+k_1\pi\\ \quad ou\\ x=\frac{\pi}{4}+k_2\pi\end{cases}(k_1,k_2\in\mathbb{Z})\Rightarrow\mathcal{S}=\left\{k_1\pi\ ;\ \frac{\pi}{4}+k_2\pi\ \ /k_1,k_2\in\mathbb{Z}\right\}$$

II. Angles orientés et vecteurs

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls. On désigne par$(\vec{u}\,;\vec{v})$, l'angle orienté déterminé par les deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. La mesure principale de l'angle orienté $(\vec{u}\,;\vec{v})$, sera notée $(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}})$. On a :



☒$(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}) = 0$. Si, et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de même sens (*angle orienté nul*).

☒$(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}) = \pi$. Si, et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de sens contraires(*angle orienté plat*).

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls et non colinéaires. Soit A un point donné du plan orienté, alors il existe un seul point B tel que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, et il existe un seul point C tel que $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$; $(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}) = \left(\widehat{\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}}\right)$.

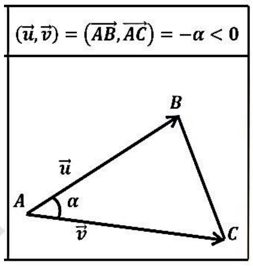
Soit α la mesure de l'angle géométrique $\hat{A}$ du triangle ABC (*On rappelle que* $\alpha \in]0\,;\,\pi[$).

☐ $\boldsymbol{(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}) = \alpha}$,

Le triangle ABC est dit direct :$(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}) > 0$.

La base $(\vec{u}\,;\vec{v})$ est dite directe.

Le repère $(A\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v})$ est dit direct.



☐ $\boldsymbol{(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}) = -\alpha}$,

Le triangle ABC est dit indirect :$(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}) < 0$.

La base $(\vec{u}\,;\vec{v})$ est dite indirecte.

Le repère $(A\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v})$ est dit indirect

Propriété 1 :

☒La mesure principale de l'angle orienté associé à deux vecteurs non nuls, appartient à l'intervalle $]-\pi\,;\,\pi]$.

☒Pour tous deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$; $(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}) = -(\widehat{\vec{v}\,;\vec{u}})$.

$(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}})et(\widehat{\vec{v}\,;\vec{u}})$ sont deux angles orientés opposés

☒Pour tous vecteurs non nuls$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$; $(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}) = (\widehat{\vec{u}\,;\vec{w}}) + (\widehat{\vec{w}\,;\vec{v}})$ (*Relation de Chasles*).

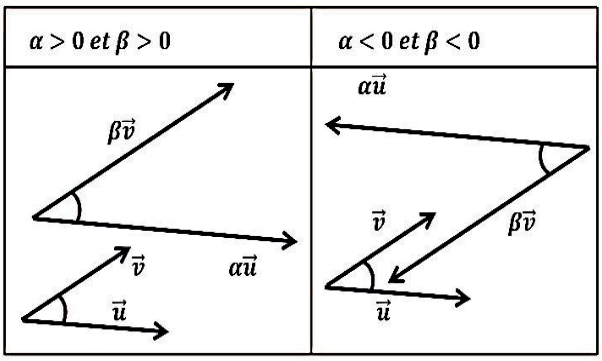
☒Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls, soient α et β deux réels non nuls et de même signe $(\alpha > 0$ et $\beta > 0$ ou $\alpha < 0$ et $\beta < 0)$

L'angle $(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}})$ et l'angle $(\widehat{\alpha\vec{u}\,;\,\beta\vec{v}})$ sont de la même orientation (*Tous les deux directs, ou tous les deux indirects*).

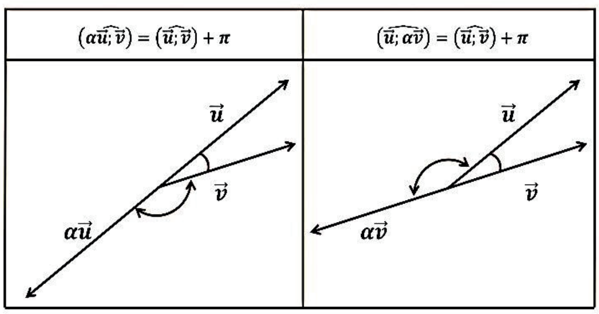
☒ Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls, soient α et β deux réels non nuls de signes contraires $(\alpha > 0$ et $\beta < 0$ ou $\alpha < 0$ et $\beta > 0)$

L'angle $(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}})$ et l'angle $\left(\widehat{\alpha\vec{u}\,;\beta\vec{v}}\right)$ sont d'orientations contraires (*si* $(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}})$ *est direct,* $\left(\widehat{\alpha\vec{u}\,;\beta\vec{v}}\right)$ *est indirect, et si* $\left(\widehat{\alpha\vec{u}\,;\beta\vec{v}}\right)$ *est indirect,* $\left(\widehat{\alpha\vec{u}\,;\beta\vec{v}}\right)$ *est direct*).

Dans les deux cas (*α et β tous les deux positifs, ou tous les deux négatifs*) : $(\widehat{\vec{u}\,;\,\vec{v}}) = (\widehat{\alpha\vec{u}\,;\,\beta\vec{v}})$.



$\alpha < 0$



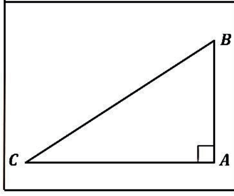
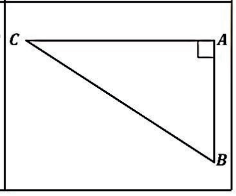
Remarque 1 :

Si $\boldsymbol{\alpha} < 0$

☒ $(\widehat{\alpha\vec{u}\,;\vec{v}}) + (\widehat{\vec{v}\,;\vec{u}}) = \pi \Longrightarrow (\widehat{\alpha\vec{u}\,;\vec{v}}) = \pi - (\widehat{\vec{v}\,;\vec{u}}) \Longrightarrow \boxed{(\widehat{\boldsymbol{\alpha}\vec{\boldsymbol{u}}\,;\vec{\boldsymbol{v}}}) = (\widehat{\vec{\boldsymbol{u}}\,;\vec{\boldsymbol{v}}}) + \boldsymbol{\pi}}$

☒ $(\widehat{\vec{v}\,;\vec{u}}) + (\widehat{\vec{u}\,;\alpha\vec{v}}) = \pi \Longrightarrow (\widehat{\vec{u}\,;\alpha\vec{v}}) = \pi - (\widehat{\vec{v}\,;\vec{u}}) \Longrightarrow$

$\boxed{(\widehat{\vec{\boldsymbol{u}}\,;\boldsymbol{\alpha}\vec{\boldsymbol{v}}}) = (\widehat{\vec{\boldsymbol{u}}\,;\vec{\boldsymbol{v}}}) + \boldsymbol{\pi}}$

ABC rectangle en A direct	*ABC rectangle en A indirect*
	

***ABC*est un triangle direct :**

$\left(\widehat{\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{BC}\,;\overrightarrow{BA}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{CA}\,;\overrightarrow{CB}}\right) = \pi.$

$\left(\widehat{\overrightarrow{AC}\,;\overrightarrow{AB}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{BA}\,;\overrightarrow{BC}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{CB}\,;\overrightarrow{CA}}\right) = -\pi$

ABC est un triangle rectangle en A, direct, tel que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow (\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}) = \frac{\pi}{2}$ (*Angle orienté droit*).

ABC est un triangle rectangle en A, indirect, tel que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow (\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}) = -\frac{\pi}{2}$ (*Angle orienté droit*).

Exemple 4 :

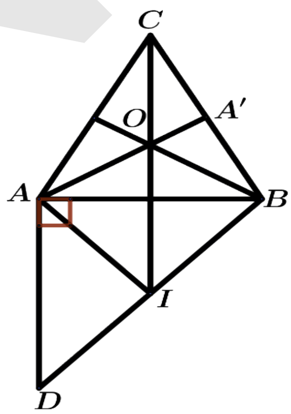
ABC est un triangle équilatéral direct de centre O, A' milieu de $[BC]$; ABD est un triangle indirect rectangle et isocèle en A, I milieu de $[BD]$.

Donner la mesure principale pour chacun des angles orientés suivant :

$\left(\widehat{\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}}\right)$; $\left(\widehat{\overrightarrow{BA}\,;\overrightarrow{BC}}\right)$; $\left(\widehat{\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OB}}\right)$; $\left(\widehat{\overrightarrow{OB}\,;\overrightarrow{OA'}}\right)$; $\left(\widehat{\overrightarrow{OB'}\,;\overrightarrow{AA'}}\right)$; $\left(\widehat{\overrightarrow{AC}\,;\overrightarrow{AA'}}\right)$;

$\left(\widehat{\overrightarrow{AD}\,;\overrightarrow{AB}}\right)$; $\left(\widehat{\overrightarrow{BD}\,;\overrightarrow{BA}}\right)$; $\left(\widehat{\overrightarrow{IB}\,;\overrightarrow{IA}}\right)$; $\left(\widehat{\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OA'}}\right)$; $\left(\widehat{\overrightarrow{AI}\,;\overrightarrow{AC}}\right)$.

Réponse :



$\left(\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AC}\right) = \frac{\pi}{3}$; $\left(\overrightarrow{AC}\,;\,\overrightarrow{AA'}\right) = \frac{-\pi}{6}$;

$\left(\overrightarrow{BA}\,;\,\overrightarrow{BC}\right) = \frac{-\pi}{3}$; $\left(\overrightarrow{AD}\,;\,\overrightarrow{AB}\right) = \frac{\pi}{2}$;

$\left(\overrightarrow{OA}\,;\,\overrightarrow{OB}\right) = \frac{2\pi}{3}$; $\left(\overrightarrow{BD}\,;\,\overrightarrow{BA}\right) = \frac{-\pi}{4}$;

$\left(\overrightarrow{OB}\,;\,\overrightarrow{OA'}\right) = \frac{\pi}{3}$; $\left(\overrightarrow{IB}\,;\,\overrightarrow{IA}\right) = \frac{\pi}{2}$;

$\left(\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AA'}\right) = \frac{\pi}{6}$; $\left(\overrightarrow{OA}\,;\,\overrightarrow{OA'}\right) = \pi$;

$\left(\overrightarrow{AI}\,;\,\overrightarrow{AC}\right) = \left(\overrightarrow{AI}\,;\,\overrightarrow{AB}\right) + \left(\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AC}\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{12}$

Exemple 5 :

ABCest un triangle tel que ; $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}}\right) = \frac{\pi}{4}$, *et* $\left(\widehat{\overrightarrow{BA}\,;\overrightarrow{BC}}\right) = \frac{-2\pi}{3}$

I et J étant les points tels que : $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. Calculer $\left(\widehat{\overrightarrow{CA}\,;\overrightarrow{CB}}\right)$, puis montrer que $\left(\widehat{\overrightarrow{AI}\,;\overrightarrow{AJ}}\right) = \frac{\pi}{4}$

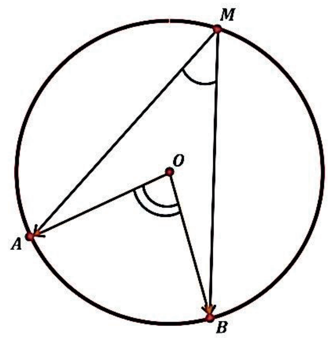
Réponse :

On a : $\left(\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AC}\right) + \left(\overrightarrow{BC}\,;\,\overrightarrow{BA}\right) + \left(\overrightarrow{CA}\,;\,\overrightarrow{CB}\right) = \pi$ Or, $\left(\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AC}\right) = \frac{\pi}{4}$ et $\left(\overrightarrow{BC}\,;\overrightarrow{BA}\right) = -\left(\overrightarrow{BA}\,;\overrightarrow{BC}\right) = \frac{2\pi}{3}$;

Donc ; $\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3} + \left(\overrightarrow{CA}\,;\,\overrightarrow{CB}\right) = \pi$;Donc $\left(\overrightarrow{CA}\,;\,\overrightarrow{CB}\right) = \pi - \frac{11\pi}{12} = \frac{\pi}{12}$. On a : $\left(\overrightarrow{AI}\,;\,\overrightarrow{AJ}\right) = \left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\,;\,\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right) = \left(\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AC}\right) = \frac{\pi}{4}$.

Théorème de l’angle inscrit :

Théorème :



Soit $(\mathcal{C})$ un cercle de centre $O.A, B$ deux points distincts de $(\mathcal{C})$. Pour tout point $M\ de\ (\mathcal{C})$et distinct de A et B, on a :

$2\left(\widehat{\overrightarrow{MA}\,;\ \overrightarrow{MB}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OB}}\right)\ [\boldsymbol{2\pi}]$ *(se lit « **modulo 2π** » ou « **congru 2π** »).*

Démonstration :

OAMest un triangle isocèle en O :$\Longrightarrow \left(\widehat{\overrightarrow{MA}\,;\overrightarrow{MO}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{AO}\,;\overrightarrow{AM}}\right)$

Dans le triangle OAM, on a ; $\left(\widehat{\overrightarrow{MA}\,;\overrightarrow{MO}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{AO}\,;\ \overrightarrow{AM}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OA}}\right) = \pi$

$\Longrightarrow \boxed{\boldsymbol{2\left(\widehat{\overrightarrow{MA}\,;\overrightarrow{MO}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{OM}\,;\overrightarrow{OA}}\right) = \pi}}\boxed{1}$

OBM est un triangle isocèle en O, de même on a : $\Longrightarrow \boxed{\boldsymbol{2\left(\widehat{\overrightarrow{MO}\,;\overrightarrow{MB}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{OB}\,;\overrightarrow{OM}}\right) = \pi}}\boxed{2}$

$$\boxed{1} + \boxed{2} \Longrightarrow 2\left(\widehat{\overrightarrow{MA}\,;\overrightarrow{MO}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{OM}\,;\overrightarrow{OA}}\right) + 2\left(\widehat{\overrightarrow{MO}\,;\overrightarrow{MB}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{OB}\,;\overrightarrow{OM}}\right) = \pi + \pi$$

$$\Longrightarrow 2\left(\widehat{\overrightarrow{MA}\,;\overrightarrow{MB}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{OB}\,;\overrightarrow{OA}}\right) = 2\pi \Longrightarrow 2\left(\widehat{\overrightarrow{MA}\,;\overrightarrow{MB}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OB}}\right) + 2\pi$$

$$\Longrightarrow \boxed{\boldsymbol{2\left(\widehat{\overrightarrow{MA}\,;\overrightarrow{MB}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OB}}\right)\ [2\pi]}}$$

Exercices Généraux

1.Calculer le sinus, le cosinus et la tangente de chacun des nombres réels suivants :

$$\frac{-5\pi}{2} \;;\; \frac{-121\pi}{6} \;;\; \frac{-1999\pi}{6} \;;\; \frac{29\pi}{4}$$

2.Calculer en fonction de $cosx$ et $sinx$, lesexpressions suivantes :

$A = cos(\pi + x) + cos(\pi - x) + cos(-x)$

$B = sin(\pi + x) + sin(\pi - x) + sin(-x)$

$C = sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + cos\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)$

$D = sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + 2sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) + sin\left(x + \frac{5\pi}{2}\right).$

3.Résoudre les équations suivantes et représenter les images de leurs solutions sur le cercle trigonométrique.

a) $sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = sin\left(\frac{2\pi}{3} - x\right).$

b) $sin3x = cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right).$

c) $sin\left(-x + \frac{3\pi}{2}\right) + sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 0.$

4.1) Quels sont les réels x de $[0\,;\,2\pi[$ vérifiant : $cosx = \frac{1}{2}$?

2) Même question pour x de$]-\pi;\,\pi]$.

3) Quels sont les réels x vérifiant $cosx = \frac{1}{2}$?

5.1°) Quels sont les réels x de $[0\,;2\pi[$ vérifiant $sinx = -\frac{1}{2}$?

2°) Même question pour x de$]-\pi;\,\pi]$.

6. Résoudre dans$\mathbb{R}$ les équations suivantes et représenter les images de leurs solutions sur le cercle trigonométrique.

a) $4\sin^2 x - 3 = 0.$

b) $2\cos^2 x + \sqrt{3}cosx - 3 = 0\,;$

7.Dans chacun des cas suivants, représenter les réels x qui satisfont les conditions proposées.

1°) $sinx \geq 0.$ 2°) $cosx \geq 0.$ 3°) $sinx \leq \frac{1}{3}.$

4°) $cosx < \frac{1}{4}$ 5°) $\begin{cases} sinx \geq \frac{1}{2} \\ sinx \leq 0 \end{cases}$

3°) Donner les solutions de (E) appartenant à l'intervalle

8.Exprimer en fonction de $\cos x$ **et de** $\sin x$ les nombres suivants :

a) $\cos(3\pi + x)$ b) $\sin(-x - \pi)$ c) $\cos(x - \frac{\pi}{2})$ d) $\sin(-x + \frac{5\pi}{2})$ e) $\sin(11\pi - x)$

9.Simplifiez l'expression

$$\cos\left(\frac{\pi}{10}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{10}\right) + \cos\left(\frac{6\pi}{10}\right) + \cos\left(\frac{9\pi}{10}\right).$$

10.Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$2\cos^2 x + \sqrt{3}\cos x - 3 = 0$

11. ABCD est un parallélogramme tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \frac{3\pi}{5}[2\pi]$, donner une mesure de chacun des angles suivants : $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$, $(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CB})$, $(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC})$,

12.ABC est un triangle isocèle en B, I est le milieu de $[AC]$ tel que $(\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CB}) = \frac{\pi}{8}$ déterminer la mesure principale (en radians) de chacun des angles :

$(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$; $(3\overrightarrow{AB}; -2\overrightarrow{AC})$; $(-2\overrightarrow{AC}; -5\overrightarrow{AB})$

$(\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AB})$; $(\overrightarrow{IB}; \overrightarrow{AC})$; $(\overrightarrow{CI}; \overrightarrow{AC})$; $(\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{AB})$

13. Résoudre les équations ci-dessous

$\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos(2x) = \cos(\pi + 3x)$

14.Résoudre les équations suivantes :

a) $\cos x = -\frac{1}{2}$, b) $\sin(2x - \frac{\pi}{2}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $\cos x = -1$ d) $4\cos^2 x - 3 = 0$

15.Déterminer α dans chacun de cas :

1) $\begin{cases} \cos\alpha = \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \sin\alpha = \frac{1}{2} \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \cos\alpha = \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ \sin\alpha = \frac{-\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

16. x est un réel distinct de $\frac{\pi}{2} + k\pi$ et $k\pi$ avec k entier relatif. Exprimer en fonction de tanx les nombres suivants :

$\tan(-x)$; $\tan(\pi - x)$, $\tan(\pi + x)$;

$\tan(\frac{\pi}{2} + x)$; $\tan(\frac{\pi}{2} - x)$

17. ABC est un triangle isocèle en A tel que $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \frac{\pi}{6}$, ABDE et ACFG sont des carrés extérieurs au triangle ABC.

1°) Faire une figure.

2°)Déterminer la mesure principale de chacun des angles:

$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AF}\right)$;$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AG}\right)$;$\left(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CF}\right)$;

$\left(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{CF}\right)$ et $\left(\overrightarrow{CG}, \overrightarrow{BE}\right)$.

18. ABC est un triangle direct et isocèle en A tel que $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{4}[2\pi]$, I est le milieu de $[BC]$

déterminer la mesure principale (en radian) de chacun des angles :

a) $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$; b) $(\overrightarrow{CB}; \overrightarrow{AB})$; c) $(2\overrightarrow{CA}; -3\overrightarrow{AB})$;

d) $(-2\overrightarrow{CA}; -4\overrightarrow{BA})$; e) $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{BC})$; f) $(\overrightarrow{IC}; \overrightarrow{IB})$;

Chapitre 8 : GENERALITES SUR LES FONCTIONS

I. Notion de fonction :

Définition

Soit $\mathcal{D}$ une partie de $\mathbb{R}$. f est une fonction de la variable réelle x définie sur $\mathcal{D}$, signifie que f est un procédé qui permet d'associer à tout réel $x \in \mathcal{D}$, un réel unique y noté $f(x)$.

1. Notations et expressions :

On note ; $f : x \longmapsto y = f(x)$ ou $f(x) = y$.On lit "*y est l'image de x par f*" ou,"*f associe à x le réel y*".
y est appelé image de x, x est appelé antécédent y.

Exemple 1 :

A. Dans cet exercice on demande de traduire les phrases suivantes par des égalités du type ***f***(a) =b.

- Un antécédent de 5 par ***f*** est -2.
- L'image de 3 par ***f*** est nulle.
- La courbe C_f passe par le point $A(1\ ;\ 4)$.
- La courbe C_f coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse -3.

B. Soit ***f***(x) = $-x^2 + 2x - 1$ et ***g***(x) = $\dfrac{2x-3}{x-1}$.

a. Pour chacune des deux fonctions, calculer l'image de 0, de -2 et de $\sqrt{2}$.
b. Peut-on calculer l'image de 1 pour les deux fonctions ?
c. Déterminer le ou les antécédents de 1 pour chaque fonction.

Réponse :

A. ***f***(-2) =5 ; ***f***(3) = 0 ; ***f***(1) = 4 ; ***f***(-3) = 0 ;

B. a. ***f***(0) = $-0^2 + 2 \times 0 - 1 = -1$; ***f***(-2) = $-2^2 + 2 \times (-2) - 1 = -4 - 4 - 1 = -9$;

$f(\sqrt{2}) = -(\sqrt{2})^2 + 2 \times (-\sqrt{2}) - 1 = -2 - 2\sqrt{2} - 1 = -3 - 2\sqrt{2}$.

$g(0) = \dfrac{2\times 0-3}{0-1} = \dfrac{-3}{-1} = 3$; $g(-2) = \dfrac{2\times(-2)-3}{(-2)-1} = \dfrac{-7}{-3} = \dfrac{7}{3}$;

$g(\sqrt{2}) = \dfrac{2\sqrt{2}-3}{\sqrt{2}-1} = \dfrac{(2\sqrt{2}-3)(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = \dfrac{(4+2\sqrt{2}-3\sqrt{2}-3)}{(2-1)} = 1-\sqrt{2}$

b. ***f***(1) = $-1^2 + 2 \times 1 - 1 = -1 + 2 - 1 = 0$; donc 1 est un élément de D_f.
Par contre, on ne peut pas calculer ***g***(1) , car ***g***(1) n'existe pas et par conséquent 1 n'est pas un élément de D_g.
c. Il suffit de résoudre les équations ***f***(x) = 1 et ***g***(x) = 1.
f(x) = 1 $\Leftrightarrow -x^2 + 2x - 1 = 1 \Leftrightarrow -(x^2 - 2x + 1) = 1 \Leftrightarrow (x^2 - 2x + 1) = -1 \Leftrightarrow (x - 1)^2 = -1$, cette dernière égalité est impossible, donc 1 n'a pas d'antécédent par ***f***.
g(x) = 1 $\Leftrightarrow \dfrac{2x-3}{x-1} = 1 \Leftrightarrow 2x + 3 = x - 1 \Leftrightarrow x = -4$, donc les antécédents de 1 par ***g*** sont l'élément du singleton $\{-4\}$.
Le sous-ensemble $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}$ est appelé l'ensemble de définition de f ou domaine de définition de f noté aussi $\mathcal{D}_f$.

On peut noter ; $f : \begin{cases} \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f(x) \end{cases}$

N.B : *Pour des raisons pratiques, dans tout ce chapitre, nous dirons fonction lorsqu'il s'agit de fonctions numériques à variables réelles.*

Fonctions linéaires, fonctions affines :

Définitions :

A. Fonction affine :

On appelle fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ toute fonction : ***f*** : $x \mapsto ax + b$, a et b étant des réels donnés.

B. Cas particuliers :

- si b = 0, ***f*** est une fonction linéaire.
- si a = 0, ***f*** est une constante.
- si a = b = 0, ***f*** est une fonction nulle.

Propriétés :

A. Sens de variation :

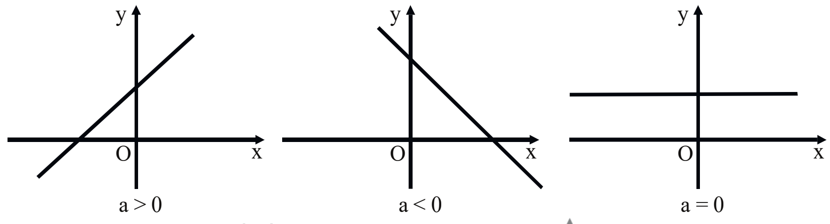
- Si a > 0, la fonction affine **:** x ↦ ax + b est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et l'on a le tableau de variation ci-contre :
- Si a < 0, la fonction affine **:** x ↦ ax + b est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ et l'on a le tableau de variation ci-contre :

x	$-\infty$	$+\infty$
ax + b		$\nearrow$

x	$-\infty$	$+\infty$
ax + b		$\searrow$

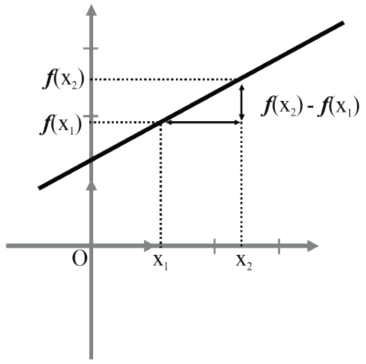
B. Représentation graphique :

La représentation graphique de f est une droite qui sera déterminée par la construction de deux de ses points (par exemple, les points d'intersection avec les axes de coordonnées si ces points existent).



- a est le coefficient directeur de la droite. b est l'ordonnée à l'origine.

a = $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$; **b** = $f(0)$.



C. Fonction affine et proportionnalité :

- Cas des fonctions linaires : $f(x) = \mathrm{a}x$.
  $f(\mathrm{x})$ est proportionnelle à x. le coefficient de proportionnalité est a.
- Cas des fonctions affines : $f(x) = \mathrm{a}x + \mathrm{b}$.

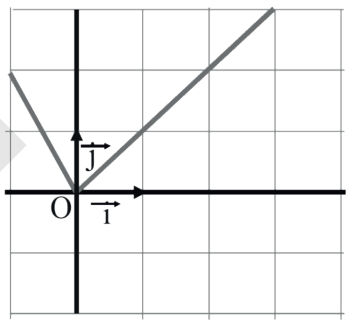
Pour tous réels x_1 et x_2 distincts : $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = a$.

L'accroissement $f(x_2) - f(x_1)$ est proportionnel à l'accroissement $x_2 - x_1$.
On dit que l'accroissement de l'image est proportionnel à l'accroissement de la variable.
Le coefficient de proportionnalité est a.

Exemple 2 :

Soit f la fonction définie sur [-1 ; 4] par : $\begin{cases} si\ -1 \leq x \leq 0, alors & f(x) = -2x. \\ si\ 0 \leq x \leq 4, alors & f(x) = x. \end{cases}$

a) Résoudre $f(x) = 1$.
b) Résoudre $f(x) = 3$.
c) Vérifier graphiquement les résultats.



Réponse :

a) $f(x) = 1 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = -\frac{1}{2}$
b) $f(x) = 3 \Leftrightarrow x = 3$.
c) On observe ces solutions sur la représentation ci-contre.

Remarque 1 :

L'ensemble de définition d'une fonction f est en général donné par un énoncé de la forme ;
«*Soit f la fonction définie sur l'intervalle* $[0; 1]$ *par* ; $f(x) = x^2$ ».
Cet énoncé impose $\mathcal{D} = [0; 1]$ comme ensemble de définition pour la fonction $f : x \longmapsto x^2$.
Si l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ n'est pas explicité, alors $\mathcal{D}$ est l'ensemble des réels x pour lesquels $f(x)$ existe.

Exemple 3 :

La fonction ; $f : x \longmapsto x^3 + 5$ est définie sur $\mathbb{R}$.
La fonction ; $g : x \longmapsto \frac{x-7}{x+3}$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$. La fonction ; $h : x \longmapsto \sqrt{x}$ est définie sur $[0;\ +\infty[$.

Exemple 4 :

Donner les ensembles de définition de chacune des fonctions suivantes :

$f(x) = \dfrac{-5x^2+4x+1}{x(x-3)(x+2)}$; $g(x) = \sqrt{3x^2+5x-2}$.

Réponse :

$f(x) = \dfrac{-5x^2+4x+1}{x(x-3)(x+2)}$ est définie pour $x(x-3)(x+2) \neq 0$.

C'est-à-dire pour ; $x \neq 0, x \neq -2$ et $x \neq 3 \Longrightarrow \boldsymbol{D_f} = \mathbb{R} \setminus \{\mathbf{-2; 0; 3}\}$

$g(x) = \sqrt{3x^2+5x-2}$ est définie pour $3x^2+5x-2 \geq 0$. On résout l'équation : $3x^2+5x-2 = 0$.

$\Delta = 25 - 4 \times 3 \times (-2) = 49 \Longrightarrow \Delta > 0 \Longrightarrow \sqrt{\Delta} = 7$ $x_1 = \dfrac{-5-7}{2\times 3} = \dfrac{-12}{6} = \mathbf{-2}$; $x_2 = \dfrac{-5+7}{2\times 3} = \dfrac{2}{6} = \mathbf{\dfrac{1}{3}}$

x	$-\infty$		-2		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$3x^2+5x-2$		$+$	0	$-$	0	$+$	

A partir du tableau de l'étude des signes, on a : $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \left]-2;\frac{1}{3}\right[$

Exemple 5 :

Indiquer l'ensemble de définition D de chacune des fonctions suivantes :

a) $x \mapsto 2x^2 + \frac{1}{x^2}$; $x \mapsto x + \frac{1}{x}$; $x \mapsto x^2 + \frac{1}{x}$; $x \mapsto \frac{x^2+1}{x^3-x}$; $x \mapsto 2x^2 + \frac{|x|}{x^2+1}$.

b) $x \mapsto \sqrt{-x}$; $x \mapsto \sqrt{x} \times \sqrt{3x+1}$; $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{|x|}}$; $x \mapsto \sqrt{1-x}$; $x \mapsto \frac{2x}{\sqrt{3x+7}}$; $(3-2x)(5x+1)$.

Réponse :

La fonction	Son ensemble de définition	La fonction	Son ensemble de définition
$x \mapsto 2x^2 + \frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$	$x \mapsto \sqrt{-x}$	$\mathbb{R}_-$
$x \mapsto x + \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$x \mapsto \sqrt{x} \times \sqrt{3x+1}$	$\mathbb{R}_+ \cap \left[\frac{-1}{3};+\infty\right[= \mathbb{R}_+$
$x \mapsto x^2 + \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{\lvert x\rvert}}$	$\mathbb{R}^*$
$x \mapsto \frac{x^2+1}{x^3-x}$	$\mathbb{R}\setminus\{-1\,;\,0\,;\,1\}$	$x \mapsto \sqrt{1-x}$	]-∞ ; 1]
$x \mapsto 2x^2 + \frac{\lvert x\rvert}{x^2+1}$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{2x}{\sqrt{3x+7}}$	$\left]\frac{-7}{3};+\infty\right[$
		$x \mapsto (3-2x)(5x+1)$	$\mathbb{R}$

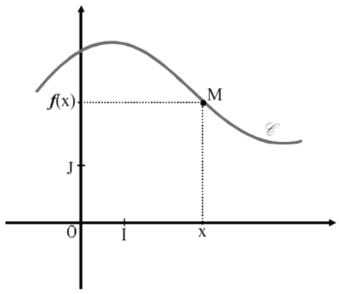
2. La représentation graphique d'une fonction :

Soit $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$ un repère du plan $\mathcal{P}$.

Soit f une fonction définie sur un ensemble $\mathcal{D}$.

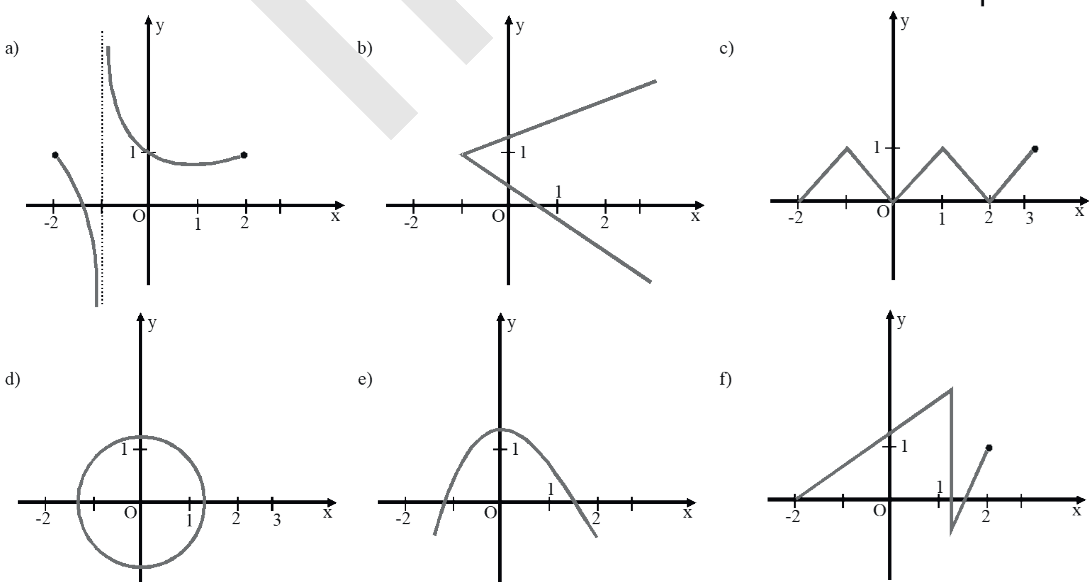
La représentation graphique $\mathcal{C}$ de f est l'ensemble des points $M(x,y)$ tels que $x \in \mathcal{D}$ et $y = f(x)$. $\mathcal{C}$ est appelée la courbe représentative de f dans le repère $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$.

La courbe $\mathcal{C}$ de f est notée $\boldsymbol{\mathcal{C}_f}$. $\boldsymbol{\mathcal{C}_f = \{M(x,y) /\ x \in \mathcal{D}_f \text{ et } y = f(x)\}}$



Exemple 6 :

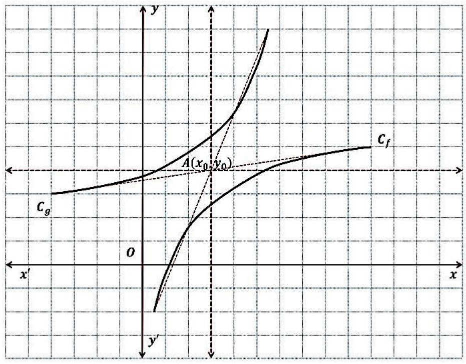
Reconnaître les courbes représentant des fonctions, puis donner l'ensemble de définition des fonctions suivantes.



Réponse :

Courbes définissants des fonctions	Ensembles de définition associés
a)	[-2 ; 2] $\setminus \{-1\}$
c)	[-2 ; 3]
e)	$\mathbb{R}$

3) Eléments de symétrie d'une courbe :



1. Courbes symétriques par rapport à un point :

Propriété 1 :

Les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ de deux fonctions f et g sont symétriques par rapport à un point $A(a,b)$, si, et seulement si ;

$\forall x \in \mathcal{D}_f, 2a - x \in \mathcal{D}_g$ **et** $g(2a-x) + f(x) = 2b$

Exercice 1 :

Démontrer la propriété 1.

Cas particuliers :

Si $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sont confondues, A est alors le centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$, et on a ;

$\forall x \in \mathcal{D}_f, \quad 2a - x \in \mathcal{D}_f$ **et** $f(2a-x) + f(x) = 2b$

Si $\mathcal{C}_f$ est confondue à $\mathcal{C}_g$, et O (*origine du repère*) est le centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$, alors, on a ;

$$f(2\times 0 - x) + f(x) = 2\times 0 \Longrightarrow f(-x) + f(x) = 0 \Longrightarrow \boldsymbol{f(-x) = -f(x)}$$

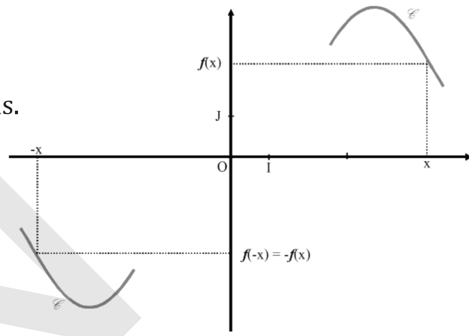
Définition :

Une fonction f est dite impaire si, et seulement si sa courbe admet *le point O* (*origine du repère*) comme centre de symétrie.

C'est -à-dire si ; Soit ***f*** une fonction définie sur un ensemble D de réels.

f est impaire si, et seulement si :

pour tout $x \in$ D, $-x \in$ D et $f(-x) = -f(x)$.



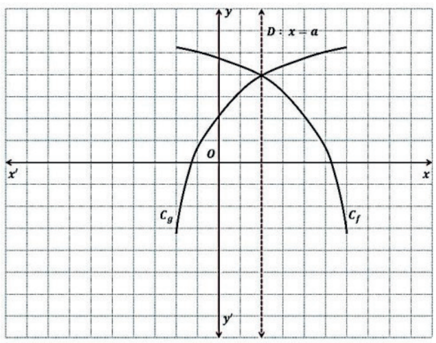
Exemple 7 :

La fonction ***f*** définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$ est impaire.

La fonction ***g*** définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g(x) = \dfrac{1}{x}$ est impaire.

Dans un repère (O ; I ; J), la courbe représentative **C** d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine du repère.

2. Courbes symétriques par rapport à un axe vertical :



Propriété 2 :

Les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ de deux fonctions f et g sont symétriques par rapport à une droite Δ : $x = a$, si, et seulement si ;

$$\forall x \in \mathcal{D}_f, \quad 2a - x \in \mathcal{D}_g \text{ et } g(2a-x) = f(x)$$

Exercice 2 :

Démontrer la propriété 2.

Cas particuliers :

Si $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sont confondues, Δ est alors l'axe de symétrie de $\mathcal{C}_f$, et on a ;

$\forall x \in \mathcal{D}_f, \; 2a - x \in \mathcal{D}_f$ **et** $f(2a-x) = f(x)$

Si $\mathcal{C}_f$ est confondue à $\mathcal{C}_g$, et yOy' (*axe des ordonnées*) est l'axe de symétrie de $\mathcal{C}_f$, alors, on a ;

$$f(2\times 0 - x) = f(x) \Longrightarrow f(-x) = f(x) \Longrightarrow \boldsymbol{f(-x) = f(x)}$$

Définition :

Une fonction f est dite paire si, et seulement si sa courbe admet yOy' (*axe des ordonnées*) comme axe de symétrie. C'est -à-dire si ; Soit f une fonction définie sur un ensemble D de réels.

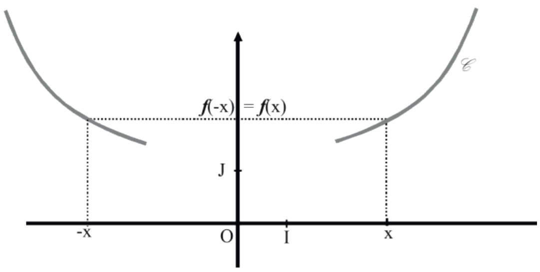
f est paire si, et seulement si : pour tout $x \in D, -x \in D$ *et* $f(-x) = f(x)$.

Exemple 8 :

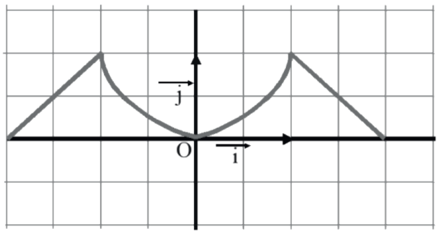
La fonction ***f*** définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ est paire.

La fonction ***g*** définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 3x^4 - x^2 + 1$ est paire.

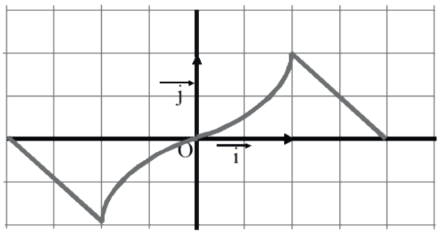
Dans un repère (O ; I ; J), la courbe représentative C d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.



Si f est paire, alors
sa courbe est symétrique par rapport
à l'axe des ordonnées.



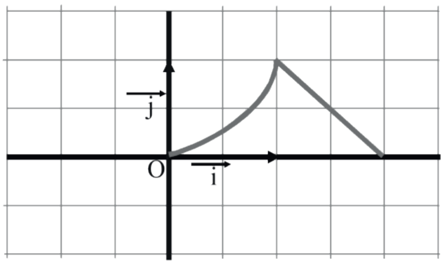
Si f est impaire, alors
sa courbe est symétrique par rapport
à l'origine du repère.



Exemple 9 :

A. Etudier la parité des fonctions données en **2.**

B. Le repère $(O\,;\vec{i}\,;\,\vec{j})$ est orthonormal.
La courbe C ci-contre est une partie de la courbe qui représente une fonction ***f*** définie sur [-2 ; 2].
La compléter, en supposant d'abord que ***f*** est paire, puis que ***f*** est impaire.



Réponse :

A. Le tableau suivant donne la parité des fonctions de l'application 2.

La fonction	Type de parité	La fonction	Type de parité
$x \mapsto 2x^2 + \dfrac{1}{x^2}$	Paire	$x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{\lvert x\rvert}}$	Paire
$x \mapsto x + \dfrac{1}{x}$	Impaire	$x \mapsto \dfrac{x^2+1}{x^3-x}$	Impaire
$x \mapsto 2x^2 + \dfrac{\lvert x\rvert}{x^2+1}$	Paire		

IV. Fonctions périodiques et période d'une fonction :

4. Fonctions périodiques et période d'une fonction

Une fonction f est dite périodique, s'il existe $T \in \mathbb{R}_+$ tel que ;

$$\forall x \in \mathcal{D}_f, \qquad x + T \in \mathcal{D}_f \ et\ f(x+T) = f(x)$$

La plus petite valeur de T vérifiant cette égalité est appelée la période de f.

Exemple 10 :

On considère les fonctions trigonométriques ;

$f(x) = \sin x \Longrightarrow sa\ péride\ \ T = 2\pi$

$f(x) = \cos x \Longrightarrow sa\ péride\ \ T = 2\pi$

$f(x) = \tan x \Longrightarrow sa\ péride\ \ T = \pi$

Expression de langage :

Lorsqu'une fonction f est de période π, on dit que f est π −périodique ;
Lorsqu'une fonction f est de période 2π, on dit que f est 2π −périodique, etc.

V. Domaine d'étude d'une fonction :

5) Domaine d'étude d'une fonction :

s sa courbe graphique présente une symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.
Il suffit donc de l'étudier sur la moitié de son domaine de définition $[0;\ +\infty[$ et compléter la courbe en procédant par symétrie autour de (yOy').

2°) Lorsqu'une fonction est impaire et définie sur $\mathbb{R}$, alors sa courbe graphique présente une symétrie par rapport à l'origine.
Il suffit donc de l'étudier sur la moitié de son domaine de définition $[0;\ +\infty[$ et compléter la courbe en procédant par symétrie autour de O.

3°) Lorsqu'une fonction est périodique, alors sa courbe graphique présente une répétition sur chaque période.
Il suffit donc de l'étudier sur une période $[0;\ T[$ de son domaine de définition et compléter la courbe en procédant par reproduction, ou translations successives de vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}kT\\0\end{pmatrix}$, où $k \in \mathbb{R}$.

6. Variation d'une fonction et extrémums :

1. Sens de variations ;

a. Croissance d'une fonction :

On dit qu'une fonction f est croissante sur un intervalle I de son domaine de définition$\mathcal{D}$, lorsque ;
La fonction f fait correspondre à des valeurs (*antécédents*) de plus en plus grandes, des images de plus en plus grandes. C'est-à-dire ;f est croissante sur I si ; $\forall x_1;\ x_2 \in I$ tels que $x_1 \leq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$
Ou encore ; $x_2 - x_1 \geq 0 \Longrightarrow f(x_2) - f(x_1) \geq 0$
On dit qu'une fonction f est strictement croissante sur un intervalle I de son domaine de définition $\mathcal{D}$, lorsque ;
$\forall x_1;\ x_2 \in I$ tels que $x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$ ou encore ; $x_2 - x_1 > 0 \Longrightarrow f(x_2) - f(x_1) > 0$.

b. Décroissance d'une fonction :

On dit qu'une fonction f est décroissante sur un intervalle I de son domaine de définition $\mathcal{D}$, lorsque ;
La fonction f fait correspondre à des valeurs (*antécédents*) de plus en plus grandes, des images de plus en plus petites. C'est-à-dire ; f est décroissante sur I si ; $\forall x_1;\ x_2 \in I$ tels que $x_1 \leq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$
Ou encore ; $x_2 - x_1 \geq 0 \Longrightarrow f(x_2) - f(x_1) \leq 0$
On dit qu'une fonction f est strictement décroissante sur un intervalle I de son domaine de définition $\mathcal{D}$, lorsque ;
$\forall x_1;\ x_2 \in I$ tels que $x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2)$ ou encore ; $x_2 - x_1 > 0 \Longrightarrow f(x_2) - f(x_1) < 0$

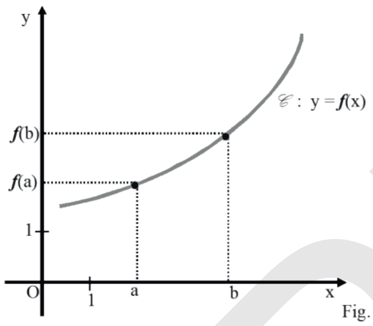


Fig. 1

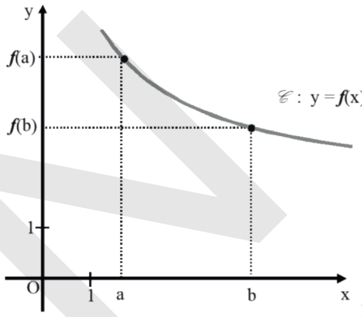


Fig. 2

On dit qu'une fonction f est constante sur un intervalle I de son domaine de définition $\mathcal{D}$, lorsque ;
$\forall x_1;\ x_2 \in I$ tels que $x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) = f(x_2)$ ou encore ;
$x_2 - x_1 > 0 \Longrightarrow f(x_2) - f(x_1) = 0$.

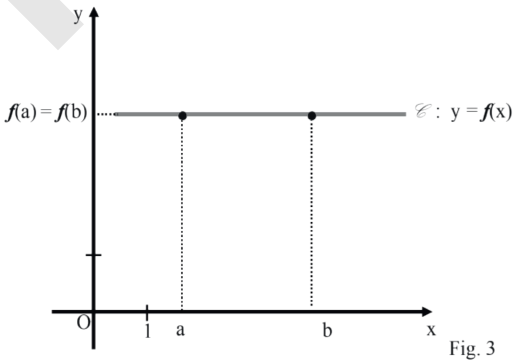


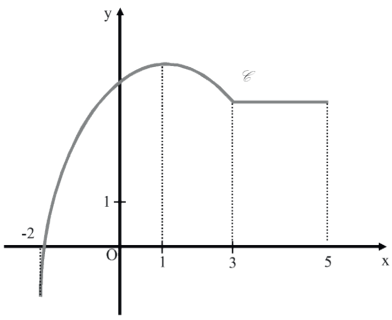
Fig. 3

Résumé :
Soit *f* une fonction définie sur un intervalle I.

- *f* est strictement croissante sur I si, et seulement si : Pour tous a et b éléments de I, si a < b alors *f* (a) <*f* (b) (fig. 1)
- *f* est croissante sur I si, et seulement si : Pour tous a et b éléments de I, si a ≤ b alors *f* a) ≤*f* (b).
- *f* est strictement décroissante sur I si, et seulement si :Pour tous a et b éléments de I, si a < b alors *f* (a) >*f* (b).
- *f* est décroissante sur I si, et seulement si : Pour tous a et b éléments de I, si a ≤ b alors *f* (a) ≥*f* (b), (fig. 2)
- *f* est constante sur I si, et seulement si : Pour tous a et b éléments de I, *f* (a) = *f* (b), (fig. 3)

Exemple 11 :
La courbe C de la figure ci- contre est la courbe représentative d'une fonction *f* qui est :

- strictement croissante sur [-2 ; 1] ;
- strictement décroissante sur [1 ; 3] ;
- constante sur [3 ; 5].



Exemple 12 :

Soit ***f*** la fonction dont le tableau de variation est donné ci-dessous.

x	-2		2		5		10
f(x)	2	↗	5	↘	0	↗	6

a) Décrire les variations de ***f***.

b) Préciser, s'ils existent, les extremums de ***f*** sur son ensemble de définition.

Réponse :

1°) *f* est croissante sur [-2 ; 2] ; décroissante sur [2 ; 5] ; croissante sur [5 ; 10].

2°) *f* admet les nombres 5 et 6 en tant que maximums relatifs aux intervalles [-2 ; 2] et [5 ; 10].

Elle admet aussi 2 et 0 en tant que minimums relatifs aux intervalles [-2 ; 2] et [5 ; 10].

c. Etude des graphiques de fonctions :

Quand on connaît l'écriture d'une fonction, on peut préciser son ensemble de définition et déterminer son sens de variation. On complète ensuite un tableau de valeurs pour faire sa représentation graphique.

Réciproquement, on peut a partir de la représentation graphique d'une fonction trouver son ensemble de définition et déduire son tableau de variation.

On peut également utiliser les représentations graphiques de fonctions pour résoudre des équations ou des inéquations.

Lire les images et les antécédents d'un nombre sur une courbe de fonction :

Exemple 13 :

Ici le tableau de valeurs de la fonction : $f(x) = x^2 - 4x - 4$

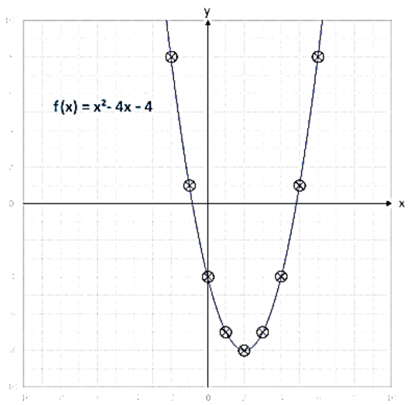
Chaque couple $(x; f(x))$ de ce tableau est représenté par un point sur la courbe.

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$y = f(x)$	8	1	-4	-7	-8	-7	-4	1	8

Nous avons la courbe représentative de f, définie par ;

$\mathbf{f(x) = x^2 - 4x - 4}$ représentée dans un repère orthonormé.

Cette fonction est un polynôme du second degré, *et sa* courbe *est une parabole... qu'on étudiera plus tard.*



8 est l'image de $-$**2** par **f**. $-$**4** est l'image de **4** par **f**. **2** est l'antécédent de $-$**8** par **f**. $-$ **2** et **6** sont les antécédents de **8** par **f**.

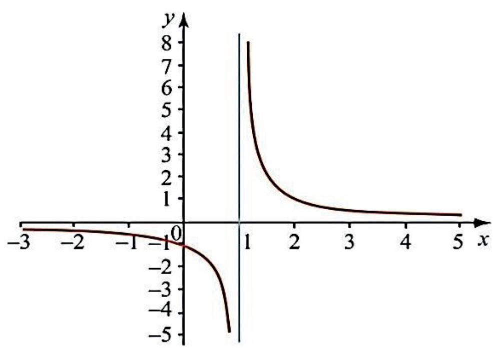
Lire l'ensemble de définition sur la courbe d'une fonction

Sur l'axe horizontal, on lit les abscisses des points de la courbe.

L'ensemble de définition est l'ensemble de ces abscisses. Il s'écrit sous la forme d'un intervalle ou d'une réunion d'intervalles.

Exemple 14 :

La représentation graphique ci-dessous est formée de points dont l'abscisse est comprise entre -3 et 5, le nombre 1 étant exclu. Elle représente une fonction définie sur la réunion des intervalles : $]-3; 1[\cup]1; 5[$.

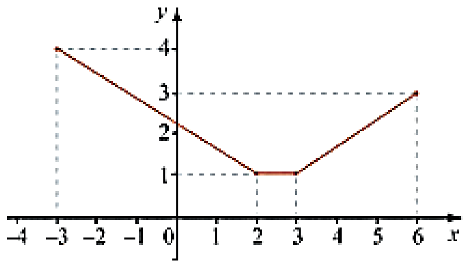


Etablir le tableau de variation d'une fonction à partir de sa courbe :

Une fonction est croissante sur un intervalle I, si, en parcourant la courbe de gauche à droite, les images en ordonnées augmentent.
Une fonction est décroissante sur un intervalle I, si, en parcourant la courbe de gauche à droite, les images en ordonnées diminuent.
Une fonction est constante sur un intervalle I lorsque sa représentation graphique est un segment horizontal.

Exemple 15 :

La ligne brisée ci-dessus représente une fonction f :
– décroissante sur l'intervalle ; $[-3\,;\ 2]$;
– constante sur l'intervalle ; $[2\,;\ 3]$;
– croissante sur l'intervalle ; $[3\,;\ 6]$.
Elle atteint son minimum 1 sur l'intervalle ; $[2\,;\ 3]$.
On résume ces informations dans un tableau de variation :



x	-3		2		3		6
sens de variation de f	4	$\searrow$	1	$\rightarrow$	1	$\nearrow$	3

Lire les solutions d'une équation sur une courbe de fonction :

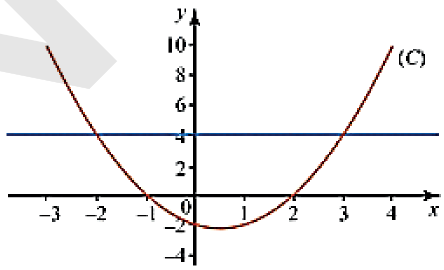
• Les solutions de l'équation $f(x) = k$ sont les abscisses des points d'intersection de la courbe représentant la fonction f avec la droite horizontale d'équation $y = k$.
Dans le cas particulier de l'équation $f(x) = 0$, les solutions sont les abscisses des points d'intersection de la courbe avec l'axe des abscisses.

Exemple 16 :

La courbe (C) ci-contre représente une fonction f.

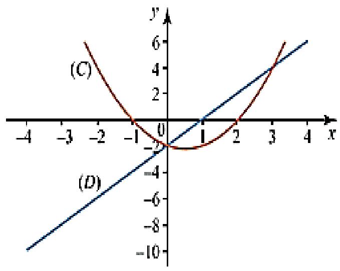
L'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = 4$ est : $S = \{-2\,;\ 3\}$.

L'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = 0$ est : $S = \{-1\,;\ 2\}$.



• Les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ sont les abscisses des points d'intersection de la courbe représentant f avec la courbe représentant g.

Exemple 17 :

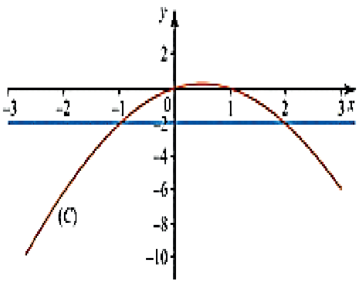


La courbe (C) ci-dessous représente une fonction f et la droite (D) représente une fonction$g$. L'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ est :
$S = \{0\,;\ 3\}$.

Lire les solutions d'une inéquation sur une courbe de fonction :

Les solutions de l'inéquation $f(x) < k$ sont les abscisses des points de la courbe situés au-dessous de la droite d'équation $y = k$.
Dans le cas particulier de l'équation $f(x) < 0$, les solutions sont les abscisses des points de la courbe situés au-dessous de l'axe des abscisses.

Exemple 18 :



La courbe (C) ci-contre représente une fonction f.
L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) > -2$ est : $S_1 =]-1; 2[$.
L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) < 0$ est : $S_2 =]-\infty; 0[\cup]1;\ +\infty[$.
• Plus généralement, les solutions de l'inéquation $f(x) < g(x)$ sont les abscisses des points de la courbe représentant f, situés au-dessous de la courbe représentant g : $S_3 =]-\infty; -1[\cup]2;\ +\infty[$

Remarque 2 :

Une fonction croissante conserve l'ordre ; Une fonction décroissante inverse l'ordre.

2. Le taux d'accroissement (*de variations*) d'une fonction :

Définition :

Soit $\mathcal{D}_f$ le domaine de définition d'une fonction numérique f, soit $I \subset \mathcal{D}_f$, et $x_1, x_2 \in I$ tels que $x_1 \neq x_2$, on appelle taux d'accroissement de la fonction f sur l'intervalle I que l'on note Δf ou T, le nombre réel défini par ;

$$\boxed{T = \Delta f = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}}$$

Si $\Delta f > 0$ alors f est croissantesur I,
Si $\Delta f < 0$ alors f est décroissantesur I,
Si $\Delta f = 0$ alors f est constantesur I,

Remarque 3 :

Une fonction est dite strictement croissante lorsque ; $\forall x_1, x_2 \in \mathcal{D}_f \Rightarrow \Delta f > 0$

Une fonction est dite strictement décroissante lorsque ; $\forall x_1, x_2 \in \mathcal{D}_f \Rightarrow \Delta f < 0$

Une fonction est dite constante lorsque ; $\forall x_1, x_2 \in \mathcal{D}_f \Rightarrow \Delta f = 0$

3. Extrémum et extremum relatif (*local*) :

a. Maximum :

Définition :

Soit$f$ une fonction numérique et $\mathcal{D}_f$ son domaine de définition, et soit $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) = M$.

On dit que M est le maximum de f sur $\mathcal{D}_f$ lorsque ; $\forall x \in \mathcal{D}_f \Rightarrow f(x) \leq M$

b. Maximum relatif ou local :

Définition :

Soit f une fonction numérique et $\mathcal{D}_f$ son domaine de définition, et soit $x_0 \in \mathbb{R}$ telque $f(x_0) = M_1$.

On dit que M_1 est un maximum relatif de f sur un intervalle I de son domaine de définition $\mathcal{D}_f$ lorsque ; $\forall x \in I \Rightarrow f(x) \leq M_1$

c. Minimum :

Définition :

Soit f une fonction numérique et $\mathcal{D}_f$ son domaine de définition, et soit $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) = m$.
On dit que m est le minimum de f sur $\mathcal{D}_f$ lorsque ; $\forall x \in \mathcal{D}_f \Rightarrow f(x) \geq m$

d. Minimum relatif ou local :

Définition :

Soit f une fonction numérique et $\mathcal{D}_f$ son domaine de définition, et soit $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) = m_1$.
On dit que m_1 est un minimum relatif de f sur un intervalle I de son domaine de définition $\mathcal{D}_f$ lorsque ; $\forall x \in I \Rightarrow f(x) \geq m_1$

Résumé :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et soit $x_0 \in$ I.

- f présente un maximum sur I en x_0 si, et seulement si, pour tout x$\in$ I, $f(x) \leq f(x_0)$.
- f présente un minimum sur I en x_0 si, et seulement si, pour tout x$\in$ I, $f(x) \geq f(x_0)$.

Exemple 19:

Sur la figure ci-dessous, **C** est la courbe représentative d'une fonction ***f*** définie sur I = [-3 ; 4]. **Sur l'intervalle** [-3 ; 4], ***f*** présente : un maximum en -3, qui est égal à 3 ; un minimum en -1, qui est égal à -3 ; De plus, sur l'intervalle [1 ; 4] par exemple, ***f*** présente un maximum en 3, qui est égal à 2.

VII. Fonctions algébriques de base :

Définition :

Sont appelées fonctions algébriques de base ou de référence, les fonctions suivantes :
Les fonctions linéaires c'est-à-dire, toute fonction ayant la forme ; $\boldsymbol{f(x) = ax}$ $(\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^*)$.
Les fonctions "carré" c'est-à-dire, toute fonction ayant la forme ; $\boldsymbol{f(x) = ax^2}$ $(\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^*)$.
Les fonctions "cube" c'est-à-dire, toute fonction ayant la forme ; $\boldsymbol{f(x) = ax^3}$ $(\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^*)$.
Les fonctions "inverse" c'est-à-dire, toute fonction ayant la forme ; $\boldsymbol{f(x) = \frac{a}{x}}$ $(\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^*)$.
Les fonctions "racine carré" c'est-à-dire, toute fonction ayant la forme ; $\boldsymbol{f(x) = \sqrt{ax}}(\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^*)$.
Les fonctions ; constante, linéaire et affine ont été étudiées en $4AS$. Cette étudea permis d'établir leurs représentations graphiques qui sont des droites ; parallèle à l'axe (xOx') pour la fonction constante, passant par l'origine pour la fonction linéaire et passant hors de l'origine pour la fonction affine.
La partie qui suit, permet d'approfondir l'étude des fonctions dites de base.

a) Les étapes de l'étude et de la construction de la courbe d'une fonction :

L'étude et la construction de la courbe d'une fonction comprend les étapes suivantes :

a- Détermination de son domaine de définition.
b- Détermination de son domaine d'étude, en étudiant sa parité et sa période.
c- Détermination de sa variation, étape qui comprend ;

- Le calcul de son taux d'accroissement.
- Le dressage de son tableau de variation.
- Détermination des extremums s'ils existent.

d- Sa représentation graphique, étape qui comprend ;

- L'établissement d'un tableau de valeurs de la fonction.
- La construction de sa courbe graphique.

b) Fonction carré :

Exemple 20 :

Soit la fonction : $f(x) = x^2$

Etude et représentation graphique de f :

a. Domaine de définition :

La fonction $f(x) = x^2$ est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$; $\boldsymbol{\mathcal{D}_f} = \mathbb{R}$

b. Domaine d'étude :

Parité :

$\forall x \in \mathbb{R}, -x \in \mathbb{R}$ *et* $f(-x) = (-x)^2 = (-x)(-x) = x^2 = f(x) \Longrightarrow \boldsymbol{f(-x) = f(x)}$

f est paire et admet donc (yOy') comme axe de symétrie.

On peut donc l'étudier sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ et compléter sa courbe en procédant par symétrie par rapport à (yOy').

c. Variations :

- **Taux d'accroissement :**

Quels que soient $x_1, x_2 \in \mathcal{D}_f$, on a ;

$$T = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{{x_1}^2 - {x_2}^2}{x_1 - x_2} = \frac{(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)}{x_1 - x_2} = (x_1 + x_2) \Longrightarrow \boldsymbol{T = x_1 + x_2}$$

Si $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+ \Longrightarrow T > 0 \Longrightarrow f \nearrow$ sur $\mathbb{R}_+$

- **Tableau de variation :**

x	0 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
T	$+$
$f(x)$	0 $\nearrow$ $+\infty$

- **Extrémums :**

La fonction f est symétrique par rapport à (yOy'), donc,0 est un minimum de f.

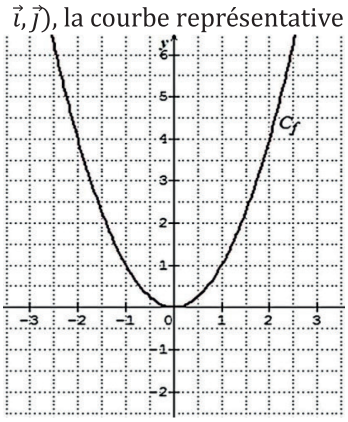
d. Représentation graphique :

- **Tableau de valeurs :**

x	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	0	1	4	9	16	25	36

- **Courbe de f :**

Dans le plan $\mathcal{P}$muni d'un repère $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, la courbe représentative de la fonction $f(x) = x^2$ est une parabole.



c) Fonction cube :

Exemple 21 :

La fonction $f(x) = x^3$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Etude et représentation graphique de f :

a. Domaine de définition :

La fonction $f(x) = x^3$ est définie pour tout $x \in \mathbb{R} \Longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{D}_f} = \mathbb{R}$

b. Domaine d'étude :

Parité :

$\forall x \in \mathbb{R}, -x \in \mathbb{R}\ \ et\ \ f(-x) = (-x)^3 = (-x)(-x)(-x) = -(x^3) = -f(x) \Longrightarrow \boldsymbol{f(-x) = -f(x)}$

La fonction $f(x) = x^3$ est impaire. Sa courbe admet l'origine O comme centre de symétrie.

On peut donc l'étudier sur l'intervalle $[0;\ +\infty[$ et compléter sa courbe par symétrie par rapportà O.

c. Variations :

- **Taux d'accroissement :**

  Quels que soient $x_1, x_2 \in \mathcal{D}_f$, on a ;

$$T = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{{x_1}^3 - {x_2}^3}{x_1 - x_2} = \frac{(x_1 - x_2)({x_1}^2 + x_1x_2 + {x_2}^2)}{x_1 - x_2} \Longrightarrow \boldsymbol{T = {x_1}^2 + x_1x_2 + {x_2}^2}$$

  Si $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+ \Longrightarrow T > 0 \Longrightarrow f \nearrow$ sur $\mathbb{R}_+$

- **Tableau de variation :**

x	0 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
T	$+$
$f(x)$	$0 \nearrow +\infty$

- **Extrémums :**

Comme la fonction f est strictement croissante sur son domaine de définition, elle n'a donc pas d'extrémums.

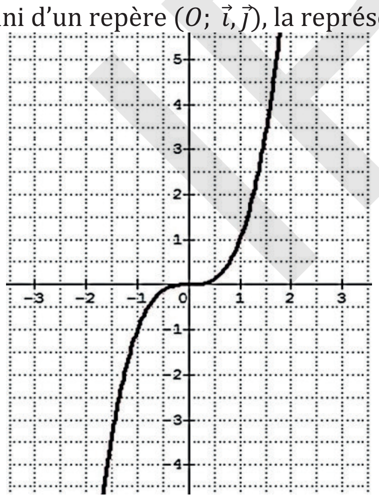
d. Représentation graphique :

- **Tableau de valeurs :**

x	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	0	1	8	27	64	125	216

- **Courbe de f :**

  Dans le plan $\mathcal{P}$muni d'un repère $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, la représentation graphique de la fonction $f(x) = x^3$est la courbe suivante.



d) Fonction racine carrée :

Exemple 22 :

La fonction $f(x) = \sqrt{x}$

Etude et représentation graphique de f :

a- Domaine de définition :

La fonction $f(x) = \sqrt{x}$ est définie pour tout $x \in \mathbb{R}_+ \Longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{D}_f} = [\mathbf{0};\ +\infty[= \mathbb{R}_+$

b- Domaine d'étude :

Parité :

$\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{\mathcal{D}_f} \Longrightarrow -x \notin \boldsymbol{\mathcal{D}_f}$

La fonction $f(x) = \sqrt{x}$ n'est ni paire ni impaire.

Son domaine d'étude est donc égal à son domaine de définition, c'est-à-dire $\mathbb{R}_+$.

c. Variations :

- **Taux d'accroissement :**

Quels que soient $x_1, x_2 \in \mathcal{D}_f$, on a ;

$$T = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}}{x_1 - x_2} = \frac{\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}}{(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2})} = \frac{1}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}} \Longrightarrow \boldsymbol{T} = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\boldsymbol{x_1}} + \sqrt{\boldsymbol{x_2}}}$$

$x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+ \Longrightarrow T > 0 \Longrightarrow f \nearrow$ sur $\mathbb{R}_+$

- **Tableau de variation :**

$\boldsymbol{x}$	0	$+\infty$
$\boldsymbol{T}$	$+$	
$\boldsymbol{f(x)}$	0 $\nearrow$	$+\infty$

- **Extrémums :**

La fonction f est strictement croissante sur son domaine de définition n'a de ce fait pas d'extrémums.

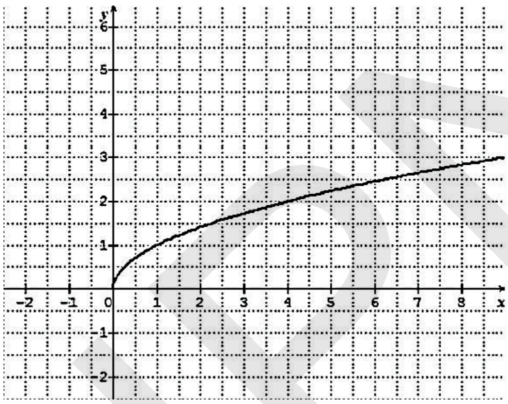
d. Représentation graphique :

- **Tableau de valeurs :**

$\boldsymbol{x}$	**0**	**1**	**2**	**4**	**9**	**16**	**25**	**36**
$\boldsymbol{f(x)}$	**0**	**1**	$\sqrt{\mathbf{2}}$	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**

- **Courbe de $\boldsymbol{f}$:**

Dans le plan $\mathcal{P}$muni d'un repère $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, la représentation graphique de la fonction $f(x) = \sqrt{x}$ est une demi-parabole de direction $[Ox)$.



5. Fonction inverse :

Exemple 23 :

La fonction $f(x) = \frac{1}{x}$.

Etude et représentation graphique de $\boldsymbol{f}$:

a- Domaine de définition :

La fonction$f(x) = \frac{1}{x}$ est définie pour tout $x \in \mathbb{R}^* \Longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{D}_f} = \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{\mathbf{0}\}$

b- Domaine d'étude :

Parité :

$\forall x \neq 0, -x \in \mathbb{R} \setminus \{\mathbf{0}\}\ \ et\ \ f(-x) = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x} = -\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x) \Longrightarrow \boldsymbol{f(-x) = -f(x)}$.

La fonction$f(x) = \frac{1}{x}$ est impaire. Sa courbe représentative admet donc O comme centre de symétrie.

On peut donc l'étudier sur l'intervalle $[0;\ +\infty[$ et compléter sa courbe en procédant par symétrie par rapport à O.

c. Variations :

- **Taux d'accroissement :**

Quels que soient $x_1, x_2 \in \mathcal{D}_f$, on a ;

$$T = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}}{x_1 - x_2} = \frac{(x_2 - x_1)}{(x_1 x_2)(x_1 - x_2)} = \frac{-1}{x_1 x_2} \Longrightarrow \boldsymbol{T} = \frac{\mathbf{-1}}{\boldsymbol{x_1 x_2}}$$

Si $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_-^* \Longrightarrow T < 0 \Longrightarrow f \searrow$ sur $\mathbb{R}_-^*$

- **Tableau de variation :**

x	0 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
T	$-$
$f(x)$	$\Vert$ $+\infty$ $\searrow$ 0^+

- **Extrémums :**

La fonction f est strictement décroissante sur son domaine de définition n'a de ce fait pas d'extrémums.

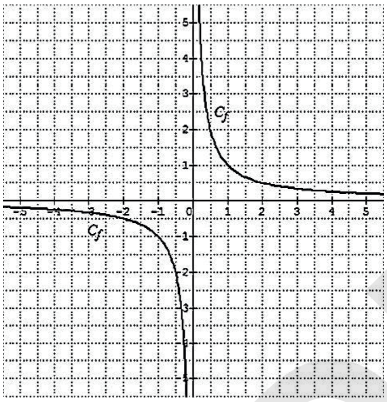
d. Représentation graphique de f :

- **Tableau de valeurs :**

x	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
$f(x)$	$\Vert$	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

- **Courbe de f :**

Dans le plan $\mathcal{P}$muni d'un repère $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$, la représentation graphique de la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$est une hyperbole.

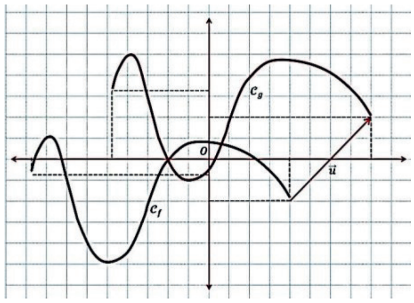


- **Image d'une courbe par une translation (fonctions associées) :**

Propriété 3 :

La courbe $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f est l'image de la courbe $\mathcal{C}_g$ d'une fonction g par la translation de vecteur $\vec{u}\binom{a}{b}$, si et seulement si ;

$\forall \boldsymbol{x} \in \mathcal{D}_f,\ \boldsymbol{x}-\boldsymbol{a} \in \mathcal{D}_g\ \ \boldsymbol{et}\ \ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})$.



Exercice 3 :

Démontrer la propriété 3

Cas particuliers :

$b = 0 \Longrightarrow \vec{u}\binom{a}{0} \Longrightarrow f(x) = g(x-a) \Leftrightarrow t_{\vec{u}}$ est une translation horizontale.

$a = 0 \Longrightarrow \vec{u}\binom{0}{b} \Longrightarrow f(x) = b + g(x) \Leftrightarrow t_{\vec{u}}$ est une translation verticale.

VIII. Les fonctions trigonométriques :

1. La fonction $f(x) = \sin x$:

a. Domaine de définition :

La fonction $f(x) = \sin x$ est définie sur $\mathbb{R}$.

b. Domaine d'étude :

- **Périodicité :**

La fonction f a pour période 2π c'est-à-dire que ; $\forall\ x \in \mathbb{R} : f(x+2\pi) = \sin(x+2\pi) = \sin x$.

- **Parité :**

La fonction f est impaire car, $f(-x) = \sin(-x) = -\sin x = -f(x)$

Compte-tenu de ce qui précède le domaine d'étude de f est l'intervalle$[0;\ \pi]$. On étudie f sur la moitié de sa période, puis on complète son graphique sur sa période en opérant par symétrie par rapport à O. On obtient ensuite toute la courbe en procédant à la reproduction de la courbe obtenue, ou par translations répétitives de vecteurs ; $\vec{u}_k\binom{2k\pi}{0}\ tel\ k \in \mathbb{Z}$.

c. Variations :

- **Croissance et décroissance :**

Si $0 \leq a \leq b \leq \frac{\pi}{2} \Longrightarrow \sin a \leq \sin b \Longrightarrow f$ est $\nearrow$ sur $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$

Si $\frac{\pi}{2} \leq a \leq b \leq \pi \Longrightarrow \sin a \geq \sin b \Longrightarrow f$ est $\searrow$ sur $\left[\frac{\pi}{2};\ \pi\right]$.

- **Tableau de variation sur $[0;\ \pi]$:**

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$f(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

- **Extrémums :**

Du fait que $-1 \leq \sin x \leq 1$, la fonction f admet un minimum $m = -1$ et un maximum $M = 1$.

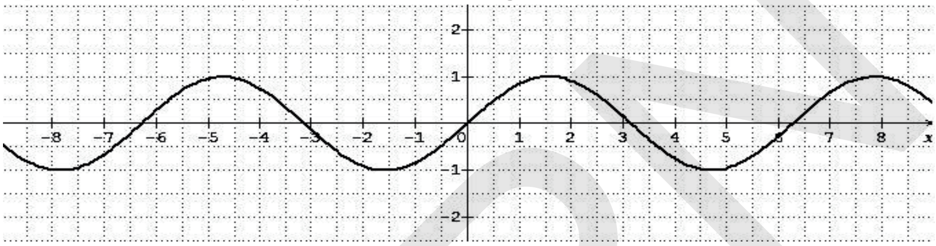
d. Représentation graphique :

- **Tableau de valeurs :**

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$f(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

- **Courbe de f :**

On peut tracer la courbe représentative $(\mathcal{C})$ de $\sin x$, point par point sur son ensemble de définition $\mathbb{R}$ dans un repère orthonormal $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ et obtenir à la figure suivante.



2. La fonction $f(x) = \cos x$:

a. Domaine de définition :

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.

b. Domaine d'étude :

- **Périodicité :**

La fonction f a pour période 2π c'est-à-dire que $\forall\ x \in \mathbb{R} : f(x + 2\pi) = \cos(x + 2\pi) = \cos x$.

- **Parité :**

La fonction f est paire car,$f(-x) = \cos(-x) = \cos x = f(x)$

Compte-tenu de ce qui précède le domaine d'étude de f est l'intervalle $[0;\ \pi]$. On étudie f sur la moitié de sa période, puis on complète son graphique sur sa période en opérant par symétrie par rapport à O. On obtient ensuite toute la courbe en procédant à la reproduction de la courbe obtenue, ou par translations répétitives de vecteurs ; $\vec{u}_k \begin{pmatrix} 2k\pi \\ 0 \end{pmatrix}$ $tel\ k \in \mathbb{Z}$

c. Variations :

- **Croissance et décroissance :**

Si $0 \leq a \leq b \leq \frac{\pi}{2} \Longrightarrow \cos a \geq \cos b \Longrightarrow f$ est $\searrow$ sur $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$

Si $\frac{\pi}{2} \leq a \leq b \leq \pi \Longrightarrow \cos a \geq \cos b \Longrightarrow f$ est $\searrow$ sur $\left[\frac{\pi}{2};\ \pi\right]$

- **Tableau de variation sur $[0\ ;\ \pi]$:**

x	0		π
$f(x)$	0	$\searrow$	-1

- **Extrémums :**

Du fait que $-1 \leq \cos x \leq 1$, la fonction f admet un minimum $m = -1$ et un maximum $M = 1$.

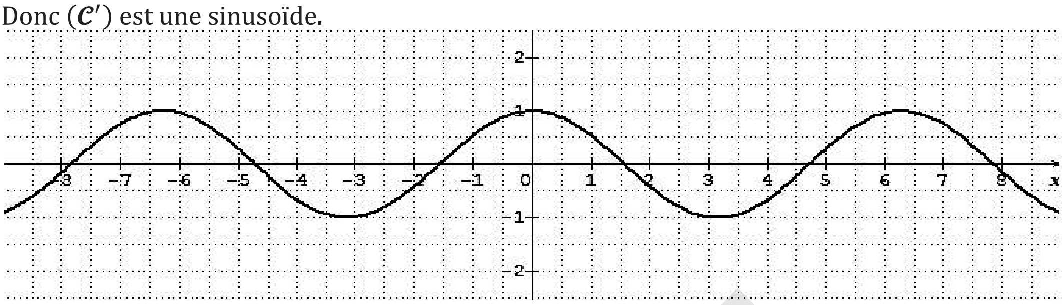
d. Représentation graphique :

- **Tableau de valeurs :**

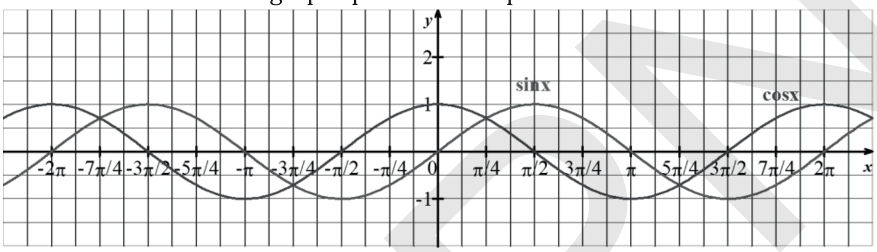
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$f(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	-1

- **Courbe de f :**

On peut tracer la courbe représentative $(\mathcal{C}')$ de $\cos x$, point par point sur son ensemble de définition $\mathbb{R}$ dans un repère orthonormal $(O\,;\,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ et obtenir à la figure suivante.
On peut démontrer que la translation de vecteur $\frac{\pi}{2}\vec{\imath}$ transforme $(\mathcal{C})$ en $(\mathcal{C}')$.
Donc $(\mathcal{C}')$ est une sinusoïde.



Les fonctions $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \cos x$ sont des fonctions périodiques de période 2π comme nous l'avons vu. Pour vérifier que les deux courbes correspondent à une sinusoïde, on peut représenter graphiquement leurs courbes sur un même graphique et les comparer.



3. La fonction $f(x) = \tan x$:

a. Domaine de définition :

$f(x) = \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

La fonction f est définie pour $\cos x \neq 0$; c'est-à-dire si :

$x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, tel que k $\in \mathbb{Z} \Longrightarrow \mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \left\{x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, \text{tel que } k \in \mathbb{Z}\right\}$

b. Domaine d'étude :

- **Périodicité :**

La fonction f a pour période π c'est-à-dire que

$$\forall\, x \in \mathbb{R} : f(x+\pi) = \tan(x+\pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{-\sin x}{-\cos x} = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x = f(x)$$

- **Parité**

La fonction f est impaire car, $\quad f(-x) = \tan(-x) = \dfrac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \dfrac{-\sin x}{\cos x} = -\left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right) = -\tan x = -f(x)$

Compte-tenu de ce qui précède le domaine d'étude de f est l'intervalle $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$. On étudie f sur la moitié de sa période, puis, on complète son graphique sur sa période en opérant par symétrie par rapport à O. On obtient ensuite toute la courbe en procédant à la reproduction de la courbe obtenue, ou par translations répétitives de vecteurs $\vec{u}_k \begin{pmatrix} k\pi \\ 0 \end{pmatrix}$ *tel* $k \in \mathbb{Z}$

c. Variations :

- **Croissance et décroissance :**

Si $0 \leq a \leq b \leq \dfrac{\pi}{2} \Longrightarrow 0 \leq \sin a \leq \sin b$, *et* $\cos a \geq \cos b$

$0 \leq \dfrac{1}{\cos a} \leq \dfrac{1}{\cos b} \Longrightarrow 0 \leq \dfrac{\sin a}{\cos a} \leq \dfrac{\cos b}{\cos b} \Longrightarrow 0 \leq \tan a \leq \tan b \Longrightarrow f$ est $\nearrow$ sur $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$

- **Tableau de variation sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$:**

x	0 $\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad$ $\frac{\pi}{2}$
$\tan x$	$0 \nearrow +\infty$ ‖

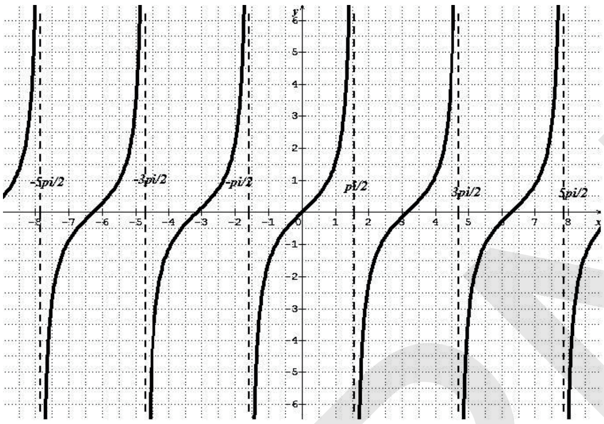
d. Représentation graphique :

- **Tableau de valeurs :**

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$f(x)$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	‖

- **Courbe de f :**

La courbe représentative $(\mathcal{C}'')$ de $\tan x$, dans un repère orthonormal $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est donnée par la figure suivante.



Propriété 3 :

Les périodes des fonctions des formes ; $f(x) = \sin ax, g(x) = cos ax$ est : $T = \frac{2\pi}{a}$

Les fonctions des formes ; $h(x) = \tan ax$ sont périodiques et leurs périodes est : $T = \frac{2\pi}{a}$

Exercice 4 :

Démontrer cette propriété.

IX. Les fonctions associées par translation aux fonctions trigonométriques usuelles :

Les fonctions ayant les formes suivantes ; $f_1(x) = \sin(a_1 x + \alpha_1) + \beta_1$; $g_1(x) = \cos(a_2 x + \alpha_2) + \beta_2$
$h_1(x) = \tan(a_3 x + \alpha_3) + \beta_3$
Sont appelées fonctions associées, par translations, aux fonctions trigonométriques de base ; ou fonctions déduites par translations des fonctions trigonométriques de base :

Remarque 4 :

Les fonctions associées par translations ont même sens de variations

Exemple 24 :

Etudier et représenter graphiquement sur le même repère les fonctions $\boldsymbol{f}(x) = \sin x$ et $\boldsymbol{g}(x) = \cos x$.

Par quelle transformation simple obtient-on C_g de C_f.

Réponse :

• **Tableau de variation**	• **Tableau de variation**
• $\boldsymbol{f}(x) = \sin x$	• $\boldsymbol{g}(x) = \cos x$
• D$\boldsymbol{f}$ = $\mathbb{R}$	• D$\boldsymbol{g}$ = $\mathbb{R}$
• $\boldsymbol{f}$ est périodique ; impaire.	• $\boldsymbol{g}$ est périodique ; paire.
• Il suffit d'étudier f sur $[0 ; \pi]$	• Il suffit d'étudier g sur $[0 ; \pi]$
• Sens de variation	• Sens de variation
$u < v \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin u < \sin v \Rightarrow \boldsymbol{f}$ est croissante sur $[0 ; \frac{\pi}{2}]$	$u < v \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos u > \cos v \Rightarrow \boldsymbol{g}$ est décroissante sur $[0 ; \frac{\pi}{2}]$

Tableau de variation de f			
x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$f(x)$	0 0 ↗	1	↘

Tableau de variation de g			
x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$g(x)$	**1** ↘	**0** ↘	**-**
	1		

La translation t de vecteur $\begin{pmatrix} \frac{\pi}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ transforme C_f en C

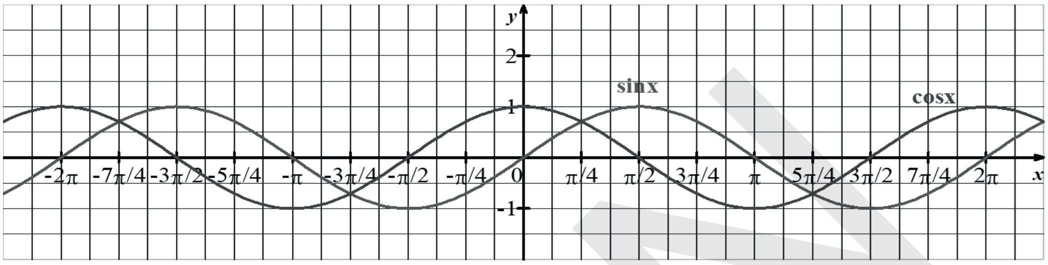
X. Fonctions affines sur intervalles :

Exemple 25 :

La fonction partie entière :

Soit f la fonction partie entière de x définie par ; $E(x)$ d'un nombre réel x c'est le nombre entier n tel que $n \leq x < n + 1. f(x) = E(x) = n$ telle que ; $n \leq x < n + 1$

($E(x)$ *est le plus grand entier inférieur ou égal à* x, appelée également fonction en escalier).



Etude et Représentation graphique de f :

$x \in [-4;\ -3[\Rightarrow f(x) = -4$

$x \in [-3;\ -2[\Rightarrow f(x) = -3$

$x \in [-2;\ -1[\Rightarrow f(x) = -2$

$x \in [-1;\ 0[\Rightarrow f(x) = -1$

$x \in [0;\ 1[\Rightarrow f(x) = 0$

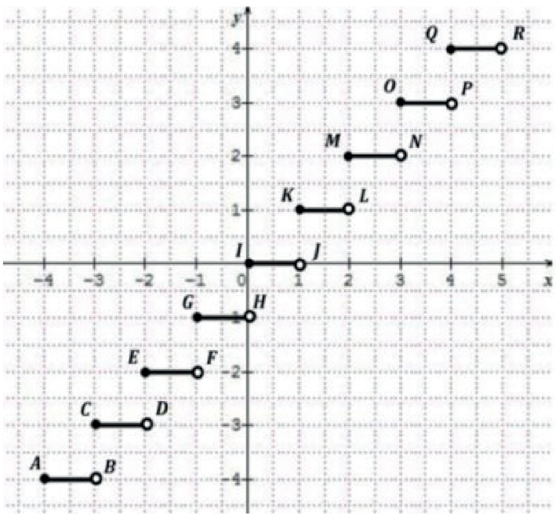
$x \in [1;\ 2[\Rightarrow f(x) = 1$

$x \in [2;\ 3[\Rightarrow f(x) = 2$

$x \in [3;\ 4[\Rightarrow f(x) = 3$

La courbe C_f de f est la réunion des segments de droites :

$C_f = \cdots \cup [AB[\cup [CD[\cup [EF[\cup [GH[\cup [IJ[\cup [KL[\cup [MN[\cup [PO[\cup \ldots$



Exercices Généraux

1. Donner les ensembles de définition de chacune des fonctions suivantes :

$h(x) = \sqrt{|x|}$; $j(x) = \sqrt{3x^2 + 4|x|}$;

$p(x) = \dfrac{2x+1}{\sqrt{||x|-5|-2}}$;

$k(x) = \sqrt{x^4 + 3x^2 + 5|x|}$; $l(x) = \sqrt{2|x| - 5}$;

$m(x) = \dfrac{2x+5}{\sqrt{x^2-4}}$; $n(x) = \dfrac{3x-7}{\sqrt{3|x|+8}}$; $q(x) = \sqrt{3x^3 + |x|}$

$s(x) = \sqrt{||x^2-4|-8|-1}$; $t(x) = \dfrac{4x+1}{\sqrt{||x^2-2|-7|}}$.

2. Pour chacune des fonctions rationnelles suivantes, déterminer l'ensemble de définition et simplifier si possible l'expression :

$A(x) = \dfrac{x^2}{x^3+2x^2}$; $B(x) = \dfrac{6-2x}{x^2-6x+9}$;

$C(x) = \dfrac{2}{(x-1)(x-3)} - \dfrac{1}{(x-2)(x-3)}$

$D(x) = \dfrac{(2x-3)(x-1)^2 - 4(2x-3)}{(x+1)^2(x-3)}$;

$E(x) = \dfrac{3}{x} + \dfrac{5}{x+2} - \dfrac{1}{x-2} + \dfrac{4}{x^2-4}$;

$F(x) = \dfrac{16}{12x-4} - \dfrac{15x+5}{(3x+1)^2} + \dfrac{9x}{9x^3-x}$;

$G(x) = \dfrac{x+\frac{1}{x}-1}{\frac{1}{x}-1} \times \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$; $I(x) = \dfrac{x-\frac{3x}{3-x}}{x+\frac{3x}{3-x}}$

$H(x) = \left(\dfrac{1}{x+2} + \dfrac{1}{x-2}\right) \times \dfrac{x^2-4}{2x}$.

3. On donne les fonctions suivantes ;

$f(x) = 3x - 7$; $g(x) = 4x^2 + 5x - 2$;

$h(x) = 5x^3 - 1$ et $l(x) = -4x + 6$.

1°) Montrer que f est croissante sur $\mathbb{R}$, g est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et h est croissante sur $\mathbb{R}_-$.

2°) Montrer que l est décroissante sur $\mathbb{R}$.

4. Parmi les fonctions suivantes, quelles sont les fonctions paires, les fonctions impaires et celles qui ne sont ni paires ni impaires ;

$f : x \mapsto x^2$; $g : x \mapsto x^3$; $h : x \mapsto \dfrac{1}{x}$;

$j : x \mapsto x + \dfrac{1}{x}$; $k : x \mapsto 2x^2 + \dfrac{3}{x^2}$;

$l : x \mapsto x^2 + \dfrac{5}{x}$; $m : x \mapsto \dfrac{x^2+1}{x^3-2x}$

$n : x \mapsto 2x^2 + \dfrac{|x|}{x^2-6}$; $p : x \mapsto \sqrt{-x}$;

$q : x \mapsto \sqrt{x} \times \sqrt{3x+1}$; $r : x \mapsto \dfrac{3}{\sqrt{|x|}}$

$s : x \mapsto \sqrt{1-x}$; $t : x \mapsto \dfrac{-5x}{\sqrt{3x+5}}$;

$a : x \mapsto (3-2x)(5x+2)$.

5. Etudier la parité des fonctions suivantes

$f(x) = \dfrac{-5x^2 - 4|x|}{(x-3)(3-x)}$; $g(x) = \sqrt{3x^2 + 5x - 2}$;

$h(x) = \sqrt{|x|}$; $j(x) = \sqrt{3x^2 + 4|x|}$;

$p(x) = \dfrac{2x+1}{\sqrt{||x|-5|-2}}$; $q(x) = \sqrt{3x^3 - |x|}$;

$l(x) = \sqrt{2|x| - 5}$; $m(x) = \dfrac{2|x|+5}{\sqrt{x^2-4}}$;

$n(x) = \dfrac{3x-7}{\sqrt{3|x|+8}}$; $k(x) = \sqrt{x^4 + 3x^2 + 5|x|}$;

$s(x) = \sqrt{||x^2-4|-8|-1}$; $t(x) = \dfrac{4|x|+1}{\sqrt{||x^2-2|-7|}}$.

6. Soit ***f*** la fonction définie par le tableau :

x	-1	-0,5	0	1	1,5	3
f(x)	2	4	3,5	2	-0,5	-14

Quelles sont les images par ***f*** des nombres : 0 ; 1 et 1,5 ?
Quels nombres ont pour image par ***f*** le nombre 2 ?

7. Soit ***f*** la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -\dfrac{3}{4}x + \dfrac{1}{2}$.

a) Reproduire et compléter le tableau suivant :

x	-1	-0,5	0	0,5	2	4
f(x)						

c) Quel est le nombre dont l'image par f est 4 ?

8. Soit ***f*** une fonction définie pour tout réel x sauf $\dfrac{4}{3}$, par :

$f(x) = \dfrac{2x+1}{3x-4}$.

Déterminer les images par f de 4 ; -2 ; 7 ; 0,5 et 5.

Déterminer les antécédents par f de 2.

Soit C la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé. Déterminer, s'ils existent, les coordonnées des points d'intersections de C avec l'axe des abscisses.

9. Trouver D_f et D_g les domaines de définition ***f*** et ***g*** sont définies par :

$f(x) = 2x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 5x$; $g(x) = \dfrac{2}{x^4} - \dfrac{3}{x^3} + \dfrac{4}{x^2} - \dfrac{5}{x}$.

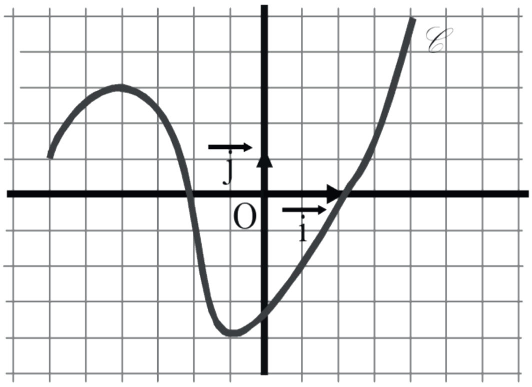
10. Dans chacun des cas suivants, déterminer l'ensemble de définition de la fonction ***f***.

a) $f(x) = (7 - \frac{3}{2x})(5x+1)$; b) $f(x) = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{3x+7}}$.

c) $f(x) = \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x-3}$; d) $f(x) = \frac{1}{(x+2)(x-3)}$.

e) $f(x) = \frac{1}{|x|+1}$ f) $f(x) = |x| - 1$

11. Pourquoi la courbe C , de la figure ci-dessous, représente-t-elle une fonction ?



Soit ***f*** cette fonction.
Déterminer ;

a) L'ordonnée du point de **C** dont l'abscisse est 1,5 ;
b) Les abscisses des points de **C** dont l'ordonnée est -1.
c) Les coordonnées des sommets de **C** ;
d) L'image de -1 par ***f*** ;
e) Les antécédents de 3 par ***f***.

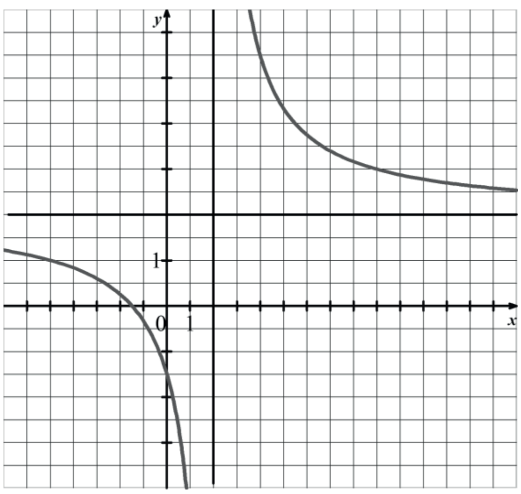
12. Soit ***f*** la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$.

a) Reproduire et compléter le tableau suivant :

x	-1	-0,5	0	0,5	2	4
f(x)						

f) b) Quel est le nombre dont l'image par f est 4 ?

13. La courbe **C**, ci-dessous, représente la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par $f(x) = \frac{2x+3}{x-2}$.



1°) Déterminer graphiquement :

a) Les images de 1 et 11 ;

b) Les antécédents, s'ils existent, de 4, 2 et 0.

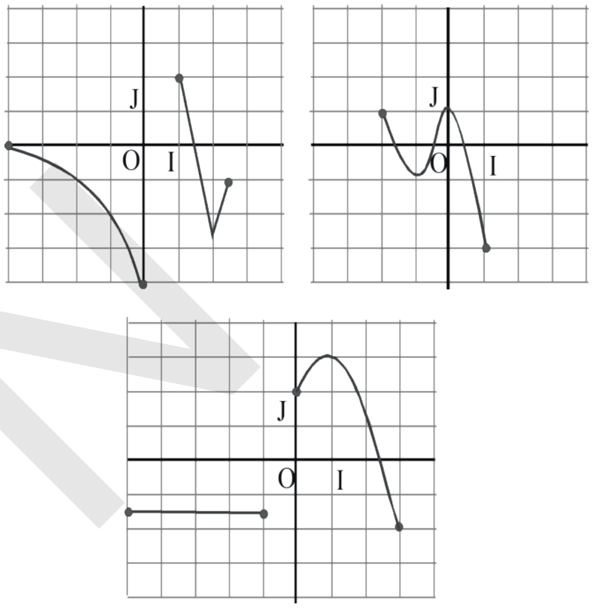
2°) a) Calculer les images de 1 et de 11.

b) Calculer les antécédents de 4 ; 2 ; 0.

c) Soit m un nombre réel quelconque.

Calculer les antécédents de m.

14. Les courbes ci-dessous sont des représentations graphiques de fonctions numériques.
Donner l'ensemble de définition de ces fonctions.



15. Associer les tableaux de variation aux courbes représentatives.

1.

x	-3		0		1		2
f(x)	2	↘	0	↗	1	↘	-1

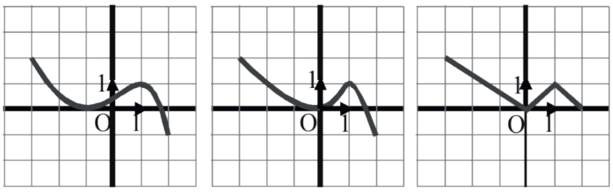
2.

x	-3		0		1		2
f(x)	2	↘	0	↗	1	↘	0

3.

x	-3		-1		1		2
f(x)	2	↘	0	↗	1	↘	-1

a b) c)



Quels nombres ont pour image par f le nombre 2 ?

16.Soit f : x $\mapsto$ x2 + 2x -1.

Soit a et b deux réels. Démontrer que :

f(a) – f(b) = (a – b)(a + b + 2).

En déduire que f est décroissante sur]- ∞ ; -1] et que f est croissante sur [-1 ; + ∞[.

17.Soit f : x $\mapsto \frac{-2}{x^2}$.

Montrer, en utilisant les règles sur les inégalités que la fonction f est croissante sur]0 ; + ∞].

Parité d'une fonction

18.Etudier la parité des fonctions définies par :

1°) x∈ $\mathbb{R}$ et f(x) = 1 + x2 ; 2°) x∈ $\mathbb{R}$ et f(x) = 5x3 -2x

3°) x∈ $\mathbb{R}$ et f(x) = |x3 + x | ; 4°) x∈ $\mathbb{R}$ et f(x) = x +1

5°) x≥2 et f(x) = $\sqrt{x-1}$.

19. Soit la fonction ***f*** définie sur $\mathbb{R}$ par : ***f***(x) = $\frac{2x^2+3}{x^2+1}$.

1) Exprimer ***f***(-x) puis comparer avec ***f***(x).

Soit M le point de coordonnées (x ; ***f*** (x)) et M' celui de coordonnées (-x ; ***f*** (-x)).

2) Que peut-on en déduire pour la courbe **C** représentative de ***f*** sur $\mathbb{R} - \{-1\ ;\ 1\}$?

20. Soit la fonction ***g*** définie sur $\mathbb{R}$ par : ***g***(x) = $\frac{x^3+3}{x^2+1}$.

1°) Exprimer ***g***(-x) puis comparer avec ***g***(x).

Soit N le point de coordonnées (x ; $\boldsymbol{g}(x)$) et N' celui de coordonnées ($-x$; $\boldsymbol{g}(-x)$).

2°) Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathscr{C}$ représentative de ***g*** sur $\mathbb{R}$.

21. On considère la fonction ***f*** : x $\mapsto$ |x|.

1°) Quel est son ensemble de définition ?

2°)Tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormal (O ; I ; J).

22. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

f (x) = |x + 2|.

1°) Exprimer *f*(x) sans valeur absolue suivant les valeurs du réel x.

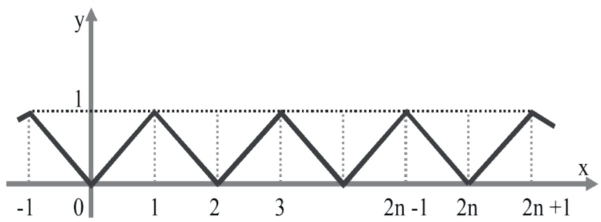
2°) Tracer la représentation graphique C de *f*.

23. Soit la représentation graphique de la fonction ***f*** définie sur $\mathbb{R}$. L'unité de longueur sur les deux axes perpendiculaires est 1 cm.

1°) Calculer *f*(x) dans l'intervalle [2n ; 2n + 1] (n∈ $\mathbb{Z}$).

2°) Trouver une période de *f*.

3°) Trouver graphiquement les solutions de l'équation *f*(x) = $\frac{1}{2}$ appartenant à l'intervalle [-1 ; 3].



Chapitre 9 : PRODUIT SCALAIRE

I) Les différentes expressions du produit scalaire :

1. Expression avec un cosinus :

Définition 1 :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.
On appelle produit scalaire de $\vec{u}$ par $\vec{v}$, le nombre réel défini par ;

- $\vec{u}.\vec{v} = 0$ **si** $\vec{u} = \vec{0}$ **ou** $\vec{v} = \vec{0}$ **;**
- $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\| \times \cos(\widehat{\vec{u};\ \vec{v}})$ **si** $\vec{u} \neq \vec{0}$ **et** $\vec{v} \neq \vec{0}$.

2. Fixation par des points :

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls, et soient A, B et C trois points du plan $\mathcal{P}$ tels que ;$\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ *et* $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$
On appelle produit scalaire des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, le nombre réel défini par :

$$\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times \cos \widehat{BAC}$$

Remarque 1 :

$\vec{u}.\vec{v}$se lit " $\vec{u}$scalaire$\vec{v}$"

3. Cas particuliers :

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls ;

- *Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$*sont colinéaires, il y a deux cas de figure:

$$\begin{cases} \alpha = (\widehat{\vec{u};\ \vec{v}}) = 0 \Longrightarrow \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ ont même sens } \Longrightarrow \vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\| \\ \qquad ou \\ \alpha = (\widehat{\vec{u};\ \vec{v}}) = \pi \Longrightarrow \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ ont sens contraires } \Longrightarrow \vec{u}.\vec{v} = -\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\| \end{cases}$$

- Si $\vec{u} = \vec{0}$ou $\vec{v} = \vec{0}$, alors ; $\vec{u}.\vec{v} = 0$
- *Si* $\vec{u} \perp \vec{v}$, alors ; $\alpha = (\widehat{\vec{u};\ \vec{v}}) = \frac{\pi}{2} \Longrightarrow \vec{u}.\vec{v} = 0.$

Conclusion :

$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v} = 0$

4. Carré scalaire :

Soit $\vec{u}$ un $\vec{v}$ ecteur du plan. Le réel $\vec{u}.\vec{u}$ s'appelle le carré scalaire de $\vec{u}$ et se note $\vec{u}^2$

On a ; $\vec{u}^2 = \vec{u}.\vec{u} = \|\vec{u}\|^2$. En particulier, pour tous points A et B du plan $\mathcal{P}$: $\overrightarrow{AB}^2 = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB} = \|\overrightarrow{AB}\|^2 = AB^2$.

5. Propriétés du produit scalaire :

- Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\mathcal{V}$; $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$
- Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$; $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$
- $\vec{u} \perp \vec{v} = 0 \Longrightarrow \vec{u}.\vec{v} = 0$
- Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$de $\mathcal{V}$ et tout nombre réel k;

1. $\vec{u}.(k\vec{v}) = (k\vec{u}).\vec{v} = k(\vec{u}.\vec{v})$
2. $\vec{u}.(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$
3. $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$
4. $(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$
5. $(\vec{u} + \vec{v})(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2 = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$

6. Produit scalaire et norme :

$$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$$

Exercice 1 :

Montrer cette propriété.

Exemple 1 :

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan tels que ; $\|\vec{u}\| = 5$, $\|\vec{v}\| = 4$ *et* $\vec{u}.\vec{v} = -6$

1°) Calculer $(\vec{u} + \vec{v})(3\vec{u} - \vec{v})$;
2°) Calculer $(3\vec{u} - \vec{v})^2$, puis en déduire $\|3\vec{u} - \vec{v}\|$;
3°) Calculer $\cos(\vec{u};\ \vec{v})$.

Réponse :

1°)$(\vec{u} + \vec{v})(3\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}.3\vec{u} + \vec{u}.(-\vec{v}) + 3\vec{v}.\vec{u} + \vec{v}.(-\vec{v}) = 3\vec{u}^2 - \vec{u}.\vec{v} + 3\vec{u}.\vec{v} - \vec{v}^2 = 3\|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}.\vec{v} - \|\vec{v}\|^2$
$= 3 \times 5^2 + 2 \times -6 - 4^2 = 75 - 12 - 16 = 47 \Longrightarrow \boldsymbol{(\vec{u} + \vec{v})(3\vec{u} - \vec{v}) = 47}$.

2°)$(3\vec{u} - \vec{v})^2 = (3\vec{u})^2 - 2(3\vec{u}.\vec{v}) + \vec{v}^2 = 9\vec{u}^2 - 6\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2 = 9\|\vec{u}\|^2 - \vec{u}.\vec{v} + \|\vec{v}\|^2 = 9 \times 5^2 - 6 \times (-6) + 4^2$
$= 225 + 36 + 16 = 277 \Longrightarrow \boldsymbol{(3\vec{u} - \vec{v})^2 = 277} \Longrightarrow \boldsymbol{\|3\vec{u} - \vec{v}\| = \sqrt{277}}$.

3°) $\cos(\vec{u};\ \vec{v}) = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|} = \frac{-6}{5 \times 4} = -\frac{6}{20} = -\frac{3}{10} \Longrightarrow \boldsymbol{\cos(\vec{u};\ \vec{v}) = -\frac{3}{10}}$.

7. Conséquence sur le parallélogramme :

Soit $ABCD$ un parallélogramme $\Longrightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$. Si on pose ; $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$, on a ;

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\|^2 - \|\overrightarrow{AB}\|^2 - \|\overrightarrow{AD}\|^2\right) \Longrightarrow \boldsymbol{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}} = \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{AC}\|^2 - \|\overrightarrow{AB}\|^2 - \|\overrightarrow{AD}\|^2\right)$.

8. Interprétation géométrique :

Pour tout point A et tous points B et C distincts de A on a ; $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC. \cos \widehat{BAC}$.

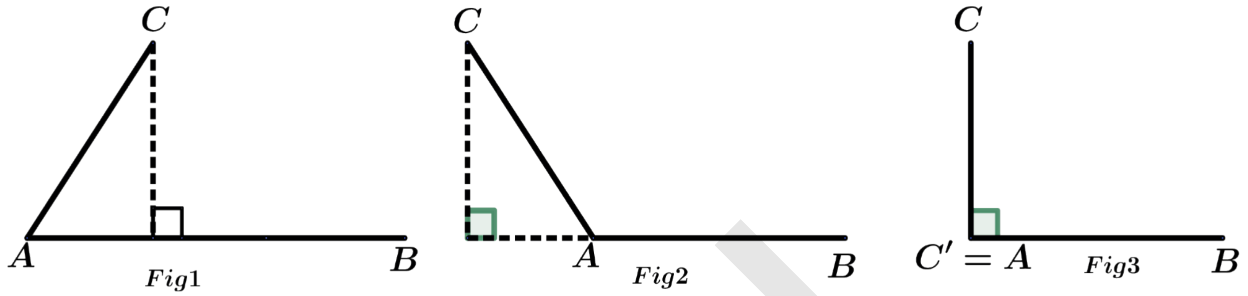
En effet ; $\|\overrightarrow{AB}\| = AB$; $\|\overrightarrow{AC}\| = AC$; et $\cos(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) = \cos \widehat{BAC} = \cos \hat{A}$.

Définition 2 :

On appelle produit scalaire de$\vec{u}$ et $\vec{v}$ et on note $\vec{u}.\vec{v}$, le nombre réel ; $\boldsymbol{\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC'}}$

Où ; $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$ et C' est le projeté orthogonal de C sur (AB).

a. Conséquence pratique :



Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul et $\vec{v}$ un vecteur. En posant$\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = AC$. En notant C' le projeté orthogonal de C sur (AB).

On a ; $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC'}$. Par conséquent ;

- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC$si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC'}$ sont de même sens.
- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -AB \times AC$ si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC'}$ sont de sens contraires
- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$ si $C' = A$ ($\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AC}$ *sont orthogonaux*).

Exemple 2 :

Soit $ABCD$ un rectangle tel que ; $L = AB = CD = a$ et $l = AD = BC = b$.Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DC}$; $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$,

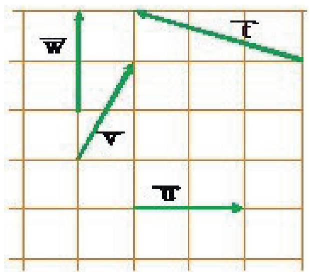
Réponse :

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \|\overrightarrow{AB}\|.\|\overrightarrow{CD}\| \times -1 = -a \times a = -a^2$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DC} = \|\overrightarrow{AB}\|.\|\overrightarrow{DC}\| \times 1 = a \times a = a^2$

$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = \|\overrightarrow{AD}\|.\|\overrightarrow{BC}\| \times 1 = b \times b = b^2$

$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = \|\overrightarrow{BA}\|.\|\overrightarrow{BC'}\| = \|\overrightarrow{BA}\|.\|\overrightarrow{BB}\| = 0$

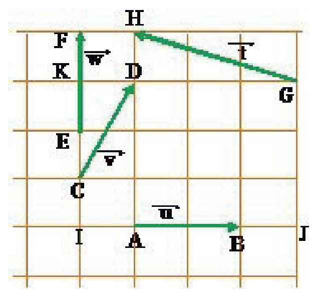


Exemple 3 :

Les carrés du quadrillage de la figure ci-contre ont des côtés de longueur 1.

Lire sur la figure les valeurs des produits scalaires.

$\vec{u}.\vec{v}$; $\vec{u}.\vec{w}$; $\vec{u}.\vec{v}$; $\vec{u}.\vec{t}$; $\vec{v}.\vec{w}$; $\vec{t}.\vec{w}$.



Réponse :

Sur la figure ci-contre, on place les points nécessaires à la représentation des vecteurs donnés.

Puis, on utilise l'expression des projetés orthogonaux comme suit :

$\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{IA} = AB \times IA = 2 \times 1 = 2$;

$\vec{u}.\vec{w} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{II} = 0$ (ca± $\leq \overrightarrow{EF}$)

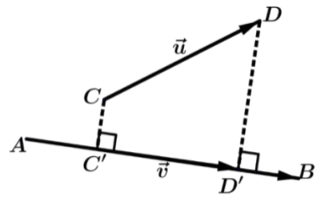
$\vec{u}.\vec{t} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{GH} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{JA} = -AB \times JA = -2 \times 3 = -6$;

$\vec{v}.\vec{w} = \vec{w}.\vec{v} = \overrightarrow{EF}.\overrightarrow{CD} = EF \times CK = EF.CK = 2 \times 2 = 4$;

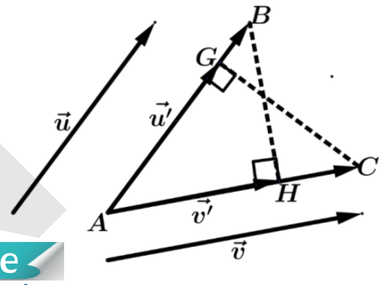
$\vec{t}.\vec{w} = \vec{w}.\vec{t} = \overrightarrow{EF}.\overrightarrow{GH} = \overrightarrow{EF}.\overrightarrow{KF} = EF \times KF = 2 \times 1 = 2$.

Exemple 4 :
Soit ABC un triangle rectangle en A tel que ; $AB = 6\ cm$, $AC = 8\ cm$, H est le projeté orthogonal de A sur (BC).
1°) Calculer AH, BH et CH
2°) Calculer $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$
3°) Que vaut $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ et pourquoi ?
Réponse :
1°) $AB \times AC = AH \times BC \Longrightarrow AH = \dfrac{AB \times AC}{BC} = \dfrac{6 \times 8}{10} = 4{,}8\ cm$
$$BH = \sqrt{6^2 - 4{,}8^2} = \sqrt{36 - 23{,}04} = \sqrt{12{,}96} = 3{,}6\ cm\ ;$$
$$CH = BC - BH = 10 - 3{,}6 = 6{,}4$$
2°) $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{BC} = 3{,}6 \times 10 = 36,$
$$\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CH}.\overrightarrow{CB} = 6{,}4 \times 10 = 64$$
3°) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AA} = AB \times 0 = 0,\qquad \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0\ car\ \vec{u} \perp \vec{v}.$

b. Produit scalaire et projection :
Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul et $\vec{v}$ un vecteur.
On pose $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$. On note C' et D' les projetés orthogonaux respectifs de C et de D sur la droite (AB). On a ; $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{C'D'}$.
On dit que le vecteur $\overrightarrow{C'D'}$ est le projeté orthogonal du vecteur $\overrightarrow{CD}$ sur la droite (AB).



c. Généralisation :
Exercice 2 :
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls, montrer que l'on a ; $\vec{u}.\vec{v} = \vec{u}.\vec{v'} = \vec{u'}.\vec{v}$
Où $\vec{u'}$ et $\vec{v'}$ sont les projetés orthogonaux des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ respectivement sur les directions de $\vec{v}$ et $\vec{u}$.



2. Le produit scalaire en géométrie analytique
1. L'expression analytique du produit scalaire dans un repère :orthonormé :
a. Orthogonalité de deux vecteurs :
- **Rappel :**
 Une base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$de $\mathcal{V}$est orthonormée si, et seulement si, $\vec{\imath} \perp \vec{\jmath}$ et $\|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = 1$
- **Orthogonalité :**
 Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls sont orthogonaux si et seulement si ;Il existe deuxbipoints représentants de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ portés pardes droites perpendiculaires.

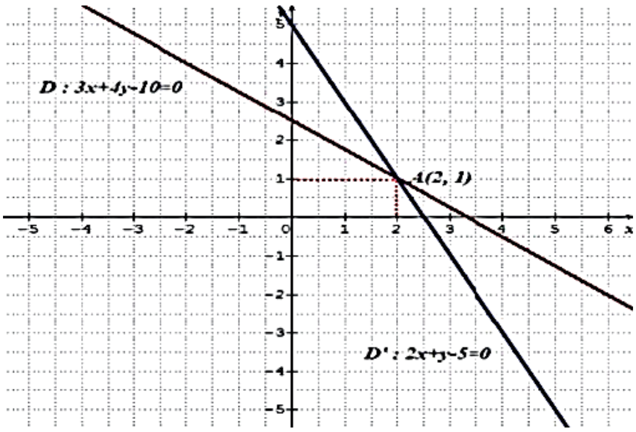
Remarque 2 :
Le vecteur nul $\vec{0}$ est orthogonal à tout vecteur.
- **Orthogonalité et norme :**
Pour tout vecteurs $\vec{u}$et $\vec{v}$, on a ; $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u}.\vec{v}$
Cette relation permet de démontrer le théorème de Pythagore et sa réciproque ; $\|\vec{\boldsymbol{u}} + \vec{\boldsymbol{v}}\|^2 = \|\vec{\boldsymbol{u}}\|^2 + \|\vec{\boldsymbol{v}}\|^2 \Longleftrightarrow \vec{\boldsymbol{u}} \perp \vec{\boldsymbol{v}}$

Exemple 5 :
$ABCD$ est un rectangle dont la longueur et la largeur mesurent respectivement ; $AB = 9\quad et\quad AC = 5$.Calculer $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}$
Réponse :
$$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB} = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right)\left(\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB}\right) = AB^2 + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{DC} - BC^2 = 9^2 + 0 + 0 - 5^2$$
$$= 81 - 25 = 56 \Longrightarrow \boldsymbol{\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB} = 56}.$$

Exemple 6 :
Sur la figure ci-après, les droites (D) et (D') sont-elles perpendiculaires ?
Réponse :
D'après la figure, les droites (D) et (D') ont respectivement pour vecteurs directeurs

$\vec{u}\binom{-4}{3}$ *et* $\vec{v}\binom{-1}{2}$

$2 \times (-3) + 3 \times (-1) \neq 0$. Il en résulte que (D) et (D') ne sont pas perpendiculaires.



Exemple 7 :

ABC est un triangle isocèle en A.Montrer que la médiane issue de A est aussi une médiatrice.

Réponse :

Soit I le milieu de $[BC]$. Montrer que (AI) est la médiatrice de $[BC]$, revient à montrer que ; $(AI) \perp (BC)$, qui revient à montrer que ; $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{BC} = 0$. On a ;

$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})\boxed{1}$; $\quad \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\boxed{2}$

De $\boxed{1}$ *et* $\boxed{2}$,on a ;$\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}).(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})$

$$\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\left(\underbrace{\overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{AB}^2}_{0}\right) = \frac{1}{2} \times 0 = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AI}.\overrightarrow{BC} = 0 \Rightarrow (AI) \perp (BC)$$

Exemple 8 :

Que peut-on dire des points A, B *et* C lorsque ; $\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}^2 + 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$?

Réponse :

$\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}^2 + 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})^2 = 0 \Leftrightarrow \|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\|^2 = 0$

$\Leftrightarrow \|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\| = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 0$. Les points A, B *et* C sont soit confondus, soit alignés et A est le milieu de $[BC]$.

b. L'expression analytique du produit scalaire de deux vecteurs :

Définition :

Dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'une base orthonormée $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$, soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que ; $\vec{u}\binom{x}{y}$ et $\vec{v}\binom{x'}{y'}$

L'expression analytique du produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est donnée par ; $\boldsymbol{\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'}$

Exercice 3 :

Montrer l'expression analytique du produit scalaire de deux vecteurs.

Propriété :

Dans une base orthonormée $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ de $\mathcal{V}$, soient deux vecteurs $\vec{u}\binom{x}{y}$ et $\vec{v}\binom{x'}{y'}$. $\boldsymbol{\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' = 0}$

2. L'expression analytique de la norme d'un vecteur :

Dans une base orthonormée $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ de $\mathcal{V}$, soit le vecteur ; $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$. On a ; $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Exemple 9 :

Calculer le produit scalaire des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans chacun des cas suivants :

1°) $\vec{u}\binom{3,6}{-4,8}$ *et* $\vec{v}\binom{-6,4}{-4,5}$, $\quad$ **2°)**$\vec{u}\binom{6,4}{4,8}$ *et* $\vec{v}\binom{10}{0}$, $\quad$ **3°)** $\vec{u}\binom{-3,6}{-4,8}$ *et* $\vec{v}\binom{0}{-10}$, $\quad$ **4°)**$\vec{u}\binom{3,6}{0}$ *et* $\vec{v}\binom{0}{-4,5}$

Réponse :

1°)$\vec{u}.\vec{v} = 3,6 \times (-6,4) + (-4,8) \times (-4,5) = -23,04 + 21,6 = -1,44$

2°)$\vec{u}.\vec{v} = 6,4 \times 10 + 4,8 \times 0 = 64$

3°)$\vec{u}.\vec{v} = -3,6 \times 0 + (-4,8) \times (-10) = 48$

4°)$\vec{u}.\vec{v} = 3,6 \times 0 + 0 \times (-4,5) = 0 + 0 = 0$

Exemple 10 :

Dans le plan $\mathcal{P}$ rapporté à un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère les points $A(2, 4)$; $B(-3, -1)$; $C(4, -2)$; $D(9, 3)$

1°) Démontrer que $ABCD$ est un losange ;

2°) Evaluer $mes(\widehat{ABC})$, et $mes(\widehat{BAD})$ en degré.

Réponse :

1°) $\overrightarrow{AB}\binom{-3-2}{-1-4} \Rightarrow \boldsymbol{\overrightarrow{AB}}\binom{-5}{-5}$, $\overrightarrow{DC}\binom{4-9}{-2-3} \Rightarrow \boldsymbol{\overrightarrow{DC}}\binom{-5}{-5}$. Donc ; $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ d'où ; $ABCD$ est un parallélogramme.

D'autre part les diagonales (AC) et (BD) dirigées par ; $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}4-2\\-2-4\end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{\boldsymbol{AC}}\begin{pmatrix}\mathbf{2}\\\mathbf{-6}\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}9-(-3)\\3-(-1)\end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{\boldsymbol{BD}}\begin{pmatrix}\mathbf{12}\\\mathbf{4}\end{pmatrix}$

Sont perpendiculaires car ; $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} = 2 \times 12 + (-6) \times 4 = 24 - 24 = 0$

$ABCD$est un parallélogramme dont les diagonales sont perpendiculaires, c'est donc un losange.

2°) on a ;$\overrightarrow{\boldsymbol{BA}}\begin{pmatrix}\mathbf{5}\\\mathbf{5}\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}4+3\\-2+1\end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{\boldsymbol{BC}}\begin{pmatrix}\mathbf{7}\\\mathbf{-1}\end{pmatrix}$

$\|\overrightarrow{BA}\| = \sqrt{5^2+5^2} = \sqrt{50} = 2\sqrt{5} = \|\overrightarrow{BC}\|$, $\quad \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = 5 \times 7 + 5 \times (-1) = 30$

$$\Rightarrow \cos\widehat{ABC} = \frac{\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}}{\|\overrightarrow{BA}\|.\|\overrightarrow{BC}\|} = \frac{30}{(5\sqrt{5})^2} = \frac{30}{125} = \frac{6}{25} = 0{,}24 \Rightarrow \widehat{\boldsymbol{ABC}} \approx \mathbf{76°}$$

D'autre part, comme $\widehat{ABC}$ et $\widehat{BAD}$ sont deux angles voisins dans un parallélogramme, leur somme est donc égale à 180°.

Une mesure approximative de $\widehat{BAD}$ est donc ; $\widehat{\boldsymbol{BAD}} \approx \mathbf{180° - 76° \approx 104°}$

3) Théorème de la médiane

Dans le plan $\mathcal{P}$, Soit A et B deux points, et soit I le milieu du segment $[AB]$.

Pour tout point M du plan $\mathcal{P}$, on a ;

$$\begin{cases} a) \quad \boldsymbol{MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}} \\ b) \quad \boldsymbol{MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{BA}} \\ c) \quad \boldsymbol{\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4}} \end{cases}$$

Démonstration :

$$\boldsymbol{a})MA^2 + MB^2 = \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 = \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right)^2$$

$$= MI^2 + 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA} + IA^2 + MI^2 + 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IB} + IB^2 = 2MI^2 + 2\overrightarrow{MI}\left(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}\right) + IA^2 + IB^2$$

$$= 2MI^2 + 2\overrightarrow{MI}.\vec{0} + IA^2 + IB^2\left(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}\right)$$

$$= 2MI^2 + \left(\frac{BA}{2}\right)^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2 = 2MI^2 + 2\left(\frac{BA}{2}\right)^2 \Rightarrow \boldsymbol{MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}}$$

$$\boldsymbol{b})\ MA^2 - MB^2 = \overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2 = \left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right)\left(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\right)$$

$$= \left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right)\left(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\right) = \left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right)\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BM}\right)$$

$$= \left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right)\left(\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MA}\right) = 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{BA} \Rightarrow \boldsymbol{MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{BA}}$$

Exercice 4 :

Soit ABC un triangle tel que $AB = 4$, $AC = 3$, $BC = 2$ et soit I le milieu de $[AB]$. Calculer CI.

Solution :

D'après la propriété $\boldsymbol{a}$) on remplace M par C et on a : $\quad CA^2 + CB^2 = 2CI^2 + \frac{AB^2}{2} \Rightarrow 3^2 + 2^2 = 2CI^2 + \frac{4^2}{2}$

$$\Rightarrow 9 + 4 = 2CI^2 + 8 \Rightarrow 2CI^2 = 13 - 8 = 5 \Rightarrow CI^2 = \frac{5}{2} \Rightarrow \boldsymbol{CI} = \sqrt{\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{2}}}$$

$$\boldsymbol{c})\ \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right)\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right) = MI^2 + \overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA}.\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB}$$

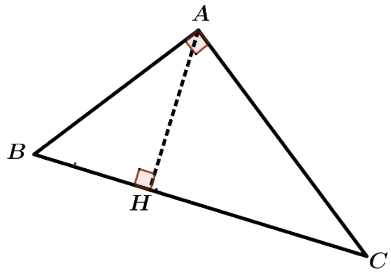
$$= MI^2 + \overrightarrow{MI}.\Big(\underbrace{\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA}}_{0}\Big) - \frac{\overrightarrow{AB}}{2}.\frac{\overrightarrow{AB}}{2} = MI^2 + \overrightarrow{MI}.\vec{0} - \frac{AB^2}{4}$$

$$= MI^2 + 0 - \frac{AB^2}{4} = MI^2 - \frac{AB^2}{4} \Rightarrow \boldsymbol{\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4}}$$

4. Relations caractéristiques du triangle rectangle

Soit ABC un triangle rectangle en A et soit H le projeté orthogonal de A sur $[BC]$,
Le triangle ABC est rectangle en A si, et seulement si l'une des propriétés suivantes est vérifiée :

$\boldsymbol{a})\quad \boldsymbol{AB^2 = \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{BC}}$



$\boldsymbol{b})\quad \boldsymbol{AC^2 = \overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CH}}$

$\boldsymbol{c})\quad \boldsymbol{AH^2 = -\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{HC}}$

Démonstration :

$\boldsymbol{a})$ Montrons que $AB^2 = \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{BC}$; *on a* : $\begin{cases} \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BA} = AB^2 \boxed{1} \\ et \\ \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{BC} \boxed{2} \end{cases}$

De $\boxed{1}$ et $\boxed{2}$ on a ; $\boldsymbol{AB^2 = \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{BC}}$

$\boldsymbol{b})$ Montrons que $AC^2 = \overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CH}$

On a d'une part : $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CH} \boxed{1}$. Et d'autre part : $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CA} = CA^2 = AC^2 \boxed{2}$

De $\boxed{1}$ et $\boxed{2}$, on a : $\boldsymbol{AC^2 = \overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CH}}$.

$\boldsymbol{c})$ Montrons que $AH^2 = -\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{HC}$. D'après la propriété $\boldsymbol{a}$), $AB^2 = \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{BC}$,

D'autre part, $AB^2 = AH^2 + HB^2 + 2\underbrace{\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{HB}}_{=0} \Longrightarrow AB^2 = AH^2 + HB^2 \Longrightarrow AH^2 + HB^2 = \overrightarrow{BH}.\left(\overrightarrow{BH} + \overrightarrow{HC}\right)$

$$\Longrightarrow AH^2 + HB^2 = \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{BH} + \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{HC}$$

$$\Longrightarrow AH^2 + HB^2 = HB^2 + \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{HC} \Longrightarrow \boldsymbol{AH^2 = -\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{HC}}$$

Remarque 3 : Les réciproques de ces propriétés sont admises à ce niveau.

Exercice 5 :

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que $AB = 6\ cm$, $AC = 8\ cm$, H est le projeté orthogonal de A sur (BC).

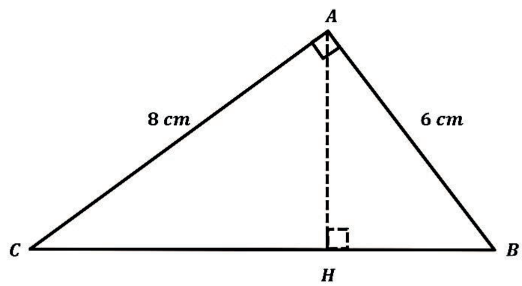
1°) Calculer CH, BH et AH ;

2°) Calculer $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$;

3°) Que vaut $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ et pourquoi ?

Solution :

1°) Selon le théorème de Pythagore, $BC = 10\ cm$



$AB^2 = \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{BC} \Longrightarrow AB^2 = BH.BC$ $\quad (B, C et H$ étant alignés)

$\Longrightarrow 6^2 = BH \times 10 \Longrightarrow BH = \dfrac{36}{10} \Longrightarrow \boxed{\boldsymbol{BH = 3,6}}$

$AC^2 = \overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CH} \Longrightarrow AC^2 = CB.CH (B, C et H$ étant alignés)

$\Longrightarrow 8^2 = 10 \times CH \Longrightarrow CH = \dfrac{64}{10} \Longrightarrow \boxed{\boldsymbol{CH = 6,4}}$

$AH^2 = -\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{HC} \Longrightarrow AH^2 = -HB.HC = BH.HC$ $(B, C$ et H étant alignés)

$\Longrightarrow AH^2 = 3{,}6 \times 6{,}4 = 23{,}04 \Longrightarrow AH = \sqrt{23{,}04} \Longrightarrow \boxed{\boldsymbol{AH = 4,8}}$

2°) $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = \|\overrightarrow{BA}\|.\|\overrightarrow{BC}\| \times \cos\hat{B} = 6 \times 10 \times \cos\hat{B}$.Or, on sait que ;

$\cos\hat{B} = \dfrac{c.adjacent}{hypoténuse} = \dfrac{AH}{BA} = \dfrac{3{,}6}{6} = \dfrac{3}{5} \Longrightarrow \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = 6 \times 10 \times \dfrac{3}{5} = 60 \times 0{,}6 = 36$

$\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = \|\overrightarrow{CA}\|.\|\overrightarrow{CB}\| \times \cos\hat{C} = 8 \times 10 \times \cos\hat{C}$. Or, on sait que ;

$\cos\hat{C} = \dfrac{c.adjacent}{hypoténuse} = \dfrac{CH}{CA} = \dfrac{6{,}4}{8} = \dfrac{4}{5} \Longrightarrow \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = 8 \times 10 \times \dfrac{4}{5} = 80 \times 0{,}8 = 64$

3°) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\|.\|\overrightarrow{AC}\| \times \cos\hat{A} = 8 \times 10 \times \cos 90° = 80 \times 0 = 0$

Exercice 6 : Démontrer les relations du théorème de la médiane.

Remarque 4 :

Les relations du théorème de la médiane s'appliquent aussi lorsqu'on a un triangle AMB, avec I milieu de $[AB]$.

3. Formule d'Al-Kashi (*Pythagore généralisé*) :

Pour tous trois points non alignés A, B et C du plan $\mathcal{P}$ on a ;

$$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB} = \frac{\overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{AB}^2 - \overrightarrow{BC}^2}{2} \boxed{1}$$

$$\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA} = \frac{\overrightarrow{BC}^2 + \overrightarrow{BA}^2 - \overrightarrow{AC}^2}{2} \boxed{2}$$

$$\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = \frac{\overrightarrow{CA}^2 + \overrightarrow{CB}^2 - \overrightarrow{AB}^2}{2} \boxed{3}$$

Exemple 11 :

ABC est un triangle dont les côtés mesurent ; $AB = 7;\ \ BC = 9\ \ et\ \ AC = 5$.Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

Réponse :

D'après la propriété d'*Al-Kashi* ; $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2.AB.AC.\cos\hat{A} \Longrightarrow 9^2 = 7^2 + 5^2 - 2.7.5.\cos\hat{A}$

$$\Longrightarrow 81 = 49 + 25 - 70\cos\hat{A} \Longrightarrow 7 = -70\cos\hat{A} \Longrightarrow \cos\hat{A} = \frac{-7}{70} = -\frac{1}{10}$$

$$\Longrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 7 \times 5 \times -\frac{1}{10} = \frac{-35}{10} \Longrightarrow \boldsymbol{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -3,5}$$

Exercice 7 :

1°) Démontrer les formules d'Al-Kashi,

2°) En utilisant la définition du produit scalaire et les formules d'Al-Kashi, montrer les égalités ;

$$\cos\widehat{BAC} = \frac{\overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{AB}^2 - \overrightarrow{BC}^2}{2.\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}} \boxed{4}$$

$$\cos\widehat{ABC} = \frac{\overrightarrow{BC}^2 + \overrightarrow{BA}^2 - \overrightarrow{AC}^2}{2.\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA}} \boxed{5}$$

$$\cos\widehat{ACB} = \frac{\overrightarrow{CA}^2 + \overrightarrow{CB}^2 - \overrightarrow{AB}^2}{2.\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}} \boxed{6}$$

Exemple12 :

Soit A, B et C trois points tels que ; $AB = 6$, $AC = 5$, $BC = 10$. Calculer ; $\cos\hat{A}$, $\cos\hat{B}$, $\cos\hat{C}$.

Réponse :

$$\cos\hat{A} = \frac{5^2 + 6^2 - 10^2}{2 \times 6 \times 5} = \frac{25 + 36 - 100}{60} = \frac{-39}{60} = -\frac{13}{20}$$

$$\cos\hat{B} = \frac{10^2 + 6^2 - 5^2}{2 \times 10 \times 6} = \frac{100 + 36 - 25}{120} = \frac{111}{120} = \frac{37}{40}$$

$$\cos\hat{C} = \frac{5^2 + 10^2 - 6^2}{2 \times 5 \times 10} = \frac{25 + 100 - 36}{100} = \frac{89}{100}$$

Exemple 13 :

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que ; $AB = 6\ cm$, $AC = 8\ cm$, H est le projeté orthogonal de A sur (BC).

1°) Calculer AH, BH et CH

2°) Calculer $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$

3°) Que vaut $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ et pourquoi ?

Réponse :

1°) $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = \|\overrightarrow{BA}\|.\|\overrightarrow{BC}\| \times \cos\hat{B} = 6 \times 10 \times \cos\hat{B}$

Or, on sait que ; $\cos\hat{B} = \dfrac{c.adjacent}{hypoténuse} = \dfrac{\overline{AH}}{\overline{BA}} = \dfrac{3,6}{6} = \dfrac{3}{5} \Longrightarrow \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = 6 \times 10 \times \dfrac{3}{5} = 60 \times 0,6 = 36$

2°) $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = \|\overrightarrow{CA}\|.\|\overrightarrow{CB}\| \times \cos\hat{C} = 8 \times 10 \times \cos\hat{C}$.

Or, on sait que ; $\cos\hat{C} = \dfrac{c.adjacent}{hypoténuse} = \dfrac{\overline{CH}}{\overline{CA}} = \dfrac{6,4}{8} = \dfrac{4}{5} \Longrightarrow \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = 8 \times 10 \times \dfrac{4}{5} = 80 \times 0,8 = 64$

3°) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\|.\|\overrightarrow{AC}\| \times \cos\hat{A} = 8 \times 10 \times \cos 90° = 80 \times 0 = 0$

V. Sinus de l'angle de deux vecteurs :

Dans une base orthonormée $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ de $\mathcal{V}$, soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tel que $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$

Alors ; $\mathbf{det}(\vec{u}\,;\,\vec{v}) = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \sin(\vec{u}\,;\,\vec{v}) \Longrightarrow \sin(\vec{u}\,;\,\vec{v}) = \dfrac{\det(\vec{u}\,;\,\vec{v})}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|}$,

Exemple 14 :

Dans une base orthonormée $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$de $\mathcal{V}$, soit les deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\-7\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$, calculer $\sin(\vec{u}\,;\,\vec{v})$.

Réponse :

$$\sin(\vec{u};\,\vec{v}) = \frac{\det(\vec{u};\,\vec{v})}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|} = \frac{\begin{vmatrix}4 & 3\\-7 & 5\end{vmatrix}}{\sqrt{4^2+(-7)^2} \times \sqrt{3^2+5^2}} = \frac{41}{\sqrt{2\,210}}$$

VI. Complément de cours sur les relations métriques :

1. Application aux aires du triangle :

Soit ABC un triangle tel que ;$AB = c,\ AC = b,\ BC = a$.

a. L'aire $\mathcal{A}$ du triangle :

L'aire du triangle ABC est donnée par la formule :$\mathcal{A}_{ABC} = \dfrac{Base \times Hauteur}{2}$

Avec la relation d'*Al-Kashi* appliquée au triangle, on a aussi ;

b. La formule des aires :

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2}b.c.\sin\widehat{A} = \frac{1}{2}c.a.\sin\widehat{B} = \frac{1}{2}a.b.\sin\widehat{C}$$

On en déduit que ;

c. La formule des sinus :

$$\frac{a}{\sin\widehat{A}} = \frac{b}{\sin\widehat{B}} = \frac{c}{\sin\widehat{C}}$$

Exemple 15 :

Soit ABC un triangle non aplati tel que $AB = c = 8$, $AC = b = 4$, $\sin\widehat{B} = \frac{\sqrt{5}}{7}$,

1°) Calculer $\sin\widehat{C}$, en déduire les valeurs des angles $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$, puis $\widehat{A}$, $\sin\widehat{A}$ et $BC = a$

2°) Calculer de trois façons l'aire du triangle ABC.

Réponse :

1°) $\dfrac{b}{\sin\widehat{B}} = \dfrac{c}{\sin\widehat{C}} \Longrightarrow \dfrac{4}{\frac{\sqrt{5}}{7}} = \dfrac{8}{\sin\widehat{C}} \Longrightarrow \sin\widehat{C} = \dfrac{8\sqrt{5}}{7} \div 4 = \dfrac{8\sqrt{5}}{7} \times \dfrac{1}{4} \Longrightarrow \sin\widehat{C} = \dfrac{2\sqrt{5}}{7} \approx \mathbf{0.64}$

$$\sin\widehat{B} = \frac{\sqrt{5}}{7} \Longrightarrow \widehat{A} = \arcsin\frac{\sqrt{5}}{7} \Longrightarrow \widehat{B} \approx \mathbf{18.63°}, \qquad \sin\widehat{C} = \frac{2\sqrt{5}}{7} \Longrightarrow \widehat{C} = \arcsin\frac{2\sqrt{5}}{7} \Longrightarrow \widehat{C} \approx \mathbf{39.71°}$$

$\widehat{A} \approx 180° - (18.63° + 39.71°) \approx 180° - 58.34° \Longrightarrow \widehat{A} \approx \mathbf{121.66°} \Longrightarrow \sin\widehat{A} \approx \mathbf{0.85}$

$\dfrac{a}{\sin\widehat{A}} = \dfrac{b}{\sin\widehat{B}} \Longrightarrow \dfrac{a}{0.85} = \dfrac{4}{\frac{\sqrt{5}}{7}} \Longrightarrow a = \dfrac{4 \times 0.85 \times 7}{\sqrt{5}} = \dfrac{23{,}8}{\sqrt{5}} \Longrightarrow \boldsymbol{a = 10.64}$

2°) $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2}b.c.\sin\widehat{A} = \frac{1}{2}c.a.\sin\widehat{B} = \frac{1}{2}a.b.\sin\widehat{C}$

$\mathcal{A}_{ABC} = \dfrac{1}{2}b.c.\sin\widehat{A} \approx \dfrac{1}{2} \times 4 \times 8 \times 0.85 \approx \mathbf{13.6}$

$\mathcal{A}_{ABC} = \dfrac{1}{2}c.a.\sin\widehat{B} \approx \dfrac{1}{2} \times 8 \times 10.64 \times 0.32 \approx \mathbf{13.61}$

$\mathcal{A}_{ABC} = \dfrac{1}{2}a.b.\sin\widehat{C} \approx \dfrac{1}{2} \times 10.64 \times 4 \times 0.64 \approx \mathbf{13.62}$

d. Expression du sinus en fonction du périmètre et des côtés d'un triangle et formule de Héron :

Soit ABC un triangle non aplati, tel que ; $AB = c$, $AC = b$ et $BC = a$, on a ;

$\sin\widehat{A} = \frac{2}{bc}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ **et** $\mathcal{A}_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$; *(Où p est le demi-périmètre)*

Exemple16 :

Soit ABC un triangle non aplati tel que $AB = c = 13$, $AC = b = 9$ et $BC = a = 5$

1°) Calculer $\sin\widehat{A}$, $\sin\widehat{B}$, $\sin\widehat{C}$ puis en déduire $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$;

2°) Calculer l'aire du triangle ABC.

Réponse :

$1°)\ p=\dfrac{a+b+c}{2}=\dfrac{5+9+13}{2}=\dfrac{27}{2}=13{,}5$

$\sin\hat{A}=\dfrac{2}{bc}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\dfrac{2}{13\times 9}\sqrt{13{,}5(13{,}5-5)(13{,}5-9)(13{,}5-13)}$

$=\dfrac{2}{117}\sqrt{13{,}5\times 8{,}5\times 4{,}5\times 0{,}5}=\dfrac{2}{117}\sqrt{258.1875}\approx\dfrac{2\times 16.06}{117}\approx\dfrac{32.12}{117}\approx\mathbf{0.27}$

$\sin\hat{B}=\dfrac{2}{ac}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\dfrac{2}{13\times 5}\sqrt{258.1875}=\dfrac{2\sqrt{258.1875}}{65}\approx\dfrac{32.12}{65}\approx\mathbf{0.49}$

$\sin\hat{C}=\dfrac{2}{ab}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\dfrac{2}{9\times 5}\sqrt{258.1875}\ =\dfrac{2\sqrt{258.1875}}{45}\approx\dfrac{32.12}{45}\approx\mathbf{0.71}.$

$\sin\hat{A}\approx 0.27\Longrightarrow\hat{A}\approx\arcsin 0.27\approx\mathbf{15.66}°$ et $\sin\hat{B}\approx 0.49\Longrightarrow\hat{B}\approx\arcsin 0.49\approx\mathbf{29.34}°$

$\sin\hat{C}\approx\mathbf{0.71}\Longrightarrow\hat{C}\approx\arcsin\mathbf{0.71}\approx 180°-45.23°\approx\mathbf{134.77}°$ (*L'angle* $\hat{C}$ *étant obtus*)

Vérification : $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=15.66°+29.34°+134.77°=\mathbf{179.77}°\approx\mathbf{180}°.$

2°)$\mathcal{A}_{ABC}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\sqrt{13{,}5(13{,}5-5)(13{,}5-9)(13{,}5-13)}.$

$=\sqrt{13{,}5\times 8{,}5\times 4{,}5\times 0{,}5}=\sqrt{258.1875}\approx\mathbf{16.06}.$

2. Equation de cercle dans un repère orthonormé :

a. Equation d'un cercle par l'utilisation du produit scalaire :

Dans un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$ du plan $\mathcal{P}$.

On a déjà vu dans le chapitre du calcul vectoriel et de la géométrie analytique, que le cercle $\mathcal{C}$ de centre $A(x_A,y_A)$ et de rayon R est l'ensemble des points équidistants de A.Pour tout point $M(x,y)\in\mathcal{C}$ on a :$\mathcal{C}$: $\boldsymbol{(x-x_A)^2+(y-y_A)^2=R^2}$

L'équation cartésienne peut aussi être calculée par le produit scalaire.

$[AB]$ étant un diamètre du cercle $\mathcal{C}$, pour tout point $M\in\mathcal{C}$, on a ; $\boldsymbol{\mathcal{C}:(x-x_A)(x-x_B)+(y-y_A)(y-y_B)=0}$

Exemple 17 :

Dans un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$ du plan $\mathcal{P}$, on donne les deux points $A(4;7)$ et $B(-5;3)$.

Donner l'équation cartésienne du cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[AB]$.

Réponse :

Pour tout point $M(x;y)$de $\mathcal{C}$, on a : $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BM}$ perpendiculaire donc$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=0\Rightarrow\begin{pmatrix}x-4\\y-7\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x+5\\y-3\end{pmatrix}=0$

$\Rightarrow(x-4)(x+5)+(y-7)(y-3)=0\Rightarrow x^2+x-20+y^2-10y+21=0\Rightarrow\mathcal{C}:\ x^2+x+y^2-10y-1=0$

b. Equation d'un cercle à partir des extrémités d'un diamètre :

Dans un repère $(O\ ;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$ du plan $\mathcal{P}$, soient deux points ; $A(a,b)$; $B(a',b')$ et soit $(\mathcal{C})$ le cercle de diamètre $[AB]$.

Soit I le milieu de $[AB]$, I est le centre du cercle $(\mathcal{C})$, et pour tout point $M(x,y)\in(\mathcal{C})$, on a ;

$\boldsymbol{\mathcal{C}:(x-x_I)^2+(y-y_I)^2=R^2}$

Exemple 18 :

Dans un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$ du plan $\mathcal{P}$, on donne les deux points $A(-9;10)$ et $B(7;4)$.

Donner l'équation cartésienne du cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[AB]$.

Réponse :

Soit le I centre du cercle $\mathcal{C}$, on a ; $I=A*B\Longrightarrow\mathcal{C}:\ \left(x-\frac{-9+7}{2}\right)^2+\left(y-\frac{10+4}{2}\right)^2=\left(\frac{AB}{2}\right)^2$

$\Rightarrow\mathcal{C}:\ (x+1)^2+(y-7)^2=\left(\dfrac{\sqrt{292}}{2}\right)^2\Longrightarrow\mathcal{C}:\ (x+1)^2+(y-7)^2=\dfrac{292}{4}\Longrightarrow\mathcal{C}:\ (x+1)^2+(y-7)^2=73$

$\mathcal{C}:\ x^2+2x+1+y^2-14y+49=73\Longrightarrow\boldsymbol{\mathcal{C}:\ x^2+2x+y^2-14y-23=0}$

3. Equation d'une droite dans un repère orthonormé :

Dans un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$ du plan $\mathcal{P}$, soit la droite $(\mathcal{D})$ passant par le point $A(x_A,y_A)$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$. Pour tout point $M(x,y)\in(\mathcal{D})$, on a ; $\boldsymbol{(\mathcal{D}):a(x-x_A)+b(y-y_A)=0}$

Exemple 19 :

Dans un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$ du plan $\mathcal{P}$, soit la droite $(\mathcal{D})$ passant par le point $A(4\ ,-7)$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix}$. Donner l'équation cartésienne de $(\mathcal{D})$.

Réponse :

Pour tout point $M(x, y) \in (\mathcal{D})$, on a :

$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-4 \\ y-7 \end{pmatrix}.\vec{n}\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow -3(x-4) + 5(y+7) = 0 \Rightarrow -3x + 12 + 5y + 35 = 0 \Rightarrow (\boldsymbol{\mathcal{D}}) : \mathbf{3x - 5y - 47 = 0}$

4. Distance d'un point à une droite dans un repère orthonormé :

Le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, soit (Δ) la droite d'équation cartésienne ; $ax + by + c = 0$, le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est le vecteur normal à (Δ), soit $A(x_0, y_0)$ un point du plan $\mathcal{P}$ et soit A' le projeté orthogonal de A sur (Δ). La distance de A à (Δ) est notée ; $d(A\,;\,\Delta) = AA' \Longrightarrow \boldsymbol{AA'} = \frac{|\boldsymbol{ax_0+by_0+c}|}{\sqrt{\boldsymbol{a^2+b^2}}}$

Exemple 20 :

Le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{\imath}, \vec{\jmath})$, soit (Δ) la droite d'équation cartésienne ; $5x - 3y + 4 = 0$, le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} 7 \\ -6 \end{pmatrix}$ est le vecteur normal à (Δ), soit $A(1\,,2)$ un point du plan $\mathcal{P}$ et soit A' le projeté orthogonal de A sur (Δ).Calculer $d(A\,;\,\Delta)$ la distance de Aà (Δ).

Réponse :

$$d(A;\,\Delta) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|5 \times 1 - 3 \times 2 + 4|}{\sqrt{7^2 + (-6)^2}} = \frac{|3|}{\sqrt{85}} \Longrightarrow \boldsymbol{d(A;\,\Delta)} = \frac{\mathbf{3}}{\sqrt{\mathbf{85}}}$$

5. Produit scalaire et lieu géométrique :

Notion de lignes de niveau :

Soit f une application du plan $\mathcal{P}$ dans $\mathbb{R}$ et k un réel. On appelle ligne de niveau k de l'application f l'ensemble des points M tels que $f(M) = k$. On note en général L_k la ligne de niveau k ; ainsi : $L_k = \{M \in \mathcal{P} / f(M) = k\}$

Exemple 21 :

1°) Soit O un point fixé et ; $\boldsymbol{f} : \boldsymbol{\mathcal{P}} \longmapsto \mathbb{R}$

$\boldsymbol{M \longmapsto OM}$

La ligne de niveau 4 est l'ensemble des points M tels que $OM = 4$: il s'agit donc du cercle de centre O et de rayon 4.

2°) Préciser la ligne de niveau k selon que l'on a ; $k > 0$: $k = 0$; $k < 0$

Si $k > 0 \Longrightarrow$ l'ensemble M est le cercle de centre O et de rayon k, si $k = 0 \Longrightarrow$ l'ensemble $M = O$, si $k < 0 \Longrightarrow$ l'ensemble $M = \phi$.

Exercice 7 :

On considère un segment [AB] avec AB = 10 cm. Déterminer l'ensemble des points M tels que :

1) $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 1$. 2) $MA^2 + MB^2 = 5$.

Solution :

On considère un segment [AB] avec AB = 10 cm. Déterminons l'ensemble des points M tels que :

1) $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 1 \Leftrightarrow (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}).(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = 1$, où I est le milieu de [AB]. Donc $\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB} = 1 \Leftrightarrow$

$MI^2 + \overrightarrow{MI}.(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}).\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB} = 1 \Leftrightarrow MI^2 + \overrightarrow{MI}.\left(\underbrace{\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}}_{=\vec{0}}\right) - IA^2 = 1 \Leftrightarrow MI^2 - 5^2 = 1 \Leftrightarrow MI^2 = 26$.

D'où : l'ensemble des points M tel que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 1$est le cercle de centre I et de rayon$\sqrt{26}$.

2) On a : $\begin{cases} MA^2 = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}).(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) = MI^2 + 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA} + IA^2 \\ MB^2 = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}).(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = MI^2 + 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IB} + IB^2 \end{cases}$; ou I est le milieu de [AB].

$MA^2 + MB^2 = 5 \Leftrightarrow MI^2 + 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA} + IA^2 + MI^2 + 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IB} + IB^2 = 5 \Leftrightarrow 2MI^2 + 2\overrightarrow{MI}.(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) + (IA^2 + IB^2) = 5$

$\Leftrightarrow 2MI^2 + 2\overrightarrow{MI}.\left(\underbrace{\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}}_{=\vec{0}}\right) + 2IA^2 = 5 \Leftrightarrow 2MI^2 + 2IA^2 = 5 \Leftrightarrow 2MI^2 = 5 - 2IA^2 = 5 - 50 = -45 \Leftrightarrow 2MI^2 = -45$

Un carré n'étant jamais négatif, aucun point M ne vérifie cette condition

Remarque 5 :

On peut aussi utiliser la relation de la médiane pour gagner du temps…

Exercices Généraux

1. Soit ABC un triangle. On pose ; $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$.
Les longueurs a, b et c sont ceux des côtés opposés respectivement aux angles ; $\hat{A}, \hat{B}$ et $\widehat{C}$.
Montrer que l'on a ;
$a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos\hat{A}$
$b^2 = a^2 + c^2 - 2.a.c.\cos\hat{B}$
$c^2 = a^2 + b^2 - 2.a.b.\cos\hat{C}$

2. Soit ABC un triangle non aplati tel que ;
$AB = c$, $AC = b$ et $BC = a$
1°) Donner l'expression de $\cos\hat{A}$ en fonction des longueurs des côtés.
2°) En déduire des expressions analogues pour $\cos\hat{B}$ et $\cos\hat{C}$.

3. Soient A, B et C trois points tels que ;
$AB = 7$, $AC = 12$, $BC = 8$.
Calculer ; $\cos\hat{A}$, $\cos\hat{B}$, $\cos\hat{C}$.

4. Soit ABC un triangle rectangle en A tel que ;
$AB = 13\ cm$, $AC = 9\ cm$, H est le projeté orthogonal de A sur (BC).
1°) Calculer AH, BH et CH
2°) Calculer $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$
3°) Que vaut $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ et pourquoi ?

5. ABC est un triangle tel que ; $AB = 8\ cm$, $AC = 12\ cm$ et $\hat{A} = 30°$
1°) Calculer la mesure du côté BC ;
2°) Soit O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC, quelle est la nature du triangle OBC ?
3°) En déduire la mesure du rayon du cercle circonscrit au triangle ABC.

6. ABC est un triangle tel que ;
$AB = 6cm$, $AC = 10cm$, $BC = 12cm$
Calculer les mesures des angles de ce triangle

7. Déterminer les angles $(\widehat{\vec{u}\,;\,\vec{v}})$ dans chacun des cas suivants :
1°) $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\2\sqrt{3}\end{pmatrix}$
2°) $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\2\sqrt{3}\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\sqrt{3}\\-2\end{pmatrix}$
3°) $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$
4°) $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix}$

8. Soit ABC un triangle tel que $AB = 9cm$, $AC = 13cm$, $BC = 15cm$.
1°) Calculer $\sin\hat{A}$; $\sin\hat{B}$; $\sin\hat{C}$.
2°) Calculer de trois façons l'aire du triangle ABC.

9. Soit ABC un triangle tels que ;
$AB = 7$, $AC = 9$, $BC = 14$
Calculer $\sin\hat{A}$ puis l'aire du triangle ABC.

10. Dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, on donne la droite $(\mathcal{D})$ d'équation ;
$(\mathcal{D}) : 5x - 4y + 7 = 0$ et le point $A(-3, 2)$
Calculer $d(\mathcal{D}\,;\,A)$.

11. Etudier les positions relatives du cercle $(\mathcal{C})$ et de la droite $(\mathcal{D})$ dans chacun des cas suivants, puis déterminer les points d'intersection éventuels.
1°) $(\mathcal{D}) : 3x + 4y - 25 = 0$, et $\mathcal{C}(O\,;5)$
2°) $(\mathcal{D}) : 2x + 3y - 5 = 0$, et $\mathcal{C}(I(-1,1)\,;3)$

12. Soit un carré $ABCD$ et soit I et J les milieux respectifs de $[AB]$ et $[BC]$.
1°) Faire une figure ;
2°) Montrer par trois méthodes que $(DI) \perp (AJ)$.

13. Le triangle OAB est rectangle en O. H est le projeté orthogonal de O sur (AB).
Une droite $(\mathcal{D})$ passant par A coupe (OH) en M et le cercle de diamètre $[AB]$ en N.
1°) Faire une figure ;
2°) Montrer que $AO^2 = AM.AN$.

14. OAB est un triangle isocèle en O.
C et D appartiennent respectivement à $[AO]$, $[OB]$ tels que $OC = OD$.
1°) Faire une figure ;
2°) Montrer que la médiane issue de O dans le triangle OBC est une hauteur issue de O dans OAD.

15. ABC est un triangle tel que les médianes issues de B et de C sont perpendiculaires ;
1° Faire une figure ;
2° Montrer que ; $AB^2 + AC^2 = 5BC^2$.

16. Soit ABC un triangle tel que ;
$AB = 3$, $AC = 4$ et $BC = 6$.
1°) Construire le point $R = bar$

A	B
2	-1

2°) Calculer CR ;
3°) a) D est le point tel que R soit le centre de gravité de ACD, construire D ;
b) La parallèle à (AC) passant par B coupe la parallèle à (AD) passant par R en S, construire S ;
Déterminer les réels a, b et c tels que ;
$S = bar$

A	B	C
a	b	c

17. Dans un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$ du plan $\mathcal{P}$, soit la droite $(\mathcal{D})$ passant par le point $A(2\,;\,-3)$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$.
1°) Donner une équation de $(\mathcal{D})$;
2°) Représenter $(\mathcal{D})$.

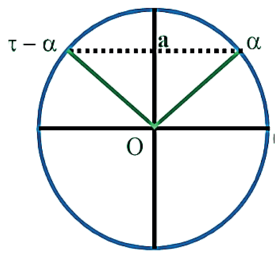
18. Dans un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$ du plan $\mathcal{P}$, on donne les points $A(3\,;\,-2)$ et $B(-5\,;\,8)$.
Calculer par deux méthodes l'équation cartésienne du cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[AB]$.

19. Dans un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$ du plan $\mathcal{P}$, on donne les points $A(3\,;\,-4)$ et $B(-7\,;\,2)$.
Calculer l'équation cartésienne de la médiatrice (Δ) du segment $[AB]$.

20. Dans un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$ du plan $\mathcal{P}$, on donne les points $A(5\,;2)$, $B(-8\,;\,7)$ et $C(-3\,;\,1)$.
Calculer l'équation cartésienne du support (d) de la hauteur issue de A.

21. Dans le repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$ du plan $\mathcal{P}$, on donne les points $A(-5\,;\,6)$, $B(4\,;\,3)$, $C(3\,;\,-4)$.
1°) Déterminer les coordonnées des points G, H et Ω respectivement, centre de gravité, orthocentre et centre du cercle circonscrit au triangle ABC.
2°) Vérifier que G, H et Ω sont alignés (*cette droite s'appelle la droite d'Euler*).
3°) Ecrire une équation de la droite d'*Euler* relative à ce triangle.

22.



1°) A partir de la figure ci-dessus, donner des mesures approchées à un degré près des angles du triangle ABC.
2°) Ecrire une équation du cercle $\mathcal{C}$ circonscrit au triangle ABC.

23. Soit ABC un triangle rectangle en A tel que ; $AB = 6\ cm$, $AC = 8\ cm$, H est le projeté orthogonal de A sur (BC).
1° Calculer AH, BH et CH
2° Calculer $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$
3° Que vaut $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ et pourquoi ?

24. Dans un repère $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$, on donne les points ;

$A(2\,;3)\,;B(-1\,;\,2)$ et $C(0\,;\,-1)$
1°) Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ dans la base $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
2°) Montrer que $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC}$.
3°) Calculer $\|\overrightarrow{AB}\|, \|\overrightarrow{BC}\|$.
4°) Représenter $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ dans le repère $(O;\,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

25. Dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé $(O;\,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, soit les deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}-5\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$. Calculer $\sin(\vec{u}\,;\,\vec{v})$.

26. $ABCD$ est un carré de centre O. M est un point de la diagonale $[BD]$ dont les projetés orthogonaux sur $[AB]$ en P et sur $[AD]$ en Q.
1°) Faire une figure
2°) Montrer que le triangle OPQ est isocèle rectangle en O.

27. ABC est un triangle rectangle en A non isocèle.
H est le projeté orthogonal de A sur $[BC]$.
P et Q sont les projetés orthogonaux de H sur $[AB]$ et $[AC]$, A' est le milieu de $[BC]$.
1°) Faire une figure
2°) Montrer que $(AA') \perp (PQ)$.

28. ABC est un triangle. A l'extérieur de ce triangle, on construit deux carrés, $ABDE$ et $ACFG$. Soit I le milieu de $[BC]$.
1°) Faire une figure
2°) Montrer que $(AI) \perp (GE)$.

29. $ABCD$ est un carré de côté $12\,cm$. M est un point de $[AB]$ tel que ; $AM = 5\,cm$, N est un point de $[AD]$ tel que ; $DN = 9\,cm$.
1°) Faire une figure
2°) Calculer $\overrightarrow{CM}.\overrightarrow{MN}$, le triangle CMN est-il rectangle en M ?

39. Dans le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé $(O;\,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, soit les points $A(-2\,;\,-1)$, $B(-1;\,-4)$ et $C(4;\,1)$.
Montrer que le triangle ABC est rectangle en A :
1°) En calculant AB^2, BC^2 et CA^2 et en utilisant Pythagore.
2°) En appliquant le produit scalaire de deux vecteurs.

30. Soit les points ; $P(-3,-4)$: $Q(3,2)$; $R(-3\sqrt{3};\,3\sqrt{3}-1)$.
1°) Montrer que le triangle PQR est équilatéral.
Soit S le projeté orthogonal de P sur $[QR]$;
2°) Calculer $\overrightarrow{QS}$, puis $\overrightarrow{PQ}.\overrightarrow{PS}$ et $\overrightarrow{QR}.\overrightarrow{RS}$, $\overrightarrow{PS}.\overrightarrow{QR}$.

31. 1°) Déterminer le centre et le rayon de chacun des cercles définis par les équations suivantes :
$$(\mathcal{C}_1) : x^2 + y^2 - 4x - 8y + 4 = 0$$
$$(\mathcal{C}_2) : x^2 + y^2 - x - 6y + \frac{1}{4} = 0$$
2°) Quelle est la position relative de ces deux cercles ?

32. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs tels que : $\|\vec{u}\| = 1$; $\|\vec{v}\| = 3$ et $\vec{u}.\vec{v} = -2$
Calculer $(2\vec{u} + 3\vec{v}).(\vec{u} - \vec{v})$.
Donner un réel x tel que : $(2\vec{u} + x\vec{v})$ soit orthogonal à $\vec{u} - \vec{v}$.
$\|\vec{u}\| = 1$; $\|\vec{v}\| = 3$ et $\vec{u}.\vec{v} = -2$

33. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs tels que :
$\|\vec{u}\| = 5$; $\|\vec{v}\| = 3$ et $\cos(\vec{u}.\vec{v}) = -\frac{1}{3}$. Calculer $\vec{u}.\vec{v}$
On pose $\vec{w} = \vec{u} - 2\vec{v}$ et $\vec{t} = \vec{u} + \vec{v}$.
a) Calculer $\vec{w}.\vec{t}$, $\|\vec{w}\|$ et $\|\vec{t}\|$. Vérifier que $\cos(\vec{u}.\vec{v}) = \frac{\sqrt{6}}{9}$.

35. 1°) Soient A, B et C des points. Démontrer que, pour tout point M du plan : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{AB} = 0$.
2°) Soit ABC un triangle. On note H le point d'intersection des hauteurs issues de A et B.
A l'aide de la relation du 1), démontrer que la hauteur issue de C passe aussi par H.

36. On considère les triangles rectangles isocèles de la figure ci-dessous.
Démontrer que : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AE}$.
En déduire que : $\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}\right)\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}\right) = 0$.
Soit I le milieu de [BE]. Démontrer à l'aide du 2) que les vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux.
.

37. Soit ABC un triangle. On note H le projeté orthogonal de A sur (BC).
Démontre que : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AC^2 - \overrightarrow{CH}.\overrightarrow{CB}$.
En déduire que le triangle ABC est rectangle en A si, et seulement si, $AC^2 = CH \times CB$ et les vecteurs sont de même sens.

38. Soit ABC un triangle d'orthocentre H.
On note A', B' et C' les pieds des hauteurs issues respectivement de A, B et C.
Démontrer que : $\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{HA'} = \overrightarrow{HB}.\overrightarrow{HB'} = \overrightarrow{HC}.\overrightarrow{HC'}$.

39. 1°) Soient A et B deux points du plan tels que ; AB = 2.
a) Déterminer l'ensemble E des points M du plan tels que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM} = 3$
b) Déterminer l'ensemble F des points M du plan tels que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM} = -3$
2°) *Généralisation* : Soit A un point du plan, $\vec{u}$ un vecteur non nul et k un réel. On note D_k l'ensemble des points M du plan tels que $\vec{u}.\overrightarrow{AM} = k$.
Démontrer que, pour tout réel k, l'ensemble D_k est une droite de vecteur normal $\vec{u}$.

40. Soit A, B, C, D des points. On note I et J les milieux respectifs de [AC] et [BD].
1°) Démontrer que : $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + 4IJ^2$.
Indication : **on pourra utiliser plusieurs fois le théorème de la médiane.**
2°) En déduire qu'un quadrilatère est un parallélogramme si, et seulement si, la somme des carrés de ses côtés est égale à la somme des carrés de ses diagonales.

41. A et B sont deux points distincts du plan ;
1°) Dans chacun des cas suivants, déterminer l'ensemble des points M du plan tels que : $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB} = k$.
(c'est-à-dire la ligne de niveau k de l'application du plan dans $\mathbb{R}$: $M \mapsto \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB}$).
a) $k = 2a^2$; b) $k = 4a^2$; c) $k = -a^2$.
2°) Dans chacun des cas suivants, déterminer l'ensemble des points M du plan tels que : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = k$. (c'est -à- dire la ligne de niveau k de l'application du plan dans $\mathbb{R}$: $M \mapsto \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$)
a) $k = a^2$; b) $k = -2a^2$; c) $k = -a^2$.

42. ABC sont trois points non alignés du plan ;
Dans chacun des cas suivants, déterminer l'ensemble des points M du plan vérifiant l'égalité proposée.

43. ABCD est un carré, I est le milieu du côté [AB] et J celui du côté [BC].
Montrer que les droites (DI) et (AJ) sont perpendiculaires.

44. ABC est un triangle tel que les médianes issues de B et de C soient perpendiculaires.
Montrer que : $AB^2 + AC^2 = 5BC^2$.

45. C est un cercle, de centre O et de rayon R.
M est un point du plan. Une droite passant par M coupe C en deux points P et Q.
1°) Démontrer que l'on a : $\overrightarrow{MP}.\overrightarrow{MQ} = OM^2 - R^2$.
(On pourra faire intervenir le point P' de C diamétralement opposé à P)
Le produit scalaire $\overrightarrow{MP}.\overrightarrow{MQ}$ est indépendant de la sécante choisie, il ne dépend que des points M, O, et du réel R ; on l'appelle puissance du point M par rapport au cercle C et on note ici ce réel : P(M, C).
2°) Etudier le signe de P(M, C) suivant la position de M par rapport au cercle C .
3°) C' et un cercle, de rayon R' et de centre un point O' distinct de O.
a) Déterminer l'ensemble Δ des points du plan ayant la même puissance par rapport à C et C'.
b) Tracer Δ lorsque C et C' sont sécants

Chapitre 10 :TRANSFORMATIONS GEOMETRIQUES

Définition :

Les transformations géométriques planes sont des applications bijectives du plan $\mathcal{P}$ dans lui-même.
Les transformations qui seront objet d'étude sont ; la translation, l'homothétie, la symétrie centrale, la symétrie axiale et la rotation.

I) Translations

a. Notion de translation :

Définition :

On appelle translation de vecteur $\vec{u}$ et on note $t_{\vec{u}}$ latransformation du plan $\mathcal{P}$ qui à tout point M fait correspondre le point M' tel que ; $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.

$$\begin{cases} \boldsymbol{t_{\vec{u}}}: \boldsymbol{\mathcal{P}} \longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{P}} \\ \quad \boldsymbol{M} \longmapsto \boldsymbol{M'} \end{cases} \text{tel que } \overrightarrow{\boldsymbol{MM'}} = \vec{\boldsymbol{u}}.$$

Exemple 1 :

Dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$, soient $A(7;\ 5)$, $B(-4;1)$ et $C(-3;-6)$.
Déterminer les coordonnées des points A', B' et C' images respectives de A, B et C par la translation de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -9 \end{pmatrix}$.

Réponse :

$t_{\vec{u}}(A) = A' \Leftrightarrow \overrightarrow{AA'} = \vec{u} \Leftrightarrow \overrightarrow{AA'}\begin{pmatrix} x_{A'} - x_A \\ y_{A'} - y_A \end{pmatrix} = \vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -9 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AA'}\begin{pmatrix} x_{A'} - 7 \\ y_{A'} - 5 \end{pmatrix} = \vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -9 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_{A'} - 7 = 2 \\ y_{A'} - 5 = -9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{A'} = 2 + 7 = 9 \\ y_{A'} = -9 + 5 = -4 \end{cases}$. Donc ; $A'(9;-4)$

$t_{\vec{u}}(B) = B' \Rightarrow \overrightarrow{BB'} = \vec{u} \Rightarrow \overrightarrow{BB'}\begin{pmatrix} x_{B'} - x_B \\ y_{B'} - y_B \end{pmatrix} = \vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -9 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \overrightarrow{BB'}\begin{pmatrix} x_{B'} + 4 \\ y_{B'} - 1 \end{pmatrix} = \vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -9 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_{B'} + 4 = 2 \\ y_{B'} - 1 = -9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{B'} = 2 - 4 = -2 \\ y_{B'} = -9 + 1 = -8 \end{cases}$. Donc ; $B'(-2;-8)$

$$t_{\vec{u}}(C) = C' \Rightarrow \overrightarrow{CC'} = \vec{u} \Rightarrow \overrightarrow{CC'}\begin{pmatrix} x_{C'} - x_C \\ y_{C'} - y_C \end{pmatrix} = \vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -9 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \overrightarrow{CC'}\begin{pmatrix} x_{C'} + 3 \\ y_{C'} + 6 \end{pmatrix} = \vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -9 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_{C'} + 3 = 2 \\ y_{C'} + 6 = -9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{C'} = 2 - 3 = -1 \\ y_{C'} = -9 - 6 = -15 \end{cases}$. Donc ; $C'(-1;-15)$

Définition :

Dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$, soit $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Soit les points $M(x,y)$ et $M'(x',y')$ tels que ; $t_{\vec{u}}(M) = M'$.

Il en résulte que ; $\overrightarrow{MM'} = \vec{u} \Rightarrow \overrightarrow{MM'}\begin{pmatrix} x' - x \\ y' - y \end{pmatrix} = \vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x' - x = a \\ y' - y = b \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{x' = x + a} \\ \boldsymbol{y' = y + b} \end{cases}$ est appelée expression analytique de la translation de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

Exemple 2 :

Dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère $(O\ ;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$, on donne la translation de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$.

1°) Déterminer l'expression analytique de la translation $t_{\vec{u}}$.
2°) Utiliser cette expression pour calculer les coordonnées des points A' et B' images des points $A(4\ ;\ 0)$ et $B(-7,-8)$.

Réponse :

1°) $\begin{cases} x' = x + 5 \\ y' = y + 6 \end{cases}$

2°) $\begin{cases} x_{A'} = 4 + 5 = 9 \\ y_{A'} = 0 + 6 = 6 \end{cases}$ et $\begin{cases} x_{B'} = -7 + 5 = -2 \\ y_{B'} = -8 + 6 = -2 \end{cases}$. Donc, $\boldsymbol{A'(9\ ;\ 6)}$ et $\boldsymbol{B'(-2\ ;\ -2)}$.

b. Premières propriétés :

1°) $\begin{cases} t_{\vec{u}}(A) = A' \\ t_{\vec{u}}(B) = B' \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$. La translation conserve la distance.

2°) L'image d'une droite $(\boldsymbol{d})$ par une translation est une droite $(\boldsymbol{d'})$ qui lui est parallèle.

3°) La translation transforme un cercle $(\mathcal{C})$ en un cercle $(\mathcal{C}')$ de même rayon.
Le centre O de $(\mathcal{C})$ a pour image le centre O' de $(\mathcal{C}')$.

Exemple 3 :

Dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère $(O\,;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$, soit D la droite d'équation ; $7x + 5y - 2 = 0$.

Déterminer une équation de la droite (D') image de (D) par la translation de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$.

Réponse :

Déterminons un point de la droite (D) en donnant une valeur pour $x$comme -4, et en calculant la valeur correspondante de y ; on a ; $7 \times -4 + 5y - 2 = 0 \Longrightarrow y = 6$.

Le point $A(-4\,;\ 6) \in (D)$ et il a pour image par la translation $t_{\vec{u}}$, le point $A' \in (D')$ dont les coordonnées sont calculées par l'expression analytique ; $\begin{cases} x_{A'} = -4 + 4 = 0 \\ y_{A'} = 6 - 3 = 3 \end{cases} \Longrightarrow A'(0; 3)$.

$(D)//(D')$, elles ont le même vecteur directeur $\vec{v}\begin{pmatrix}-5\\7\end{pmatrix}$.

$(D'): 7x + 5y + c = 0$. pour déterminer c, on remplace par les coordonnées de A' ;

$7 \times 0 + 5 \times 3 + c = 0 \Longrightarrow c = -15,$ d'où ; $(D') : 7x + 5y - 15 = 0$.

On peut aussi utiliser la représentation paramétrique de (D') qui est ;

$$\begin{cases} x = -5t \\ y = 3 + 7t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = -\dfrac{x}{5} \\ t = \dfrac{y-3}{7} \end{cases} \Rightarrow -\frac{x}{5} = \frac{y-3}{7} \Rightarrow -7x = 5(y-3) \Rightarrow 7x + 5y - 15 = 0 \Rightarrow \boldsymbol{(D') : 7x + 5y - 15 = 0}$$

Exemple 4 :

Dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère $(O\,;\ \vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$, soit la droite (D) d'équation cartésienne ; $2x - 5y + 3 = 0$.

1°) Déterminer une équation de la droite (D') image de (D) par la translation $t_{\vec{u}}$ tel que $\vec{u}\begin{pmatrix}-4\\7\end{pmatrix}$;

2°) Déterminer une équation du cercle $(\mathcal{C}')$ image du cercle $\mathcal{C}(A\,,5)$ tel que $A(8\,,-3)$.

Réponse :

Méthode 1 :

$(D)//(D') \Longrightarrow D': 2x - 5y + c = 0$. Cherchons à déterminer c.

$$\boldsymbol{E(1,1) \in (D) \Longrightarrow t_{\vec{u}}(E) = E' \in (D')} \ \Longrightarrow \overrightarrow{EE'} = \vec{u}\begin{pmatrix}-4\\7\end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix}x_{E'} - 1\\ y_{E'} - 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\7\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_{E'} = -3 \\ y_{E'} = 8 \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{E'(-3,8)}.$$

E' vérifie l'équation de $D' \Rightarrow 2(-3) - 5 \times 8 + c = 0 \Rightarrow \boldsymbol{c = 46}.\Longrightarrow \boldsymbol{(D') : 2x - 5y + 46 = 0}.$

Méthode 2 :

Le point $M'(x',y') \in (D') \Longrightarrow \begin{cases} x' = x - 4 \\ y' = y + 7 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = x' + 4 \\ y = y' - 7 \end{cases} \Longrightarrow 2(x' + 4) - 5(y' - 7) + 3 = 0$

$$\Longrightarrow 2x' + 8 - 5y' + 35 + 3 = 0 \Longrightarrow \boldsymbol{(D') : 2x' - 5y' + 46 = 0}.$$

Méthode 3 :

$E(1,1) \in (D) \Rightarrow t_{\vec{u}}(E) = E' \in (D')$. Soit $M(x,y) \in (D') \Rightarrow \overrightarrow{E'M}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$ sont colinéaires ;

$det\left(\overrightarrow{E'M},\vec{v}\right) = \begin{vmatrix} x+3 & 5 \\ y-8 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2x + 6 - 5y + 40 = 0 \Rightarrow \boldsymbol{(D'): 2x - 5y + 46 = 0}.$

2°) $\begin{cases} x_{A'} = 8 - 4 = 4 \\ y_{A'} = -3 + 7 = 4 \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{A'(4,4)}.(\mathcal{C}'): (x-4)^2 + (y-4)^2 = 5^2 \Rightarrow \boldsymbol{(\mathcal{C}'): x^2 - 8x + y^2 - 8y - 25 = 0}.$

Remarque 1 :

Si $\vec{u}$ est un vecteur directeur de (d) alors (d) est globalement invariante par $t_{\vec{u}}$.

c. La translation conserve ;

- **Le parallélisme :**

$(d_1)//(d_2)\ et \begin{cases} t_{\vec{u}}(d_1) = d_1' \\ t_{\vec{u}}(d_2) = d_2' \end{cases} \Longrightarrow d_1'//d_2'.$

- **L'orthogonalité :**

$$(d_1) \perp (d_2)\ et \begin{cases} t_{\vec{u}}(d_1) = d_1' \\ t_{\vec{u}}(d_2) = d_2' \end{cases} \Longrightarrow d_1' \perp d_2'$$

- **L'alignement :**

Les points A, B et C sont alignés et $\begin{cases} t_{\vec{u}}(A) = A' \\ t_{\vec{u}}(B) = B' \\ t_{\vec{u}}(C) = C' \end{cases} \Rightarrow$A', B' et C' sont alignés.

- **Le contact :** $E = F_1 \cap F_2$ et $\begin{cases} t_{\vec{u}}(F_1) = F_1' \\ t_{\vec{u}}(F_2) = F_2' \\ t_{\vec{u}}(E) = E' \end{cases} \Rightarrow F_1' \cap F_2' = E'$

- **Le barycentre :**

$G = bar$

A	B	C
α	β	γ

$\Rightarrow t_{\vec{u}}(G) = bar$

$t_{\vec{u}}(A)$	$t_{\vec{u}}(B)$	$t_{\vec{u}}(C)$
α	β	γ

d. Translation de vecteur opposé :

La translation $t_{\vec{u}}$ est une bijection sa bijection réciproque est la translation de vecteur $-\vec{u}$ et on écrit : $(t_{\vec{u}})^{-1} = t_{-\vec{u}}$;

Car, $t_{\vec{u}}(M) = M' \Rightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{u} \Rightarrow \overrightarrow{M'M} = -\vec{u} \Rightarrow t_{-\vec{u}}(M') = M$.

e. La composée de deux translations :

$t_{\vec{v}} : M \longmapsto M'$ et $t_{\vec{u}} : M' \longmapsto M'' \Rightarrow t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}} : M \longmapsto M''$

$t_{\vec{v}}(M) = M' \Rightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{v}, t_u(M') = M'' \Rightarrow \overrightarrow{M'M''} = \vec{u}, \overrightarrow{MM''} = \overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{M'M''} = \vec{v} + \vec{u}$.

La composée de deux translations de vecteurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est une translation de vecteur $\vec{u} + \vec{v}$.

$$\boldsymbol{t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}} = t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{u}+\vec{v}}}$$

Remarque 2 :

- La translation de vecteur nul est appelée l'identité du plan, et on la note $Id_{\mathcal{P}}$;

$t_{\vec{0}}(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{0} \Leftrightarrow M = M'$.

- Une translation de vecteur non nul n'a pas de points invariants.

Exemple 5 :

Dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère $(O\ ;\ \vec{i}, \vec{j})$, soit (D) une droite d'équation ; $4x + 3y - 2 = 0$ et $t_{\vec{u}}$ et $t_{\vec{v}}$ deux translations de vecteurs respectifs $\vec{u}\begin{pmatrix} 5 \\ -6 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -1 \\ 8 \end{pmatrix}$. Déterminer une équation de (D') image de (D) par la translation $t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}}$.

Réponse :

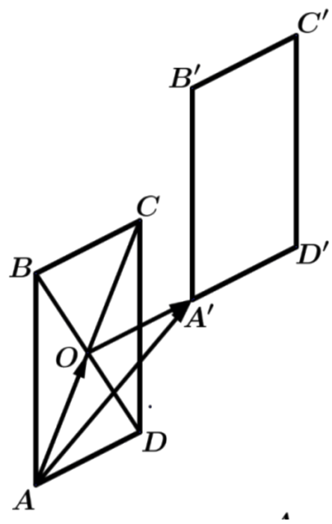
On a $t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}} = t_{\vec{u}+\vec{v}}$;

$\vec{u} + \vec{v} = \vec{u}\begin{pmatrix} 5 \\ -6 \end{pmatrix} + \vec{v}\begin{pmatrix} -1 \\ 8 \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{\vec{u} + \vec{v}}\begin{pmatrix} \boldsymbol{4} \\ \boldsymbol{2} \end{pmatrix} \begin{cases} x' = x + 4 \\ y' = y + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x' - 4 \\ y = y' - 2 \end{cases} \Rightarrow 4(x' - 4) + 3(y' - 2) - 2 = 0$;

$\Rightarrow \boldsymbol{(D') : 4x' + 3y' - 20 = 0}$.

Exemple 6 :

Soit $ABCD$ un parallélogramme de centre O. Construire l'image de $ABCD$ par la translation $t_{\overrightarrow{AO}} \circ t_{\overrightarrow{BC}}$.



Réponse :

On a ; $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AF} \Rightarrow t_{\overrightarrow{AO}} \circ t_{\overrightarrow{BC}} = t_{\overrightarrow{AF}}$.

Donc ; $t_{\overrightarrow{AF}}(A) = F$; $t_{\overrightarrow{AF}}(B) = B'$;

$t_{\overrightarrow{AF}}(C) = C'$; $t_{\overrightarrow{AF}}(D) = D'$; $t_{\overrightarrow{AF}}(O) = O'$;

$t_{\overrightarrow{AF}}(ABCD) = FB'C'D'$.

2. Homothéties

Définition :

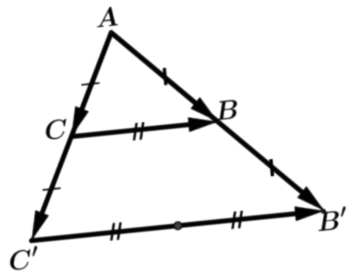
Soit k un nombre réel non nul, et Ω un point fixé du plan $\mathcal{P}$.

On appelle homothétie de centre Ω et de rapport k que l'on note $h_{(\Omega,k)}$, la transformation dans le plan $\mathcal{P}$ qui laisse le point Ω invariant, et qui à tout point M associe l'unique point M' tel que $\overrightarrow{\Omega M'} = k.\overrightarrow{\Omega M}$.

On note ; $\boldsymbol{h_{(\Omega,k)}(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M'} = k.\overrightarrow{\Omega M}}$.

Exemple 7 :

Soit ABC est un triangle non aplati et h l'homothétie de centre A et de rapport $k = 2$. Construire l'image de ABC par $h_{(A,\ 2)}$.



Réponse :

$h_{(A,\ 2)}(A) = A$ (A est le centre de h)

$h_{(A,\ 2)}(B) = B' \Longrightarrow \overrightarrow{AB'} = 2\overrightarrow{AB}$;

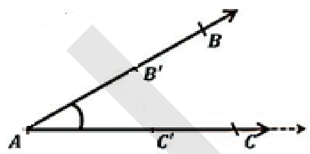
$h_{(A,\ 2)}(C) = C' \Longrightarrow \overrightarrow{AC'} = 2\overrightarrow{AC}$.

$h_{(A,2)}(ABC) = AB'C'$ (*figure*).

a. Premières propriétés d'une homothétie :

1°) Le centre Ω d'une homothétie, un point M et son image M' sont alignés.

2°) Si $\begin{cases} h_{(\Omega,\ k)}(A) = A' \\ h_{(\Omega,\ k)}(B) = B' \end{cases} \Longrightarrow \overrightarrow{A'B'} = k.\overrightarrow{AB}$



Exercice 1 :

Démontrer la propriété **2°)**.

3°) $h_{(\Omega,\ k)}(M) = M' \Longrightarrow \overrightarrow{\Omega M'} = k.\overrightarrow{\Omega M}, \Longrightarrow \overrightarrow{\Omega M} = \frac{1}{k}\overrightarrow{\Omega M'} \Longrightarrow h_{\left(\Omega,\ \frac{1}{k}\right)}(M') = M$.

L'homothétie $h(\Omega, k)$ est une bijection, et sa bijection réciproque est l'homothétie $h(\Omega,\ \frac{1}{k})$ et on écrit ;

$$\left(h_{(\Omega,\ k)}\right)^{-1} = h_{\left(\Omega,\ \frac{1}{k}\right)}$$

4°) Si $k = 0 \Longrightarrow M' = \Omega$.

5°) Si $k = -1 \Longrightarrow \overrightarrow{\Omega M'} = -\overrightarrow{\Omega M} \Longrightarrow \overrightarrow{\Omega M'} + \overrightarrow{\Omega M} = \vec{0} \Longrightarrow \Omega = \mathrm{M} * \mathrm{M}' \Longrightarrow \mathrm{M}' = S_{\Omega}(M)$.

Donc, l'homothétie de centre Ω et de rapport -1 est une symétrie de centre Ω. $\boldsymbol{h_{(\Omega,-1)} = S_{\Omega}}$.

6°) Si $k = 1 \Longrightarrow \Omega M' = \Omega M \Longrightarrow M' = M \Longrightarrow \boldsymbol{h_{(\Omega,1)} = Id_{\mathcal{P}}}$.

7°) L'image d'une droite par une homothétie est une droite qui lui est parallèle.

8°) L'homothétie de rapport k multiplie les distances par $|k|$ et les aires par k^2 ***(l'homothétie n'est pas une isométrie)***.

Exemple 8 :

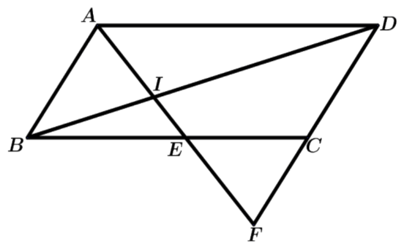
Soit ABCD un parallélogramme et I un point de la diagonale [BD] autre que B et D, (AI) coupe (BC) en E et (CD) en F. Soit h l'homothétie de centre I qui transforme D en B.

1°) Montrer que h transforme A en E.

2°) Montrer que h transforme F en A

3°) Déduire des questions précédentes l'égalité $\mathrm{IA}^2 = \overline{\mathrm{IE}} \times \overline{\mathrm{IF}}$.

Réponse :



1°) Les triangles IAD et IEB sont une configuration de Thalès, donc l'homothétie de centre I qui transforme D en B, transforme A en E.

2°) Les triangles IDF et IBA sont aussi une configuration de Thalès, donc l'homothétie de centre I qui transforme D en B transforme F en A.

3°) Soit k le rapport de h, d'après les questions **1°)** et **2°)** on a : $\overline{\mathrm{IE}} = \mathrm{k}\overline{\mathrm{IA}}$ et $\overline{\mathrm{IA}} = \mathrm{k}\overline{\mathrm{IF}}$.

Il en résulte que : $\overline{\mathrm{IE}} = \mathrm{k}\overline{\mathrm{IA}}$ et $\overline{\mathrm{IA}} = \mathrm{k}\overline{\mathrm{IF}}$, d'où : $\mathrm{k} = \dfrac{\overline{\mathrm{IE}}}{\overline{\mathrm{IA}}} = \dfrac{\overline{\mathrm{IA}}}{\overline{\mathrm{IF}}}$

et par suite $\overline{\mathrm{IA}}^2 = \overline{\mathrm{IE}} \times \overline{\mathrm{IF}}$ .C'est à- dire $\mathrm{IA}^2 = \overline{\mathrm{IE}} \times \overline{\mathrm{IF}}$.

b. L'homothétie conserve :

- **Le parallélisme :** $(d_1)//(d_2)$ et $\begin{cases} h_{(\Omega,\ k)}(d_1) = d_1' \\ h_{(\Omega,\ k)}(d_2) = d_2' \end{cases} \Rightarrow d_1'//d_2'$
- **L'orthogonalité :** $(d_1) \perp (d_2)$ et $\begin{cases} h_{(\Omega,\ k)}(d_1) = d_1' \\ h_{(\Omega,\ k)}(d_2) = d_2' \end{cases} \Rightarrow d_1' \perp d_2'$
- **L'alignement :**

Si A, B et C sont trois points alignés, alors ; $h_{(\Omega,\ k)}(A), h_{(\Omega,\ k)}(B)$ et $h_{(\Omega,\ k)}(C)$ sont alignés ;

- **Le contact :**

$E = F_1 \cap F_2 \Rightarrow h_{(\Omega,\ k)}(E) = h_{(\Omega,\ k)}(F_1) \cap h_{(\Omega,\ k)}(F_2)$.

- **Le barycentre :**

$$G = bar \begin{array}{|c|c|c|} \hline A & B & C \\ \hline \alpha & \beta & \gamma \\ \hline \end{array} \Rightarrow h_{(\Omega,k)}(G) = bar \begin{array}{|c|c|c|} \hline h_{(\Omega,\ k)}(A) & h_{(\Omega,\ k)}(B) & h_{(\Omega,\ k)}(C) \\ \hline \alpha & \beta & \gamma \\ \hline \end{array}$$

- **Les angles orientés :**

Soit α un nombre réel, et $\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right) = \alpha \Rightarrow h_{(\Omega,\ k)}\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right) = \alpha$.

c. Autres propriétés :

- Pour tous points O, A et B alignés et distincts deux-à-deux. Il existe une unique homothétie de centre O qui transforme A en B, le rapport de cette homothétie est $\frac{OB}{OA}$.
- Soit A, B ; A' et B' quatre points du plan vérifiant $(A'B')//(AB)$ et $A'B' \neq AB$, alors, il existe une homothétie qui

transforme A en A' et B en B'. Le centre de cette homothétie est O : $\{O\} = (AA') \cap (BB')$, et son rapport est $\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB}$.

Remarque 3 :

Si une droite (D) passe par le centre Ω d'une homothétie h, alors elle est globalement invariante par h.

Remarque 4 :

Une homothétie est caractérisée par :

- Un centre et un rapport ;
- Un centre, un point et son image ;
- Un rapport, un point et son image ;
- Une des configurations de *Thalès*.

Exemple 9 :

P et Q sont deux points. $G = bar \begin{array}{|c|c|} \hline P & Q \\ \hline -3 & 1 \\ \hline \end{array}$. Soit la fonction $f(M) = M'$ tel que ; $\overrightarrow{PM'} = \overrightarrow{PQ} + 3\overrightarrow{PM}$

Démontrer que f est une homothétie que l'on caractérisera *(centre et rapport)*.

Réponse :

On a : $G = bar \begin{array}{|c|c|} \hline P & Q \\ \hline -3 & 1 \\ \hline \end{array} \Rightarrow -3\overrightarrow{GP} + \overrightarrow{GQ} = \vec{0}$

$\overrightarrow{PM'} = \left(\overrightarrow{PG} + \overrightarrow{GQ}\right) + 3\left(\overrightarrow{PG} + \overrightarrow{GM}\right) = -\overrightarrow{GP} + \overrightarrow{GQ} - 3\overrightarrow{GP} + 3\overrightarrow{GM}$;

Comme $\overrightarrow{GQ} - 3\overrightarrow{GP} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{PM'} + \overrightarrow{GP} = 3\overrightarrow{GM} \Rightarrow \boldsymbol{\overrightarrow{GM'} = 3\overrightarrow{GM} \Rightarrow f = h_{(G,\ 3)}}$.

d. Expression analytique d'une homothétie :

Dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, soit l'homothétie h de centre $\Omega(x_0, y_0)$ et de rapport le réel k et notée $h_{(\Omega,\ k)}$. Soit $M(x, y)$ un point quelconque du plan $\mathcal{P}$, et $M'(x',\ y')$ son image par l'homothétie h. On a ;

$$h_{(\Omega,k)}(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M'} = k.\overrightarrow{\Omega M} \Rightarrow \overrightarrow{\Omega M'}\begin{pmatrix} x' - x_0 \\ y' - y_0 \end{pmatrix} = k.\overrightarrow{\Omega M}\begin{pmatrix} kx - kx_0 \\ ky - ky_0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x' - x_0 = kx - kx_0 \\ y' - y_0 = ky - ky_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = x_0 + kx - kx_0 \\ y' = y_0 + ky - ky_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{x' = kx + (1-k)x_0} \\ \boldsymbol{y' = ky + (1-k)y_0} \end{cases}$$

Cette écriture est l'expression analytique de l'homothétie de centre $\Omega(x_0, y_0)$ et de rapport le réel k, dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère $(O\ ;\ \vec{\imath}\ , \vec{\jmath})$.

Exemple 10 :

Dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$, soit les points $A(-7,5)$ et $B(3,-6)$.

1°) Donner les coordonnées de A' et B' images des point A et B par l'homothétie h de centre $\Omega(-2,4)$ et de rapport $k=\frac{5}{4}$;

2°) Donner une équation de (AB) ;

3°) Donner une équation de (Δ) image de (AB) par l'homothétie h.

Réponse :

$$\mathbf{1°)}\begin{cases} x_{A'}=\dfrac{5}{4}\times(-7)+\left(1-\dfrac{5}{4}\right)\times(-2)=\dfrac{-35}{4}+\dfrac{2}{4}=-\dfrac{33}{4} \\ y_{A'}=\dfrac{5}{4}\times 5+\left(1-\dfrac{5}{4}\right)\times 4=\dfrac{25}{4}-1=\dfrac{21}{4}\end{cases}\Rightarrow \boldsymbol{A'}\left(-\frac{33}{4},\frac{21}{4}\right)$$

$$\begin{cases} x_{B'}=\dfrac{5}{4}\times 3+\left(1-\dfrac{5}{4}\right)\times(-2)=\dfrac{15}{4}+\dfrac{2}{4}=\dfrac{17}{4} \\ y_{B'}=\dfrac{5}{4}\times(-6)+\left(1-\dfrac{5}{4}\right)\times 4=\dfrac{-30}{4}-1=-\dfrac{34}{4}\end{cases}\Rightarrow \boldsymbol{B'}\left(\frac{17}{4},-\frac{34}{4}\right)$$

2°) Soit $M(x,y)\in(AB)\Longrightarrow\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ colinéaires $\Longrightarrow\begin{vmatrix}x+7 & 10\\ y-5 & -11\end{vmatrix}=0\ \Longrightarrow -11(x+7)-10(y-5)=0$;

$\Longrightarrow -11x-10y-27=0\ \Longrightarrow (\boldsymbol{AB})\text{: } \mathbf{11x+10y+27=0}$

3°) a) Méthode 1 :

$(\Delta)//(AB)$, soit $M(x,y)$ un point de Δ, on a ;

$h:M\longmapsto M'$, alors :

$$\begin{cases}x'=\dfrac{5}{4}x+\dfrac{1}{2}=\dfrac{5}{4}x+\dfrac{2}{4}\\ y'=\dfrac{5}{4}y-1=\dfrac{5}{4}y-\dfrac{4}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4x'=5x+2\\4y'=5y-4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{4x'-2}{5}\\ y=\dfrac{4y'+4}{5}\end{cases};\ \Rightarrow\ 11\left(\frac{4x'-2}{5}\right)+10\left(\frac{4y'+4}{5}\right)+27=0$$

$\Rightarrow\dfrac{44x'-22}{5}+\dfrac{40y'+40}{5}+\dfrac{135}{5}=0\Rightarrow 44x'-22+40y'+40+135=0\Rightarrow(\Delta)\text{: }\mathbf{44x'+40y'+153=0}.$

b) Méthode 2 :

La droite $(\Delta)\ =(A'B')$, cherchons l'équation de $(A'B')$.

$M(x,y)\in(A'B')\Longrightarrow\overrightarrow{A'M}$ et $\overrightarrow{A'B'}$ sont colinéaires.

$$\Rightarrow\begin{vmatrix}x+\dfrac{33}{4} & \dfrac{50}{4}\\ y-\dfrac{21}{4} & -\dfrac{55}{4}\end{vmatrix}=-\frac{55}{4}\left(x+\frac{33}{4}\right)-\frac{50}{4}\left(y-\frac{21}{4}\right)=0\ \Rightarrow-\frac{55}{4}x-\frac{1\,815}{16}-\frac{50}{4}y+\frac{1\,050}{16}=0$$

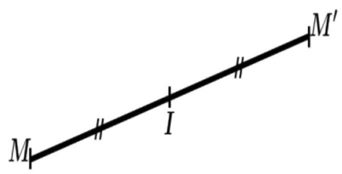
$$\Rightarrow-\frac{220}{16}x-\frac{1\,815}{16}-\frac{200}{16}y+\frac{1\,050}{16}=0\Rightarrow-220x-200y-765=0\Rightarrow 44x+40y+153=0$$

$$\Rightarrow(\Delta)=(\boldsymbol{A'B'}):\mathbf{44x+40y+153=0}.$$

3) Symétrie centrale

Définition :

Dans le plan $\mathcal{P}$, Soit I un point fixé, on appelle symétrie centrale de centre I et on note S_I, la transformation dans le plan $\mathcal{P}$ qui laisse le point I invariant, et qui à un point M associe l'unique point M' tel que I soit le milieu de $[MM']$.



$$\boldsymbol{S_I(M)=M'\Leftrightarrow I=M*M'\Leftrightarrow}\begin{cases}\boldsymbol{S_I(M)=M'}\\ \textbf{\textit{et}}\\ \boldsymbol{S_I(I)=I}\end{cases}$$

Exemple 11 :

Soit ABC un triangle quelconque.

1°) Construire l'image de ABC par la symétrieS_A.

2°) Quelle est la nature du quadrilatère $BCB'C'$? Prouvez-le.

Réponse :

1°) $S_A(A) = A$; $S_A(B) = B'$; $S_A(C) = C'$.$S_A(ABC) = AB'C'$.

2°) A étant le milieu $[BB']$ et de $[CC']$, les deux diagonales de $BCB'C'$ on le même milieu A, donc $BCB'C'$ est un parallélogramme.

Remarque 5 :

La symétrie centrale de centre Ω est une homothétie de centre Ω et de rapport -1 : $\boldsymbol{S_\Omega} = \boldsymbol{h_{(\Omega,\ -1)}}$.

a. Premières propriétés d'une symétrie centrale:

1°)$S_I(M) = M' \Leftrightarrow S_I(M') = M$.

S_I est une bijection et sa bijection réciproque est $(S_I)^{-1} = S_I$ (*la symétrie centrale est involutive*).

2°) Si une droite (Δ) passe par I, alors (Δ) est globalement invariante par S_I.

3°) La symétrie centrale conserve la mesure d'un angle orienté ; *(Un angle direct aura pour image un angle direct, et un angle indirect aura pour image un angle indirect)* ; $S_I(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

4°) Une symétrie centrale transforme un cercle $\mathcal{C}(\Omega, R)$ en un cercle $\mathcal{C}'(\Omega', R)$ tel que Ω' est l'image de Ω.

5°) La symétrie centrale conserve ;

- **La distance : *(la réflexion est une isométrie)***

$S_I(M, N) \longmapsto (M', N') \Longrightarrow \overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN} \quad et\ MN = M'N'$.

- **Le parallélisme :**

$$(\Delta_1) // (\Delta_2)\ et\ S_I: (\Delta_1, \Delta_2) \longrightarrow (\Delta'_1, \Delta'_2) \Longrightarrow (\Delta'_1) // (\Delta'_2)$$

- **L'orthogonalité :**

$$(\Delta_1) \perp (\Delta_2)\ et\ S_I: (\Delta_1, \Delta_2) \longrightarrow (\Delta'_1, \Delta'_2) \Longrightarrow (\Delta'_1) \perp (\Delta'_2)$$

- **L'alignement :**

A, B et C trois points alignés, $\Longrightarrow$ $S_I(A)$, $S_I(B)$ et $S_I(C)$ sont alignés.

- **Le contact :**

$F = E \cap G \Longrightarrow S_I(F) = S_I(E) \cap S_I(G)$.

- **Le barycentre de deux points ou plus :**

$G = bar$

A	B	C
α	β	γ

$\Longrightarrow S_I(G) = bar$

$S_I(A)$	$S_I(B)$	$S_I(C)$
α	β	γ

b. La composée de deux symétries centrales :

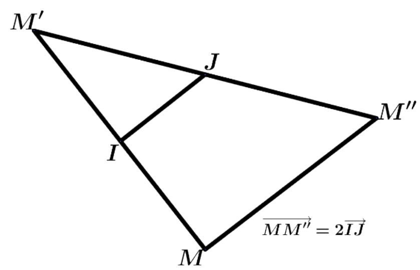
$M: S_I \longmapsto M': S_J \longmapsto M'' \Longrightarrow M \longrightarrow\ S_J \circ S_I \longrightarrow M''$

$S_I(M) = M' \Longrightarrow \overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{IM'}$, $S_J(M') = M'' \Longrightarrow M'M'' = 2M'J$

$\Longrightarrow \overrightarrow{MM''} = \overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{M'M''} = 2\overrightarrow{IM'} + 2\overrightarrow{M'J} = 2\left(\overrightarrow{IM'} + \overrightarrow{M'J}\right) = 2\overrightarrow{IJ}$

Donc ; $\boldsymbol{S_J \circ S_I = t_{2\overrightarrow{IJ}}}$.

La composée de deux symétries centrales est une translation dont le vecteur est $\overrightarrow{IJ}$; où I est le centre de la première symétrie qui intervient, et J est le centre de la deuxième.



Exemple 12 :

$ABCD$est un parallélogramme. Caractériser $S_A \circ S_B \circ S_C \circ S_D$.

Réponse :

$S_A \circ S_B \circ S_C \circ S_D = t_{2\overrightarrow{BA}} \circ t_{2\overrightarrow{DC}} = t_{2(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DC})} = t_{\vec{0}} \Longrightarrow \boldsymbol{S_A \circ S_B \circ S_C \circ S_D = Id_{\mathcal{P}}}$.

c. Expression analytique d'une symétrie centrale :

Dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$, soit le point $I(x_I,y_I)$.

Un point $M(x,y)$ du plan a pour image un point $M'(x',y')$par la symétrie S_{I}, signifie que ;

$$S_{\mathrm{I}}(M)=M' \Longrightarrow \mathrm{I}=M*M' \Longrightarrow \begin{cases} x_{\mathrm{I}}=\dfrac{x'+x}{2} \\ y_{\mathrm{I}}=\dfrac{y'+y}{2} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{x'=2x_{\mathrm{I}}-x} \\ \boldsymbol{y'=2y_{\mathrm{I}}-y} \end{cases}.$$

Cette écriture est l'expression analytique de la symétrie centrale de centre I.

Exemple 13 :

Dans le repère $(O\ ;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$ du plan $\mathcal{P}$, on considère la droite d'équation $(D):\ 5x-6y+3=0$, et le cercle d'équation ; $(\mathcal{C}):x^2+8x+y^2-2y-152=0$.

1°) Déterminer une équation de (D') image de (D) par la symétrie S_B tel que $B(4;-7)$;

2°) Donner une équation de $(\mathcal{C}')=S_B(\mathcal{C})$.

Réponse :

1°) (D): $5x-6y+3=0$.

- **Première méthode :**

$$\begin{cases} x'=8-x \\ y'=-14-y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=8-x' \\ y=-14-y \end{cases} \Longrightarrow 5(8-x')-6(-14-y')+3=0 \Longrightarrow 40-5x'+84+6y'+3=0$$

$\boldsymbol{(D')}$: $\boldsymbol{5x'-6y'-127=0}$.

- **Deuxième méthode :**

On a d'une part ; $(D)//(D')\Longrightarrow 5x-6y+c=0$.D'autre part ; $E\left(0\ ;\ \frac{1}{2}\right)\in(D)\Longrightarrow S_B(E)=E'\in(D')$.

$$\begin{cases} x_{E'}=8-0=8 \\ y_{E'}=-14-\frac{1}{2}=-\frac{29}{2} \end{cases} \Longrightarrow \boldsymbol{E'}\left(\boldsymbol{8}\ ;\ -\tfrac{29}{2}\right).$$ E'vérifie l'équation de (D');

$$5(8)-6\left(-\frac{29}{2}\right)+c=0 \Longrightarrow 40+87+c=0 \ \Longrightarrow c=-127 \Longrightarrow \boldsymbol{(D')}\text{: } \boldsymbol{5x-6y-127=0}$$

2°) $(\mathcal{C})$: $x^2+8x+y^2-2y-152=0$;

- **Première méthode :**

$(8-x')^2+8(8-x')+(-14-y')^2-2(-14-y')-152=0$;

$\Longrightarrow 64-16x'+x'^2+64-8x'+196+28y'+y'^2+28+2y'-152=0$

$\Longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{C}'\ :\ x'^2-24x'+y'^2+30y'+56=0}$

$\Longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{C}'\ :\ (x'-12)^2-144+(y+15)^2-225+200=0 \ \Longrightarrow \mathcal{C}'\ :\ (x'-12)^2+(y'+15)^2-169=0}$

$\Longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{C}'\ :\ (x'-12)^2+(y'+15)^2=169=13^2 \Longrightarrow \mathcal{C}'_{(H'(12\ ;\ -15);\ 13)}}$.

- **Deuxième méthode :**

$(\mathcal{C})$: $x^2+8x+y^2-2y-152=0$. Déterminons les coordonnées de H centre de $(\mathcal{C})$.

$(x+4)^2-16+(y-1)^2-1-152=0 \Longrightarrow\ (x+4)^2+(y-1)^2-169=0$

$\Longrightarrow (x+4)^2+(y-1)^2=169=13^2 \Longrightarrow H(-4,1)$.

Soit H' le centre de $\mathcal{C}'$ tel que $H'=S_B(H) \Longrightarrow \begin{cases} x_{H'}=8-(-4)=12 \\ y_{H'}=-14-1=-15 \end{cases} \Longrightarrow \boldsymbol{H'(12,-15)} \Longrightarrow$;

$\boldsymbol{(\mathcal{C}')}$: $\boldsymbol{(x'-12)^2+(y'+15)^2}=169=13^2 \Longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{C}'_{(H'(12,-15);\ 13)}}$

4. Symétrie axiale :(réflexion)

4) Symétrie axiale: (réflexion)

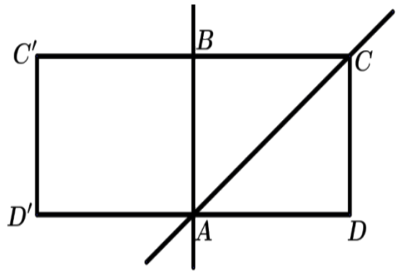
Dans le plan $\mathcal{P}$ soit la droite fixée (Δ).

On appelle symétrie axiale (*ou réflexion*) d'axe (Δ) (*ou par rapport à la droite* (Δ)) et on la note S_Δ, la transformation dans le plan $\mathcal{P}$ qui laisse les points de (Δ) invariants, et qui à tout point M de $\mathcal{P}$ n'appartenant pas à (Δ), associe l'unique point M' de $\mathcal{P}$ tel que (Δ) soit la médiatrice de $[MM']$.

$$S_\Delta(M)=\begin{cases} M\ si\ M\in(\Delta) \\ M'\ tel\ que\ \ (\Delta)=med[MM']\ si\ M\notin(\Delta) \end{cases}.$$

Exemple 14 :

Soit $ABCD$ un carré. Construire l'images de $ABCD$ par les réflexions ; $S_{(AB)}, S_{(AC)}$.



Réponse :

$S_{(AB)}(A) = A$ (car $A \in (AB)$, $S_{(AB)}(B) = B$ (car $B \in (AB)$,

$S_{(AB)}(C) = C'$ tel que $(AB) = med[CC']$, $S_{(AB)}(D) = D'$ tel que $(AB) = med[DD']$

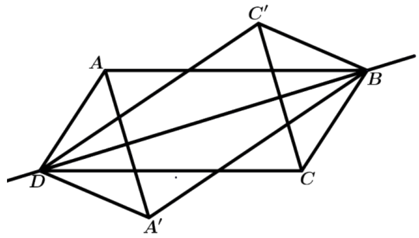
Donc, l'image du carré $ABCD$ par la réflexion $S_{(AB)}$ est le carré $ABC'D'$.

$S_{(AC)}(A) = A, S_{(AC)}(B) = D, S_{(AC)}(C) = C, S_{(AC)}(D) = B,$

Donc, l'image du carré $ABCD$ par $S_{(AC)}$ est lui-même.

Exemple 15 :

Soit $ABCD$ un parallélogramme. Construire l'image de $ABCD$ par $S_{(BD)}$.



Réponse :

$S_{(BD)}(B) = B$ (car $B \in (BD)$, $S_{(BD)}(D) = D$ (car$D \in (BD)$,

$S_{(BD)}(A) = A' / (BD) = med[AA']$,$S_{(BD)}(C) = C' / (BD) = med[CC']$.

$S_{(BD)}: ABCD \longmapsto A'BC'D$ (*figure*).

Propriétés d'une réflexion :

1°) $\boldsymbol{S_d(M) = M' \Leftrightarrow S_d(M') = M}$.

S_d est une bijection et sa bijection réciproque est $(S_d)^{-1} = S_d$ (*la symétrie axiale est une involution*).

2°) $S_d \circ S_d = Id_{\mathcal{P}}$ ($Id_{\mathcal{P}}$*est l'application identique dans le plan* $\mathcal{P}$).

3°) Si une droite (Δ) est perpendiculaire à (d), alors (Δ) est globalement invariante par S_d.

4°) La réflexion transforme un angle orienté en son opposé :$S_d(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = -(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$..

5°) La réflexion conserve ;

- **La distance** $S_d(M, N) \longrightarrow (M', N') \Longrightarrow \overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$
- **Le parallélisme :** $(\Delta_1) \,//\, (\Delta_2)$ *et* $S_d: (\Delta_1, \Delta_2) \longrightarrow (\Delta'_1, \Delta'_2) \Longrightarrow (\Delta'_1) \,//\, (\Delta'_2)$
- **L'orthogonalité :** $(\Delta_1) \perp (\Delta_2)$ *et* $S_d: (\Delta_1, \Delta_2) \longrightarrow (\Delta'_1, \Delta'_2) \Longrightarrow (\Delta'_1) \perp (\Delta'_2)$
- **L'alignement :** *Si* A, B et C *sont* trois points alignés, alors $S_d(A)$, $S_d(B)$ et $S_d(C)$ *le sont aussi*.
- **Le contact :** $F = E \cap G \Longrightarrow S_d(F) = S_d(E) \cap S_d(G)$.

6°) Le barycentre :

$G = bar$

A	B	C
α	β	γ

$\Longrightarrow S_d(G) = bar$

$S_d(A)$	$S_d(B)$	$S_d(C)$
α	β	γ

5) Rotation

Définition :

Dans le plan $\mathcal{P}$, Soit un point A fixé et soit α un réel donné.

On appelle rotation de centre A et d'angle α et on la note $R_{(A,\ \alpha)}$, la transformation dans le plan $\mathcal{P}$ qui laisse le point A invariant, et qui à tout point M distinct de A associe le point M' tel que ; $AM' = AM$ et$\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}\right) = \alpha$.

On écrit ;

$$\boldsymbol{R_{(A,\alpha)}(A) = A}$$

$$\textbf{et } \boldsymbol{R_{(A,\alpha)}(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} AM = AM' \\ \left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}\right) = \alpha[2\pi] \end{cases}}$$

Exemple 16 :

Soit ABC un triangle équilatéral direct

$\begin{cases} AB = AC \\ (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases} \Rightarrow R_{\left(A, \frac{\pi}{3}\right)}(B) = C$ et $\begin{cases} CA = CB \\ (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}) = -\frac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases} \Rightarrow R_{\left(C; -\frac{\pi}{3}\right)}(B) = A$

Exemple 17 :

Soit ABC un triangle non aplati. Construire l'image de ABC par $R_{\left(B, -\frac{\pi}{2}\right)}$.

Réponse :

$R_{\left(B,-\frac{\pi}{2}\right)}(B) = B$; $R_{\left(B,-\frac{\pi}{2}\right)}(A) = A' \Rightarrow \begin{cases} BA = BA' \\ \left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BA'}\right) = -\dfrac{\pi}{2}[\boldsymbol{2\pi}] \end{cases}$;

$R_{\left(B,-\frac{\pi}{2}\right)}(C) = C' \Rightarrow \begin{cases} CA = CA' \\ \left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CA'}\right) = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$; $R_{\left(B,-\frac{\pi}{2}\right)}(ABC) = A'BC'$.(voir figure)

Caractérisation d'une rotation :

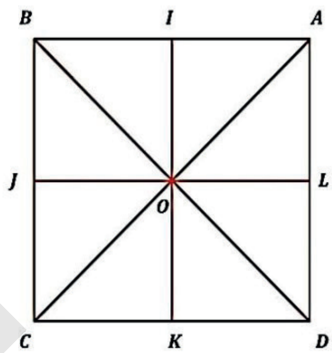
$r_{(\Omega,\alpha)} : \left| \begin{array}{l} A \to A' \\ B \to B' \end{array} \right.$ alors l'angle de r est : $\alpha = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}\right)[2\pi]$ et $\mathbf{A'B' = AB}$ le centre de r est :

$\Omega = \mathrm{med}[AA'] \cap \mathrm{med}[BB']$, sinon il est l'intersection des droites $(\mathbf{AB})$ et $(\mathbf{A'B'})$

Exemple 18 :

$ABCD$ est un carré direct de centre O. I, J, K et L sont les milieux respectifs de $[AB]$, $[BC]$,$[CD]$ et $[DA]$.

Déterminer le centre et les angles des rotations R_1 et R_2 telles que ;



1) $R_1(A) = B, R_1(B) = C$, 2) $R_1(C) = D$ et $R_1(D) = A$

3) $R_2(I) = L, R_2(L) = K, R_2(K) = J$ et $R_2(J) = I$

Réponse :

1) $R_1(A) = B, R_1(B) = C$; donc le centre est $O = \mathrm{med}[AB] \cap \mathrm{med}[BC]$

Et d'angle $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}\right) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$

2) $R_1(C) = D$ et $R_1(D) = A$ donc le centre est $O = \mathrm{med}[DC] \cap \mathrm{med}[DA]$.

Et d'angle $\left(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DA}\right) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$

3) $R_2(I) = L$ et $R_2(L) = K$ donc le centre est $O = \mathrm{med}[IL] \cap \mathrm{med}[LK]$. Et d'angle $\left(\overrightarrow{IL}, \overrightarrow{LK}\right) = -\frac{\pi}{2}[2\pi]$

Propriétés d'une rotation :

1°) $R_{(A,\alpha)}(M) = M' \Rightarrow \begin{cases} AM = AM' \\ \left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}\right) = \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AM' = AM \\ \left(\overrightarrow{AM'}, \overrightarrow{AM}\right) = -\alpha \end{cases} \Rightarrow R_{(A,-\alpha)}(M') = M.$

La rotation $R_{(A,\alpha)}$ est une bijection et sa bijection réciproque est une rotation de même centre et d'angle $-\alpha$

(opposé de α) ; $\left(R_{(A,\alpha)}\right)^{-1} = R_{(A,-\alpha)}$.

2°) Si un cercle $(\mathcal{C})$ a pour centre le point A, alors $(\mathcal{C})$ est globalement invariante par $R_{(A,\alpha)}$.

3°) La rotation conserve ;

- **La distance :** *(la rotation est une isométrie)* $R_{(A,\alpha)}(M,N) \mapsto (M',N') \Rightarrow \overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$
- **Le parallélisme :** $(\Delta_1) // (\Delta_2)$ *et* $R_{(A,\alpha)} : (\Delta_1, \Delta_2) \longrightarrow (\Delta'_1, \Delta'_2) \Rightarrow (\Delta'_1) // (\Delta'_2)$
- **L'orthogonalité :** $(\Delta_1) \perp (\Delta_2)$ *et* $R_{(A,\alpha)} : (\Delta_1, \Delta_2) \longrightarrow (\Delta'_1, \Delta'_2) \Rightarrow (\Delta'_1) \perp (\Delta'_2)$
- **Le contact :** $F = E \cap G \Rightarrow R_{(A,\ \alpha)}(F) = R_{(A,\ \alpha)}(E) \cap R_{(A,\ \alpha)}(G)$.
- **L'alignement :** A, B et C trois points alignés$\Rightarrow$ $R_{(A,\alpha)}(A)$, $R_{(A,\alpha)}(B)$ et $R_{(A,\alpha)}(C)$ sont alignés.
- **Le barycentre :**

$$G = bar \begin{array}{|c|c|c|} \hline A & B & C \\ \hline \alpha & \beta & \gamma \\ \hline \end{array} \Rightarrow R_{(A,\alpha)}(G) = bar \begin{array}{|c|c|c|} \hline R_{(A,\ \alpha)}(A) & R_{(A,\ \alpha)}(B) & R_{(A,\ \alpha)}(C) \\ \hline \alpha & \beta & \gamma \\ \hline \end{array}$$

4°) L'orientation d'un angle :

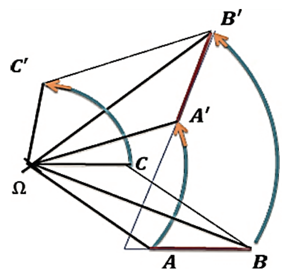
La rotation conserve la mesure d'un angle orienté;

(*Un angle direct a pour image un angle direct, et un angle indirect a pour image un angle indirect*).

$R_{(A,\alpha)}\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$.

5°) Propriété angulaire :

Si $R_{(\Omega,\alpha)}: (A,B) \longmapsto (A',B')$, alors ; $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A'B'}}\right) = \alpha$



Démonstration :

Soit C le point tel que ΩABC est un parallélogramme. Donc $C' = R_{(\Omega,\alpha)}(C)$ est le point tel que $\Omega A'B'C'$ est un parallélogramme, d'où ; $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}\right) = \left(\overrightarrow{\Omega C}, \overrightarrow{\Omega C'}\right) = \alpha$.

Remarque 6 :

a. Si Ω est le centre d'une rotation R, telle que ; $R(M) = M'$, Alors Ω est situé sur la médiatrice de $[MM']$.

b. Une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ s'appelle quart de tour direct.

c. Une rotation d'angle π est une symétrie centrale dont le centre est celui de la rotation. $\boldsymbol{R_{(\Omega,\pi)} = S_\Omega}$.

d. Une rotation d'angle 0 est l'identité du plan $Id_{\mathcal{P}}$.

Exemple 19 :

A. Soient A et B deux points distincts d'un cercle Γ de centre O non diamétralement opposés. Pour un point M de Γ autre que A et B on désigne par H l'orthocentre de AMB. Soit enfin C le symétrique de A par rapport à O.

1°) **a)** Montrer que (MH) // ((BC).

b) Montrer que (BH) // (CM).

c) En déduire la nature du quadrilatère MHBC.

2°) a) Quelle est l'image de M par la translation t de vecteur $\overrightarrow{CB}$?

b) Quel est l'ensemble des points H lorsque M décrit Γ sauf A et B ? Dessiner cet ensemble.

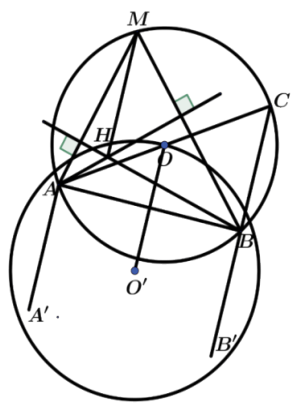
Réponse :

A. 1°) a)(CB) et (MH) sont perpendiculaires à la même droite (AB).

Donc (MH) // (CB).

b) De façon analogue (BH) et (CM) sont perpendiculaires à la même droite (AM), donc (BH) // (CM).

c) MHBC a ses côtés deux à deux parallèles, donc c'est un parallélogramme.



2°) a) MHBC est un parallélogramme, d'où $\overrightarrow{MH} = \overrightarrow{CB} \Rightarrow t_{\overrightarrow{BC}}(M) = H$.

b) Lorsque M décrit Γ, H décrit $t(\Gamma)$ qui est un cercle Γ' de centre $O' = t(O)$ et qui a le même rayon.

Exemple 20 :

Soit ABCD un parallélogramme de centre O ; soit I un point du segment [AB] et J un point du segment [BC]. On note s la symétrie de centre O, soient K et L les images respectives de I et J par s.

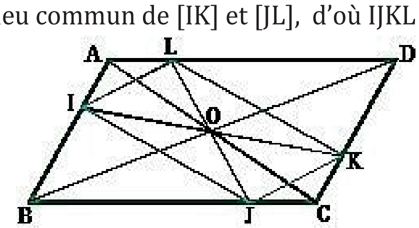
1°) Montrer que IJKL est un parallélogramme de centre O. Quelle est l'image de la droite (AB) par s ?

2°) Montrer que K appartient à (CD).

3°) Montrer que L appartient à (AD).

Réponse :

1°) La symétrie S de centre O transforme I en K et J en L. Donc O est le milieu commun de [IK] et [JL], d'où IJKL est un parallélogramme de centre O.



2°) a) le centre O de ABCD est le milieu commun de [AC] et [BD].

S transforme donc A en C ; B en D et par suite (AB) en (CD).

b) I est un point de (AB), donc son image K par s est un point de l'image de (AB). C'est- à dire de (CD) ; $K \in (CD)$.

3°) Utilisons un procédé analogue à celui de la question 2°) ; on a vu que S transforme A en C ; donc C en A ; B en D.

Elle transforme donc (BC) en (AD), d'autre part $J \in (BC)$ et son image $L \in (AD)$.

Exemple 21 :

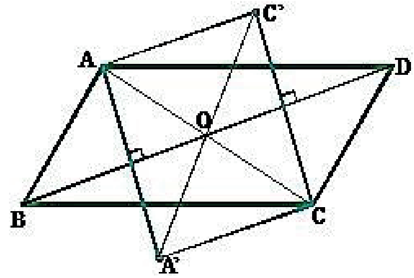
ABCD étant un parallélogramme, on note A' et C' les symétriques respectifs de A et C par rapport à (BD).

1°) Faire une figure.

2°) Montrer que le milieu de [AC] est encore celui de [A'C'], que peut-on déduire pour AA'CC' ?

3°) Montrer que AC = A'C', que peut-on déduire pour AA'CC' ?

Réponse :



1°) Construction

2°) Une réflexion conserve les milieux.

Le milieu de [AC] a pour image le milieu de [A'C'].

Or le milieu de [AC] est le centre O du parallélogramme ABCD,

il appartient à la diagonale (BD), il est donc sa propre image dans la réflexion d'axe (BD).

Donc O est encore le milieu de [A'C'], le quadrilatère AA'CC' est donc un parallélogramme.

3°) Une réflexion conserve les distances ; A a pour image A' ; C a pour image C' donc AC = A'C'.

Le parallélogramme AA'CC' a ses diagonales de même longueur c'est un rectangle.

Exemple 22 :

Soit ABCD un carré direct $\left(\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}}\right)=\frac{+\pi}{2}\right)$, soit P un point de [AB] et B le point du segment [BC] tel que

BQ = AP ; on note O le centre de ABCD ; on désigne par r le quart de tour direct de centre O.

1°) a) Quelle est l'image de A par r ?

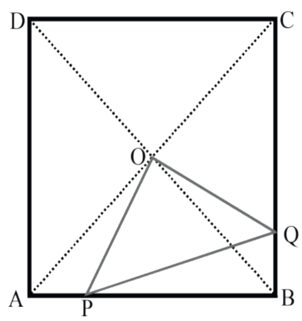
b) Quelle est l'image de B par r ?

c) Déduire de a) et b) l'image par r du segment [AB].

2°) a) Quelle est l'image de P par r ?

b) Montrer que le triangle OPQ est rectangle isocèle en O.

Réponse :



1) a) O est le centre du carré direct ABCD ; on a donc : $\begin{cases} OA = OB \\ \left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right)=\frac{+\pi}{2} \end{cases}$.

L'image de A par r est donc B.

b) On a de même $\begin{cases} OB = OC \\ \left(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OC}\right)=\frac{+\pi}{2} \end{cases}$; l'image de B est donc C.

c) Il résulte des questions a) et b) que r([AB]) = [BC].

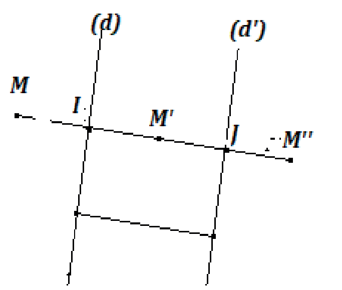
2°) a) P $\in$ [AB] $\Rightarrow$ r(P) $\in$ [BC] et comme AP = BQ ; on trouve que r(P) = Q.

Puisque r transforme P en Q ; on a : $\begin{cases} OP = OQ \\ \left(\overrightarrow{OP};\overrightarrow{OQ}\right)=\frac{+\pi}{2} \end{cases}$.Il en résulte que OPQ

est isocèle rectangle en O.

b. Composée de deux réflexions :

• Composée de deux réflexions d'axes parallèles : (figure)



Soit S_d la réflexion d'axe (d) et $S_{d'}$ la réflexion d'axe (d').

$$M: S_d \mapsto M': S_{d'} \mapsto M''\text{ ; alors : } M \vdash S_{d'} \circ S_d \longrightarrow M''$$

$S_d(M) = M' \Rightarrow \overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{IM'}$, $S_{d'}(M') = M'' \Rightarrow \overrightarrow{M'M''} = 2\overrightarrow{M'J}$. Donc ;

$\overrightarrow{MM''} = 2\overrightarrow{IJ} \Rightarrow t_{2\overrightarrow{IJ}}(M) = M''$.

D'où, $\boldsymbol{S_{d'} \circ S_d = t_{2\overrightarrow{IJ}}}$, avec I un point de (d) et J son projeté orthogonal sur (d').

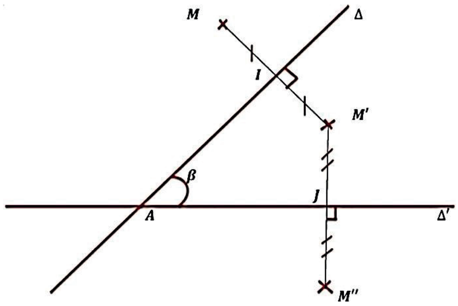
La composée de deux réflexions d'axes parallèles est une translation.

<u>Exemple 23 :</u>

$ABCD$est un carré. Déterminer la nature des transformations $S_{(AB)} \circ S_{(DC)}$et$S_{(BC)} \circ S_{(AD)}$.

Réponse :

$S_{(AB)} \circ S_{(DC)} = t_{2\overrightarrow{DA}}$et $S_{(BC)} \circ S_{(AD)} = t_{2\overrightarrow{AB}}$.



- **Composée de deux réflexions d'axes sécants :**

Soit (Δ) et (Δ') deux droites sécantes en A avec $(\widehat{\Delta, \Delta'}) = \beta$.

Posons $M' = S_\Delta(M)$et $M'' = S_{\Delta'}(M')$. **Etudions $S_{\Delta'} \circ S_\Delta$**

$$\begin{cases} S_\Delta(M) = M' \\ M \notin (\Delta) \end{cases} \Rightarrow (\Delta) = med[MM'] \Rightarrow \begin{cases} AM = AM' \\ (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}) = 2(\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AM'}) \end{cases} \boxed{1}$$

((Δ)*étant la bissectrice de* $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'})$).

$$S_{\Delta'}(M') = M'' \Rightarrow (\Delta') = med[M'M''] \Rightarrow \begin{cases} AM' = AM'' \\ (\overrightarrow{AM'}, \overrightarrow{AM''}) = 2(\overrightarrow{AM'}, \overrightarrow{AJ}) \end{cases} \boxed{2}$$

((Δ') *étant la bissectrice de* $(\overrightarrow{AM'}, \overrightarrow{AM''})$).

De $\boxed{1}$ et $\boxed{2}$, on a ; $\begin{cases} AM = AM' = AM'' \\ (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}) + (\overrightarrow{AM'}, \overrightarrow{AM''}) = 2(\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AM'}) + 2(\overrightarrow{AM'}, \overrightarrow{AJ}) = 2(\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ}) = 2\beta. \end{cases}$

Donc, $S_{\Delta'} \circ S_\Delta(M) = M''$ tel que ; $AM = AM''$ et $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM''}) = 2\beta$;avec $\beta = (\widehat{\Delta, \Delta'})$.

La transformation $R = S_{\Delta'} \circ S_\Delta$ est une rotation de centre A et d'angle 2β.

<u>Exemple 24 :</u>

$ABCD$ est un carré direct de centre O.

Déterminer à chaque fois la nature de la transformation f et construire l'image du carré $ABCD$ par f

1°) $f = S_{(AC)} \circ S_{(AB)}$; **2°)** $f = S_{(DC)} \circ S_{(AC)}$; **3°)** $f = S_{(DC)} \circ S_{(AB)}$; **4°)** $f = S_{(BD)} \circ S_{(AC)}$.

Réponse :

1°) $f = S_{(AC)} \circ S_{(AB)} = r_{(A, \frac{\pi}{2})} \Rightarrow f(ABCD) = ADC'D'$*(figure 1).*

2°) $f = S_{(DC)} \circ S_{(AC)} = r_{(C, -\frac{\pi}{2})} \Rightarrow f(ABCD) = A'D'CD$*(figure 2).*

3°) $f = S_{(DC)} \circ S_{(AB)} = t_{2\overrightarrow{AD}} \Rightarrow f(ABCD) = A'D'C'D'$*(figure 3).*

4°) $f = S_{(BD)} \circ S_{(AC)} = S_O \Rightarrow f(ABCD) = ABCD$.$ABCD$ est globalement invariant par S_O*(figure 4).*

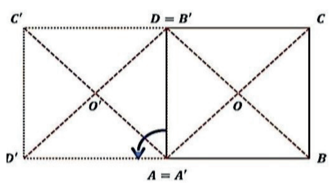


Figure 1

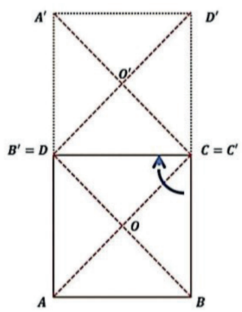


Figure 2

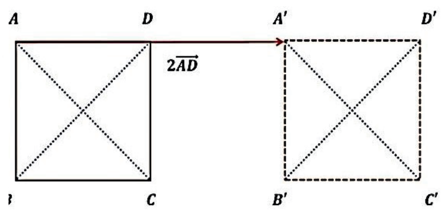


Figure 3

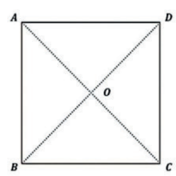
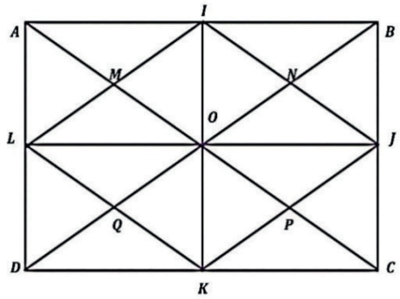


Figure 4

Exemple 25 :

Sur la figure ci-contre, déterminer la nature de chacune des transformations suivantes ;



a) $t_{\overrightarrow{AI}} \circ t_{\overrightarrow{AM}}$; $t_{\overrightarrow{AM}} \circ t_{\overrightarrow{JP}}$; $t_{\overrightarrow{MN}} \circ t_{\overrightarrow{PQ}}$;

b) $S_M \circ S_N$; $S_N \circ S_P$; $S_J \circ S_K$;

c) $S_{(MN)} \circ S_{(PQ)}$; $S_{(AB)} \circ S_{(AD)}$; $S_{(BC)} \circ S_{(IK)}$

Réponse :

a) $t_{\overrightarrow{AI}} \circ t_{\overrightarrow{AM}} = \boldsymbol{t_{\overrightarrow{AN}}}$; $t_{\overrightarrow{AM}} \circ t_{\overrightarrow{JP}} = \boldsymbol{t_{\overrightarrow{AL}}}$; $t_{\overrightarrow{MN}} \circ t_{\overrightarrow{PQ}} = \boldsymbol{Id_{\mathcal{P}}}$;

b) $S_M \circ S_N = \boldsymbol{t_{\overrightarrow{BA}}}$; $S_N \circ S_P = \boldsymbol{t_{\overrightarrow{CB}}}$; $S_J \circ S_K = \boldsymbol{t_{\overrightarrow{DB}}}$;

$\boldsymbol{S_{(MN)} \circ S_{(PQ)} = t_{\overrightarrow{KI}}}$; $\boldsymbol{S_{(AB)} \circ S_{(AD)} = S_A}$; $\boldsymbol{S_{(BC)}} \circ S_{(IK)} =$;

Cas particuliers : composée de deux réflexions d'axes perpendiculaires

Soit (Δ) et (Δ') deux droites perpendiculaires en I, et soit S_Δ la réflexion d'axe (Δ) et $S_{\Delta'}$ la réflexion d'axe (Δ').

Cherchons à déterminer $S_{\Delta'} \circ S_\Delta$;

$M : S_\Delta \longmapsto M'$; $S_{\Delta'} : M' \longmapsto M''$. Alors $M \longmapsto S_{\Delta'} \circ S_\Delta \longrightarrow M''$.

$S_\Delta(M) = M' \Longrightarrow \overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{KM'}$, $S_{\Delta'}(M') = M'' \Longrightarrow \overrightarrow{M'M''} = 2\overrightarrow{M'L}$. Donc ; $MM'' = 2\overrightarrow{KL}$.

Comme $(MM') \perp (M'M'') \Longrightarrow ABC$ est rectangle en M' et $I = M * M''$ (*propriété des milieux*).

Donc ; $S_{\Delta'} \circ S_\Delta(M) = M''$ *tel que* $I = M * M''$.

D'où, la composée de deux réflexions d'axes perpendiculaires est une symétrie centrale de centre I, point d'intersection des deux droites.

Exemple 26 :

ABC est un triangle non aplati et A' est le pied de la hauteur issue de A. Caractériser $S_{(AA')} \circ S_{(BC)}$.

Réponse :

On a $(AA') \perp (BC) \Longrightarrow S_{(AA')} \circ S_{(BC)} = S_{A'}$.

Exemple 27 :

$ABCD$ est un rectangle de centre O, caractériser les transformations $S_{(AB)} \circ S_{(CD)}$ puis $S_{(AB)} \circ S_{(BC)} \circ S_{(DC)} \circ S_{(DA)}$.

Réponse :

$S_{(AB)} \circ S_{(CD)} = t_{2\overrightarrow{CB}}$; $S_{(AB)} \circ S_{(BC)} \circ S_{(DC)} \circ S_{(DA)} = S_B \circ S_D = t_{2\overrightarrow{DB}}$

Exercices Généraux

1. Dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère $(O\ ;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$, soit $A(7\ ;\ -2)$, $B(4\ ;5)$ et $C(-1\ ;3)$.
Déterminer les coordonnées des points A', B' et C' images respectives de A, B et C par la translation de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$.

2. Dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$, on donne la translation de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$.
1°) Déterminer l'expression analytique de la translation $t_{\vec{u}}$.
2°) Utiliser cette expression pour calculer les coordonnées des
points A' et B' image des points $A(1\ ;\ -5)$ et $B(3,-1)$.

3. Dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère $(O\ ;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$, soit D la droite d'équation $5x-3y+3=0$.
1°)Déterminer une équation de la droite (D') image de (D)par la translation de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$.
2°) La translation transforme un cercle $(\mathcal{C})$ en un cercle $(\mathcal{C}')$ demême rayon, le centre O de $(\mathcal{C})$ a pour image le centre O' de $(\mathcal{C}')$.

4. Dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère $(O\ ;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$, soit la droite (D) d'équation cartésienne $3x+2y-1=0$.
1°) Déterminer une équation de la droite (D') image de (D) par la translation $t_{\vec{u}}$ tel que $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix}$;
2° Déterminer une équation du cercle $(\mathcal{C}')$ image du cercle $\mathcal{C}(A,3)$ tel que A $(-4\ ;\ 1)$ par $t_{\vec{u}}$.

5. Dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère $(O\ ;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$, soit (d) une droite d'équation ; $4x+5y-2=0$ et $t_{\vec{u}}$ et $t_{\vec{v}}$ deux translations de vecteurs respectifs $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\7\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}$.
Déterminer une équation de (d') image de (d) par la translation $t_{\vec{u}}\circ t_{\vec{v}}$.

6. Soit $ABCD$ un parallélogramme de centre O.
Construire l'image de $ABCD$ par la translation $t_{\overrightarrow{AO}}\circ t_{\overrightarrow{BC}}$.

7. Soit ABC un triangle non aplati, G son centre de gravité, A' le milieu de $[BC]$, C' le milieu de $[AB]$ et B'le milieu de $[AC]$.
Déterminer le centre et le rapport de l'homothétie qui transforme les sommets du triangle en milieux de ses côtés.

8. ABC est un triangle non aplati, on note Δ_A, Δ_B et Δ_C les hauteurs issues respectivement de A, B et C.
Caractériser une homothétie qui transforme les hauteurs de ABC en médiatrices de ABC.

9. $ABCD$ est un trapèze de bases $[AB]$et $[CD]$, soit I le milieu $[AB]$, J le milieu $[CD]$ et O le l'intersection de ses diagonales.
Montrer que O, I et J sont alignés.

10. Soit $ABCD$ et $AEFG$ deux parallélogrammes tels que ; $E\in[AB]$, $G\in[AD]$et $(EG)//(BD)$.
Montrer que A, F et C sont alignés.

11. Soit ABC un triangle non aplati.
Et soient $I=B*C$, $J=A*C$ et $K=A*B$.
Soit P le point d'intersection de la parallèle à (BJ) passant par K et la parallèle à (CK) passant par J
1°) Faire une figure ;
2°) Démontrer que A, P et I sont alignés.

12. P et Q sont deux points.

$G = bar$

P	Q
-5	1

Soit la fonction $f(M)=M'$ tel que ;
$\overrightarrow{PM'}=\overrightarrow{PQ}+5\overrightarrow{PM}$.
Démontrer que f est une homothétie dont on caractérisera *(centre et rapport)*.

13. ABC est un triangle non aplati.
$A'=B*C$, $B'=A*C$ et $C'=A*B$.
P est un point du plan $\mathcal{P}$.
Les droites (Δ_A), (Δ_B) et(Δ_C) passent respectivement par A, B et C et sont parallèles respectivement à (PA'), (PB') et (PC').
Soit G le centre de gravité de ABC.
1°) Montrer que les droites (Δ_A), (Δ_B) et (Δ_C) sont sécantes en un point Q ;
2°) Faire une figure ;
3°) Justifier que P, Q et G sont alignés.

14. Soit ABC un triangle non aplati.
$I=B*C$; $P\in[IC]$;$Q\in[BI]$ et $M\in[AI]$, tel que ; $(MP)//(AC)$ et $(MQ)//(AB)$.
1°) Faire une figure ;
2°) Soit h l'homothétie de centre I qui transforme Aen M, déterminer $h(B)$ et $h(C)$.
3°) Montrer que $I=P*Q$.

15. Dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$, soit les points $A(5,-3)$ et $B(7,2)$.
1°) Donner les coordonnées de A' et B' images des point A et B par l'homothétie h de centre $\Omega(4,-3)$ et de rapport $k=\frac{1}{3}$;
2°)Donner une équation de (AB) ;
3°) Donner une équation de (Δ) image de (AB) par l'homothétie h.

16. Dans un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$ du plan $\mathcal{P}$ sont donnés $A(2,3)$; $B(1,-2)$;$\vec{u}=\vec{\imath}+2\vec{\jmath}$ et $\vec{v}=-2\vec{\imath}+\vec{\jmath}$.
1°) Vérifier que $(O;\ \vec{u},\vec{v})$ est un repère du plan ;
2°) Donner une équation de (AB) dans le repère $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$;
3°) Donner une équation de (AB) dans le repère $(O;\ \vec{u},\vec{v})$;
4°) Soit h l'homothétie de centre $\Omega(1,-3)$ dans $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$ et de rapport 2, donner les coordonnées de Ω dans $(O;\ \vec{u},\vec{v})$;
5°) Déterminer de deux façons une équation de la droite (Δ) image de (AB)par $h=h_{(\Omega,2)}$.

17. Dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$, on considère les droites ;
$(\Delta_1) : 2x+3y-5=0$; $(\Delta_2) : 4x+6y+24=0$.
1°) Quelle est la position relative de (Δ_1)et(Δ_2) ?
2°) Déterminer le rapport k_1 de l'homothétie h_1 de centre $I(3,4)$ transformant (Δ_1)en (Δ_2).
3°) Déterminer le centre J d'abscisse nul de l'homothétie $h_2$de rapport$k_2=2$ transformant (Δ_1)en (Δ_2).

18. Soit $ABCD$ un carré.
On définit l'application f par $f(M)=M'$ tel que ;
$\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}$.
1°) Déterminer $f(A)$, $f(B)$, $f(C)$ et $f(D)$;

2°) Construire A', B', C' et D' ;
3°) Quelle est la nature du quadrilatère $A'B'C'D'$;

4°) Soit $G = bar$

A	B	C	D
1	-1	1	1

Exprimer $f(M)$ en fonction $\overrightarrow{MG}$;
Quelle est la nature de f ?

19. $ABCD$ est un losange tel que ;

$AB = 3$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \dfrac{2\pi}{3}[2\pi]$

C' est l'image de C par le quart de tour direct de centre B. O est le point commun entre (CC')et (BD). A' est l'image de A par l'homothétie h de centre O qui transforme Cen C'.
1°) Montrer que (BD) est la médiatrice de $[A'C']$;
2°) Déterminer la nature du quadrilatère $AC'A'C$;
3°) Déterminer le rapport k de l'homothétie h.

20. Soit ABC un triangle non aplati. Les points P, Q et R sont tels que ;

$\overrightarrow{AP} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AQ} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{BR} = \dfrac{4}{3}\overrightarrow{BC}$.

Soit T le milieu de $[PB]$ et S le milieu de $[BR]$.
1°) Faire une figure ;
2°) Déterminer le rapport k de l'homothétie h de centre A qui transforme ;
- **a)** Q en C,
- **b)** T en P,
- **c)** P en B.

3°) Déterminer le centre de l'homothétie h de rapport $\frac{3}{2}$qui transforme ;
- a) Q en C,
- b) P en A,
- c) Ren C.

4°) Déterminer les images par $h_{\left(A,\ \frac{2}{3}\right)}$ de ;
- a) La droite (BC),
- b) Le segment $[AC]$,
- c) Le triangle ABC.

21. ABC est un triangle non aplati. Eet$F$ sont les points définis par ;

$\overrightarrow{AE} = \dfrac{5}{8}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AF} = \dfrac{8}{5}\overrightarrow{AC}$.

1°) Faire une figure ;
2°) Exprimer E comme barycentre de $(A; B)$;
3°) Que peut-on dire des droites (CE) et (BF) ?
4°) Déterminer le rapport de l'homothétie h de centre A qui transforme B en E ;
5°) Quelle est l'image de F par h ?
6°) Existe-t-il une homothétie h' qui transforme B en C et Fen E, si oui quels sont ses éléments caractéristiques ?

22. ABC est un triangle non aplati.
A tout point M du plan $\mathcal{P}$ on associe le point M' tel que ;
$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$.
Soit D le point du plan $\mathcal{P}$ tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.
1°) Déterminer les points A',B',C'et D'.
2°) Que représente A'pour A, B' pour B, C' pou C ?
3°) Quelle est donc la nature de la transformation f qui à M associe M' ? Pourquoi ?

23. Soit ABC un triangle quelconque.
1°) Construire l'image de ABC par la symétrie S_A.
2°) Quelle est la nature du quadrilatère $BCB'C'$? Prouvez-le.

24. $ABCD$ est un parallélogramme.
Caractériser $S_A \circ S_B \circ S_C \circ S_D$.

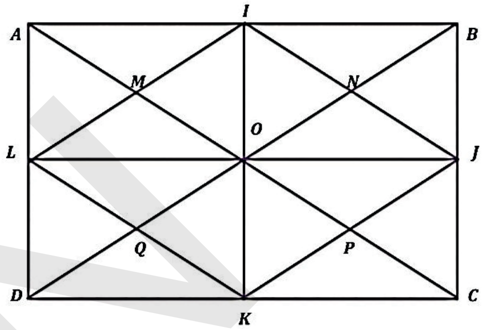
25. Dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, soit la droite d'équation (D): $3x + 2y - 4 = 0$, et le cercle d'équation ; $(\mathcal{C})$: $x^2 - 6x + y^2 - y = 0$.
1°) Déterminer une équation de (D') image de (D) par la symétrie S_B tel que $B(-1; 2)$;
2°) Donner une équation de $(\mathcal{C}') = S_B(\mathcal{C})$.

26. $ABCD$ est un carré.
Déterminer la nature des transformations $S_{(AB)} \circ S_{(DC)}$ et $S_{(BC)} \circ S_{(AD)}$.

27. ABC est un triangle non aplati et A' est le pied de la hauteur issue de A.
Caractériser $S_{(AA')} \circ S_{(BC)}$.

28. Soit $ABCD$un rectangle de centre O, caractériser les transformations $S_{(AB)} \circ S_{(CD)}$;
Puis ; $S_{(AB)} \circ S_{(BC)} \circ S_{(DC)} \circ S_{(DA)}$.

29. Sur la figure ci-dessous, déterminer la nature de chacune des transformations suivantes



a) $t_{\overrightarrow{BI}} \circ t_{\overrightarrow{BN}}$; $t_{\overrightarrow{BN}} \circ t_{\overrightarrow{LQ}}$, $t_{\overrightarrow{PQ}} \circ t_{\overrightarrow{MN}}$;
b) $S_N \circ S_M$, $S_M \circ S_Q$, $S_L \circ S_I$;
c) $S_{(MQ)} \circ S_{NP}$, $S_{(CB)} \circ S_{(CD)}$, $S_{(DA)} \circ S_{(KI)}$

30. $ABCD$ est un carré direct de centre O.
Déterminer à chaque fois la nature de la transformation f et construire l'image du carré $ABCD$ par f
1°) $f = S_{(AC)} \circ S_{(AB)}$;
2°) $f = S_{(DC)} \circ S_{(AC)}$;
3°) $f = S_{(DC)} \circ S_{(AB)}$;
4°) $f = S_{(BD)} \circ S_{(AC)}$.

31. Soit ABC un triangle équilatéral direct. Montrer que ;

$$R_{\left(A, \frac{\pi}{3}\right)}(B) = C \text{ et } R_{\left(C; -\frac{\pi}{3}\right)}(B) = A$$

32. Soit ABC un triangle non aplati.
Construire l'image de ABCpar $R_{\left(B, -\frac{\pi}{2}\right)}$.

33. $ABCD$ est un carré direct de centre O.
I, J, K et L sont les milieux respectifs $[AB]$,$[BC]$,$[CD]$ et $[DA]$.
Déterminer le centre et les angles des rotations R_1 et R_2 tel que ;
$R_1(A) = B$, $R_1(B) = C$, $R_1(C) = D$ et $R_1(D) = A$
$R_2(I) = L$, $R_2(L) = K$, $R_2(K) = J$ et$R_2(J) = I$

34. $ABCD$ est un carré direct. Les trianglesABE et BFC sont équilatéraux directs.
Montrer que les points D, E et F sont alignés.

35. ABC est un triangle rectangle direct. M est un point intérieur au triangle tel que $MA = 5cm$; $MB = 4cm$; $MC = 3cm$. Soit N le point du plan tel que AMN soit équilatéral direct.
1°) Calculer les distances MN et NC ;
2°) Quelle est la nature du triangle MNC ?
3°) Déterminer une mesure de l'angle ANC ;

4°) En déduire une valeur approchée de AC.

36. ABC est un triangle quelconque ; on construit extérieurement les carrés $ABDE$ et $ACFG$.
Montrer que $BG = CE$ et $(BG) \perp (CE)$.

Symétries et translations

38. ABCD est un rectangle de centre θ. Déterminer les transformations suivantes :

a) $S_{(AB)} \circ S_{(CD)}$; $S_{(AB)} \circ S_{(AD)}$; $S_{(AC)} \circ S_{(BD)}$;

b) $t_{\overrightarrow{AB}} \circ S_{\theta}$; $t_{\overrightarrow{AD}} \circ S_{\theta}$; $t_{\overrightarrow{AC}} \circ S_{\theta}$;

c) $t_{\overrightarrow{AB}} \circ S_{(AD)}$; $t_{\overrightarrow{AB}} \circ S_{(DO)}$; $t_{\overrightarrow{AB}} \circ S_{(AC)}$;

d) $S_A \circ S_{\theta}$; $S_B \circ S_{\theta}$; $S_C \circ S_{\theta}$;

e) $t_{\overrightarrow{AB}} \circ t_{\overrightarrow{CD}}$; $t_{\overrightarrow{AB}} \circ t_{\overrightarrow{AD}}$; $t_{\overrightarrow{AB}} \circ t_{\overrightarrow{AC}}$.

Homothéties

39. Traduire par des égalités vectorielles les phrases suivantes :

a) M' est l'image de M par l'homothétie de centre θ et de rapport 5.

b) Le point C a pour image D par l'homothétie de centre S et de rapport $\frac{1}{2}$.

c) L'homothétie de centre I et de rapport -3 transforme A en B.

40. Interpréter en utilisant une homothétie les égalités vectorielles suivantes :

$\overrightarrow{BC} = 4\overrightarrow{AB}$; $2\overrightarrow{MN} = -5\overrightarrow{MP}$; $\frac{3}{2}\overrightarrow{RS} = 4\overrightarrow{RG}$.

41. Soit l'homothétie de centre I et de rapport -2 ; A' ; B' ; C' sont les images des points A, B, C par cette homothétie.
Compléter les égalités suivantes :

$\overrightarrow{IB'} = ...\overrightarrow{IB}$; $\overrightarrow{C'B'} = ...\overrightarrow{CB}$; $\overrightarrow{A'B'} = ...\overrightarrow{AB}$.

42. Soient A ; B et C trois points deux à deux distincts.
Déterminer dans chacun des cas suivants le rapport de l'homothétie de centre A transformant B en C.

1°) $\overrightarrow{AC} + 3\overrightarrow{AB} = 0$; 2°) $\overrightarrow{BC} - 4\overrightarrow{BA} = 0$; 3°) $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BA}$.

43. Soient A, B et C trois points deux à deux distincts tels que : $\overrightarrow{AC} = 5\overrightarrow{BC}$.

Déterminer le rapport de :

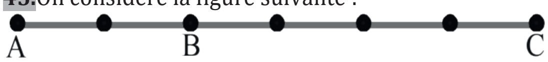
a) L'homothétie de centre A qui transforme C en B.

b) L'homothétie de centre B qui transforme A en C.

c) L'homothétie de centre C qui transforme A en B.

44. On considère un trapèze ABCD de bases [AB] et [CD] ; et M un point du plan. Construire l'image de M par l'homothétie qui transforme A en C et B en D.

45. On considère la figure suivante :



a) Trouver le centre de l'homothétie de rapport 3 qui transforme B en C.

b) Trouver le centre de l'homothétie de rapport $\frac{2}{3}$ qui transforme A en B.

46. Soit ABC un triangle ; H son orthocentre, θ le centre du cercle circonscrit, I le centre du cercle inscrit. Une homothétie h transforme le triangle ABC en le triangle A'B'C'. Définir les images des points H ; θ ; I par cette homothétie.

47. Le plan est muni d'un repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$
Calculer les coordonnées du point M' image de M par l'homothétie de centre θ et de rapport 3.

48. Le plan est muni d'un repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

On considère l'application h du plan dans lui-même qui à tout point M(x ; y) associe le point M'(2x − 1 ; 2y + 3).

a) Démontrer qu'il existe un unique point I tel que : h(I) = I.

b) Démontrer que h est une homothétie dont on précisera le centre et le rapport.

49. Le plan est rapporté à un repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

Soit f la transformation du plan qui à tout point M(x ; y) associe M'(−2x + 3 ; −2y − 6). Démontrer que f est une homothétie dont on déterminera le rapport et le centre.
Déterminer en fonction de x et y les coordonnées du point M''image de M par la transformation réciproque de f.

50. ABC est un triangle ; M est un point du plan. On considère les transformations f, g et k tels que :

$f = t_{\overrightarrow{AB}} \circ h_{(C\,;\,2)}$; $g = h_{(C\,;\,2)} \circ t_{\overrightarrow{BC}}$; $k = h_{(C\,;\,2)} \circ h_{(B\,;\,\frac{1}{3})}$.

Construire les images M_1 ; M_2 et M_3 du point M par les trois transformations f; g et k.

Rotations

51. Soit OAB un triangle isocèle en O ; tel que $(\overrightarrow{OA} ; \overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{4}$.

Déterminer les points : $r_{(\theta\,;\,\frac{\pi}{4})}(A)$ et $r_{(\theta\,;\,\frac{-\pi}{4})}(B)$.

Construire à la règle et au compas les points :

- $r_{(\theta\,;\,\frac{-\pi}{4})}(A)$; $r_{(\theta\,;\,\frac{\pi}{4})}(B)$; $r_{(A\,;\,\frac{3\pi}{4})}(B)$;
- $r_{(B\,;\,-\frac{3\pi}{8})}(A)$; $r_{(B\,;\,\frac{3\pi}{8})}(\theta)$; $r_{(A\,;\,-\frac{3\pi}{8})}(\theta)$

52. Soit ABCD un rectangle tel que : $Mes(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2}$.

Construire à la règle et au compas l'image de ce rectangle par la rotation de centre A et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

53. Soit Δ une droite et θ un point extérieur à Δ.

1°) a) Construire l'image Δ' de Δ par le quart de tour direct de centre θ; on écrira et justifiera le programme de construction.

b) Soit $\vec{u}$ un vecteur directeur de Δ et $\overrightarrow{u'}$ un vecteur directeur de Δ'.
Quelles sont les mesures principales possibles de l'angle orienté $(\vec{u} ; \overrightarrow{u'})$?

2°) Même question pour le quart de tour indirect de centre θ.

54. Soit Δ une droite, θ un point extérieur à cette droite.

1°) a) Construire l'image Δ' de Δ par la rotation de centre θ et d'angle $\frac{\pi}{6}$.

On écrira et justifiera le programme de construction.

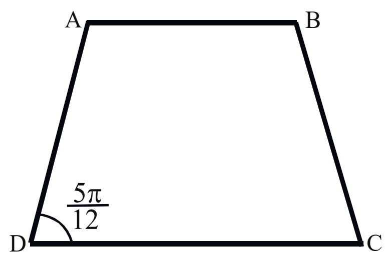
Soit $\vec{u}$ un vecteur directeur de Δ et $\vec{u'}$ un vecteur directeur de Δ'.
Quelles sont les mesures principales possibles de l'angle orienté $(\vec{u}\ ;\ \vec{u'})$?
2°) Même question avec la rotation de centre θ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

55. Soit ABC un triangle équilatéral tel que
$Mes(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}$; G son centre de gravité et A'B'C' les milieux respectifs des segments [BC] ; [AC] ; [AB].
Quelle est la nature des transformations f ; g et k ?
Quels sont les points $r_{(B\ ;\ \frac{\pi}{3})}(C)$; $r_{(A\ ;\ \frac{\pi}{3})}(B)$; $r_{(C\ ;\ \frac{\pi}{3})}(A)$?
Déterminer le centre et l'angle d'une rotation qui transforme A en B ; B en C ; C en A.
Construire les points P ; Q et R tels que :
$P = r_{(A;\ \frac{\pi}{3})}(C)$; $Q = r_{(C\ ;\ \frac{\pi}{3})}(B)$; $R = r_{(B\ ;\ \frac{\pi}{3})}(A)$.
Démontrer que le triangle PQR est équilatéral.

56. Soient A et A' deux points distincts et r une rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ transformant A en A'.
Construire à la règle et au compas le centre de cette rotation.

57. Soit ABCD un carré tel que $(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2}$
On note E ; F ; G et H les milieux respectifs des segments [AB] ; [BC] ; [CD] ; [DA].
1°) Démontrer qu'il existe une rotation qui transforme A en Det B en A. Déterminer son centre et son angle.
2°) a) Démontrer qu'il existe une rotation qui transforme B enD et A en A,
b) Déterminer son centre et son angle.
3°) Montrer qu'il existe une rotation transformant A en D et G en F, Déterminer son centre et son angle.
4°) a) Démontrer qu'il existe une rotation qui transforme A en D et G en E, Déterminer son centre.
b) Soit α la mesure principale de son angle ;
démontrer que $\tan(\frac{-\alpha}{2}) = 2$; en déduire à l'aide d'une calculatrice une valeur approchée de α.

58. Soit ABCD un trapèze de bases [AD] et [BC], tel que :
$Mes(\overrightarrow{BC}\ ;\ \overrightarrow{BA}) = \frac{5\pi}{12}$.
1°) Trouver une rotation transformant A en D et B en C. Préciser son centre et son angle.



2°) Trouver une rotation transformant A en C et B en D. Préciser son centre.

59. ABC un triangle équilatéral direct, C son cercle circonscrit, M un point de $\overset{\frown}{AC}$ et I le point du segment [MB] tel que MI = MA.
1°) Démontrer que le triangle AMI est équilatéral.
2°) Déterminer l'image de I par la rotation de centre A transformant B en C.
3°) En déduire que: MA + MC = MB.

60. ABC un triangle équilatéral tel que Mes $(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}$,
G son centre de gravité ; A'; B'; C' les milieux respectifs des segments [BC] ; [AC] ; [AB].
Déterminer trois couples de droites (Δ ; Δ') telles que la rotation de centre G et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ soit l'application $S_{\Delta} o S_{\Delta'}$.

61. Le plan est rapporté au repère orthonormal direct $(O; \vec{I}\ ;\ \vec{J})$.
Soit r la rotation de centre θ et d'angle $\frac{\pi}{3}$, M un point de coordonnées (x ; y) ; I' ; J' ; M' les images respectives de I ; J ; et M par r.
1°)Démontrer que le repère $(O; \vec{I'}\ ;\ \vec{J'})$ est orthonormé direct.
2°) Démontrer que le point M' a pour coordonnées (x ; y) dans le repère $(O; \vec{I'}\ ;\ \vec{J'})$.
3°) Exprimer en fonction de x et y les coordonnées de M' dans le repère $(O; \vec{I}\ ;\ \vec{J})$.

Chapitre 11 : ARITHMETIQUE DANS N

1) Diviseurs d'un entier naturel

Définition :

Soient a et b deux entiers naturels et b non nul, on dit que b divise a s'il existe un entier naturel k tel que : $a = k \times b$, ainsi :

- a est multiple de b ;
- et/ou b est un diviseur de a.

Remarque1 :

Si a est un multiple de b, alors b est un diviseur de a ; réciproquement, si b est un diviseur de a, alors a est un multiple de b. Le nombre zéro a une infinité de diviseurs (tous les entiers non nuls).

Exemple1 : $21 = 3 \times 7$, donc 21 est un multiple de 3 et/ou 3 est un diviseur de 21.

Exemple 2 :

- Les multiples de 6 inférieurs ou égaux à 30 et non nuls sont 6, 12, 18, 24 et 30. Ils sont au nombre de 5 et le quotient dans la division euclidienne de 30 par 6 est 5 (car $30 = 6 \times 5 + 0$).
- Les multiples de 10 inférieurs ou égaux à 34 et non nuls sont 10, 20 et 30. Ils sont au nombre de 3 et le quotient dans la division euclidienne de 34 par 10 est 3 (car $34 = 10 \times 3 + 4$).
- Les multiples de 9 compris entre 100 (exclu) et 120 (inclus) sont 108 et 117. Ils sont au nombre de 2 et le quotient dans la division euclidienne de 120 par 9 (qui est 13 car $120 = 9 \times 13 + 3$) diminué du quotient dans la division euclidienne de 100 par 9 (qui est 11 car $100 = 9 \times 11 + 1$) est 2 (car $2 = 13 - 11$).
- Les multiples de 12 compris entre 70 (exclu) et 140 (inclus) sont 72, 84, 96, 108, 120 et 132. Ils sont au nombre de 6 et le quotient dans la division euclidienne de 140 par 12 (qui est 11 car $140 = 12\times11 + 8$) diminué du quotient dans la division euclidienne de 70 par 12 **(qui est 5 car $70 = 12\times5 + 10$) est 6 (car $6 = 11 - 5$).**

Exemple 3 :

- 10 est-il multiple de 4 ?
- 5 est-il diviseur de 25 ?
- 252 est-il multiple de 9 ?
- Quel est l'ensemble des multiples de 5 ?
- Quel est l'ensemble des diviseurs de 48 ?
- Soit n un entier naturel. 0 est-il un multiple de n ?
- Soit n un entier naturel non nul. 0 est-il diviseur de n

Réponse :

- Non, $10 = 2,5 \times 4$, mais 2, 5 n'est pas un entier naturel.
- Oui, car $25 = 5 \times 5$, et 5 est bien un entier naturel.
- Oui, car $252 = 28 \times 9$ et 28 est bien un entier naturel.
- 0, 5, 10, 15, 20, . . . Cet ensemble est infini.
- 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, et 48. Cet ensemble est fini.
- Oui, car $0 = 0 \times n$.
- Non, car $0 \times k = 0 \neq n$.

Théorème 1 :

Propriété additive : si a est multiple de c et b est multiple de c, alors :

- $a + b$ est multiple de c,
- et si, de plus, $a \geq b$, alors $a - b$ est multiple de c.

Démonstration :

Il existe un entier naturel k tel que $a = k \times c$ (car a est multiple de c). Il existe un entier naturel l tel que $b = l \times c$ (car b est multiple de c). Ainsi, par somme, $a + b = k \times c + l \times c = (k + l) \times c$. Puis, $a + b$ est multiple de c (on a pu trouver un entier naturel $k + l$ qui, multiplié par c, donne $a + b$). Et, par différence, $a - b = k \times c - l \times c = (k - l) \times c$. Puis, $a - b$ est multiple de c (on a pu trouver un entier $k - l$ qui, multiplié par c, donne $a + b$; et $k - l \geq 0$ car $a - b > 0$ et $c \geq 0$ donnent $k - l \geq 0$ d'après $a - b = (k - l) \times c$).

Exemple 4 :

$49 = 7 \times 7$ et $21 = 7\times3$ sont multiples de 7, donc $49 + 21 = 70$ et $49 - 21 = 28$ sont aussi multiples de 7 (en effet,$70 = 7 \times 10$ et $28 = 7 \times 4$).

Théorème 2 :

Propriété de transitivité : si a est multiple de b et b est multiple de c, alors, a est multiple de c.

Démonstration :

Il existe un entier naturel k tel que $a = k \times b$ (car a est multiple de b). Il existe un entier naturel l tel que $b = l \times c$ (car b est multiple de c). Ainsi, par substitution, $a = k \times b = k \times (l \times c) = (k \times l) \times c$ (par associativité de la multiplication). Puis, a est multiple de c (on a pu trouver un entier naturel $k \times l$ qui, multiplié par c, donne a).

Exemple 5 :

$63 = 21 \times 3$ est multiple de 21 et $21 = 7 \times 3$ est multiple de 7, donc 63 est multiple de 7 (en effet, $63 = 7 \times 9$).

Exemple 6 :

- Vrai ou faux (justifié) : si a est multiple de b et a est multiple de c, alors, a est multiple de b + c.
- Vrai ou faux (justifié) : si c est diviseur de a, si b est diviseur de a et si $c \geq b$, alors, $c - b$ est diviseur de a.
- Vrai ou faux (justifié) : on peut trouver un multiple de 14 qui ne soit pas un multiple de 7.
- Vrai ou faux (justifié) : je connais un diviseur de 24 qui ne soit pas un diviseur de 12, ni 24, lui-même.
- Vrai ou faux (justifié) : on peut trouver un multiple de 7 qui ne soit ni un multiple de 14, ni un multiple de 21, ni le nombre 7, lui-même.
- Vrai ou faux (justifié) : je connais un diviseur de 124 qui ne soit pas un diviseur de 248.

Reponse :

- Faux ! 21 est multiple de 3 et de 7, mais pas de $3 + 7 = 10$.
- Faux ! 7 et 3 sont des diviseurs de 21, mais pas $7 - 3 = 4$.
- Faux ! D'après la propriété de transitivité, comme 14 est multiple de 7, tout multiple de 14, l'est de 7.
- Vrai ! 8.
- Vrai ! Par exemple, 35, 49, . . .
- Faux ! D'après la propriété de transitivité, comme 124 est diviseur de 248, tout diviseur de 124, l'est de 248.

2. Division euclidienne

Définition :

a et b deux entiers naturels quelconque et b non nul, il existe un entier naturel q et un entier naturel r tels que :
$a = b \times q + r$, où $0 \leq r < b$.

Dans ce cas, on parle de division euclidienne de a (le dividende) par b (le diviseur) où q est un quotient et r un reste.

Théorème 3 :

Dans la division euclidienne de a par b, le quotient et le reste sont définis de façon unique.

Note : Le quotient provenant de la division euclidienne de a par b est souvent appelé quotient euclidien pour le distinguer du quotient $\frac{a}{b}$.

Exemple 7 :

Dans la division euclidienne de 356 par 15, le quotient est 23 et le reste est 11 ; cela s'écrit : $356 = 23 \times 15 + 11$.

Théorème 4 :

Soit a et a′ deux entiers naturels tels que $a' < a$ et b un entier naturel non nul.

Le nombre de multiples de b qui sont inférieurs ou égaux à a et non nuls est le quotient dans la division euclidienne de a par b.

Le nombre de multiples de b qui sont compris entre a′ (exclu) et a (inclus) et non nuls est le quotient dans la division euclidienne de a par b diminué du quotient dans la division euclidienne de a′ par b.

Exemple 8 :

- Les multiples de 6 inférieurs ou égaux à 30 et non nuls sont 6, 12, 18, 24 et 30. Ils sont au nombre de 5 et le quotient dans la division euclidienne de 30 par 6 est 5 (car $30 = 6 \times 5 + 0$).
- Les multiples de 10 inférieurs ou égaux à 34 et non nuls sont 10, 20 et 30. Ils sont au nombre de 3 et le quotient dans la division euclidienne de 34 par 10 est 3 (car $34 = 10 \times 3 + 4$).
- Les multiples de 9 compris entre 100 (exclu) et 120 (inclus) sont 108 et 117. Ils sont au nombre de 2

et le quotient dans la division euclidienne de 120 par 9 (qui est 13 car 120 = 9 × 13 + 3) diminué du quotient dans la division euclidienne de 100 par 9 (qui est 11 car 100 = 9 × 11 + 1) est 2 (car 2 = 13 − 11).

- Les multiples de 12 compris entre 70 (exclu) et 140 (inclus) sont 72, 84, 96, 108, 120 et 132. Ils sont au nombre de 6 et le quotient dans la division euclidienne de 140 par 12 (qui est 11 car 11 140 = 12 × 11 + 8) diminué du quotient dans la division euclidienne de 70 par 12 **(qui est 5 car 70 = 12 × 5 + 10) est 6 (car 6 = 11 − 5).**

L'algorithme d'Euclide pour la division euclidienne.

Le voici sur l'exemple de la division euclidienne de 3 562 par 23. Il permet d'obtenir le reste (20) et le quotient (154) de cette division euclidienne.

3 5 6 2	2 3
− 2 3	1 5 4
1 2 6	
− 1 1 5	
1 1 2	
− 9 2	
2	
0	

La technique opératoire dans la division euclidienne de a par b est la suivante :

1. On écrit au brouillon la table utile des multiples de b (1 × b, 2 × b, . . ., 9 × b).
2. On considère a_1 le plus petit nombre constitué des premiers chiffres de a tel que $a_1 \geq b$. On effectue la division euclidienne de a_1 par b dont le quotient est noté q_1 et dont le reste est noté r_1. q_1 est le premier chiffre du quotient (d'où l'utilité de l'écriture au brouillon de la table des multiples de b).
3. Tant qu'il existe encore des chiffres à considérer dans a, on effectue (la première fois, i vaut 2, puis il est incrémenté à chaque fois de 1) :
   (a) On considère ai le nombre formé des chiffres de r_{i-1} suivis du premier chiffre de a qui n'ait pas encore été considéré.
   (b) On effectue la division euclidienne de ai par b dont le quotient est noté q_i et dont le reste est noté r_i. qi est le $i^{ème}$ chiffre du quotient (d'où encore l'utilité de l'écriture au brouillon de la table des multiples de b).
4. Les restes $r_1, r_2, . . .$ sont appelés les restes partiels et les quotients $q_1, q_2, . . .$ sont appelés les quotients partiels (ce sont des chiffres). Le reste de la division euclidienne de a par b est le dernier reste partiel obtenu ; le quotient de cette division est le nombre formé des quotients partiels.

Exemple 9 :

Sachant que 36 202 744 = 9 658 × 3 748 + 4 560, donner le quotient de la division euclidienne de 36 202 744 par 3 748.

Réponse :

On peut écrire 36 202 744 = 3 748 × 9 658 + (3 748 + 812) = 3 748 × 9 659 + 812.
Le quotient de la division euclidienne de 36 202 744 par 3 748 vaut donc 9 659 et le reste 812 (on a bien 812 < 3 748).

Exemple 10 :

■ ■ 7 6	3 6
− 3 ■ ■	9 ■
■ ■ ■	
− ■ ■ ■	
2 ■	

Compléter les ■ par des chiffres en convenant qu'un chiffre situé en première position est non nul.
Indiquer toutes les manières possibles pour compléter ces ■.

Réponse :

La table des 36 est : 1 × 36 = 36 ; 2 × 36 = 72; 3 × 36 = 108; 4 × 36 = 144; 5 × 36 =180; 6 × 36 = 216 ; 7 × 36 = 252 ; 8 × 36 = 288 ; 9 × 36 = 324.

Comme le seul élément de la table de 36 dont le premier chiffre est un 3 est 324 = 9 × 36, le nombre en deuxième ligne à gauche de la potence est 324 et le premier chiffre du quotient est 9. On complète la potence :

■ ■ 7 6	3 6
− 3 ■ ■	9 ■
■ ■ ■	
− ■ ■ ■	
2 ■	

En troisième ligne à gauche de la potence, le 6 de la première ligne est abaissé et le chiffre des unités de ■■ 7 − 324 est 3. On complète la potence :

■ ■ 7 6	3 6
− 3 **2 4**	9 ■
■ **3 6**	
− ■ ■ ■	
2 ■	

Toujours en troisième ligne à gauche de la potence, le nombre ■3 (obtenu par ■■ 7 − 324) est un reste partiel et est donc compris entre 0 (inclus) et 36 (exclu). En tenant compte aussi du fait qu'"un chiffre situé en première position est non nul", en troisième ligne à gauche de la potence, le nombre ■3 (obtenu par ■■ 7 − 324) ne peut être que 13, 23 ou 33.

Premier cas : en troisième ligne à gauche de la potence,
le nombre ■3 (obtenu par ■■ 7 − 324) est 13. On complète alors d'abord la première ligne à gauche de la potence :
comme ■■ 7 − 324 = 13, ■■ 7 − 327.
Ensuite, comme 136 = 3 × 36 + 28 = 108 + 28, le nombre en quatrième ligne à gauche de la potence est 108, le nombre en cinquième ligne à gauche de la potence est 28 et le deuxième chiffre du quotient est 3.
Deuxième cas : en troisième ligne à gauche de la potence,
le nombre ■3 (obtenu par ■■ 7 − 324) est 23.
On complète alors d'abord la première ligne à gauche de la potence :
comme ■■ 7 − 324 = 23, ■ ■ 7 − 327. Ensuite, comme 236 = 6 × 36 + 28 = 216 + 20, le nombre en quatrième ligne à gauche de la potence est 216, le nombre en cinquième ligne à gauche de la potence est 20 et le deuxième chiffre du quotient est 6.
Troisième cas : en troisième ligne à gauche de la potence, le nombre ■3 (obtenu par ■ ■ 7 − 324) est 33. On complète alors d'abord la première ligne à gauche de la potence : comme ■ ■ 7 − 324 = 33, ■ ■ 7 = 357.

■■ 7 6	3 6
− 3 2 4	9 ■
■ 3 6	
− ■■■	
2 ■	

3 3 7 6	3 6
− 3 2 4	9 3
1 3 6	
− 1 0 8	
2 8	

3 4 7 6	3 6
− 3 2 4	9 6
2 3 6	
− 2 1 6	
2 0	

Ensuite, comme 336 = 9 × 36 + 12 = 324 + 12, le nombre en quatrième ligne à gauche de la potence est 324, le nombre en cinquième ligne à gauche de la potence est 12 et le deuxième chiffre du quotient est 9.
Cependant, le nombre en cinquième ligne à gauche de la potence a 2 comme premier chiffre et il est donc impossible que ce soit 12. Ce troisième cas ne fournit pas de solution.

3) Les nombres premiers

Définition :

On dit qu'un nombre entier naturel est premier s'il possède exactement deux diviseurs distincts.

Exemple 11 :

2, 3, 5, 7, 11, . . . sont des nombres premiers
Les nombres 0 et 1 ne sont pas premiers : 0 possède une infinité de diviseurs ; et 1 ne possède qu'un seul diviseur,

Le crible d'Eratosthène

Cette méthode permet de décrire tous les entiers premiers inférieurs (au sens large) à un nombre donné N .

- J'écris tous les entiers naturels de 1 à N .
- Je barre 1.
- "j'entoure le suivant et je barre ses multiples", jusqu'à avoir barré ou entouré tous les nombres écrits.

Exemple 12 : **N = 100**.

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

4) Les nombres premiers entre eux

Définition :

On dit que deux entiers naturels sont premiers entre eux s'ils n'ont que 1 comme diviseur commun.

Exemple 13 :

- 21 et 32 sont premiers entre eux car les diviseurs de 21 sont {1, 3, 7, 21} et les diviseurs de 32 sont {1, 2, 4, 8, 16, 32} et 1 est leur seul diviseur commun.
- 21 et 35 ne sont pas premiers entre eux car les diviseurs de 21 sont {1, 3, 7, 21} et les diviseurs de 35 sont {1, 5, 7, 35} et 1 et 7 sont leurs diviseurs communs.

Théorème 5 :

Si a et b sont premiers entre eux et si a est un diviseur du produit b × c, alors a est un diviseur de c.

Exemple 14 :

- comme vu précédemment, 21 et 32 sont premiers entre eux et 21 est un diviseur de 32 × 147 = 4 704 (en effet, 4 704 = 21 × 224), donc, d'après le théorème précédent, 21 est un diviseur de 147 (en effet, 147 = 21 × 7) ;
- Pour montrer l'importance de l'hypothèse "premiers entre eux" comme vu précédemment, 21 et 35 ne sont pas premiers entre eux et même si 21 est un diviseur de 35 ×3 = 105 (en effet, 105 = 21 ×5), ce n'est pas pour autant que 21 est un diviseur de 3.

Théorème 6 :

Si a et b sont premiers entre eux et si a et b sont deux diviseurs de c, alors a × b est un diviseur de c.

Exemple 15 :

- comme vu précédemment, 21 et 32 sont premiers entre eux et 21 est un diviseur de 4704 (en effet, 4 704 = 21 × 224) et 32 est un diviseur de 4704 (en effet, 4 704 = 32 × 147), donc, d'après le théorème précédent, 21 × 32 = 672 est un diviseur de 4704 (en effet, 4704 = 672 × 7) ;
- Pour montrer l'importance de l'hypothèse "premiers entre eux" comme vu précédemment, 21 et 35 ne sont pas premiers entre eux et même si 21 est un diviseur de 105 (en effet, 105 = 21 × 5) et si 35 est un diviseur de 105 (en effet, 105 = 35 × 3), ce n'est pas pour autant que 21 × 35 = 735 est un diviseur de 105.

5) Décomposition d'un entier naturel en produit de facteurs premiers

Théorème 7 :

Soit n un entier naturel. Alors, on peut écrire n = $p_1 \times p_2 \times ... \times p_k$ où les entiers naturels$p_1, p_2, ...$ et $p_k$sont premiers. De plus, cette écriture est unique si $p_1 \leq p_2 \leq ... \leq p_k$.

Exemple 16 : 24 = 2 × 2 × 2 × 3.

Recherche systématique de cette décomposition : soit n l'entier naturel à décomposer en produit de facteurs premiers ; je cherche le plus petit entier naturel premier p qui divise n ; j'écris alors n = p × m et je recommence en faisant jouer à m le rôle de n.

Exemple 17 :

120 = 2 × 60 = 2 × 2 × 30 = 2 × 2 × 2 × 15 = 2 × 2 × 2 × 3 × 5.

Remarque 2 :

Une écriture abrégée de cette décomposition eut été : 120 = 2^3 × 3 × 5. Ceci mène à une autre écriture du

Théorème 8 :

Soit n un entier naturel. Alors, on peut écrire n = $(p_1)^{\alpha_1} \times (p_2)^{\alpha_2} \times ... \times (p_k)^{\alpha_k}$; où les entiers naturels $p_1, p_2, ...$ et p_k sont premiers et distincts, et où $\alpha_1, \alpha_2, ...$ et α_k sont des entiers naturels. De plus, cette écriture est unique si $p_1 \leq p_2 \leq ... \leq p_k$.

Utilisation de cette écriture : pour dénombrer les diviseurs d'un entier naturel n donné.

Théorème 9 :

Soit n un entier naturel tel que n=$(p_1)^{\alpha_1} \times (p_2)^{\alpha_2} \times ... \times (p_k)^{\alpha_k}$; où les entiers naturels $p_1, p_2, ..., p_k$ sont premiers et distincts et où $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ sont des nombres naturels. Alors, le nombre de diviseurs de n est :
$(\alpha_1+1) \times (\alpha_2+1) \times ... \times (\alpha_k+1)$.

Exemple 18 :

120 = 23 × 3 × 5, donc le nombre de diviseurs de 120 est (3 + 1) × (1 + 1) × (1 + 1) = 16.
Ceci peut s'expliquer à l'aide d'un arbre !

6. Plus grand commun diviseur de deux entiers naturels

Définition :

On appelle plus grand commun diviseur des deux entiers naturels a et b le plus grand entier naturel qui soit diviseur à la fois de a et de b (comme son nom l'indique). On le note PGCD(a, b).

Remarque 3 :

On ne parle pas de PGCD(a, b), lorsque a et b sont conjointement nuls.

Exemple 19 :

Les diviseurs de 12 sont 1, 2, 3, 4, 6, 12 ; les diviseurs de 18 sont 1, 2, 3, 6, 9, 18 ; les diviseurs communs à 12 et à 18 sont 1, 2, 3, 6 ; le plus grand de ces diviseurs communs est donc 6 et par suite, PGCD(12, 18) = 6.

Exemple 20 :

Les diviseurs de 12 sont 1, 2, 3, 4, 6, 12 ; les diviseurs de 18 sont 1, 2, 3, 6, 9, 18 ; les diviseurs communs à 12 et à 18 sont 1, 2, 3, 6 ; le plus grand de ces diviseurs communs est donc 6 et par suite, PGCD(12, 18) = 6.

Théorème 10 :

Soit a un entier naturel tel que a=$(p_1)^{\alpha_1}\times(p_2)^{\alpha_2}\times\ldots\times(p_k)^{\alpha_k}$;où les entiers naturels $p_1, p_2, \ldots, p_k$ sont premiers et distincts et où $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ sont des nombres naturels.
Soit b un entier naturel tel que b =$(p_1)^{\beta_1}\times(p_2)^{\beta_2}\times\ldots\times(p_k)^{\beta_k}$; où les entiers naturels $p_1, p_2, \ldots, p_k$ sont premiers et distincts et où $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ sont des nombres naturels.
Alors, PGCD(a, b) = $(p_1)^{\min(\alpha_1,\beta_1)}\times(p_2)^{\min(\alpha_2,\beta_2)}\times\ldots\times(p_k)^{\min(\alpha_k,\beta_k)}$.

Exemple 21 :

12 =$2^2\times3^1$ et 18 = $2^1\times3^2$, puis PGCD(12, 18) = $2^{\min(2,1)}\times3^{\min(1,2)}$, et enfin, PGCD(12, 18) = $2^1\times3^1$ = 6.

Exemple 22 :

120 = $2^3\times3^1\times5^1$ et 108 = $2^2\times3^3\times5^0$, puis PGCD(120, 108) =$2^{\min(3,2)}\times3^{\min(1,3)}\times5^{\min(1,0)}$;
et enfin, PGCD(120, 108) = $2^2\times3^1\times5^0$ = 12.

Théorème 11 :

Soient a et b deux entiers naturels. Alors, les diviseurs communs à a et b sont les diviseurs du PGCD(a, b).
Algorithme d'Euclide pour la recherche du plus grand commun diviseur de deux nombres

Théorème 12 :

Soient a et b deux entiers naturels. Alors, PGCD(a, b) = PGCD(b, a).

Théorème 13 :

Pour tout entier naturel a non nul, PGCD(0, a) = a.

Théorème 14 :

On considère deux entiers naturels a et b tels que a ≥ b. Alors, PGCD(a, b) = PGCD(b, a − b).

Remarque 4 :

Soit d le plus grand diviseur commun de a et b. d divise alors aussi a − b, d est donc diviseur commun de b et de a − b, mais on ne sait pas encore s'il est le plus grand. On va alors raisonner par l'absurde et supposer qu'il existe d′ un diviseur commun de b et de a − b qui soit plus grand que d. Dans ce cas, d′ est diviseur aussi de a = b + (a − b), d est par conséquent diviseur de a et de b et est plus grand que d, ce qui est absurde car d est défini comme étant le plus grand diviseur commun de a et de b.
Les théorèmes 12, 13 et 14 permettent de donner le plus grand commun diviseur de deux entiers naturels.

Exemple 23 :

PGCD(120, 108) = PGCD(108, 12) = PGCD(96, 12) = PGCD(84, 12) = PGCD(72, 12) = PGCD(60, 12)
= PGCD(48, 12) =PGCD(36, 12) = PGCD(24, 12) = PGCD(12, 12) = PGCD(12, 0)= 12.

Exemple 24 : PGCD(154, 49) = PGCD(105, 49) = PGCD(56, 49) = PGCD(49, 7) = PGCD(42, 7) = PGCD(35, 7)
= PGCD(28, 7) = PGCD(21, 7) = PGCD(14, 7) = PGCD(7, 7) = PGCD(7, 0) = 7.

Théorème 15 :

On considère deux entiers naturels a et b tels que a ≥ b. Alors, PGCD(a, b)=PGCD(b, r) où r est le reste dans la division euclidienne de a par b.

Remarque 5 :

Soit d le plus grand diviseur commun de a et b. d divise alors aussi a − b × q = r, où q est le quotient dans la division euclidienne de a par b. d est donc diviseur commun de b et de r, mais on ne sait pas encore s'il est le plus grand. On va alors raisonner par l'absurde et supposer qu'il existe d′ un diviseur commun de b et de r qui soit plus grand que d. Dans ce cas, d′ est diviseur aussi de a = b × q + r, d′ est par conséquent diviseur de a et de b et est plus grand que d, ce qui est absurde car d est défini comme étant le plus grand diviseur commun de a et de b.

Exemple 25 :

PGCD(120, 108)= PGCD(108, 12)= PGCD(12, 0)= 12.

Exemple 26 :

PGCD(154, 49) =PGCD(49, 7) =PGCD(7, 0) =7.

Plus grand commun diviseur de plusieurs nombres

Soient a, b et c trois entiers naturels, le plus grand commun diviseur de a, b et c, noté PGCD(a, b, c) vérifie la propriété : PGCD(a, b, c) = PGCD(PGCD(a, b), c) = PGCD(PGCD(a, c), b) = PGCD(PGCD(b, c), a).

On peut étendre cette propriété au plus grand commun diviseur des n nombres entiers naturels $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

7) Plus petit commun multiple de deux entiers naturels

Définition :

On appelle plus petit commun multiple des deux entiers naturels a et b le plus petit entier naturel non nul qui soit multiple à la fois de a et de b (comme son nom l'indique). On le note PPCM (a, b).

Remarque 6:

On ne parle pas de PPCM(a,b) si l'un des deux parmi a et b est nul ; le PPCM (a, b) est un diviseur de a × b.

Exemple 27 :

Les multiples de 12 sont 0,12, 24, 36,48, 60,72, . . . ; les multiples de 18 sont 0, 18, 36, 54, 72, 90, 108, 126, . . . ; les multiples communs à 12 et à 18 sont 0, 36, 72, . . . ; le plus petit de ces multiples communs(qui soit non nul) est donc 36 et par suite, PPCM (12, 18) = 36.

Théorème 16 :

Soit a un entier naturel tel que a=$(p_1)^{\alpha_1}\times(p_2)^{\alpha_2}\times\ldots\times(p_k)^{\alpha_k}$; où les entiers naturels $p_1, p_2, \ldots, p_k$ sont premiers et distincts et où $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ sont des nombres naturels. Soit b un entier naturel tel que :

b =$(p_1)^{\beta_1}\times(p_2)^{\beta_2}\times\ldots\times(p_k)^{\beta_k}$; où les entiers naturels $p_1, p_2, \ldots, p_k$ sont premiers et distincts et où $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ sont des nombres naturels. Alors, PPCM(a, b) = $(p_1)^{\max(\alpha_1,\beta_1)}\times(p_2)^{\max(\alpha_2,\beta_2)}\times\ldots\times(p_k)^{\max(\alpha_k,\beta_k)}$.

Exemple 28 :

12 =$2^2\times3^1$ et 18 = $2^1\times3^2$, puis PPCM(12, 18) = $2^{\max(2,1)}\times3^{\max(1,2)}$, et enfin, PPCM(12, 18) = $2^2\times3^2$ =36.

Exemple 29 :

120 = $2^3\times3^1\times5^1$ et 108 = $2^2\times3^3\times5^0$, puis PPCM(120, 108) =$2^{\max(3,2)}\times3^{\max(1,3)}\times5^{\max(1,0)}$.

Et enfin, PPCM(120, 108) = $2^3\times3^3\times5^1$= 1080.

Théorème 17 :

Soient a et b deux entiers naturels. Alors, les multiples communs à a et à b sont les multiples du PPCM (a, b).

Théorème 18 :

Soient a et b deux entiers naturels. Alors, 5 a × b = PGCD(a, b) × PPCM (a, b).

Remarque 7 :

Cette propriété découle directement des théorèmes 10 et 16.

Exercices Généraux

1. Soit n un entier naturel. Démontrer que 6n+9 est multiple de 3; que $(n+2)^2-n^2$ est multiple de 4 et que $(n+2)^2-(n-2)^2$ est multiple de 8.

2. Un groupe de majorettes étudie une disposition pour défiler. Elles décident de se placer en rangées pour former un rectangle. Elles remarquent que :
Quand elles se placent par rangées de six, il en reste trois non placées, quand elles se placent par rangées de cinq , elles sont toutes placées.
Si elles se placent par rangées de trois, en reste-t-il ? Justifier.
Si elles se placent par rangées de deux, en reste-t-il ? Justifier.
Dans cette question uniquement, on fait l'hypothèse qu'il y a en tout moins de cinquante majorettes.
Quel peut être le nombre de majorettes ? Donner toutes les solutions.

3. Quels sont les entiers naturels a et b tels que $a^2-b^2=225$?

4. Les lettres a et a′ désignent des entiers naturels. Dans la division euclidienne de a par 11, le reste est r. Dans la division euclidienne de a′ par 11, le reste est r′.
Déterminer le reste dans la division euclidienne de $a+a'$ par 11.
Déterminer le reste dans la division euclidienne de $3\times a$ par 11.

5. Dans la division euclidienne de a par b, le quotient est q et le reste est r. On donne a≤3000, q=60, r=47. Trouver toutes les valeurs possibles pour a et b.

6. Dans la division euclidienne de a par b, le quotient est q et le reste est r. On donne q=r=37. Trouver la plus petite valeur possible que peut prendre a.

7. Dans la division euclidienne de a par b, le quotient est q et le reste est r. On donne a = α^2 où α est entier naturel, b = 8. Donner r pour α = 1. Donner r pour α = 3. Donner r pour α =5. Montrer que si α est impair, alors r=1.

8. On cherche un nombre naturel de trois chiffres, multiple de 9 et dont le quotient dans la division euclidienne par 21 est 33.
Déterminer le(ou les)nombre (ou nombres) solution (ou solutions).

9. Les multiples de 21 dont l'écriture décimale nécessite deux chiffres exactement, sont : 21, 42, 63, 84. Pour écrire cette liste, il faut 8 caractères d'imprimerie. Combien en faut-il pour écrire la liste des multiples de 21 dont l'écriture décimale nécessite trois chiffres exactement ? Même question avec cinq chiffres.

10. On considère la suite croissante de tous les naturels non multiples de 7(1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 15, 16,...).1 est de rang 1, 2 est de rang 2, 3 est de rang 3, 4 est de rang 4, 5 est de rang 5, 6 est de rang 6, 8 est de rang 7, 9 est de rang 8, 10 est de rang 9, 11 est de rang 10,12 est de rang 11,...
Quel est le rang de 47 ? Quel est le rang de 741 ?
Quel est le terme de rang 26 ? Quel est le terme de rang 52 ? Quel est le terme de rang 136 ?

11. Vous comptez de 7 en 7, à partir de 38, jusqu'au plus grand nombre inférieur ou égal à 365.
Quel est le dernier nombre atteint ?
Combien y a-t-il de nombres atteints (38 y compris)?
Par quels nombres puis-je remplacer 365 sans modifier les deux réponses précédentes?

12. Soit a un entier naturel. Dans la division euclidienne de a par 7, on obtient un quotient double du reste. Quelles sont les valeurs de a possibles?

13. Quel est le plus petit entier naturel qui possède exactement 15 diviseurs?

14. Je suis un nombre à trois chiffres qui possède exactement trois diviseurs. La somme de mes chiffres est de treize. Qui suis-je?

15. Histoire de boîtes...
L'histoire se limite aux boîtes parallélépipédiques dont les dimensions sont des nombres entiers de centimètres. L'histoire dit qu'une boîte Q pave une boîte P si la boîte P est exactement et parfaitement remplie avec un nombre entier (strictement supérieur à un) d'exemplaires de la boîte Q (après remplissage, il n'y a pas de trou et rien ne dépasse). Deux boîtes B_1 et B_2 ont les dimensions suivantes:

Boîtes	Dimensions en centimètres		
B_1	72	36	48
B_2	40	80	60

a. Est-il possible de placer une de ces boîtes entièrement dans l'autre?
b. Est-ce qu'une des boîtes pave l'autre ? Si oui, avec combien d'exemplaires?
c. Est-ce qu'une des boîtes est un agrandissement de l'autre ? Si oui, à quelle échelle ? Vous justifierez vos réponses.
Trouvez toutes les boîtes cubiques qui pavent B_1. Combien en faut-il à chaque fois pour paver B_1 ? Quelle est celle de plus grand volume ? Vous justifierez vos réponses.
Trouvez toutes les boîtes cubiques qui pavent à la fois B_1 et B_2. Combien en faut-il à chaque fois pour paver B2 ? Vous justifiez vos réponses.
Quelle est la notion mathématique sous-jacente aux questions 2 et 3 ?

16. Le service des espaces verts veut border un espace rectangulaire de 924m de long sur 728m de large, à l'aide d'arbustes régulièrement espacés. Un arbuste est replanté à chaque angle du terrain.
La distance entre deux arbustes doit être un nombre entier de mètres.
Déterminer toutes les valeurs possibles de la distance entre deux arbustes.
Déterminer, dans chaque cas, le nombre d'arbustes nécessaires à la plantation.

17. Pour son anniversaire, Charlie a reçu des timbres.
Il y en avait moins de 200.
Si on les répartit en tas de 2,il n'en reste pas.
Si on les répartit en tas de 8, il n'en reste toujours pas.
Si on les répartit en tas de 14, il n'en reste pas, non plus.
Mais si on les répartit en tas de 5, il en reste 3.
Combien de timbres Charlie a-t-il reçus pour son anniversaire ?

Chapitre 12 : GEOMETRIE DANS L'ESPACE

1) Détermination d'une droite dans l'espace

Une droite dans l'espace est déterminée par ;

A-Un vecteur directeur et un point :$(\boldsymbol{d})$: $\left(A(2,0,-9);\ \vec{u}\begin{pmatrix}5\\-4\\3\end{pmatrix}\right)$

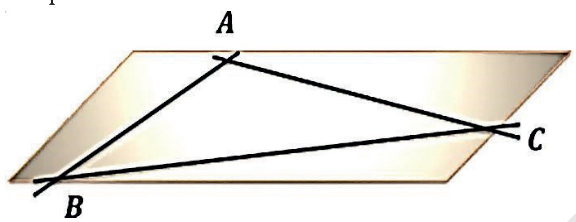
B-Deux points :$(\boldsymbol{d})$: $\big(A(0,10,-3);\ B(1,-4,11)\big)$

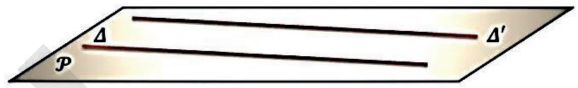
C-Un système d'équations de plans.$(\boldsymbol{d})$: $\begin{cases}2x+3y-5z-7=0\\ x-4y+6z+1=0\end{cases}$

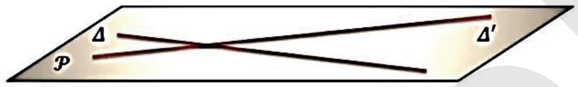
2) Détermination d'un plan dans l'espace

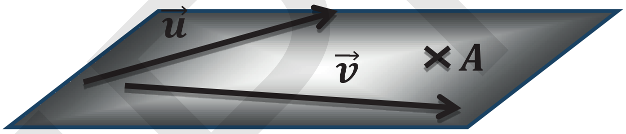
Un plan dans l'espace est déterminé par ;

- Trois points non alignés
- Deux droites parallèles
- Deux droites sécantes
- Une droite et un point non situé sur la droite
- Un point et deux vecteurs directeurs non colinéaires.





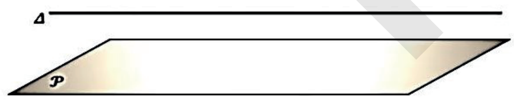




3) Positions relatives de droites et de plans

A-Plans et droites :

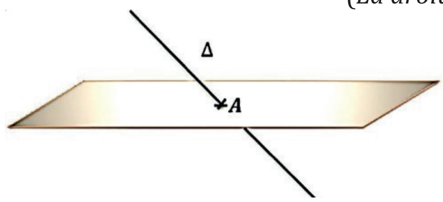
Une droite et un plan sont sécants, ou parallèles.



$(\Delta)\cap\mathcal{P}=\emptyset \Longrightarrow (\Delta)//\mathcal{P}$

$(\Delta)\in\mathcal{P}\Longrightarrow(\Delta)//\mathcal{P}$

(*La droite est contenue dans le plan*)

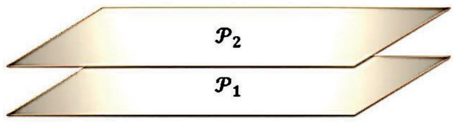


Δ coupe$\mathcal{P}$ **:** $(\Delta)\cap\mathcal{P}=\{\boldsymbol{A}\}$ **;** on dit que (Δ) perce le plan

4) Plans et plans

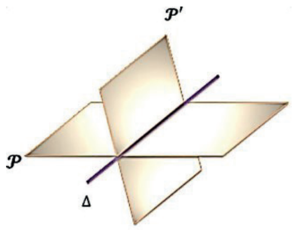
Deux plans sont sécants ou parallèles.

L'intersection de deux plans est une droite ;



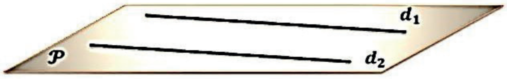
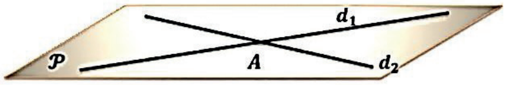
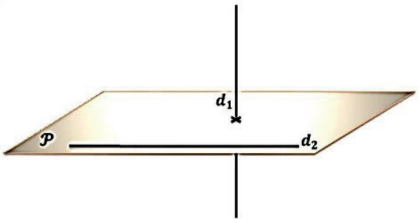
$\mathcal{P}_1 // \mathcal{P}_2$

$\mathcal{P}_1\cap\mathcal{P}_2=\Delta$



5) Droites et droites

Deux droites dans l'espace sont coplanaires ou non coplanaires.

<table>
<tr><td>
a- $(d_1)\,//\,(d_2)$</td><td>
b- $(d_1) \cap (d_2) = \{A\}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Dans les deux figures ci-dessus, les droites (d_1) et (d_2) sont dites coplanaires</td></tr>
<tr><td colspan="2">
c- $\begin{cases}(d_1) \cap (d_2) = \emptyset \\ (d_1) \nparallel (d_2)\end{cases}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Dans la figure ci-dessus les droites (d_1) et (d_2) sont dites non coplanaires</td></tr>
</table>

Remarque 1 :

Si deux points distincts d'une droite (d)sont contenus dans un plan $\mathcal{P}$, alors tous les points de la droite sont contenus dans ce plan (*la droite est incluse dans le plan*)

6. Le parallélisme dans l'espace

A) Droite et plan :

Une droite (d)est parallèle à un plan $\mathcal{P}$ si elle est parallèle à une droite de ce plan.

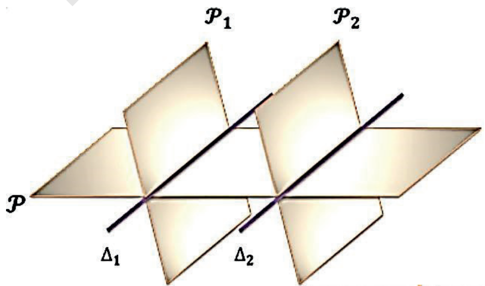
a. Conséquences :

- Il existe une infinitude de droites passant par un point donné et parallèles à un plan donné.
- Il existe une droite et une seule passant par deux points donnés et parallèle à un plan donné.

b. Propriétés :

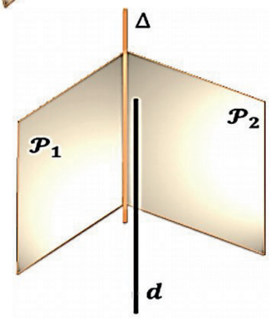
1°) Un plan coupe deux plans parallèles suivant deux droites parallèles.

$$\begin{rcases}\begin{cases}\mathcal{P}_1//\mathcal{P}_2 \\ \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P} = (\Delta_1) \\ \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P} = (\Delta_2)\end{cases}\end{rcases} \Rightarrow (\Delta_1)//(\Delta_2)$$



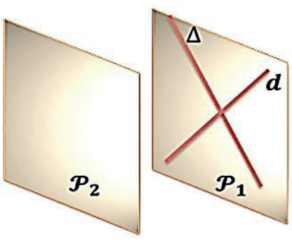
2°) Si une droite (d) est parallèle à deux plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sécants suivant une droite (Δ), alors (d) est parallèle à $(\Delta)\ = \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$.

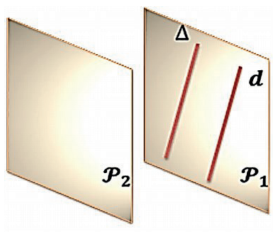
$$\begin{rcases}\begin{cases}\mathcal{P}_1//(d) \\ \mathcal{P}_2//(d) \\ \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 = (\Delta)\end{cases}\end{rcases} \Rightarrow (d)//(\Delta).$$



B) Plans

Deux plans sont parallèles si l'un d'eux est parallèle à deux droites sécantes ou deux droites parallèles appartenant à l'autre.



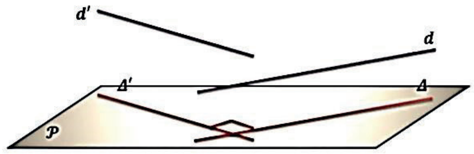


C. Théorème du toit :
Si deux plans sécants contiennent deux droites parallèles, alors leur droite d'intersection est parallèle à ces deux droites.

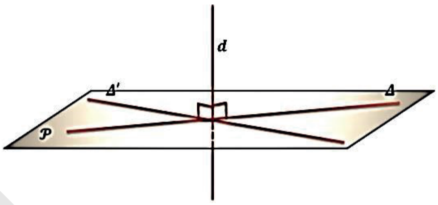
Conséquences :

- Il existe un plan et un seul passant par un point donné et parallèle à un plan donné.
- Il existe un plan et un seul parallèle à un plan donné et contenant une droite parallèle à ce plan donné.
- Un plan coupe deux plans sécants suivant deux droites parallèles à la droite d'intersection des deux plans.
- Si une droite est parallèle à une droite d'un plan, alors elle est parallèle à ce plan.
- Si une droite est parallèle à deux plans sécants, alors elle est parallèle à leur droite d'intersection.
- Un plan parallèle à deux droites sécantes est parallèle au plan de ces deux droites.

7) Orthogonalité dans l'espace



a. Deux droites sont orthogonales dans l'espace si leurs parallèles coplanaires (*qui passent par le même point*) sont perpendiculaires



b. Une droite est perpendiculaire à un plan si elle est perpendiculaire à deux droites sécantes de ce plan.

c. Si une droite est orthogonale à un plan alors elle est orthogonale à toute droite de ce plan.

8. Orthogonalité et parallélisme dans l'espace :

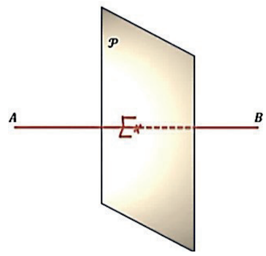
a) Si (Δ) est parallèle à(Δ') et (d) est perpendiculaire à (Δ), alors (d) est aussi perpendiculaire à (Δ'), et tout plan perpendiculaire à (Δ) est perpendiculaire à (Δ').

b) Si deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont parallèles toute droite (d) perpendiculaire à l'un est perpendiculaire à l'autre, et tout plan parallèle à l'un est parallèle à l'autre.

c) Si deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$sont perpendiculaires à la même droite d ou au même plan Q, alors ils sont parallèles.

9. Plan médiateur :

$\mathcal{P}$ est le plan médiateur du segment $[AB]$, s'il passe par le milieu de $[AB]$, et est perpendiculaire à son support (AB).

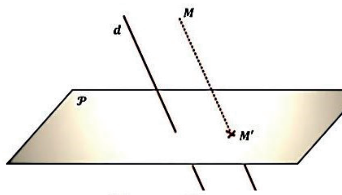


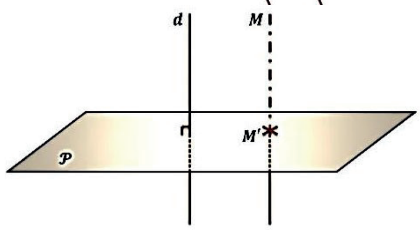
Propriété :
Le plan médiateur d'un segment est l'ensemble des points de l'espace équidistants des deux extrémités de ce segment.

10. Projection :

Définition :
Soit un plan $\mathcal{P}$et une droite (d)sécants en un point A. Pour tout point M de l'espace $\mathcal{E}$ la parallèle à (d) passant par M coupe $\mathcal{P}$ en M'.
Le point M' est appelé projeté de M sur $\mathcal{P}$ selon (d)ou parallèlement à (d).
L'application $\wp$ qui à tout point $M \in \mathcal{E}$ associe le point $M' \in \mathcal{P}$ est appelée projection de $\mathcal{E}$ sur (*ou dans*) $\mathcal{P}$selon(d), et on note ;

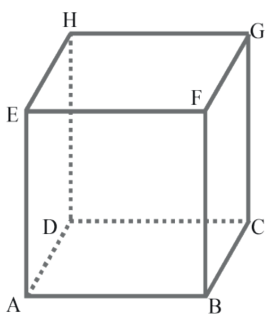
$$\wp : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{P}$$
$$M \longmapsto M'$$





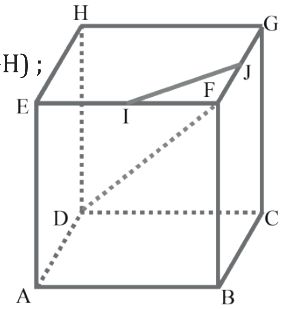
Cas particulier :
Si $d \perp \mathcal{P}$ alors $\wp$ est la projection orthogonale sur $\mathcal{P}$ et M' est le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{P}$.

Exemple 2 :
On considère un cube ABCDEFGH (voir figure).

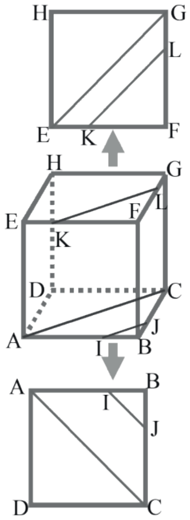


1°) Citer toutes les arêtes du cube qui :
  a) sont parallèles à (AB).
  b) coupent (AB)
  c) ne sont pas coplanaires avec (AB).
2°) Citer toutes les faces du cube qui :
  a) sont parallèles à (AB) ;
  b) coupent (AB) ;
3°) Citer toutes les faces du cube qui
  a) sont parallèles à (ABCD)
  b) coupent (ABCD).
4°) Soit I le milieu de [EF], J celui de [FG] ; les droites (DF) et (IJ) sont-elles coplanaires ?

Réponse :



1°) a) Un cube à 12 arêtes dont 4 arêtes sont parallèles à (AB) : (AB) ; (CD) ;(EF) et (GH) ;
   b) 4 arêtes coupent (AB) : (BC) ; (BF) ; (AD) et (AE).
   c) les 4 arêtes restantes ne sont pas parallèles à (AB) et ne coupent pas (AB),
      donc elles ne sont pas coplanaires avec (AB) : (CG) ; (DH) ; (FG) et (EH).
2°) Un cube à six faces
   a) quatre sont parallèles à (AB) : (ABCD) ; (ABEF) ; (CDHG) et (EFGH).
   b) les deux autres coupent (AB) ; ce sont (BCGF) et (ADHE).
3°) a) Deux faces sont parallèles à (ABCD) : (ABCD) et (EFGH).
   b) les quatre autres coupent (ABCD) : (BCFG) ; (ADHE) ; (CDHG) et (ABFE).
4°) Si un plan contient les droites (IJ) et (DF) ; alors il contient en particulier les trois points I ; J et F ; ce plan est alors le plan (EFGH).
   Mais D n'appartient pas à (EFGH) donc (IJ) et (DF) ne sont pas coplanaires.



<u>Exemple 3 :</u>

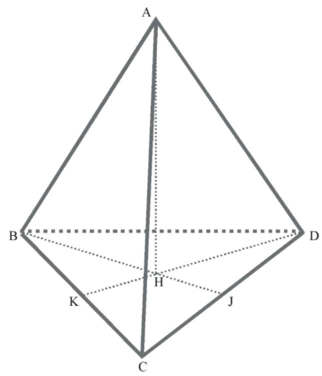
La figure est celle de l'application 1.
Le côté du cube mesurant 4 cm.
On considère les points I de [AB], et J de [BC] tel que :BI = BJ = 1 cm, ainsi que les points K de [EF] et L de [FG] tel que : EK = LG = 1 cm.
1°) Montrer que les droites (IJ) et (AC) sont parallèles.
2°) Montrer que les droites (KL) et (EG) sont parallèles ;
3°) Déduire des questions précédentes que les droites (IJ) et (KL) sont parallèles.

Réponse :

1°) I ∊ (AB) ; J ∊ (BC), donc les cinq points A ; B ; C ; I et J sont coplanaires.
   Dans le triangle ABC on a : $\frac{BI}{BA}=\frac{BJ}{BC}=\frac{1}{4}$; de plus I et J appartiennent aux segments [BA] et [BC]. Donc, d'après la réciproque de Thalès, (IJ) et (AC) sont parallèles.
2°) Comme dans la question 1), mais dans le triangle EFG on a :
$\frac{FK}{FE}=\frac{FL}{FG}=\frac{3}{4}$; K ∊ [EF] ; L∊ [FG] ; il en résulte que (KL) et (EG) sont parallèles.
3°) On sait que ACGE est un parallélogramme (propriété du cube) ; donc (EG) et (AC) sont parallèles ; et on a : (KL)∕∕(EG) ; (EG)∕∕(AC) et (AC)∕∕(IJ). Il en résulte que (KL) et (IJ) sont parallèles.

<u>Exemple 4 :</u>

Soit ABCD un tétraèdre régulier (toutes les arêtes sont de même longueur) ;
Soient J et K les milieux respectifs de [CD] et [BC] et H le projeté orthogonal de A sur le plan (BCD).
1°) Montrer que le plan médiateur de [CD] est le plan (ABJ).
2°) Montrer que (AH) est orthogonale à (CD)
   (En déduire que H appartient au plan (ABJ) puis que H appartient à al droite (BJ).
3°) Montrer que H appartient à (DK).
4°) Que représente H pour le triangle (BCD) ?
5°) Calculer en fonction de l'arête a du tétraèdre les distances BH et AH.



Réponse :

1°) BC = BD ; AC = AD ; JC = JD, donc le plan médiateur de [CD] est le plan (ABJ).
2°) (AH) est orthogonale au plan (BCD) ; donc (AH) est orthogonale à (CD), donc H appartient à l'unique plan qui passe par A et est orthogonal à (CD) ; c'est-à-dire plan médiateur de [CD] qui est (ABJ).
On vient de voir que H appartient au plan (ABJ), or H appartient par définition au plan (BCD), donc H appartient à la droite d'intersection des plans (ABJ) et (BCD) qui est (BJ).
3°) KB = KC ; AB = AC ; DB = DC, donc le plan médiateur de[BC] c'est le plan ADK; (AH) est orthogonal à (BCD) donc à (BC) ; H appartient donc à l'unique plan qui passé par A et est orthogonal à (BC) c'est-à-dire (ADK). H appartient à la fois à (ADK) et à (BCD), donc H appartient à leur droite d'intersection qui est (DK).
4°) Les médianes (BJ) et (DK) du triangle (BCD) se coupent en H ; H est donc, le centre de gravité de ce triangle.
5°) BCD est équilatéral de côté a ; sa hauteur BJ vaut donc $\frac{\sqrt{3}}{2}$; H est le centre de gravité de BCD.
   Donc, BH =$\frac{2}{3}$ BJ ; d'où BH $=\frac{2}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{a\sqrt{3}}{3}$. (AH) est orthogonale au plan (BCD), donc en particulier à (BH).
   Dans le triangle ABH rectangle en H, on a : $AH^2 = AB^2 - BH^2 = a^2-\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2=a^2-\frac{a^2}{3}=\frac{2}{3}a^2$.
Donc, $AH=\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{a\sqrt{6}}{3}$; BH$=\frac{a\sqrt{3}}{3}$; $AH=\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Exercices Généraux

1. Dans l'espace $\mathcal{E}$ muni d'un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, on a la droite Δ passant par le point $A(6,-5,2)$, et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\8\\-1\end{pmatrix}$. Donner une représentation paramétrique de la droite Δ.

2. Dans l'espace $\mathcal{E}$ muni d'un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, soit (D) une droite dont une représentation paramétrique est ;

$(D): \begin{cases} x = 1 + 2\beta \\ y = -3\beta \\ z = 1 \end{cases}$ .Donner une équation cartésienne de cette droite.

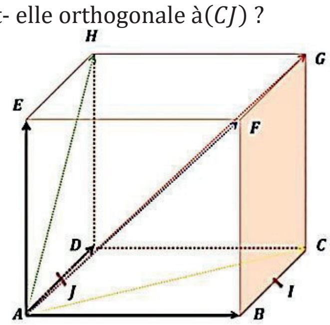
3. Dans l'espace $\mathcal{E}$ muni d'un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, soit (D) la droite d'équation cartésienne ; $3x - 2y - 1 = 0$. Déterminer une équation cartésienne de la droite (Δ) passant par $A(2,0,-3)$ et orthogonale à (D).

4. Dans un repère $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ de l'espace, on donne les points $A(3,-5,2)$, $B(4,1,7)$, donner l'équation cartésienne du plan médiateur $\mathcal{P}$ du segment $[AB]$.

5. Dans l'espace $\mathcal{E}$ muni d'un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}, \vec{k})$,
soit (D) une droite dont une représentation paramétrique est ;

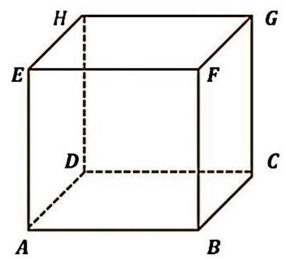
$(D): \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -3 + t \\ z = 2 + 5t \end{cases}$, Et (Δ) une droite dont l'équation cartésienne est ; $(\Delta): 2y + z - 5 = 0$.
Déterminer les coordonnées de leur point d'intersection H.

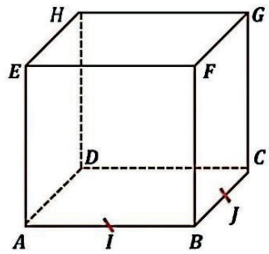
6. $ABCDEFGH$ est un cube d'arête 1.
On suppose que l'espace est muni du repère orthonormé $(A;\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.
1°) Déterminer les coordonnées des vecteurs ; $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AG}, \overrightarrow{AH}$ dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$, puis en déduire les coordonnées de A, B, C, D, E, F, G et H dans le repère
$(A;\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.
2°)Donner une équation des droites (BG)et (DH).
3°)Soit les points ; I le milieu de $[BC]$ et J le milieu de $[AD]$. (DI)est- elle orthogonale à(CJ) ?



7. $ABCD$ désignant un tétraèdre, soit I le milieu de$[BC]$. Déterminer la droite d'intersection des plans (ABD) et (AIJ) lorsque :
1°)est le point du segment (CD) tel que $CJ = \frac{1}{4}CD$;
2°)est le milieu de $[CD]$.

8. Soit le cube $ABCDEFGH$ ci-dessous et I le milieu de $[EF]$. Déterminer successivement :
1°) L'intersection des plans $(ABEF)$ et $(BCGF)$;
2°) L'intersection des droites (AI) et (BF) ;
3°) L'intersection de la droite (AI) et du plan $(BCGF)$.

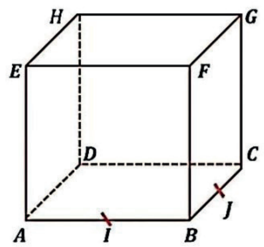




9. $ABCDEFGH$ est un cube, I et J sont les milieux respectifs de $[AB]$et $[BC]$.
Prouver que les droites (IJ) et (EG) sont parallèles.

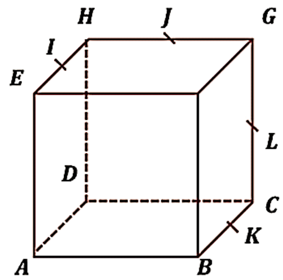
10. Dans le cube $ABCDEFGH$, prouver que les plans (ACH) et (EBG) sont parallèle.

11. Dans le cube $ABCDEFGH$ précédent, prouver que la droite (AC) est parallèle au plan (EFG).



12. L'aire latérale d'une sphère est 16 m^2
1°) Quel est son rayon ?
On donnera la valeur exacte du rayon, puis une valeur approchée à 1cm près.
2°) Quel est son volume ? On donnera la valeur exacte, puis une
valeur approchée à 1cm près.

13. $ABCDEFGH$ est un cube, I est le milieu de $[EH]$, J celui de $[GH]$, K celui $[BC]$ et L celui $[CG]$.
1°) Les droites (IJ) et (BG) sont-elles sécantes ?
2°) Les droites (IJ) et (KL) sont-elles sécantes ?*



14. On considère un tétraèdre $ABCD$, et on désigne par E un point situé à l'intérieur du triangle BCD. Montrer que la droite (BD) et le plan (ACE) sont sécants et préciser leur point d'intersection.

15. Dans un tétraèdre $ABCD$, on désigne par I et J les milieux respectifs de $[AC]$ et $[AD]$.
1°) Montrer que la droite (IJ) est parallèle au plan (BCD).
2°) On désigne par K un point du segment $[AB]$ autre que son milieu. Les droites (KI) et (BC) se coupent en E, les droites (KJ) et (BD) en F. Montrer que les droites (EF) et (IJ) sont parallèles.

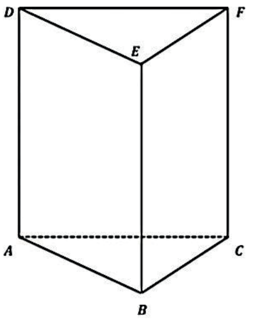
16. $ABCDEFGH$ est un cube.
Dessiner la droite d'intersection des plans (ACH)et (EDF).

17. Soit un tétraèdre $ABCD$, I le milieu de $[AB]$ et J celui de (CD).
1°) Soit K le point de $[AC]$ défini par $CK = \frac{1}{4}CA$.
Dessiner les droites d'intersection du plan (IJK) successivement avec chacun des plans (ABC), (ACD), (BCD) et (ABD).
2°) Refaire la figure en supposant cette fois que K est le milieu de $[AC]$.

18. Soit un cube $ABCDEFGH$ et I le milieu de $[GH]$. Construire le point P d'intersection de la droite (AI) et du plan $(BCGF)$ de deux façons différentes :
1°) En utilisant le plan (ABI) ;
2°) En utilisant le plan (AIJ), où J est le milieu $[CD]$.

19. Soit un tétraèdre $ABCD$, I le milieu de $[AD]$ et G le centre de gravité de ABC. En utilisant le plan (AGI), déterminer l'intersection de la droite (IG) et du plan (BCD).

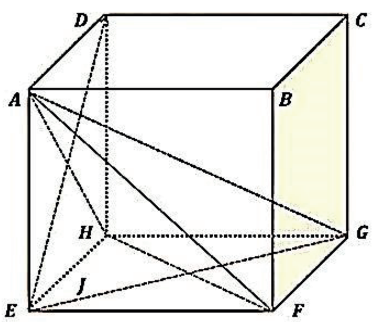
20. Soit un prisme $ABCDEF$ (voir la figure ci-dessous). Déterminer l'intersection du plan $(ACFD)$ et de la parallèle à (BF) passant le milieu Ide $[AB]$.



21. $ABCDEFGH$ est un cube. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?
1°) Les droites (AF) et (BG) sont parallèles.
2°) Les droites (AF) et (BG) sont sécantes.
3°) La droite (AF) et le plan (DCG) sont parallèles.
4°) Les droites (AF) et (CH) sont sécantes.
5°) Les droites (BG) et (AH) sont parallèles.
6°) L'angles $\widehat{AFC}$mesure $\frac{\pi}{2}$ rad.

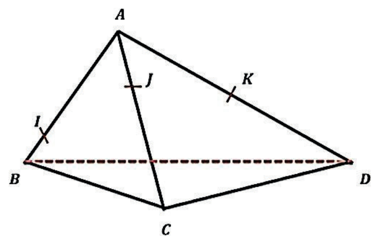
22. Dans un tétraèdre $ABCD$, on désigne par I, J, K, L, M et N les milieux respectifs des arêtes $[AB], [BC], [CD], [DA], [AC]$ et $[BD]$.
1°) Montrer que $IJKL$ est un parallélogramme.
2°) Montrer de même que $LMJN$ est un parallélogramme.
3°) Déduire des questions précédentes que les trois droites (IK), (JL) et (MN) sont concourantes.

23. On considère le cube $ABCDEFGH$ ci-dessous.
L'exercice consiste à reconnaître la nature des triangles cités dans la première colonne du tableau suivant. Pour chaque triangle, on propose 3 réponses. Pour chacune d'elles, l'élève doit indiquer si elle est vraie ou fausse en cochant la case correspondante. On justifiera les réponses.



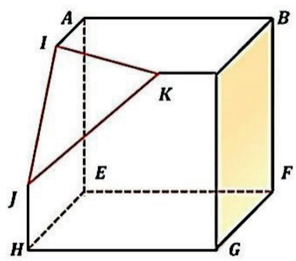
AEG	*Triangle isocèle*	□*Faux* □*Vrai*
	Triangle rectangle	□*Faux* □*Vrai*
	Triangle équilatéral	□*Faux* □*Vrai*
	Triangle isocèle	□*Faux* □*Vrai*
AHF	*Triangle rectangle*	□*Faux* □*Vrai*
	Triangle équilatéral	□*Faux* □*Vrai*
AFG	*Triangle isocèle*	□*Faux* □*Vrai*
	Triangle rectangle	□*Faux* □*Vrai*
	Triangle équilatéral	□*Faux* □*Vrai*

24. On considère le tétraèdre $ABCD$ et les points I, J et K situés respectivement sur les arêtes $[AB]$, $[AC]$ et $[AD]$ comme indiqué sur le dessin ci-dessous.
1°) Dessiner l'intersection M de la droite (IJ) avec le plan (BCD).
2°) Dessiner l'intersection N de la droite (JK) avec le plan (BCD) et en déduire l'intersection des plans (IJK)et (BCD).



25. On considère le tétraèdre $ABCD$, E un point du segment $[CD]$ et le point I du plan (ABE) comme sur la figure ci-après.
1°) Déterminer l'intersection de la droite (AI) avec le plan (BCD).
2°) Déterminer l'intersection des plans (ADI)et (BCD), puis des plans (ADI) et (ABC).
3°) Déduire de ce qui précède l'intersection de la droite (DI) avec le plan (ABC).

26. Soit le cube $ABCDEFGH$ dont on a coupé le coin contenant le point D, suivant la coupe triangulaire (IJK) comme l'indique la figure donnée ci-après.

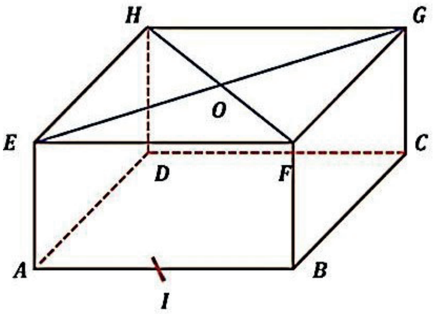


1°) Les arêtes du cube ont pour longueur $6cm$, de plus $AI = 2cm$, $CK = 1cm$ et $HJ = 2cm$.
Quel est le volume du cube tronqué ?
2°) Déterminer l'intersection du cube tronqué avec le plan passant par le point C et parallèle au plan (IJK).
3°) Déterminer l'intersection du cube tronqué avec le plan passant par A et parallèle au plan (IJK).

27. On considère le parallélépipède rectangle (ou pavé droit) $ABCDEFGH$ tel que :
$AB = 8$; $BC = 4$; $AE = 4$
Le point Iest le milieu du segment $[AB]$ et le point O est le centre du rectangle $EFGH$. *(voir figure ci-après.)*
1°) Quelle est la nature du quadrilatère $HGBA$?
Les diagonales de ce quadrilatère se coupent en K, déterminer la mesure de l'angle $\widehat{AKB}$?
(on en donnera la valeur approchée au degré près par défaut.)
2°) Calculer les longueurs OA, OC, AC. En déduire la nature du triangle AOC et déterminer la mesure

approchée au dixième de degré près par défaut de chacun de ces angles.

3°) Montrer de l'angle $\widehat{DIC}$ est droit. En déduire que le triangle HIC est rectangle.



28. On considère un tétraèdre $ABCD$ régulier, *(c-à-d dont toutes les arêtes ont la même longueur)*.
On appelle I, J et K les milieux respectifs des côtés $[BC]$, $[AB]$ et $[AD]$. Le point G est le centre de gravité du triangle ABC.

1°) a) Montrer que la droite (AB) est orthogonale *(ou perpendiculaire)* au plan (DCJ). Que peut-on en déduire pour les droite (AB) et (DC) ?

b) Montrer que la droite (DG) est orthogonale au plan (ABC).

c) Montrer que la droite (IK) est orthogonale aux droites (BC)et (AD).

2°) On pose a la longueur de chaque arête du tétraèdre, calculer les longueurs CG et DG en fonction de a.

3°) Calculer le volume du tétraèdre en fonction de a.
Quelle valeur doit-on donner au nombre réel a pour que le volume soit égal à $\frac{9\sqrt{2}}{4}$?

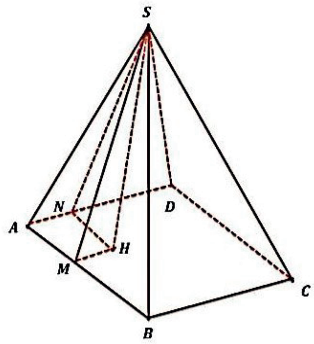
29. La pyramide $SABCD$ de sommet S a une base horizontale carrée $ABCD$ de côté 7. On appelle H la projection orthogonale de S sur le plan $ABCD$, M et N sont les projections orthogonales respectives du point H sur les côtés $[AB]$ et $[AD]$.
On donne les longueurs $HM = 3$, $HN = 2$ et $SH = 8$, *(la figure ci-dessous.)*

1°) Calculer les longueurs SA, SB, SC et SD.

2°) Calculer la base puis le volume de cette pyramide.

3°) Soit E un point du segment $[AN]$, différent de A et de N tel que $AE = x$.
Dans le plan $ABCD$, on appelle O le point d'intersection des droites (AB) et (EH) et celui des droites (BC) et (EH).
En utilisant une configuration de Thalès, calculer les longueurs OA et BF en fonction de x. En déduire l'aire du trapèze $EABF$.

4°) Déduire des résultats de la question précédente, la valeur de x pour laquelle le plan (SHE) partage la pyramide en deux parties de même volume.



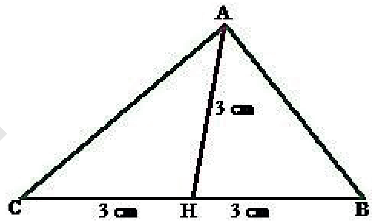
Perspective

30. Représenter sur une feuille non quadrillée un cube d'arête 7 cm en perspective cavalière avec
$\alpha = 45°$ et $k = \frac{1}{2}$.

31. Représenter sur une feuille quadrillée $(0{,}5 \times 0{,}5)$ une pyramide régulière à base carrée de côté 6 cm et de hauteur 10 cm en perspective cavalière avec $\alpha = 45°$ et $k = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

32. ABC est un triangle équilatéral de côté 6cm.

1°) La figure ci-contre est la représentation en perspective cavalière de ce triangle lorsqu'il est situé dans un plan horizontal, le côté [BC] étant vu de face.
Préciser le code de cette perspective cavalière.



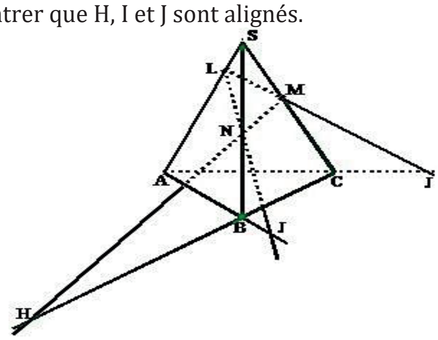
2) Représenter ce triangle en perspective cavalière avec le code ($\alpha = 45°$ et $k = \frac{1}{3}$).

Lorsque la hauteur [AH] est verticale et vue de face, le support du côté [BC] est perpendiculaire au plan vertical de face.

33. SABC est un tétraèdre, L est un point de [SA] ; M un point de [SC] et N un point de [SB].

- Les droites (MN) et (BC) se coupent en H ;
- Les droites (NL) et (AB) se coupent en I ;
- Les droites (LM) et (AC) se coupent en J ;

Montrer que H, I et J sont alignés.



34. SABCD est une pyramide de sommet S de base parallélogramme ABCD ; O est le centre de cette base, soit J le milieu de l'arête [SA].

1°) Démontrer que les droites (CJ) et (SO) sont sécantes ;

35. Soit un prisme droit ABCDEF à bases triangulaires ABC et DEF. I et J sont les milieux respectifs de [AC] et [DF].
Déterminer la nature du quadrilatère IBEJ.
Soit O le point d'intersection des segments [IE] et [JB] les droites (AO) et (FC) sont-elles sécantes ?

Positions relatives et parallélismes

36. On considère une pyramide de sommet S dont la base est un quadrilatère ABCD. Représenter la droite d'intersection des plans (SAB) et (SCD) lorsque :
1°) (AB) et (CD) sont sécantes en I ;
2°) (AB) et (CD) sont parallèles.

37. Soit un tétraèdre ABCD et E le milieu de son arête [BC].
1°) Soit F le point du segment [CD] tel que $DF = \frac{1}{3} DC$.
a) Montrer que (EF) coupe le plan (ABD) et placer leur point d'intersection.
b) Représenter la droite d'intersection des plans (AEF) et (ABD).
2°) Soit G le milieu de [CD].
a) Refaire une figure.
b) Montrer que la droite (EG) est parallèle au plan (ABD).
c) Représenter la droite Δ d'intersection des plans (AEG) et (ABD).

38.ABCDEFGH est un cube, représenter la droite d'intersection des plans (ACH) et (BDF).

39.ABCDEFGH est un cube, soient I et J les centres respectifs des carrés EFGH et ABFE.
1°) Montrer que la droite (IJ) est parallèle au plan ADHE.
2°) a) Montrer que les plans (IJE) et (ADHE) sont sécantes selon une droite Δ parallèle à (IJ).
c) Représenter cette droite Δ dans le plan ADHE en précisant son intersection P avec (AD) puis représenter Δ dans l'espace.

40. On considère un tétraèdre ABCD, On désigne par I, J, K, L, M et N les milieux respectifs des segments [AB], [BC], [CD], [AC] et [BD].
1°) Montrer que IJKL est un parallélogramme.
2°) Montrer qu'IMKN est un parallélogramme.
3°) a) Déduire des questions précédentes que les droites qui joignent les milieux des deux arêtes opposées d'un tétraèdre sont concourantes.
b)Ces droites sont-elles coplanaires.

41.ABCDEFGH est un cube. On désigne par I, J et K les milieux respectifs des arêtes [EA], [EF] et [EH].
Montrer que les plans (IJK) et (AFH) sont parallèles.

Orthogonalité

42. Sur la figure de l'exercice précédent nommer :
a) Toutes les arêtes orthogonales à (HB) ;
b) Toutes les arêtes orthogonales au plan (ABCD) ;

43. Le triangle ABC est rectangle en A, Soit S un point de la perpendiculaire en A au plan (ABC).
1) Montrer que les triangles SAB et SAC sont rectangles en A.
2) Montrer que : $SA^2 + BC^2 = SB^2 + AB^2$.

44. Soit C un cercle et [AB] un diamètre de C .
Soit M un point de C distinct de A et de B. Soit P un point distinct de A situé sur la perpendiculaire en A au plan de C .
1) Montrer que les droites (AP) et (BM) sont orthogonales.
2) En déduire que le triangle PMB est rectangle en M.

45.ABCDEFGH est un cube.
Montrer que les droites (AE) et (BC) sont perpendiculaires.

46.ABCDEFGH est un cube.
Montrer que les droites (AE) et (BG) sont perpendiculaires.1) Préciser le plan médiateur du segment [AE] et représenter la section du cube par ce plan.
2) Préciser le plan médiateur du segment [AF] et représenter la section du cube par ce plan.

47.ABCDEFGH est un cube.
On désigne par a l'arête du cube. O le centre du cube et I, J, K, L, M et N les milieux respectifs des arêtes [AB], [BC] , [CD], [DA], [AC] et [BD].
Soit P le plan médiateur de la diagonale [CE] du cube.
Montrer que $O \in P$.
2) a) calculer JB en fonction de a et en déduire JC.
b) Calculer de même JE en fonction de a.
Montrer que $J \in P$.
3) Montrer que $K \in P$.
On montre de façon analogue et on considère donc comme démontré que L, M et N appartiennent à P.
4) Représenter la section du cube par le plan P.

48.ABCDEFGH est un cube.
1) a) Montrer que E et C sont équidistants de A et F.
b) En déduire que (EC) et (AF) sont orthogonales.
2) Montrer de même que (EC) et (AH) sont orthogonales.
3) Déduire des questions précédentes que (EC) est orthogonale à (AFH).
4) a) Calculer le volume du tétraèdre EAFH (utiliser la base AEF).
b) Calculer l'aire de AFH, puis en utilisant la réponse de la question 4) a) la distance de E au plan (AFH).
d) placer alors, le point d'intersection P de (EC) et de (AFH).

49. On considère un tétraèdre OABC tel que :
OA = OB = OC = a (a> 0) et que les trois faces OAB, OAC et OBC soient rectangles en O.
Soit M un point du segment [OA], on pose $AM = x$. Le plan P passant par M et parallèle aux droites (AB) et (OC) coupe respectivement les droites (AC), (CB) et (OB) en N, P et Q.
1°) Montrer que le quadrilatère MNPQ est un rectangle.
2°) Calculer en fonction de x l'aire $A(x)$ de ce rectangle.

Chapitre 13 : APPLICATIONS

1) Définition et vocabulaire

Définition :

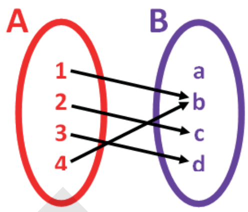
Une application est une correspondance entre deux ensembles, un ensemble "de départ" et un ensemble "d'arrivée", qui à tout élément de l'ensemble de départ associe un unique élément de l'ensemble d'arrivée.

Représentation :

Lorsque les ensembles de départ et d'arrivée sont définis par une liste exhaustive, une application peut être représentée par un diagramme sagittal, dans lequel on trace une flèche entre chaque élément de l'ensemble "de départ" et son image.

Une application peut aussi être définie par une expression, notamment dans le cadre des fonctions numériques.

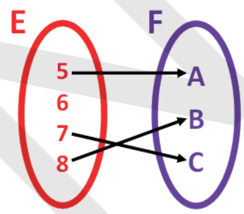
Exemple 1 :



- Le diagramme sagittal ci-contre représente

  Une application car tout élément de A a une image dans B
- L'ensemble de départ est A
- L'ensemble d'arrivée est B
- L'image de 1 est b
- L'image de 3 est d
- L'antécédent de c est 2
- Les antécédents de b sont 1 et 4
- L'élément a n'a pas d'antécédent.

Remarque 1 :



Le diagramme sagittal ci-contre ne représente pas une application car l'élément 6 n'a pas d'image

Exemple 2 :

On définit l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto f(x) = 3x + 2$$

- L'ensemble de départ est $\mathbb{R}$.
- L'ensemble d'arrivée est $\mathbb{R}$.
- L'image de 3 est 11.
- L'image de -2 est -4.
- L'antécédent de 5 est 1.
- L'antécédent de -7 est -3.

Application Identité :

Soit E un ensemble. L'application "identité de E" noté Id_E , est définie par : $Id_E : E \to E$

$$x \mapsto x$$

C'est l'application, qui associe à tout élément x de E l'élément x lui-même.

2) Applications et fonctions

Définition :

Une fonction est une correspondance entre deux ensembles, un ensemble de départ et un ensemble d'arrivée, qui à tout élément de l'ensemble de départ associe au plus un élément de l'ensemble d'arrivée.

Exemple 2 :

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto f(x) = \frac{1}{x-2}$$

Le nombre 2 n'a pas d'image par la fonction car $2 \notin D_f$, f est une fonction mais pas une application

Remarque 2 :

Le domaine (l'ensemble) de définition D_f d'une fonction f définie sur un ensemble E et à valeurs dans un ensemble F est l'ensemble des éléments x de E pour lesquels $f(x)$ existe.

Dans notre exemple, le domaine de définition de f est : $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ car $x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

L'ensemble de définition d'une fonction est toujours inclus dans l'ensemble de départ. Il est égal à l'ensemble de départ lorsque la fonction est une application.

Si on désigne par g la restriction de f sur son ensemble de définition :

$$g : \mathbb{R} \setminus \{2\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto g(x) = \frac{1}{x-2}$$

Alors g est une application car tout élément de l'ensemble de départ a une image dans l'ensemble d'arrivée.

Restriction d'une application :

Dans la restriction d'une application (ou une fonction) on garde l'ensemble d'arrivée et la correspondance, mais l'ensemble de départ devient plus petit.

Une application est donc toujours une fonction, mais la réciproque n'est vraie que lorsque l'ensemble de définition de la fonction est égal à l'ensemble de départ.

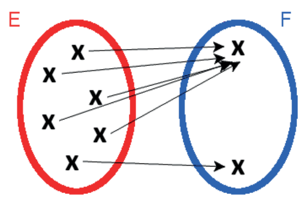
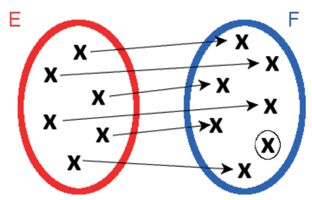
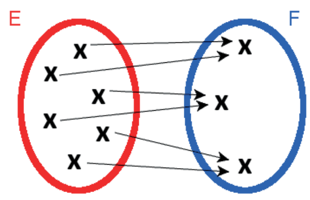
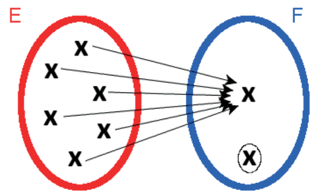
Par contre, la restriction d'une fonction à son ensemble de définition est toujours une application.

3) Applications injectives, surjectives et bijectives

a) Surjection :

L'application $f : E \longrightarrow F$ est dite surjective si tout élément de l'ensemble d'arrivée F a au moins un antécédent dans E.

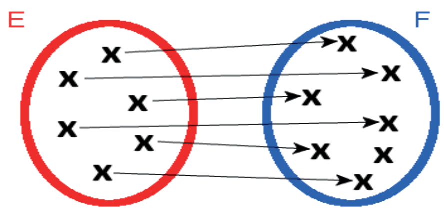
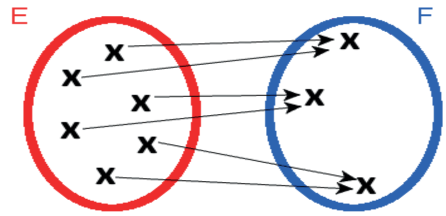
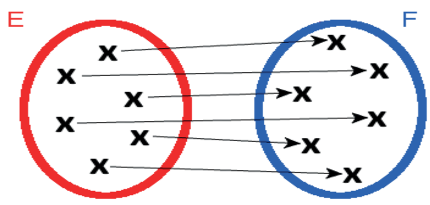
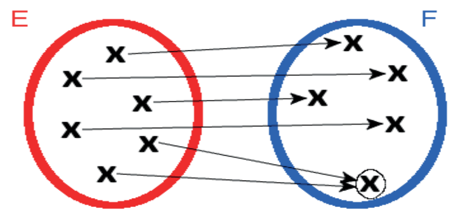
Exemple 3 :

Applications surjectives	**Applications non surjectives**
	
	

b) Injection :

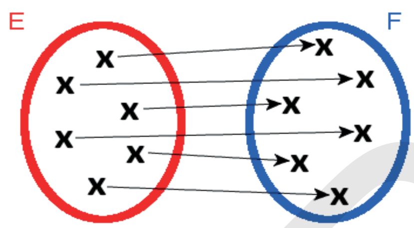
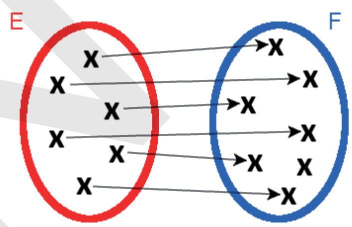
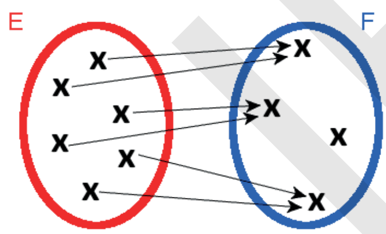
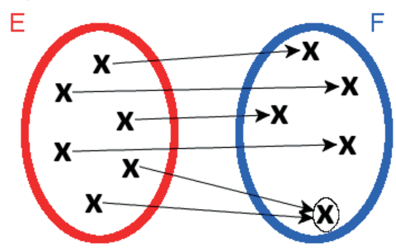
L'application $f : E \longrightarrow F$ est dite injective si tout élément de l'ensemble d'arrivée F a au plus un antécédent dans E, c'est-à-dire si deux éléments distincts de l'ensemble de départ E ont toujours deux images distinctes.

Exemple 4 :

Applications injectives	Applications non injectives
	
	

c) Bijection :

L'application $f: E \longrightarrow F$ est dite bijective si elle est à la fois injective et surjective, c'est-à-dire si tout élément de l'ensemble d'arrivée F admet exactement un seul antécédent dans E.

1) Application bijective	2) Application non bijective
	
2) Application non bijective	**4) Application non bijective**
	

4) L'application réciproque

Dans le cas d'une application bijective $f: E \longrightarrow F$, l'application réciproque de f, notée f^{-1}, est l'application qui à tout élément y de F associe son antécédent par f. C'est à dire que $f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$.

Exemple 5 :

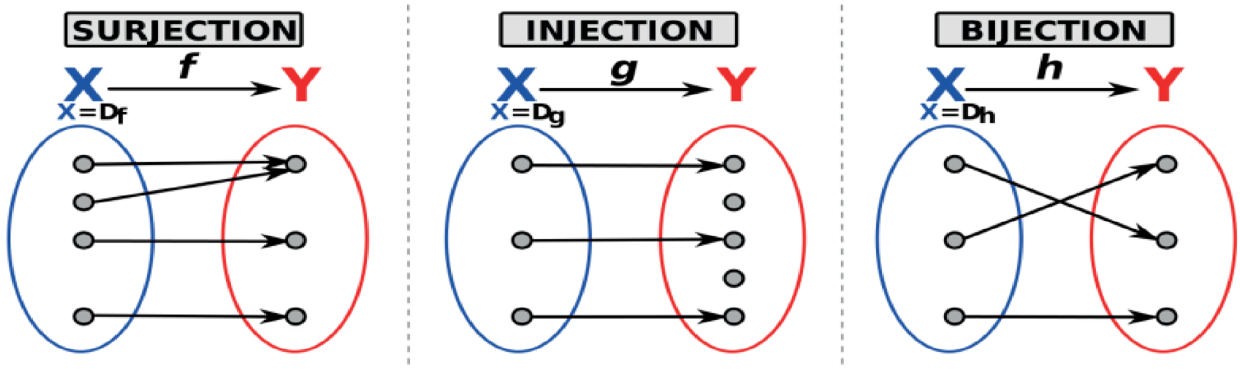
Soit $f: E \longrightarrow F$ une application *bijective* telle que $f(4) = 3$. Alors $f^{-1}(3) = 4$.

Remarque 2 :

1) Une application non bijective n'admet pas de réciproque.

2) La réciproque d'une application bijective est bijective : Si $f: E \longrightarrow F$ est bijective, alors $f^{-1}: F \longrightarrow E$ est bijective

3) Une application surjective est appelée une surjection. Une application injective est appelée une injection. Une application bijective est appelée une bijection.



Exemple 6 :

On considère l'application définie par ; $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto x^2$

f n'est pas surjective car certains réels ne possèdent pas d'antécédent. Par exemple, il n'y a pas de réel x tel que $f(x) = -1$. Mais si on change la définition de f en donnant comme ensemble d'arrivée $\mathbb{R}^+$; $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$
$x \longmapsto x^2$

alors elle devient surjective car chaque réel positif y possède au moins un antécédent : 0 possède exactement un antécédent 0, et tous les réels y strictement positifs en possèdent deux : la racine carrée de y et son opposé.

Dans ce cas, l'application n'est pas injective car il y a des éléments de l'ensemble d'arrivée qui possèdent plus d'un antécédent dans l'ensemble de départ ; par exemple le nombre 4 possède deux antécédents :

$f(-2) = f(2) = 4$.

Mais si on change la définition de f en donnant comme ensemble de départ et d'arrivée $\mathbb{R}^+$; $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$
$x \longmapsto x^2$

alors elle devient injective.

Comme $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ est à la fois surjective et injective, f est bijective.
$x \longmapsto x^2$

Exemple 7 :

La fonction définie par ; $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto cosx$

n'est pas surjective car les réels strictement plus grands que 1 ou strictement plus petits que -1 n'ont pas d'antécédent. Mais la fonction définie par $h : \mathbb{R} \longrightarrow [-1,1]$
$x \longmapsto \cos(x)$

qui possède la même expression que g, mais avec un ensemble d'arrivée qui a été restreint à l'ensemble des réels compris entre -1 et 1, est surjective. En effet, pour tout réel arbitraire y de l'intervalle $[-1, 1]$, il existe des solutions à l'équation $y = \cos(x)$ d'inconnue x.
Cette application n'est pas injective car chaque élément de l'intervalle $[-1, 1]$ admet plus d'un antécédent dans $\mathbb{R}$.

Mais la restriction k de h sur l'intervalle $[0, \pi]$ définie par ; $k : [0, \pi] \longrightarrow [-1,1]$
$x \longmapsto \cos(x)$

est à la fois surjective et injective, donc k est bijective.

Complément : Version Symbolique

L'application $f : E \longrightarrow F$ est *surjective* $\Leftrightarrow \forall y \in F, \exists x \in E \,/ f(x) = y$

L'application $f : E \longrightarrow F$ est injective $\Leftrightarrow \forall x, y \in E, f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

L'application $f : E \longrightarrow F$ est *bijective* $\Leftrightarrow \forall y \in F, \exists!\, x \in E \,/ f(x) = y$

5) Composition des applications

Soient $f: E \longrightarrow F$ et $g: G \longrightarrow H$ deux applications.

Lorsque $F \subset G$, on peut définir l'application : $h = f \circ g$(se lit g"rond" f)pour tout x de E par :

$f \circ g(x) = f(g(x))$

L'application $h = f \circ g$ est l'application composée des applications g et f.

Exemple 5 :

Calculer $f \circ g$ et $g \circ f$ dans chacun des cas suivants :

1°)$f(x) = \sqrt{x+1}$; $g(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$

2°)$f(x) = cosx$; $g(x) = x^2 + 3x - 5$

Réponse :

$$1°)\ f \circ g(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{1}{x^2+1}\right) = \sqrt{\frac{1}{x^2+1}+1} = \sqrt{\frac{1+x^2+1}{x^2+1}} = \sqrt{\frac{x^2+2}{x^2+1}}$$

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x+1}) = \frac{1}{(\sqrt{x+1})^2+1} = \frac{1}{x+1+1} = \frac{1}{x+2}$$

$2°)\ f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x^2 + 3x - 5) = cos(x^2 + 3x - 5)$

$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(cosx) = (cosx)^2 + 3cosx - 5$

Propriétés :

1°) La composition des applications est associative $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$

2°) La composition des applications n'est pas commutative : en général $f \circ g \neq g \circ f$.

3°) La composée de deux applications injectives (resp. surjectives, bijectives) est injective (resp. surjective, bijective)

4°) La composée d'une application bijective et sa réciproque est l'identité

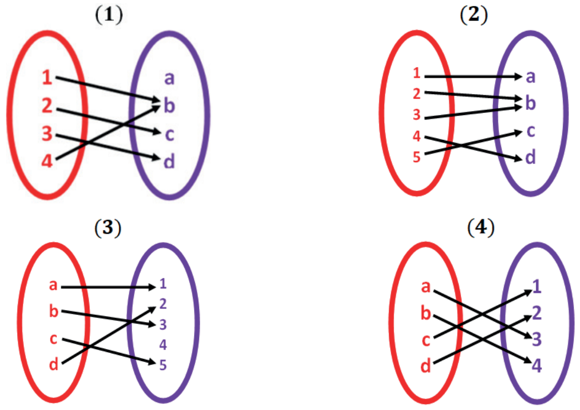
Si $f: E \longrightarrow F$ est une bijection :

$$\forall x \in E, f^{-1} \circ f(x) = f^{-1}(f(x)) = x, \qquad f^{-1} \circ f = Id_E$$
$$\forall x \in F, f \circ f^{-1}(x) = f(f^{-1}(x)) = x, \qquad f \circ f^{-1} = Id_F$$

5°) Si f et g sont bijectives et si $g \circ f$ existe, alors $g \circ f$ est bijective et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$(Attention à l'ordre).

Exercices Généraux

1. Les applications suivantes représentées en diagramme sagittal sont elles surjectives ? injectives ? bijectives ?



2. L'application $f:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}$ définie par $f(n)=|n-1|$ n'est pas une bijection: pourquoi?

3. L'application $f:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}$ définie par $f(n)=n+1$ n'est pas une bijection: pourquoi ? Que peut-on modifier pour que f soit bijective ?

4. Soient f et g les deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par $f(x)=3x+1$ et $g(x)=x^2-5x+3$.
Calculer $f\circ g$ et $g\circ f$

5. Dans les cas suivants, déterminer deux fonctions u et v telles que $h=u\circ v$:

$h(x)=\cos(x^2-5x+3)$; $h(x)=\dfrac{1}{x^2-5x+3}$

$h(x)=(cosx)^2-5cos+3$ $h(x)=\dfrac{2cos+3}{5cosx-4}$

6. Les applications suivantes sont-elles injectives? surjectives? bijectives?

1°) $f:\mathbb{Z}\longrightarrow\mathbb{Z}$ $n\longmapsto n+1$ 2°) $f:\mathbb{Z}\longrightarrow\mathbb{Z}$ $n\longmapsto 2n$ 3°) $f:\mathbb{Z}\longrightarrow\mathbb{Z}$ $n\longmapsto n^2$

7. Les applications $f_1(x)=|x|$, $f_2(x)=\sqrt{x}$, $f_3(x)=x^2+1$ sont-elles des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$?

8. Soient $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ et $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ telles que : $f(x)=3x+1$ et $g(x)=x^2-1$. A-t-on $f\circ g=g\circ f$?

9. Soit $f:[0,1]\to[0,1]$ telle que :

$f(x)=\begin{cases} x\,;\ \text{si } x\in[0,1]\cap Q \\ 1-x\,;\ \text{sinon}\end{cases}$. Démontrer que $f\circ f=id$.

10. Soit $f:[1,+\infty[\to[0,+\infty[$ telle que $f(x)=x^2-1$.

f est-elle bijective ?

11. Les applications suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?

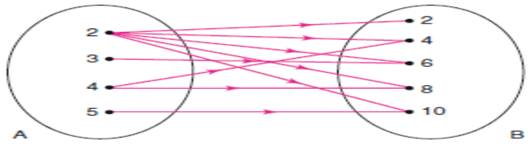
a. $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$; $n\to n-1$

b. $g:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$; $n\to n-1$

c. $h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$; $(x,y)\to(x+y,x-y)$

d. $k:\mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R}$. $x\to\frac{x+1}{x-1}$

12. L'application f est représentée par le diagramme suivant, est-elle injective ? Surjective ? Bijective ?
Peut-on construire un digramme de sa réciproque ?



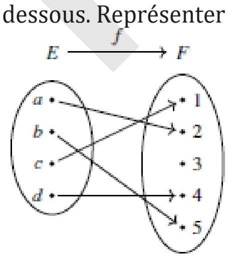
13. On considère l'application f de l'ensemble E = {Dates de l'année 2023} sur l'ensemble F = {Vendredi; Samedi, … ; Jeudi}qui à toute date de l'année 2023 associe le jour de la semaine correspondant.
L'application f est-elle injective, surjective, bijective ?

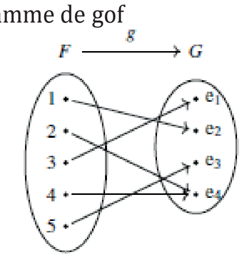
14. On considère l'application g: de E = {chaine de caractères} dans $\mathbb{N}$ qui à toute chaîne de caractères associe sa longueur. L'application g est-elle injective, surjective, bijective ?

15. Soient E et F les ensembles :
E = {A ; B ; C ; D} , F = {1, 2, 3}
Construire une application f_1 injective de E sur F; puis une application f2 : de E sur F non-injective. Peut-on construire une application surjective de E dans F ?

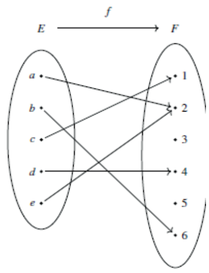
16. Soient F et G les ensembles suivants :
F = {1, 2, 3} et G = {∗; Δ}
Construire une application f_1 surjective de F sur G; puis une application f_2: de F sur G non-injective. Peut-on construire une application injective de E dans G?

17. On considère les fonctions f et g représentées ci-dessous. Représenter le diagramme de gof





18. La figure suivante représente l'application f d'un ensemble E vers l'ensemble F



1) Completer f (a) = … ;f (b) = …. ;
f(c) = … ; f (d) = …. ; f(e) = ….
2) Déterminer (s'ils existent) les antécédents de 2, 3 et 5.

19. Compléter
La fonction f : $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(x)=x^2$; est …
La fonction f : $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(x)=x^2$; est …
La fonction f : $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^+$ telle que $f(x)=x^2$; est …
La fonction f : $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ telle que $f(x)=x^2$; est …

Chapitre 14 : DENOMBREMENT

1. Langage des ensembles

1. Notion d'ensemble :

Définition :

Un ensemble est un groupe d'objets ou d'éléments bien définis et deux-à-deux distincts.

Exemple 1 :

- L'ensemble des chiffres décimaux,
- L'ensemble des lettres alphabétiques latines,
- L'ensemble des nombres premiers,
- L'ensemble des nombres pairs, etc…

► L'intersection de deux ensembles c'est l'ensemble des éléments communs entre eux.

► La réunion de deux ensembles c'est l'ensemble de tous les éléments des deux ensembles sans répétition.

► Le complémentaire d'un ensemble par rapport à un autre c'est l'ensemble des éléments du second n'appartenant pas au premier.

2. Cardinal d'un ensemble fini :

Définition :

Le cardinal d'un ensemble fini E noté $card\ (E)$ est le nombre des éléments de cet ensemble.

- Le cardinal de l'ensemble vide est : $card\ (\phi) = 0$
- Si E est un ensemble vide *(noté ϕ)*; cet ensemble n'a aucun élément, alors, $card(E) = 0$; $card(E) = 0$ $\Leftrightarrow E = \phi$.
- Le cardinal d'un singleton est 1.
- Le cardinal d'un ensemble contenant exactement deux éléments est 2.

3. Vocabulaire et Propriétés :

Si A est une partie de Ω *(un sous ensemble de Ω)*, on écrit $A \subset \Omega$: *(A inclus dans Ω)*

Alors ; $0 \leq card\ (A) \leq card\ (\Omega)$

ϕ est la partie vide de Ω et Ω est la partie pleine de Ω.

Pour toute partie A d'un ensemble non vide Ω, on a $\dfrac{card(A)}{card(\Omega)} \in [0\,;1]$

Soit A et B deux ensembles finis ;

1°) $card(A \cup B) = card(A) + card(B) - card(A \cap B)$.

Et si $A \cap B = \emptyset$, alors $card(A \cup B) = card(A) + card(B)$.

2°) $card(A - B) = card(A) - card(A \cap B)$.Et si $B \subset A$, alors, $card(A - B) = card(A) - card\ (B)$.

3°) Si A et Ω sont deux ensembles finis tels que $A \subset \Omega$, le complémentaire de A par rapport à Ω est noté $\bar{A} = \Omega - A$, et on a ; $card(\bar{A}) = card(\Omega) - card(A)$, $\bar{A} \cap \bar{B} = \overline{A \cup B}$ **et** $\bar{A} \cup \bar{B} = \overline{A \cap B}$

Exemple 2 :

$\Omega = \{0\,;1;2\,;3\}$, $\quad card\ (\Omega) = 4$

$\Omega = \{a_1\,;\ a_2\,;a_3\,;\ a_4\,;\ldots;\ a_n\}$, $\quad card\ (\Omega) = n$

$\Omega = \{a_0\,;\ a_1\,;\ a_2\,;\ a_3\,;\ a_4\,;\ldots;\ a_n\}$, $card\ (\Omega) = n + 1$

$\Omega = \{a_0\,;\ a_1\,;\ a_2\,;a_3\,;a_4\,;\ldots;\ a_{n-1}\}$, $\quad card\ (\Omega) = n$

L'ensemble $E = \{0\,;\ 1\,;\ a\,;\ b\,;\ c\,;\ d\}$, $\quad card\ (E) = 6$

Exemple 3 :

Soit E l'ensemble des chiffres décimaux :

$E = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$;$F = \{0,2,3,5,7\}$; $G = \{0,1,2,3,6\}$,on a : $F \cap G = \{0,2,3\}$; $F \cup G = \{0,1,2,3,5,6,7\}$;

$\bar{F} = \{1,4,6,8,9\}$; $\bar{G} = \{4,5,7,8,9\}$; $\bar{F} \cap \bar{G} = \{4,8;9\}$;

$\bar{F} \cup \bar{G} = \{1,4,5,6,7,8,9\}$.

$card\ (E) = 10$; $card\ (F) = 5$; $card\ (G) = 5$;

$card\ (F \cap G) = 3$; $card\ (F \cup G) = 7$; $card\ (\bar{F}) = 5$; $card\ (\bar{G}) = 5$;

$card\ (\bar{F} \cap \bar{G}) = 3$; $card\ (\bar{F} \cup \bar{G}) = 7$.

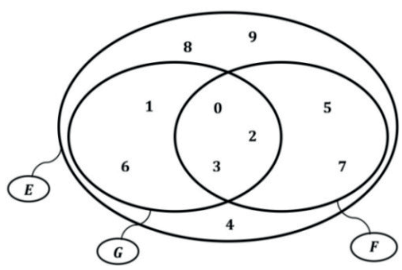


Diagramme de Venn

Exercice 1 :

On a effectué une étude auprès des lecteurs de trois revues A, B, C. Sur 100 personnes interrogées, 51 lisent A, 42 lisent B et 38 lisent C, 22 lisent A et B, 14 lisent B et C, et 16 lisent A et C, 8 lisent A, B, C.

A l'aide d'un diagramme de Venn, calculez le nombre de personnes de personnes qui ne lisent que A et B, B et C, A et C, ne lisent ni A ni B ni C.

4. Produits cartésiens d'ensembles :

Soit A et B deux ensembles ; les ensembles $A \times B$ et $B \times A$ désignent les produits cartésiens de A et B.

●$A \times B = \{(a; b)/a \in A \; et \; b \in B\}$;

●$B \times A = \{(b; a)/b \in B \; et \; a \in A\}$

●Soient A_1 ; A_2 ; $\dots A_n (n \; ensembles)$L'ensemble :$A_1 \times A_2 \times \; \dots \times A_n$ est le produit cartésien de A_1 ; A_2 ; $\dots A_n$.

et$A_1 \times A_2 \times \; \dots \times A_n = \{(a_1 \times a_2 \times \; \dots \times a_n) \; tel \; que \; a_1 \in A_1; \; a_2 \in A_2 \; ; \; \dots ; \; a_n \in A_n\}$

En plus, si A_1 ; A_2 ; $\dots A_n$ sont finis, alors $A_1 \times A_2 \times \; \dots \times A_n$ est fini

et, $card \; (A_1 \times A_2 \times \; \dots \times A_n) = card \; (A_1) \times card \; (A_2) \times \; \dots \times card \; (A_n)$.

● Soit A un ensemble et $n \in \mathbb{N}^*$: A^2désigne $A \times A$; A^ndésigne $\underbrace{A \times A \times A \times \dots \times A}_{n \text{ facteurs}}$;

● Soient A et B deux ensembles finis ;

Il y a	Si, et seulement si
Possibilité d'injection de A dans B	$card \; (A) \leq card \; (B)$
Possibilité de surjection de A surs B	$card \; (A) \geq card \; (B)$
Possibilité de bijection de A sur B	$card \; (A) = card \; (B)$

2. Les applications

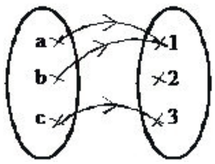
1. Notion d'application :

Définition :

Soient E et F deux ensembles, en associant à chaque élément x de E un seul élément y de F , on définit une application f de E vers F ; $f : E \longrightarrow F$

$$x \longmapsto y = f(x)$$

Exemple 4 :



$E = \{a, b; c\}$, $F = \{1, 2; 3\}$; $f(a) = 1$; $f(b) = 1$; $f(c) = 3$.**En plus, on a :**

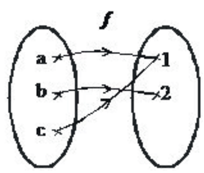
f est une injection de E dans F ; **si et seulement si** $\forall x_1, x_2 \in E; \; x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

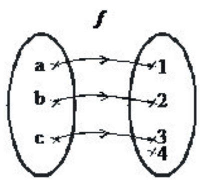
Exemple 5 :

On a : f est une surjection de E sur F ; **si et seulement si** $\forall y \in F$; $\exists x \in E \; / f(x) = y$.

Exemple 6 :

Dans le 1er cas f est surjective, alors que dans le 2ième cas f n'est pas surjective(car 4 n'a pas d'antécédent)



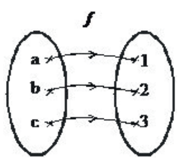


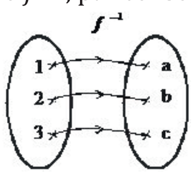
On a : f est une bijection de E sur F **; si et seulement si :**

f est à la fois une injection et une surjection de E sur $F \Longleftrightarrow \forall y \in F$; $\exists! \, x \in E : f(x) = y$

En plus,f admet une application réciproque notée f^{-1}, par conséquent,$\forall y \in F$; $\exists! \, x \in E : f^{-1}(x) = y$

Exemple 7 :



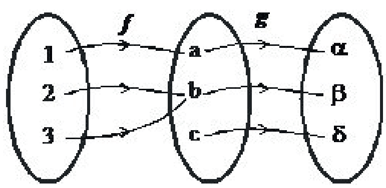


2. Composée de deux applications :

Si f est une application d'un ensemble E vers un ensemble F et g une application de l'ensemble F vers un ensemble$G$.Alors, $g \; o f$ est application de l'ensemble Evers l'ensemble G, définie par :

$\forall x \in E : \; (g \; o f)(x) = \; g(f(x))$

Exemple 8 :



$(g \; o f)(1) = g(f(1)) = g(a) = \alpha$; $(g \; o f)(2) = g(f(2)) = g(b) = \beta$;

$(g \; o f)(3) = g(f(3)) = g(b) = \beta$.

3. Fonction et application :

Une fonction f d'un ensemble E vers un ensemble F, est une application de E vers F, si et seulement si, L'ensemble de définition de f est E.

3. Permutation(Notion de n! avec n£N)

Définition :

Soit E un ensemble fini de cardinal$n$, on appelle permutation de n éléments de E et on la note $n!$ *(et on lit factorielle n)* le nombre naturel défini par :$n! = n(n-1)(n-2)(n-3) \times \dots \times 2 \times 1$

Exemple 9 :

$7! = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5\,040$; $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$;
$2! = 1 \times 2 = 2$; $3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$; $4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 2\,4$.

Remarque 1 :

- Par convention, $0! = 1$, $1! = 1$
- $n! = n(n-1)!$

Exemple 10 :

Avec combien de façons peut-on garer 5 voitures numérotées de 1 à 5 dans 5 garages numérotés de A à E ?

Réponse :

Le nombre de façons est égal au nombre de permutations : $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$.

Formules :

- $\forall n \in \mathbb{N}^* : \prod_{k=1}^{k=n} k = n!$
- $\forall n \in \mathbb{N} : (n+1)n! = (n+1)!$,
- $\frac{(n+1)!}{n!} = n+1$,
- $\frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}$

Exemple 11 : $5! = 5 \times 4! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$; $4 \times 3! = 4!$

Propriété : Soient p et q deux entiers naturels, si p $\leq q$, alors $\frac{q!}{p!}$ est un entier naturel.

Exemple 12 :$\frac{5!}{3!} = \frac{5\times4\times3!}{3!} = 5 \times 4 = 20$;

4. Listes

Exemple 13 :

Soit $\Omega = \{1\,;2\,;3\,;4\,;5\}$ un ensemble ;$(1;\ 2;\ 3)$ est une liste dans Ω à 3 termes on l'appelle une 3- listedans Ω.
$(1\,;\ 1\,;\ 2\,;\ 3)$ est une 4- liste dansΩ ; $(1\,;\ 2\,;\ 3\,;\ 2\,;\ 1\,;\ 3)$ est une 6- liste dans Ω ;
$(1\,;\ 2\,;\ 1\,;\ 2\,;\ 3\,;\ 3\,;\ 3\,;\ 3)$est une 8-liste dans Ω.

Définition :

- Soient$n$ et$p$ deux entiers naturels non nuls. Le nombre de p-liste dans un ensemble Ω ayant n éléments est n^p.
- Soient A et B deux ensembles finis non vides tels que ; $Card(A) = p$; $card(B) = n$.

Le nombre d'applications de A vers B est n^p.

5. Arrangement

1.Le nombre d'arrangements avec répétition de p éléments parmi n :

Définition :

Soit E un ensemble fini de cardinal n. On appelle p - *arrangement* dans Ω, ou nombre d'arrangements avec répétition de p éléments pris parmi n $(0 \leq p \leq n)$ toute p - liste dans Ω à termes distincts deux à deux, c'est-à-dire le nombre naturel défini par n^p.

Exemple 14 :

Soit $\Omega = \{1\,;2\,;3\,;4\,;5\}$

- ▶$(1\,;\ 2\,;\ 3)$ est un 3 - *arrangement* dans Ω
- ▶$(1\,;\ 2\,;\ 5\,;\ 4\,;\ 3)$ est un 5 - *arrangement* dans Ω
- ▶$(3\,;\ 2\,;\ 1)$ est un 3 - *arrangement* dans Ω
- ▶ Un 6 - *arrangement* dans Ω n'existe pas

2. Le nombre d'arrangements sans répétition de$p$éléments parmi n :

Définition :

Soit Eun ensemble fini de cardinal n. On appelle nombre p - *arrangement* ou d'arrangements sans répétition de p éléments pris parmi n $(0 \leq p \leq n)$ le nombre naturel défini par :

$$A_n^p = n(n-1)(n-2) \times \dots \times \big(n-(p-1)\big) = n(n-1)(n-2) \times \dots \times (n-p+1).$$

En multipliant et en divisant par $(n-p)!$, on obtient ; $\boldsymbol{A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}}$

- Soient A et B deux ensembles tels que ; $card(A) = p$; $card(B) = n$; avec $p \leq n$. Le nombre d'injection de$A$ dans B est A_n^p.
- Un n - *arrangement* dans un ensemble Ω ayant n éléments est appelé une permutation de Ω

Exemple 15 :

Soit $\Omega = \{1\,;2\,;3\,;4\,;5\}$; $(1\,;2\,;3\,;4\,;5)$; $(2\,;1\,;4\,;3\,;5)$; $(1\,;3\,;4\,;5\,;2)$ sont des permutations de Ω.

- Le nombre de permutation d'un ensemble Ω ayant n éléments est : $A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = n!$
- Soient A et B deux ensembles finis tels que : $card\ (A) = card\ (B) = n$.
  Le nombre de bijections de A sur B est $n!$.

Exemple 16 :

$A_4^2 = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4!}{2!} = \frac{4\times3\times2!}{2!} = 4\times3 \Longrightarrow A_4^2 = 12$; $A_7^3 = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7!}{4!} = \frac{7\times6\times5\times4!}{4!} = 7\times6\times5 \Longrightarrow A_7^3 = 210.$

Propriétés :

$$\boldsymbol{a})A_n^1 = \frac{n!}{(n-1)!} = \frac{n(n-1)!}{(n-1)!} = n \Longrightarrow A_n^1 = n \qquad \boldsymbol{c})A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n! \Longrightarrow A_n^n = n!$$

$$\boldsymbol{b})A_n^0 = \frac{n!}{(n-0)!} = \frac{n!}{n!} = 1 \Longrightarrow A_n^0 = 1 \qquad \boldsymbol{d})\ A_n^{n-1} = \frac{n!}{(n-(n-1))!} = \frac{n!}{1!} = \frac{n!}{1} = n! \Longrightarrow A_n^{n-1} = n!$$

Exercice 2 :

Dans un jeu de 32 cartes, on tire successivement sans remise 4 cartes. Calculer le nombre de cas donnant :

a) Les cartes de la même couleur,
b) Les cartes contiennent un roi,
c) Les cartes de même niveau,
d) Les cartes contiennent au moins une dame,
e) Les cartes contiennent au plus un valet.

Solution :

a) Les cartes sont de la même couleur :

$$A_{16}^4 + A_{16}^4 = \frac{16!}{(16-4)!} + \frac{16!}{(16-4)!} = 2\times\frac{16!}{12!} = 2\times\frac{16\times15\times14\times13\times12!}{12!} = 2\times16\times15\times14\times13 = 87\,360.$$

b) Les cartes contiennent un roi :

$$A_4^1 \times A_{28}^3 = \frac{4!}{(4-1)!}\times\frac{28!}{(28-3)!} = \frac{4!}{3!}\times\frac{28!}{25!} = 4\times28\times27\times26 = 78\,624.$$

c) Les cartes de même niveau :

$$8A_4^4 = 8\times\frac{4!}{(4-4)!} = 8\times\frac{4!}{0!} = 8\times\frac{4!}{1} = 8\times4\times3\times2 = 192.$$

d) Les cartes contiennent au moins une dame :

$$\begin{aligned} &A_4^1\times A_{28}^3 + A_4^2\times A_{28}^2 + A_4^3\times A_{28}^1 + A_4^4\times A_{28}^0 \\ &= \frac{4!}{(4-1)!}\times\frac{28!}{(28-3)!} + \frac{4!}{(4-2)!}\times\frac{28!}{(28-2)!} + \frac{4!}{(4-3)!}\times\frac{28!}{(28-1)!} + \frac{4!}{(4-4)!}\times\frac{28!}{(28-0)!} \\ &= 4\times28\times27\times26 + 4\times3\times28\times27 + 4\times3\times2\times28 + 4\times3\times2\times1 = 78\,624 + 9\,072 + 672 + 24 \\ &= 88\,392. \end{aligned}$$

e) Les cartes contiennent au plus un valet :

$$\begin{aligned} A_4^1\times A_{28}^3 + A_4^0\times A_{28}^4 &= \frac{4!}{(4-1)!}\times\frac{28!}{(28-3)!} + \frac{4!}{(4-0)!}\times\frac{28!}{(28-4)!} \\ &= 4\times28\times27\times26 + 1\times28\times27\times26\times25 = 78\,624 + 491\,400 = 570\,024. \end{aligned}$$

Exercice 3 :

Dans une classe de 20 élèves (8 filles et 12 garçons), le professeur veut former une équipe de 5 personnes.

1°) Déterminer le nombre d'équipe de 5 personnes
2°) Déterminer le nombre de cas donnant :
a) Le groupe est du même sexe.
b) Le groupe contient Meyne.
c) Le groupe contient exactement deux filles.
d) Le groupe contient au moins un garçon.
e) Le groupe contient Ahmed et Fatma.

Solution :

1°) Nombre d'équipes de 5 personnes :

$$A_{20}^{5}=\frac{20!}{(20-5)!}=\frac{20!}{15!}=\frac{20\times 19\times 18\times 17\times 16\times 15!}{15!}=20\times 19\times 18\times 17\times 16=1\,860\,480$$

2°) a) Le groupe est du même sexe :

$$A_{8}^{5}+A_{12}^{5}=\frac{8!}{(8-5)!}+\frac{12!}{(12-5)!}=\frac{8!}{3!}+\frac{12!}{7!}=8\times 7\times 6\times 5\times 4+12\times 11\times 10\times 9\times 8=6\,720+95\,040$$
$$=101\,760.$$

b) Le groupe contient Meyne : $A_{1}^{1}\times A_{19}^{4}=1\times\frac{19!}{(19-4)!}=19\times 18\times 17\times 16=93\,024.$

c) Le groupe contient exactement deux filles :

$$A_{8}^{2}\times A_{12}^{3}=\frac{8!}{(8-2)!}\times\frac{12!}{(12-3)!}=\frac{8!}{6!}\times\frac{12!}{9!}=8\times 7\times 12\times 11\times 10=73\,920$$

d) Le groupe contient au moins un garçon :

$$A_{12}^{1}\times A_{8}^{4}+A_{12}^{2}\times A_{8}^{3}+A_{12}^{3}\times A_{8}^{2}+A_{12}^{4}\times A_{8}^{1}+A_{12}^{5}\times A_{8}^{0}$$
$$=\frac{12!}{(12-1)!}\times\frac{8!}{(8-4)!}+\frac{12!}{(12-2)!}\times\frac{8!}{(8-3)!}+\frac{12!}{(12-3)!}\times\frac{8!}{(8-2)!}+\frac{12!}{(12-4)!}\times\frac{8!}{(8-1)!}+\frac{12!}{(12-5)!}\times\frac{8!}{(8-0)!}$$

$$=12\times 8\times 7\times 6\times 5+12\times 11\times 8\times 7\times 6+12\times 11\times 10\times 8\times 7+12\times 11\times 10\times 9\times 8+12\times 11\times 10\times 9\times 8\times 1$$
$$=20\,160+44\,352+73\,920+95\,040+95040=328\,512$$

e) Le groupe contient Ahmed et Fatma :

$$A_{1}^{1}\times A_{1}^{1}\times A_{18}^{3}=1\times 1\times\frac{18!}{(18-3)!}=1\times 1\times\frac{18!}{15!}=18\times 17\times 16=4\,896$$

Exercice 4 :

Une urne contient 7 jetons numérotés de 1 à 7. On tire successivement et sans remise 3 jetons de cette urne. Calculer le nombre de tirages possibles.

Solution :

Le nombre de tirages possibles est : $A_{7}^{3}=\frac{7!}{(7-3)!}=\frac{7!}{4!}=\frac{7\times 6\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1}{4\times 3\times 2\times 1}=7\times 6\times 5=210.$

3. Le nombre de permutations sans répétition de n éléments pris parmi n :

Le nombre de permutations sans répétition de n éléments pris parmi n est : $\boldsymbol{A_{n}^{n}=\frac{n!}{(n-n)!}=\frac{n!}{0!}=\frac{n!}{1}=n!}$

Exercice 5 :

Dans une salle il y a 10 chaises, 10 personnes entrent dans cette salle pour s'y installer. Calculer le nombre de dispositions possibles.

Solution :

Le nombre de dispositions possibles est : $A_{10}^{10}=10!=10\times 9\times 8\times 7\times\ldots\times 2\times 1=3\,628\,800.$

6. Combinaison

Définition :

Soit Ω un ensemble fini. On appelle une combinaison dans Ω toute partie *(ou sous-ensemble)* de Ω.

Le nombre de combinaisons de p éléments parmi $n(0\le p\le n)$:

Définition :

Soit E un ensemble de cardinal n, on appelle combinaison de p $(0\le p\le n)$ éléments distincts (sans répétition) pris parmi n le nombre de sous-ensembles de p éléments de n défini par :

$$\boldsymbol{C_{n}^{p}=\frac{A_{n}^{p}}{p!}=\frac{\frac{n!}{(n-p)!}}{\frac{p!}{1}}=\frac{n!}{(n-p)!\,p!}}$$

Exemple 17 :

Soit $\Omega=\{1\,;2\,;3\,;4\,;5\}$

$(1\,;2\,;3)$ est une combinaison de 3 éléments dans Ω. $(1\,;3\,;4\,;5)$ est une combinaison de 4 éléments dans Ω.

●ϕ *(partie vide)* est la combinaison dans Ω de zéro élément.

●Ω *(partie pleine)* est la combinaison de 5 éléments.

● Une combinaison de 6 éléments dans Ω n'existe pas.

Exemple 18 :

$C_{5}^{2}=\frac{5!}{(5-2)!2!}=\frac{5\times 4\times 3!}{3!2!}=5\times 2=10\,;C_{4}^{3}=\frac{4!}{(4-3)!3!}=\frac{5\times 4\times 3!}{1!3!}=5\times 4=20.$

Exercice 6 :

Une classe de 29 élèves procède à un tirage au sort pour désigner une commission de trois membres de cette classe.

1°) Calculer le nombre de commissions possibles dans chacun des deux cas suivants :

a) La commission est composée d'un coordinateur, d'un responsable sportif et d'un responsable culturel.

b) La commission est composée de trois élèves sans tâche particulière.

2°) Calculer dans le deuxième cas, le nombre de commissions qui comportent exactement deux garçons sachant qu'il y a exactement 7 filles dans cette classe.

Solution :

1°) a) Dans le premier cas, le nombre de commissions possible est :

$$A_{29}^3 = \frac{29!}{(29-3)!} = \frac{29!}{26!} = \frac{29 \times 28 \times 27 \times 26!}{26!} = 29 \times 28 \times 27 = 21\,924.$$

b) Dans le deuxième cas, le nombre de commissions est le nombre de combinaisons possibles :

$$C_{29}^3 = \frac{29!}{(29-3)!\,3!} = \frac{29 \times 28 \times 27 \times 26!}{26!\,3!} = 29 \times 14 \times 9 = 3\,654.$$

2°) Dans le second cas, le nombre de commissions qui comportent exactement 2 garçons est ;

$$C_{22}^2 \times C_7^1 = \frac{22!}{(22-2)!\,2!} \times 7 = \frac{22 \times 21 \times 20!}{20!\,2!} \times 7 = 11 \times 21 \times 7 = 1\,617.$$

Exercice 7 :

Une urne contient quatre boules vertes numérotées de 1 à 4, trois boules rouges numérotées de 1 à 3 et deux boules jaunes numérotées 1 à 2. On tire simultanément trois boules de cette urne.

1°) Calculer le nombre de tirages possibles.

2°) Calculer le nombre de tirages dans chacun des cas suivants :

a) Les trois boules tirées sont vertes.

b) Le tirage est unicolore.

c) Le tirage est tricolore.

d) Le triage est bicolore.

e) Le tirage comporte exactement deux boules rouges.

f) Le tirage ne comporte aucune boule jaune.

g) Le tirage comporte au moins une boule jaune.

h) Les numéros des boules sont identiques.

Solution :

1°) Le nombre de tirages possible est : $C_9^3 = \frac{9!}{6!3!} = 84.$

2°) a) Le nombre de tirages où les trois boules tirées sont vertes : $C_4^3 = \frac{4!}{1!3!} = 4$

b) Le nombre de tirages où les trois boules sont unicolores :$C_4^3 + C_3^3 = 4 + 1 = 5$

c) Le nombre de tirages où les trois boules sont tricolores :$C_4^1 \times C_3^1 \times C_2^1 = 4 \times 3 \times 2 = 24$

d) Le nombre de tirages où les trois boules sont bicolores :

$$C_4^2 \times C_3^1 + C_4^2 \times C_2^1 + C_3^2 \times C_2^1 + C_3^2 \times C_4^1 + C_2^2 \times C_4^1 + C_2^2 \times C_3^1$$
$$= \frac{4!}{2!\,2!} \times 3 + \frac{4!}{2!\,2!} \times 2 + 3 \times 2 + 3 \times 4 + 1 \times 4 + 1 \times 3 = 18 + 12 + 6 + 12 + 4 + 3 = 55$$

Autre méthode :

On note U, B et T les tirages unicolores, bicolores et tricolores.Alors, $B = (\overline{U \cup T})$, donc ;

$card\ (A) = card\ (\Omega) - card\ (U \cap T)$. Or, $U \cap T = \emptyset$, d'où $card(U \cup T) = card(U) + card(T)$

Donc ; $card\ (B) = card\ (\Omega) - \big(card\ (U) + card\ (T)\big) = 84 - (5 + 24) = 84 - 29 = 55$

e) Le nombre de tirages comportant exactement deux boules rouges :

$C_3^2 \times C_6^1 = 3 \times 6 = 18$

f) Le nombre de tirages ne comportant aucune boule jaune :

$C_7^3 = \frac{7!}{4!\,3!} = 35\ et\ C_2^1 \times C_7^2 + C_2^2 \times C_7^1 = 2 \times \frac{7!}{2!\,5!} + 7 = 49$

Autre méthode :

« au moins une boule jaune » est le complémentaire de « aucune boule jaune » : $84 - 35 = 49.$

h) Le nombre de tirages où les numéros des boules sont identiques : $C_3^3 + C_3^3 = 1 + 1 = 2.$

Exercice 8 :

Une urne contient 12 boules ; 5 rouges, 3 vertes et 4 blanches. On tire simultanément 3 boules de l'urne.

1°) Déterminer le nombre de cas possibles.

2°) Déterminer le nombre de cas donnant :

a) Les trois boules tirées sont de même couleur.

b) Les trois boules tirées de couleurs différentes.

c) Les trois boules tirées contiennent au moins une verte.

d) Les trois boules tirées contiennent exactement deux de même couleur.

Solution :

1°) Nombre de cas possibles : $C_{12}^{3} = \frac{12!}{(12-3)!3!} = 220$

2°) a) Nombre de cas donnant les trois boules tirées sont de même couleur :

$$C_5^3 + C_4^3 + C_3^3 = \frac{5!}{(5-3)!\,3!} + \frac{4!}{(4-3)!\,3!} + \frac{3!}{(3-3)!\,3!} = 10 + 4 + 15 = 1$$

b) Nombre de cas donnant les trois boules tirées sont de couleurs différentes :

$$C_5^1 \times C_4^1 \times C_3^1 = \frac{5!}{(5-1)!\,1!} \times \frac{4!}{(4-1)!\,1!} \times \frac{3!}{(3-1)!\,1!} = 5 \times 4 \times 3 = 60.$$

c) Nombre de cas donnant les trois boules tirées contiennent au moins une verte :

$$C_3^1 \times C_9^2 + C_3^2 \times C_9^1 + C_3^3 \times C_9^0 = \frac{3!}{(3-1)!\,1!} \times \frac{9!}{(9-2)!\,2!} + \frac{3!}{(3-2)!\,2!} \times \frac{9!}{(9-1)!\,1!} + \frac{3!}{(3-3)!\,3!} \times \frac{9!}{(9-0)!\,0!}$$
$$= 3 \times 36 + 3 \times 9 + 1 \times 1 = 136.$$

d) Nombre de cas donnant les trois boules tirées contiennent exactement deux de même couleur :

$$C_5^2 \times C_7^1 + C_4^2 \times C_8^1 + C_3^2 \times C_9^1 = \frac{5!}{(5-2)!\,2!} \times \frac{7!}{(7-1)!\,1!} + \frac{4!}{(4-2)!\,2!} \times \frac{8!}{(8-1)!\,1!} + \frac{3!}{(3-2)!\,2!} \times \frac{9!}{(9-1)!\,1!}$$
$$= 10 \times 7 + 6 \times 8 + 3 \times 9 = 145.$$

Propriétés des combinaisons :

1- $C_n^0 = 1, \forall n \in \mathbb{N}$; **2-** $C_n^1 = n, \forall n \in \mathbb{N}$; **3-** $C_n^n = 1, \forall n \in \mathbb{N}$; **4-** $C_n^{n-1} = n, \forall n \in \mathbb{N}$;

5- $C_n^{n-k} = C_n^k, \forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq k \leq n$; **6-** $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq k \leq n.$

Démonstration :

1- $C_n^0 = \frac{n!}{(n-0)!0!} = \frac{n!}{n!\times 1} = \frac{n!}{n!} = \frac{1}{1} = 1$ **3-** $C_n^n = \frac{n!}{(n-n)!n!} = \frac{n!}{0!\times n!} = \frac{n!}{1\times n!} = \frac{1}{1} = 1$

2- $C_n^1 = \frac{n!}{(n-1)!1!} = \frac{n(n-1)!}{(n-1)!\times 1} = \frac{n}{1} = n$ **4-** $C_n^{n-1} = \frac{n!}{(n-(n-1))!(n-1)!} = \frac{n(n-1)!}{(n-n+1)!(n-1)!} = \frac{n}{1!} = \frac{n}{1} = n.$

5- $C_n^{n-k} = \frac{n!}{(n-(n-k))!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-n+k)!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = C_n^k$

6- $C_n^k + C_n^{k+1} = \frac{n!}{(n-k)!k!} + \frac{n!}{(n-(k+1))!(k+1)!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} + \frac{n!}{(n-k-1)!(k+1)!} = \frac{n!(k+1+n-k)}{(k+1)(n-k)k!(n-k-1)!}$

$= \frac{n!(n+1)}{(k+1)k!(n-k)(n-k-1)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!((n+1)-(k+1))!} = C_{n+1}^{k+1}.$

●Soit Ω un ensemble fini ayant n éléments

Propriétés des parties de Ω	**Propriétés des nombres C_n^p**
Il y a une seule partie *(partie ayant 0 élément c'est ϕ (la partie vide))*.	$C_1^0 = 1$
Il y a une seule partie *(partie ayant Ω élément c'est Ω (la partie pleine))*.	$C_n^n = 1$
Il y a (n) parties ayant chacune (1) élément *(les singletons de Ω)*.	$C_n^1 = n$
A toute partie de Ω ayant p éléments correspond une seule partie de Ω ayant $n-p$ éléments et réciproquement *(ce sont des parties complémentaires dans Ω)*. Donc, le nombre de parties à (p) éléments est le même que le nombre de partie à $(n-p)$éléments .	$C_n^p = C_n^{n-p}$

Type de tirage	$Card(A)$	conditions
Successif avec remise	n^p	p quelconque
Successif sans remise	A_n^p	$p \leq n$
simultané	C_n^p	$p \leq n$

7. Formules de développement du binôme de Newton

$$\forall a\,;b \in \mathbb{R}\,;\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad (a+b)^n = \sum_{k=0}^{k=n} C_n^k\, a^{n-k} b^k, \qquad (a-b)^n = \sum_{k=0}^{k=n} (-1)^k C_n^k\, a^{n-k} b^k$$

Démonstration par récurrence :

Initialisation :

Pour $n=0$: $\quad (a+b)^0 = 1 \quad$ et $\quad C_0^k a^{0-k} b^k = C_0^0 a^{0-0} b^0 = 1 \times 1 \times 1 = 1$

C'est donc vrai pour $n = 0$.

Transmission :

On suppose que la formule de Newton est vraie pour un entier n. $\quad (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$

et nous allons montrer qu'elle est vraie pour $n+1$. $\quad (a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k a^{n+1-k} b^k$

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)^n (a+b) = (a+b) \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$$

$$= a \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k + b \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^{k+1}$$

$$= (C_n^0 a^{n+1} b^0 + C_n^1 a^n b^1 + \cdots + C_n^n a^1 b^n) + (C_n^0 a^n b^1 + C_n^1 a^{n-1} b^2 + \cdots + C_n^n a^0 b^{n+1})$$

$$= C_n^0 a^{n+1} b^0 + (C_n^1 + C_n^0) a^n b^1 + (C_n^2 + C_n^1) a^{n-1} b^2 + \cdots + (C_n^n + C_n^{n-1}) a^1 b^n + C_n^n a^0 b^{n+1}$$

$$= C_n^0 a^{n+1} b^0 + C_{n+1}^1 a^n b^1 + C_{n+1}^2 a^{n-1} b^2 + \cdots + C_{n+1}^n a^1 b^n + C_n^n a^0 b^{n+1}$$

$$= C_n^0 a^{n+1} b^0 + C_{n+1}^1 a^n b^1 + C_{n+1}^2 a^{n-1} b^2 + \cdots + C_{n+1}^n a^1 b^n + C_{n+1}^{n+1} a^0 b^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k a^{n+1-k} b^k.$$

D'où, la formule est vraie pour $n+1$. Donc, $\forall n \in \mathbb{N}, (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$.

8) Le triangle de pascal

$C_n^p + C_{n+1}^p = C_{n+1}^{p+1}$ *(Propriété de base pour la construction du triangle suivant appelé triangle de Pascal)*

Remarque 2 :

Le triangle de Pascal porte les valeurs des nombres C_n^p

Exercice 9 :

Développer les binômes suivants : $(a+b)^2, (a+b)^3, (a+b)^4, (a+b)^5, (a+b)^6, (a-b)^4$

Solution :

$$(a+b)^2 = \sum_{k=0}^{2} C_2^k a^{2-k} b^k = C_2^0 a^2 b^0 + C_2^1 a^1 b^1 + C_2^2 a^0 b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = \sum_{k=0}^{3} C_3^k a^{3-k} b^k = C_3^0 a^3 b^0 + C_3^1 a^2 b^1 + C_3^2 a^1 b^2 + C_3^3 a^0 b^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a+b)^4 = \sum_{k=0}^{4} C_4^k a^{4-k} b^k = C_4^0 a^4 b^0 + C_4^1 a^3 b^1 + C_4^2 a^2 b^2 + C_4^3 a^1 b^3 + C_4^4 a^0 b^4$$

$$= a^4 + 4a^3 b + 6a^2 b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$(a+b)^5 = \sum_{k=0}^{5} C_5^k a^{5-k} b^k = C_5^0 a^5 b^0 + C_5^1 a^4 b^1 + C_5^2 a^3 b^2 + C_5^3 a^2 b^3 + C_5^4 a^1 b^4 + C_5^5 a^0 b^5$$

$$= a^5 + 5a^4 b + 10a^3 b^2 + 10a^2 b^3 + 5ab^4 + b^5$$

$$(a+b)^6 = \sum_{k=0}^{6} C_6^k a^{6-k} b^k = C_6^0 a^6 b^0 + C_6^1 a^5 b^1 + C_6^2 a^4 b^2 + C_6^3 a^3 b^3 + C_6^4 a^2 b^4 + C_6^5 a^1 b^5 + C_6^6 a^0 b^6$$

$$= a^6 + 6a^5 b + 15a^4 b^2 + 20a^3 b^3 + 15a^2 b^4 + 6ab^5 + b^6$$

$$(a-b)^4=\sum_{k=0}^{k=4}(-1)^k C_4^k\, a^{4-k}b^k = C_4^0a^4b^0 - C_4^1a^3b^1 + C_4^2a^2b^2 - C_4^3a^1b^3 + C_4^4a^0b^4$$
$$= a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4a^1b^3 + b^4$$

$\forall x\in\mathbb{R}\,;\ \forall n\in\mathbb{N}\,,\qquad (1+x)^n=\sum_{k=0}^{n} C_n^k\, x^k$

Exercice 10 :

Montrer les égalités suivantes :

1°) $\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$; **2°)** $(p+1)!\,p! = (p+1)(p!)^2$; **3°)** $\frac{1}{p!}-\frac{1}{(p+1)!}=\frac{pp!}{(p+1)(p!)^2}=\frac{1}{(p+1)!(p-1)!}$

Solution :

1°) $\forall n\in\mathbb{N}, (a+b)^n=\sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k}b^k$

Si $x=y=1$, on a ; $(1+1)^n = 2^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k 1^{n-k}1^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \Longrightarrow \forall n\in\mathbb{N}, \boldsymbol{2^n=\sum_{k=0}^{n} C_n^k}$

2°) $(p+1)!\,p! = (p+1)p!\,p! = (p+1)!\,(p!)^2$

3°) $\dfrac{1}{p!}-\dfrac{1}{(p+1)!}=\dfrac{(p+1)!-p!}{p!\,(p+1)!}=\dfrac{(p+1)p!-p!}{(p+1)!\,(p!)^2}=\dfrac{\big((p+1)-1\big)p!}{(p+1)!\,(p!)^2}=\dfrac{pp!}{(p+1)!\,(p!)^2}=\dfrac{1}{(p+1)!\,(p-1)!}$

Exercice 11 :

1°) En supposant que p est fixe et en raisonnant par récurrence sur $n(p\in\mathbb{N}, \forall n\in\mathbb{N})$, montrer que l'on a :

$$C_p^p + C_{p+1}^p + \cdots + C_n^p = C_{n+1}^{p+1}$$

2°) a) Vérifier que : $C_k^{p+1}+C_k^p = C_{k+1}^{p+1}$

b) Montrer que : $C_p^p + C_{p+1}^p + \cdots + C_n^p = C_{n+1}^{p+1}$

Solution :

1°) $C_p^p + C_{p+1}^p + \cdots + C_n^p = C_{n+1}^{p+1}$?

Montrons par récurrence sur n

Initialisation :

Pour $n=p$ on a ; $C_p^p = C_{p+1}^{p+1}$ la relation est donc vraie pour $n=p$.

Transmission :

Supposons qu'elle est vraie pour n et montrons qu'elle l'est pour $n+1$

$C_p^p + C_{p+1}^p + \cdots + C_n^p = C_{n+1}^{p+1}$

$C_p^p + C_{p+1}^p + \cdots + C_n^p + C_{n+1}^p = C_{n+2}^{p+1}$?

On a ; $C_p^p + C_{p+1}^p + \cdots + C_n^p + C_{n+1}^p = C_{n+1}^{p+1} + C_{n+1}^p$

$$=\frac{(n+1)!}{\big(n+1-(p+1)\big)!\,(p+1)!}+\frac{(n+1)!}{(n+1-p)!\,p!}=\frac{(n+1)!}{(n-p)!\,(p+1)!}+\frac{(n+1)!}{(n+1-p)!\,p!}$$

$$=\frac{(n+1)!}{(n-p)!\,(p+1)!}+\frac{(n+1)!}{(n+1-p)(n-p)!\,p!}=\frac{(n+1)!\,(n+1-p)}{(n-p)!\,(p+1)!\,(n+1-p)}+\frac{(n+1)!\,(p+1)}{(n+1-p)(n-p)!\,p!\,(p+1)}$$

$$=\frac{(n+1)!\,(n+1-p)+(n+1)!\,(p+1)}{(n+1-p)(n-p)!\,p!\,(p+1)}=\frac{(n+1)!\,(n+1-p+p+1)}{(n-p+1)!\,(p+1)!}$$

$$=\frac{(n+1)!\,(n+2)}{(n-p+1)!\,(p+1)!}=\frac{(n+2)!}{\big(n+2-(p+1)\big)!\,(p+1)!}=C_{n+2}^{p+1}\Longrightarrow \boldsymbol{C_{n+1}^{p+1}+C_{n+1}^{p}=C_{n+2}^{p+1}}$$

D'où, la propriété est vraie pour $n+1$.

2°) a) $C_k^{p+1}+C_k^p = C_{k+1}^{p+1}$? $C_k^{p+1}+C_k^p=\frac{k!}{(k-p-1)!(p+1)!}+\frac{k!}{(k-p)!p!}$

$$=\frac{k!\,(k-p)}{(k-p-1)!\,(p+1)!\,(k-p)!}+\frac{k!\,(p+1)}{(k-p)!\,p!\,(p+1)}=\frac{k!\,(k-p)+k!\,(p+1)}{(k-p)!\,(p+1)!}$$

$$= \frac{kk! - pk! + pk! + k!}{(k-p)!\,(p+1)!} = \frac{kk! + k!}{(k-p)!\,(p+1)!} = \frac{k!\,(k+1)}{(k-p)!\,(p+1)!} = \frac{(k+1)!}{\big(k+1-(p+1)\big)!\,(p+1)!} = C_{k+1}^{p+1}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{C_k^{p+1} + C_k^p = C_{k+1}^{p+1}}$$

$\boldsymbol{b)}\ \sum_{k=p+1}^{n}\left(C_k^{p+1} + C_k^p\right) = \sum_{k=p+1}^{n} C_{k+1}^{p+1} = C_{p+2}^{p+1} + C_{p+3}^{p+1} + \cdots + C_n^{p+1} + C_{n+1}^{p+1}$

$$= C_{p+1}^{p+1} + C_{p+2}^{p+1} + C_{p+3}^{p+1} + \cdots + C_n^{p+1} + C_{n+1}^{p} + \cdots + C_n^p$$

$$\Rightarrow C_{n+1}^{p+1} = C_{p+1}^{p+1} + C_{p+1}^{p} + \cdots + C_n^p \Rightarrow C_{n+1}^{p+1} = C_{p+1}^{p+1} - C_p^p + C_p^p + C_{p+1}^p + \cdots + C_n^p$$

$$\Rightarrow C_{n+1}^{p+1} = 1 - 1 + C_p^p + C_{p+1}^p + \cdots + C_n^p \Rightarrow \boldsymbol{C_p^p + C_{p+1}^p + \cdots + C_n^p = C_{n+1}^{p+1}}$$

Exercice 12 :

1°) Montrer que ; $\forall n, p \in \mathbb{N},\ p+2 \leq n$, on a : $C_n^p = C_{n-2}^p + 2C_{n-2}^{p-1} + C_{n-2}^{p-2}$

2°) Montrer que; $\forall n, p,\ p \geq 1,\ p-1 \leq n$, on a : $pC_{n+1}^p = (n+1)C_n^{p-1}$

3°) En déduire que : $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} C_n^k$.

Solution :

1°) $C_{n-2}^p + 2C_{n-2}^{p-1} + C_{n-2}^{p-2} = C_{n-2}^p + C_{n-2}^{p-1} + C_{n-2}^{p-1} + C_{n-2}^{p-2} = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1} = C_n^p$

$$\Rightarrow \boldsymbol{C_n^p = C_{n-2}^p + 2C_{n-2}^{p-1} + C_{n-2}^{p-2}}$$

2°) $pC_{n+1}^p = \frac{p(n+1)!}{(n+1-p)!\,p!} = \frac{p(n+1)!}{(n+1-p)!\,p(p-1)!} = \frac{(n+1)!}{(n+1-p)!\,(p-1)!} = \frac{(n+1)n!}{\big(n-(p-1)\big)!\,(p-1)!}$

$$= (n+1)\frac{n!}{\big(n-(p-1)\big)!\,(p-1)!} = (n+1)C_n^{p-1} \Rightarrow \boldsymbol{pC_{n+1}^p = (n+1)C_n^{p-1}}$$

Exercice 13 :

On considère la fonction : $f(x) = (1+x)^n,\ (n \in \mathbb{N})$

1°) Calculer $f'(x)$ et en déduire la somme : $\sum_{k=1}^{n} kC_n^k$

2°) En s'inspirant de **1°)**, calculer les sommes : $\sum_{k=1}^{n} k(k-1)C_n^k$, $et\ \sum_{k=2}^{n} k^2 C_n^k$

Solution :

1°) $f(x) = (1+x)^n \Rightarrow \boldsymbol{f'(x) = n(1+x)^{n-1}}$

$f(x) = (1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (1)^{n-k} x^k$; $\quad f(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \cdots + C_n^n x^n$

$$\boldsymbol{f'(x) = 2C_n^1 x + 3C_n^2 x^2 + \cdots + nC_n^n x^{n-1}}$$

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{n} kC_n^k x^k, \qquad et\ f'(1) = n.2^{n-1} \Rightarrow \boldsymbol{\sum_{k=1}^{n} kC_n^k = n.2^{n-1}}$$

On a $f'(x) = n(1+x)^{n-1} \Rightarrow f''(x) = n(n-1)(1+x)^{n-2} \Rightarrow \boldsymbol{f''(1) = n(n-1).2^{n-2}}\boxed{1}$

$f''(x) = 2C_n^2 + 6C_n^3 x + 12C_n^4 x^2 + \cdots + n(n-1)C_n^n x^{n-2}$

$f''(1) = 2C_n^2 + 6C_n^3 + 12C_n^4 + \cdots + n(n-1)C_n^n \Rightarrow \boldsymbol{f''(1) = \sum_{k=2}^{n} k(k-1)C_n^k}\boxed{2}$

De $\boxed{1}$ **et** $\boxed{2}$ $\Rightarrow \boldsymbol{\sum_{k=2}^{n} k(k-1)C_n^k = n(n-1).2^{n-2}}$

$$\sum_{k=2}^{n} k(k-1)C_n^k = n(n-1).2^{n-2} \Rightarrow \sum_{k=2}^{n} k^2 C_n^k - \sum_{k=2}^{n} kC_n^k = n(n-1).2^{n-2}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=2}^{n} k^2 C_n^k = \sum_{k=2}^{n} kC_n^k + n(n-1).2^{n-2} = \sum_{k=2}^{n} kC_n^k - C_n^1 + n(n-1).2^{n-2}$$

$$= n.2^{n-1} + n(n-1).2^{n-2} - n = n\big[\big(2+(n-1)\big)2^{n-2} - 1\big] = n[(n+1)2^{n-2} - 1]$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\sum_{k=2}^{n} k^2 C_n^k = n\big[(n+1)2^{n-2} - 1\big]}$$

Applications :

Listes :

Exemple 1 :

L'allumage d'une grande salle de jeux, est assuré par 10 ampoules commandées chacune par un interrupteur. Combien y-t-il de manières différentes d'éclairer cette salle ?

Réponse :

- On note 1 pour : une ampoule est allumée ; 0 pour : une ampoule est éteinte
- On pose : $\Omega = \{0\,;1\}$.
- Chaque manière d'éclairer la salle est une $10 - liste$ dans Ω différentes de la $10 - liste$ (0 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0), qui correspond à la salle non éclairée.
- Donc, le nombre de manières d'éclairer la salle est : $2^{10} - 1 = 1024 - 1 =$ **1023**

Arrangements :

Exemple 2 :

Combien de façons différentes a-t-on pour ranger 3 livres dans 5 casiers de couleurs différentes ne pouvant contenir chacun qu'un seul livre?

Réponse :

- On note C_1 ; C_2 ; C_3 ; C_4 ; C_5 ; les cinq casiers.
- On pose : $\Omega = \{C_1\ ;\ C_2\ ;\ C_3\ ;\ C_4\ ;\ C_5\}$.
- Chaque façon de ranger les 3 livres est un $3 - arrangement$ dans Ω, alors, le nombre de façons différentes de ranger les livres est : $A_5^3 = \frac{5!}{2!} = \frac{5\times4\times3\times2\times1}{2!} = 60$.

Tirages :

Exemple 3 :

Une caisse contient 7 boules indiscernables au toucher.

1°) On tire au hasard <u>successivement avec remise</u> 3 boules de la caisse. Quel est le nombre de tirages possibles ?

2°) On tire maintenant <u>successivement sans remise</u> 3 boules de la caisse. Quel est le nombre de tirages possibles ?

3°) On tire maintenant <u>simultanément</u> 3boules de la caisse. Quel est le nombre de tirages possibles?

Réponse :

- On note : b_1 ; b_2 ; b_3 ; b_4 ; b_5 ; b_6 ; b_7, les 7boules.
- On pose : $\Omega = \{b_1\ ;\ b_2\ ;\ b_3\ ;\ b_4\ ;\ b_5\ ;\ b_6\ ;\ b_7\}$.

1°) Chaque tirage successif avec remise de 3 boules est une 3-liste dans Ω.

Donc ; le nombre de tirages possibles est : $7^3 = 7\times7\times7 =$ **343.**

2°) Chaque tirage successif sans remise de 3 boules est un 3-arrangement dans Ω.

Donc ; le nombre de tirages possibles est : $A_7^3 = \frac{7!}{4!} = 7\times6\times5 = \mathbf{210}$..

3°) Chaque tirage simultané de 3 boules est une combinaison de 3 éléments de Ω.

Donc ; le nombre de tirages possibles est : $C_7^3 = \frac{7!}{3!4!} = \frac{7!}{3!4!} = \frac{7\times6\times5}{3\times2\times1} = \mathbf{35}$..

Nombre de parties d'un ensemble fini :

Exemple 4 :

1°) a) Montrer que $\forall\, k \in \mathbb{N} : (k+1)! - k! = k\,k!$

b) Calculer la somme : $S = 1\times1! + 2\times2! + 3\times3! + \cdots + 2019\times2020!$

2°) a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$.

b) Quel est le nombre de parties d'un ensemble Ω ayant 0 élément(s) ?

Réponse :

1) a) On a : $\forall k \in \mathbb{N}\,;\,(k+1)! = (k+1)k!$

Donc ; $\forall k \in \mathbb{N}\,;\ (k+1)! - k! = (k+1)k! - k! = (k+1-1)k! = kk!$

D'où ; $\forall k \in \mathbb{N}:\ (k+1)! - k! = kk!$

b) $S = \sum_{k=1}^{2020} kk! = \sum_{k=1}^{2020}\big((k+1)! - k!\big) = (2! - 1!) + (3! - 2!) + (4! - 3!) + \cdots + (2021! - 2020!)$

$= 2021! - 1$.Donc ; $S = 2021! - 1$.

2) a) On a ; $\forall a, b \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}: (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$. Donc ; $a = b = 1$, on a :

$\sum_{k=0}^{n} C_n^k 1^{n-k} 1^k = (1+1)^n = 2^n$. D'où ; $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$

b) Le nombre de parties de Ω à 0 élément est C_n^0.

Exercices Généraux

1. Les numéros de téléphones d'un réseau téléphonique sont des nombres entiers de 6 chiffres. Quelle est la capacité de ce réseau ?

2. On lance deux dés cubiques de couleurs différentes, un noir et un jaune. On relève dans l'ordre le numéro présenté par le dé noir, puis celui présenté par le dé jaune. Schématiser l'ensemble des résultats possibles. Quels est le nombre de résultats possibles ?

3. Combien de façons différentes 3 personnes peuvent occuper 5 chaises ?

4. Combien de groupes de 7 élèves peut-on former dans une classe de 12 élèves ?

5. De combien de manières différentes peut-on distribuer 5 stylos à 5 élèves ?

6. 1°) 3 personnes occupent au hasard des places dans une voiture à 5 places. Quel est le nombre de façons différentes possibles ?

2°) Le chauffeur et 3 personnes occupent des places dans une voiture à 5 places, le chauffeur occupe la place de commande. Quel est le nombre de façons différentes possibles ?

7. Une caisse contient 8 boîtes dont 3 noires, 3 jaunes et 2 blanches.

1°) On tire au hasard 3 boules simultanément

a) Quel est le nombre de tirage possible ?

b) Quel est le nombre de tirage contenant 1 seule boule noire ?

c) Quel est le nombre de tirage contenant au moins une boule noire?

2°) On tire maintenant au hasard 2 boules simultanément.

a) Quel est le nombre de tirages possibles ?

b) Quel est le nombre de tirages contenant deux boules de mêmes couleurs ?

c) Quel est le nombre de tirages contenant deux boules de couleurs différentes ?

8. Une caisse contient cinq boules numérotées 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5.On tire successivement deux boules sans remise.

1°) Quel est le nombre de tirages possibles ? Schématiser le nombre de tirages possibles.

2°) Quel est le nombre de tirages donnant a + b > 7. (a et b les numéros des boules tirées).

9. 1°) Montrer que ; $\forall n \in \mathbb{N}$; $\sum_{k=1}^{n}(-1)^k C_n^k = 0$

2°) Montrer que ; $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $\sum_{k=1}^{n} kC_n^k = n2^{n-1}$

10. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante :

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k 2^k x^k = 0$$

11. Une caisse contient 4 boules numérotées de 1 à 4.

1°) On tire successivement avec remise deux boules.

a) Donner le nombre de tirages possibles, et schématiser ce nombre.

b) Quel est le nombre de tirages donnant $|a - b| = 1$ (a et b les numéros de boules tirées) ?

2°) On tire maintenant <u>successivement sans remise</u> deux boules.

a) Donner le nombre de tirages possibles et schématiser ce nombre.

b) Quel est le nombre de tirages donnant : $|a-b = 1$.

3°) On tire maintenant <u>simultanément</u> deux boules.

a) Donner le nombre de tirages possibles et schématiser ce nombre.

b) Quel est le nombre de tirages donnant : $|a-b| = 1$.

12. On lance une pièce de monnaie mauritanienne trois fois de suite. On note a chaque fois la nature de la face visible(A : pour face en Arabe et F : pour face en Français). Quel est le nombre de résultats possibles ? Schématiser ces résultats à l'aide d'un arbre.

13. La fabrication d'une pièce nécessite de passer par celle-ci sur quatre machines A, B, C, D. déterminer les trajets possibles dans chacun des cas suivants :

a) L'ordre de passage est indifférent.

b) La pièce doit d'abord passer par A ;

c) La pièce doit passer par B avant C et D

14. Soit T l'ensemble des naturels formés de 3 chiffres distincts non nuls a, b, c.

a) Quel est le cardinal de T ?

b) Calculer la somme des naturels de T.

15. Une urne A contient 2 boules blanches, 3 boules bleues et 5 boules rouges. Une urne B contient 4 boules bleues. On tire simultanément 2 boules de l'urne A que l'on place dans l'urne B, puis on tire 3 boules simultanément de l'urne B.

Quel est le nombre de tirages tricolores possibles ?

16. Démontrer que pour tous naturels n et P tels que $p \geq 1$ et $n \geq p-1$ on a $pC_{n+1}^{p} = (n+1)C_n^{p-1}$

Chapitre 15 : STATISTIQUES

1. Le langage statistique

Définitions :

a. Population :

La population est l'ensemble sur lequel porte l'étude statistique. Ses éléments sont également appelés des individus. Un sous ensemble de la population s'appelle un échantillon.

b. Caractère :

Une propriété retenue, ou un critère sur lequel porte l'étude pour analyser une population est appelé caractère.
S'il prend des valeurs chiffrées, on dit que le caractère est numérique ou quantitatif (*par exemple, la taille des élèves d'une classe…*).
Sinon, on dit que le caractère est qualitatif (*par exemple, les loisirs d'une personne, ou le métier d'une personne…*).
Notre étude portera ici exclusivement sur les caractères quantitatifs

c. Classe :

Quand on répartit la population étudiée en un nombre fini de classes, pour lesquelles le caractère prend une même valeur ou un même ensemble de valeurs.
Les données doivent être suffisamment précises pour que tout individu appartienne à une classe et une seule.

d. Effectif, fréquence, pourcentage :

Définitions :

L'effectif n d'une classe est le nombre d'individus chez lesquels on observe cette valeur du caractère.
La fréquence f d'une classe est le quotient de l'effectif n relatif à cette valeur par l'effectif total N de la population étudiée ; $f = \frac{n}{N}$.

- **La distribution des fréquences** est la liste des fréquences des valeurs du caractère.
- **Le pourcentage** p d'une classe s'obtient en multipliant sa fréquence f par 100 ; $\boldsymbol{p = 100 \times f = 100 \times \frac{n}{N}}$

Remarque1 :

Toute fréquence est comprise entre 0et 1, tout pourcentage est compris entre 0 et 100.
Comme la somme des effectifs de toutes les classes vaut N, la somme de leurs fréquences vaut 1 et la somme de leurs pourcentage vaut 100.

e. Effectifs cumulés, fréquences cumulées :

Définitions :

On considère un caractère quantitatif.

- **L'effectif cumulé** correspondant à un nombre x est le nombre d'individus ayant une valeur du caractère inférieure ou égale à x
 (*effectif cumulé croissant*), ou supérieure ou égale à x (*effectif cumulé décroissant*).
- **La fréquence cumulée** correspondant à un réel x s'obtient en divisant l'effectif cumulé par l'effectif total N.

2. Séries statistiques à une variable

A. Les critères de la tendance centrale :

a. Série statistique :

Définition :

On considère un caractère numérique appliqué à une population étudiée.
L'ensemble des données ainsi obtenues forme une série statistique à une variable.
Plus généralement, on appelle série statistique, tout ensemble de couples $(x_i;\ n_i)$.
où $x_i$est la valeur ou le caractère et où n_i est l'effectif avec $1 \leq i \leq n$
Si à chaque classe est associée une seule valeur du caractère ($x_i \in \mathbb{N}$), on dit que le caractère est discret.
Si à chaque classe est associé un intervalle de valeurs ($x_i \in \mathbb{D}$), on dit que le caractère est continu.
Si x_i n'est pas numérique, on dit que la série est qualitative.

Exemple 1 :

On a relevé le nombre de frères et de sœurs d'un groupe de 50 élèves.On a obtenu les résultats suivants :

$Nbre\ frères\ et\ soeurs$	0	1	2	3	4
$Effectifs$	13	19	15	2	1

La population étudiée est le groupe de 50 élèves.
Le caractère étudié est le nombre de frères et sœurs ; c'est un caractère numérique discret.

Exemple 2 :

Au cours d'une visite médicale, on a pesé 60 personnes. Les résultats obtenus exprimés en kg, sont donnés par le tableau suivant :

$Poids\ (kg)$	$]40;45]$	$]45;50]$	$]50;55]$	$]55;60]$	$]60;65]$	$]65;70]$
$Effectif$	6	10	12	19	9	4

La population étudiée est le groupe de 60 personnes.

Le caractère étudié est le poids ; c'est un caractère numérique continu.

b. Caractéristiques de position ou critères de la tendance centrale :

▪ Etendue :

L'étendue d'une série statistique à une variable est la différence entre les valeurs extrêmes observée du caractère.

Exemple 3 :

Dans l'exemple 1, l'étendue est ; $4 - 0 = 4$.

Dans l'exemple 2, l'étendue est ; $70 - 40 = 30$.

▪ Mode ou classe modale :

Si le caractère est discret, le mode est la valeur du caractère correspondant à l'effectif le plus grand (*il peut y avoir plusieurs modes*).

Exemple 4 :

Dans l'exemple précédent, le mode est 1 car il correspond à l'effectif maximum 20.

Si le caractère est continu, la classe modale est l'intervalle de valeurs du caractère correspondant à l'effectif le plus grand (*il peut y avoir plusieurs classes modales*).

Exemple 5 :

Dans l'exemple précédent, la classe modale est l'intervalle $]55;60]$ car il correspond à l'effectif maximum 19.

▪ Médiane :

La médiane M d'une série statistique partage cette série en deux parties de telle sorte que :

- Au moins la moitié des valeurs sont inférieures ou égale à la médiane ;
- Au moins la moitié des valeurs sont supérieures ou égale à la médiane.

Exemple 6 :

La médiane de la série : 2 ; 3 ; 5 ; **10** ; 12 ; 19 ; 20 est **10**.

La médiane de la série : 2 ; 3 ; **5** ; **10** ; 12 ; 19 est $\frac{5+10}{2} = 7{,}5$.

Calcul de la médiane :

Si la série contient n valeurs rangées dans l'ordre croissant :

- Si n est impair ; la médiane est la $\frac{n+1}{2}^{\text{ième}}$ valeur de la série.

- Si n est pair ; la médiane est la demi- somme des $\frac{n}{2}^{\text{ième}}$ et $\frac{n+1}{2}^{\text{ième}}$ valeurs de la série.

Exemple 7 :

Valeur	1	2	3	7
Effectif	3	5	4	9

$n = 3+5+4+9 = 21$ **impair.**

$\frac{21+1}{2} = 11$

La médiane est la 11e valeur donc : 3.

Valeur	1	2	3	7
Effectif	3	5	4	12

$n = 3+5+4+12 = 24$ **pair.**

$\frac{n}{2} = \frac{24}{2} = 12 \quad \frac{n}{2}+1 = 13$

$Me = \frac{12^e \text{ valeur} + 13^e \text{ valeur}}{2} = \frac{3+7}{2} = 5$

Plus généralement, si le caractère est discret, une médiane est un réel M séparant la population étudiée en deux groupes de même effectif.

Notons G_1 le groupe des individus ayant une valeur du caractère inférieure ou égale à M.

Notons G_2 le groupe des individus ayant une valeur du caractère supérieure ou égale à M.

Dire que M est une médiane, signifie que G_1 et G_2 ont même effectif.

On peut remarquer que pour un caractère discret, la médiane n'est pas toujours précisément définie.

C'est le cas de l'exemple 1.

La moyenne arithmétique est la somme de toutes les valeurs divisée par le nombre de valeurs.
On considère un caractère numérique x_i. On peut présenter les données sous la forme ;

$Valeur\ du\ caractère\ ou centre\ de\ l'intervalle$	x_1	x_2	x_3	…	x_p
$Effectifs$	n_1	n_2	n_3	…	n_p

Soit l'effectif total ; $\boldsymbol{N = n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_p}$

La moyenne arithmétique de la série est le réel noté ; $\boldsymbol{\overline{X} = \frac{n_1x_1+n_2x_2+n_3x_3+\cdots+n_px_p}{N}}$

Notons les fréquences correspondantes ;f_1; f_2; f_3; …; f_p.

On a ; $f_1 = \frac{n_1}{N}$; $f_2 = \frac{n_2}{N}$; $f_3 = \frac{n_3}{N}$; …; $f_p = \frac{n_p}{N} \Longrightarrow \boldsymbol{\overline{X} = f_1 + f_2 + f_3 + \cdots + f_p}$

- **Linéarité de la moyenne arithmétique :**

Propriété :

Lorsque, pour chaque individu, on additionne les valeurs observées pour deux caractères, la moyenne des valeurs ainsi obtenues est égale à la somme des moyennes des valeurs observées pour chacun des deux caractères.
Lorsque l'on multiplie toutes les valeurs observées pour un caractère par un même nombre réel k, la moyenne des valeurs ainsi obtenues est égale au produit de la moyenne des valeurs observées par le nombre k.

Exercice :

Démontrer cette propriété.

Exemple 8 :

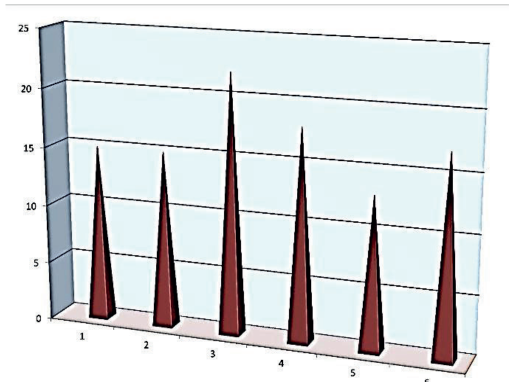
On a lancé un dé 100 fois, et on a obtenu les résultats suivants :
4; 6; 1; 2; 5; 2; 1; 2; 3; 5; 4; 3; 1; 6; 6; 4; 2; 2; 3; 3; 1; 4; 6; 4; 2; 6; 4; 3; 6; 4; 6; 3; 3; 4; 4; 6 ;
2; 3; 1; 2; 5; 6; 5; 5; 3; 3; 5; 4; 1; 3; 1; 3; 2; 4; 5; 6; 4; 4; 6; 1; 3; 6; 2; 6; 5; 6; 3; 4; 6; 3; 4; 5;
3; 1; 5; 1; 3; 5; 2; 3; 6; 1; 5; 3; 4; 2; 2; 4; 1; 5; 1; 4; 6; 1; 2; 3; 2; 1; 3; 3.

1°) Ordonner les données ;
2°) Préciser la population et la variable étudiée ;
3°) Quelles sont les modalités ?
4°) Déterminer l'effectif et la fréquence de chaque modalité ;
5°) Le dé est-il équilibré ?
6°) Représenter ces données dans un diagramme en bâtonnets

Réponse :

1°) Pour ranger les résultats de lancers par ordre de façon méthodique et sûre, on peut cocher tous les « 1 », puis tous les « 2 », etc.
On vérifie bien que tous les nombres ont été cochés et que l'on a cent valeurs. On obtient donc ;
1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 2; 2; 2; 2; 2; 2; 2; 2; 2; 2; 2; 2; 2; 2; 2;
3; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 4; 4; 4; 4; 4; 4; 4; 4; 4; 4; 4; 4; 4; 4; 4; 4; 4; 4;
5; 5; 5; 5; 5; 5; 5; 5; 5; 5; 5; 5; 5; 6; 6; 6; 6; 6; 6; 6; 6; 6; 6; 6; 6; 6; 6; 6; 6; 6.

2°) La population étudiée est l'ensemble des 100 lancers du dé. La variable est le nombre qui apparaît sur la face supérieure du dé.



3°) Les modalités sont 1; 2; 3; 4; 5; 6.

4°) Déterminons l'effectif et la fréquence de chaque modalité ;

$Modalités$	1	2	3	4	5	6
$Effectifs$	15	15	22	18	13	17
$Fréquences$	0,15	0,15	0,22	0,18	0,13	0,17

5°) Les fréquences d'apparition des différentes faces sont sensiblement différentes.
Le dé n'est pas équilibré ; On a par exemple beaucoup plus de 3 que de 5.

169

Exemple 9 :

Le tableau suivant donne les notes (*sur* 10) obtenues par les élèves d'une classe lors d'un test.

$Notes$	3	4	5	6	7	8	9
$Effectifs$	1	4	8	9	7	5	2

1°) Construire un tableau contenant les effectifs cumulés, les fréquences et les fréquences cumulées ;

2°) Déterminer ;

a) Le nombre d'élèves ayant une note strictement inférieure à 5 ;

b) Le nombre d'élèves ayant une note supérieure à 7 ;

c) Le pourcentage des élèves qui peuvent dire « j'ai la moyenne » (*c'est-à-dire une note supérieure à* 6).

Pensez-vous que le terme "moyenne" soit adapté à ce sujet ?

Réponse :

Voici le tableau demandé

$Notes$	3	4	5	6	7	8	9
$Effectifs$	1	4	8	9	7	5	2
$Effectifs\ cumulés$	1	5	13	22	29	34	36
$Fréquences$	0,028	0,111	0,222	0,25	0,194	0,139	0,056
$Fréquences\ cumulées$	0,028	0,139	0,361	0,611	0,806	0,944	1

Pour calculer les fréquences cumulées, il faut diviser les effectifs cumulés par l'effectif total et éviter de cumuler les fréquences de façon à limiter les erreurs d'arrondi.

2°)a) D'après le tableau, on lit 5 élèves ont une note strictement inférieur à 5.

b)14 élèves ont une note supérieures à 7.

c) A partir du tableau, on peut confirmer que 13,9% des élèves ont une note inférieure ou égale à 4. Donc 86,1% des élèves peuvent affirmer « j'ai la moyenne » $(86{,}1 = 100 - 13{,}9)$.

Le mot moyenne est pris ici au sens scolaire du terme, (la moitié de la note maximale) et non le sens statistique.

Exemple 10 :

Dans une classe de 25 élèves, les notes obtenues lors d'un devoir sont les suivantes ;

14; 15; 4; 7; 11; 14; 9; 10; 12; 12; 16; 10; 18; 13; 12; 3; 11; 14; 12; 13; 13; 6; 12; 10; 7.

1°) Déterminer l'étendue et le mode de cette série ;

2°) Calculer la moyenne arithmétique ;

3°) Quel est le pourcentage d'élèves ayant une note supérieure ou égale à 10.

Réponse :

1°) On commence par trier les résultats, c'est-à-dire que l'on compte les effectifs correspondant à chaque note. A l'issue de ce regroupement, la série des notes peut se présenter de la façon suivante :

$Notes$	3	4	6	7	9	10	11	12	13	14	15	16	18
$Effectifs$	1	1	1	2	1	4	2	5	2	3	1	1	1

L'étendue de la série est : $18 - 3 = 15$.

Son mode vaut 12, car, c'est la note obtenue le plus de fois.

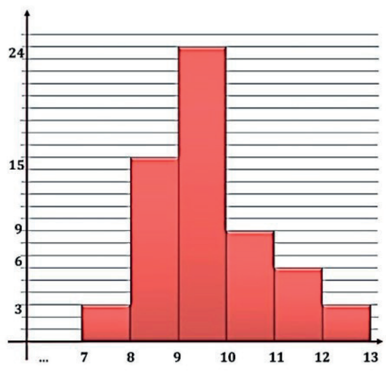
2°)La moyenne arithmétique c'est ; $\bar{X} = \frac{1}{25}(1 \times 3 + 1 \times 4 + 1 \times 6 + \cdots + 18 \times 1) \Longrightarrow \bar{X} = \frac{275}{25} = 11$

3°) Le nombre d'élèves ayant une note supérieure ou égale à la moyenne : $4 + 2 + 5 + 2 + 3 + 1 + 1 + 1 = 19$

Le pourcentage correspondant : $\frac{19}{25} \times 100 = 76\%$

Exemple 11 :

On a mesuré 60 épis de blé au centimètre près. Les résultats obtenus sont donnés par l'histogramme de la figure ci-contre :



1°) Déterminer l'étendue et la classe modale de cette série ;

2°) Calculer sa moyenne arithmétique ;

3°) Dans un lot de 140 épis, la moyenne de longueur est d'environ 8,9cm. Quelle est la moyenne des longueurs de l'ensemble des 200 épis ?

Réponse :

1°) D'après la figure illustrant les données, la longueur maximale d'un épi est $13cm$, et la longueur minimale est de $7cm$.

L'étendue est donc ; $13 - 7 = 6cm$.

La classe modale est l'intervalle $[9; 10]$, car c'est dans cette classe qu'il y a le plus d'épis de blé ; 24.

2°) Considérons le tableau suivant :

Centre de l'intervalle	7,5	8,5	9,5	10,5	11,5	12,5
Effectifs	3	15	24	9	6	3

L'effectif total est 60 *épis*. La moyenne arithmétique de la série vaut :

$$\bar{X} = \frac{1}{60}(3 \times 7{,}5 + 15 \times 8{,}5 + 24 \times 9{,}5 + 9 \times 10{,}5 + 6 \times 11{,}5 + 3 \times 12{,}5) = \frac{579}{60} \Longrightarrow \bar{X} = 9{,}65cm$$

3°) D'après **1°**, la somme des longueurs du premier lot vaut $579cm$. Dans le deuxième lot, la somme S des longueurs des 140 *épis* vérifie ; $\frac{S}{140} = 8{,}9cm$

Puisque la moyenne du deuxième lot est d'environ $8{,}9cm$, donc, $S = 140 \times 8{,}9 = 1\,246cm$.

On en déduit que la somme de toutes les longueurs des 200 *épis* est environ égale à ;

$1\,246 + 579 = 1\,825cm$

La moyenne de l'ensemble des 200 *épis* est ; $\frac{1\,825}{200} = 9{,}1cm$.

c. Caractéristiques ou critères de dispersion :

- **Variance :**

Soit une série statistique ; $(x_i;\ n_i)_{1 \leq i \leq p}$ de moyenne $\bar{X}$. La variance est le nombre réel V défini par ;

$$\boldsymbol{V = \frac{n_1(x_1 - \bar{X})^2 + n_2(x_2 - \bar{X})^2 + \cdots + n_p\left(x_p - \bar{X}\right)^2}{n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_p} \Longrightarrow V = \frac{\sum_{i=1}^{p} n_i\,(x_i - \bar{X})^2}{\sum_{i=1}^{p} n_i}}.$$

- **Ecart type :**

L'écart type est le nombre réel positif σ défini par ; $\boxed{\boldsymbol{\sigma = \sqrt{V}}.}$

3. Représentation graphique

Il existe de nombreuses façons de représenter graphiquement les données statistiques.

a. Diagramme en bâtonnets :

Dans un repère orthogonal, on dessine un segment parallèle à l'axe des ordonnées pour figurer chaque modalité. La hauteur de ce segment est proportionnelle à l'effectif de la modalité.

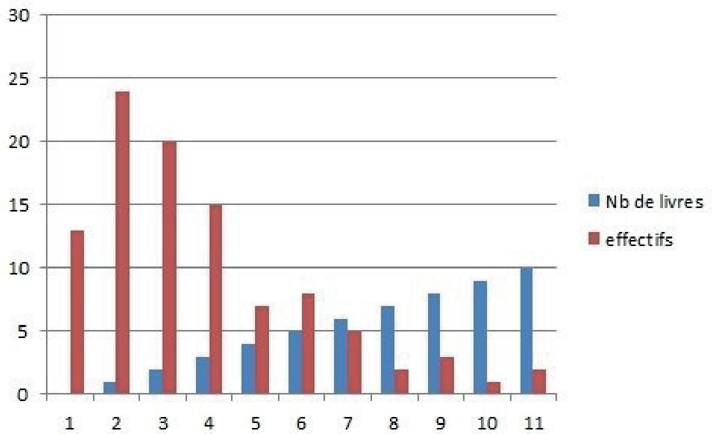
Exemple 12 :

La série suivante donne le nombre de livres lus par an sur une population de 100 personnes, représenter par un diagramme en bâtonnets les données de cette série :

Nbre de livres	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Effectifs	13	24	20	15	7	8	5	2	3	1	2

Réponse :

Représentons par un diagramme en bâtonnets les données de cette série(choisir une graduation sur les axes):



Remarque 2 :

On joint parfois les sommets de deux bâtons consécutifs par un segment de droite.
On obtient ainsi le polygone des effectifs.

b. Histogramme :

Dans le cas où les valeurs de la variable sont regroupées en classes, on utilise un histogramme où chaque classe est représentée par un rectangle dont un côté est la classe sur l'axe des abscisses, et dont l'aire est proportionnelle à l'effectif de la classe.
Si toutes les classes ont la même amplitude (*largeur*), les hauteurs des rectangles sont alors proportionnelles aux effectifs des classes.

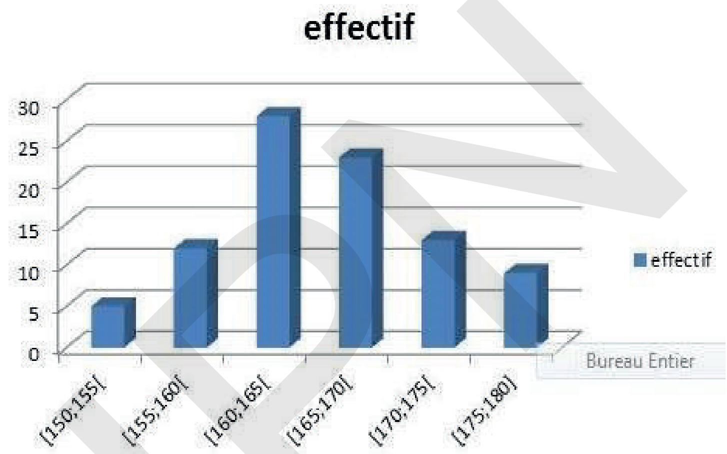
Exemple 13 :

Représenter par un histogramme la répartition d'un groupe d'élèves suivant la taille :

Taille (*en cm*)	$[150;155[$	$[155;160[$	$[160;165[$	$[165;170[$	$[170;175[$	$[175;180]$
effectif	5	12	28	23	13	9

Réponse :

Représentons par un histogramme la répartition d'un groupe d'élèves suivant la taille en choisissant une graduation convenable de chaque axe.



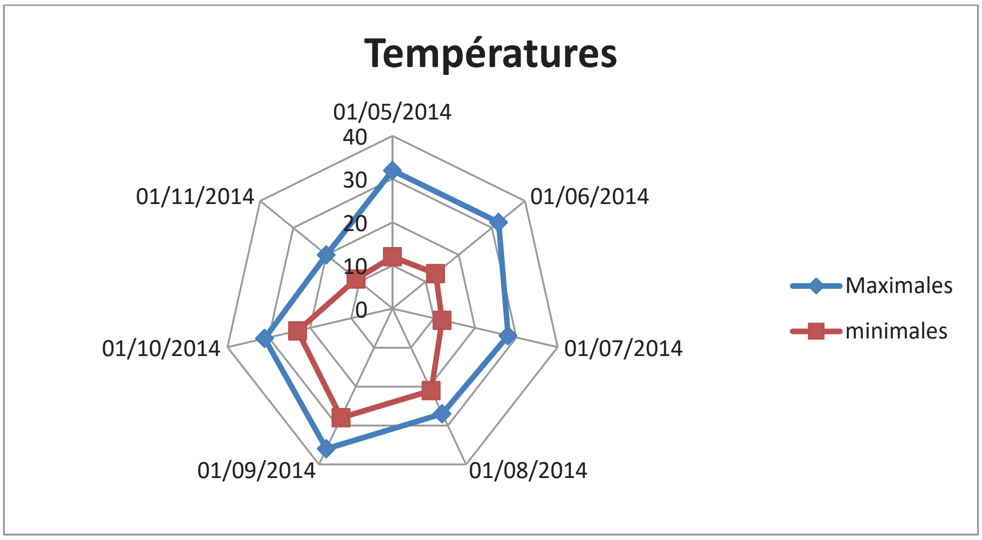
c. Diagramme polaire :(***ou radar***)

Il est utilisé souvent pour des données chronologiques, ce diagramme utilise un axe tournant autour d'un point.
Les différentes positions de l'axe correspondent aux modalités.
Chaque modalité est représentée par un point dont l'écart au centre du graphique est proportionnel à l'effectif de cette modalité.

Exemple 14 :

Le tableau suivant représente les températures maximales et minimales enregistrées en degré Celsius dans une ville mauritanienne sur la semaine du 1 au 7 janvier 2014.
Représenter les données de cette suite statistique par un diagramme polaire :

Date	**T. Maximales**	**T. minimales**
05/01/2014	32	12
06/01/2014	32	13
07/01/2014	28	12
08/01/2014	27	21
09/01/2014	36	28
10/01/2014	31	23
11/01/2014	20	11



d. Diagramme circulaire :

Il s'agit d'un disque partagé en secteurs dont les angles au centre sont proportionnels aux effectifs des modalités qu'ils représentent.

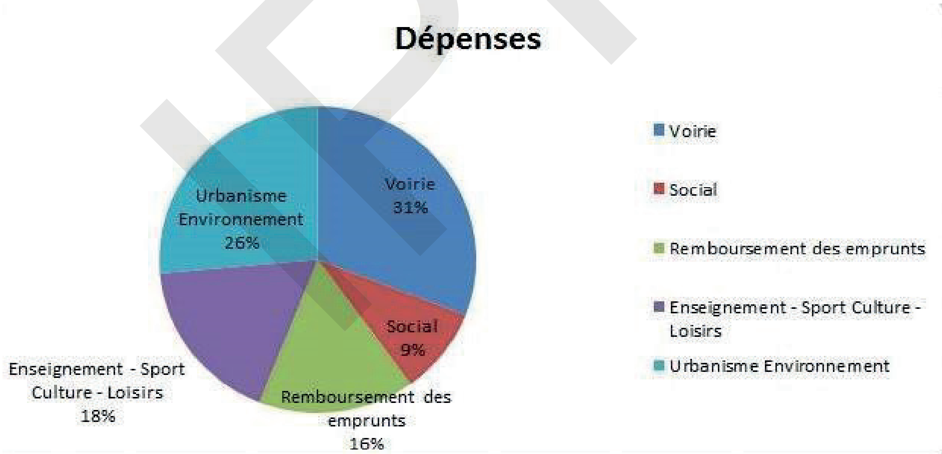
Exemple 15 :

Voici les dépenses d'investissement d'une commune en Ouguiyas, représenter par un diagramme circulaire ces données :

Poste	Voirie	Social	Remboursement des emprunts	Enseignement – Sport Culture – Loisirs	Urbanisme Environnement
Dépenses	9 592 836	2 838 411	4 962 561	5 456 333	8 204 686

Réponse :

Représentons par un diagramme circulaire ces données :



Exemple 16 :

Voici le relevé des températures extérieures maximales et minimales exprimées en degrés Celsius ($°C$) enregistrées dans des zones étrangères, au mois de janvier 1992.

$Mini$	0	0	1	-2	-2	2	4	4	5	5	3	1	0	3	4	5
$Maxi$	1	2	3	2	3	5	7	6	8	8	6	3	3	5	7	9

$Mini$	8	0	-1	0	3	3	3	3	6	4	5	6	3	3	7
$Maxi$	9	10	8	5	7	10	8	9	10	12	6	9	10	10	10

1°) Calculer la moyenne et l'écart type des températures minimales.

2°) Même question avec les températures maximales.

3°) Avec les températures minimales, regrouper les données en classes d'amplitude $2°C$; ($[-2; 0[$, $[0; 2[$, ...)
Même question avec les températures maximales.

Réponse :

Moyenne des températures minimales

$Mini$	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$Effectifs$	2	1	5	2	1	8	4	4	2	1	1

$$\bar{X} = \frac{1}{31}(2\times -2 + 1\times -1 + 5\times 0 + 2\times 1 + 1\times 2 + 8\times 3 + 4\times 4 + 4\times 5 + 2\times 6 + 1\times 7 + 1\times 8)$$

$$= \frac{1}{31}(-4 - 1 + 2 + 2 + 24 + 16 + 20 + 12 + 7 + 8) = \frac{1}{31}\times 86 = \frac{86}{31} \Longrightarrow \boxed{\bar{X} \approx 2.7742}$$

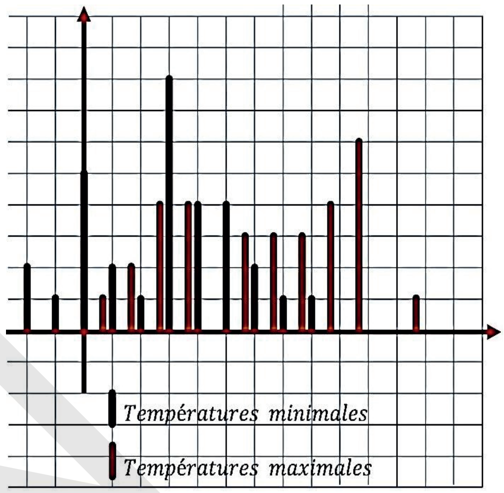
La variance :

$$V = \frac{2\left(-2-\frac{86}{31}\right)^2 + 1\left(-1-\frac{86}{31}\right)^2 + 5\left(0-\frac{86}{31}\right)^2 + \cdots + 1\left(8-\frac{86}{31}\right)^2}{2+1+5+2+1+8+4+4+2+1+1}$$

$$= \frac{2\left(-\frac{148}{31}\right)^2 + 1\left(-\frac{117}{31}\right)^2 + 5\left(-\frac{86}{31}\right)^2 + \cdots + 1\left(\frac{162}{31}\right)^2}{31}$$

$$= \frac{2\left(-\frac{148}{31}\right)^2 + 1\left(-\frac{117}{31}\right)^2 + 5\left(-\frac{86}{31}\right)^2 + \cdots + 1\left(\frac{162}{31}\right)^2}{31}$$

$\boldsymbol{V \approx 6.3683}$



L'écart type : $\boldsymbol{\sigma = \sqrt{V} \approx \sqrt{6.3683} \approx 2.5235}$

Moyenne des températures maximales :

$Maxi$	1	2	3	5	6	7	8	9	10	12
$Effectif$	1	2	4	3	3	3	4	4	6	1

$$\bar{X} = \frac{1}{31}(1\times 1 + 2\times 2 + 4\times 3 + 3\times 5 + 3\times 6 + 3\times 7 + 4\times 8 + 4\times 9 + 6\times 10 + 1\times 12)$$

$$= \frac{1}{31}(1 + 4 + 12 + 15 + 18 + 21 + 32 + 36 + 60 + 12) = \frac{1}{31}\times 197 = \frac{197}{31} \Longrightarrow \boxed{\bar{X} \approx 6.3548}$$

La variance :

$$V = \frac{1\left(1-\frac{197}{31}\right)^2 + 2\left(2-\frac{197}{31}\right)^2 + 4\left(3-\frac{197}{31}\right)^2 + \cdots + 1\left(12-\frac{197}{31}\right)^2}{1+2+4+3+3+3+4+4+6+1}$$

$$= \frac{1\left(-\frac{166}{31}\right)^2 + 2\left(-\frac{135}{31}\right)^2 + 4\left(-\frac{104}{31}\right)^2 + \cdots + 1\left(\frac{175}{31}\right)^2}{1+2+4+3+3+3+4+4+6+1} \Longrightarrow \boldsymbol{V \approx 5.5477.}$$

L'écart type : $\boldsymbol{\sigma = \sqrt{V} \approx \sqrt{5.5477} \approx 2.3553}$

3° a)

$Intervalles$	$[-2;0[$	$[0;2[$	$[2;4[$	$[4;6[$	$[6;8]$
$Effectifs$	3	7	9	8	4

b)

$Intervalles$	$[1;3[$	$[3;6[$	$[6;8$	$[8;10[$	$[10;12$
$Effectifs$	3	7	6	8	7

Exercices Généraux

Organisation de données- Effectifs - Fréquences

1.Soit la série statistique suivante :

x_i	3	4	5	6	7	8	9
n_i	5	8	9	11	9	8	5

1°) Donner le mode, la médiane et calculer la moyenne ;
2°) Compléter un tableau de fréquences et d'effectifs cumulés ;
3°) Représenter sur un diagramme à bâtonnets et tracer le polygone des effectifs ;
4°) Déterminer le nombre de valeurs qui dépassent 7 ;
5°) Déterminer le pourcentage des valeurs qui n'atteignent pas 5 ;
6°) Calculer la variance de cette série, son écart type.

2.On a relevé les tailles, en cm, des élèves de la cinquième année.
173 ; 180 ; 160 ; 174 ; 170 ; 173 ; 163 ; 154 ; 170 ; 176 ; 170 ; 169 ; 164 ; 174 ; 165 ; 177 ; 158 ; 180 ; 162 ; 169 ; 163 ; 170 ; 180 ; 163 ; 170 ; 171 ; 167 ; 184 ; 173 ; 166 ; 174 ; 180 ; 183 ; 171 ; 181 ; 163 ; 173 ; 184 ; 163 ; 178 ; 162 ; 175 ; 161 ; 163 ; 175 ; 172 ; 179 ; 178 ; 180 ; 172 ; 164 ; 162 ; 181 ; 172 ; 179 ; 170 ; 184 ; 182 ; 177 ; 179 ; 177 ; 181 ; 180 ; 178 ; 163 ; 183 ; 177 ; 181 ; 172.
1°) Ordonner les mesures.
2°) Quelle est la population ? Quels sont les individus ?
Quelle est la variable étudiée ?
3°) Regrouper les mesures en classes d'amplitude 4 cm.
4°) Construire le tableau des effectifs cumulés et des fréquences cumulées.
5°) Combien d'élèves ont une taille strictement inférieure à 1,70 cm ?

3.On jette un dé 100 fois et on note la lecture xi. On appelle n_i l'effectif correspondant à la lecture x_i (n_i est le nombre d'apparition du chiffre x_i). On obtient le tableau suivant :

x_i	1	2	3	4	5	6
n_i	20	10	26	14	10	20

Déterminer les fréquences et les fréquences cumulées.

Caractéristiques de position

4.Déterminer le mode, la moyenne, la médiane et l'étendue de la série de l'Ex. 2.

5.Dans un Lycée, trois classes de terminale C ont le même sujet de Mathématiques au cours d'un Bac blanc. Les notes obtenues sont les suivantes :

Terminale C₁	6,5	8	9	10	11	12,5	14	16
	3	**7**	**5**	**3**	**3**	**4**	**1**	**1**

Terminale C₂	7	8	9	10	11	12,5	14	15	17
	2	**5**	**6**	**5**	**3**	**4**	**2**	**1**	**2**

Terminale C₃	6	7,5	9	10	11	12	14	15	17
	4	**4**	**5**	**4**	**2**	**3**	**4**	**2**	**3**

1°) Calculer les moyenne m_1 ; m_2 ; m_3 des notes respectivement en TC_1 ; TC_2 ; TC_3.
2°) En déduire la moyenne m des notes des trois classes réunies.

6.On a relevé l'âge des vingt personnes d'une entreprise :
20 ; 18 ; 36 ; 30 ; 20 ; 24 ; 60 ; 26 ; 40 ; 24 ; 30 ; 32 ; 18 ; 24 ; 50 ; 26 ; 42 ; 28 ; 52 ; 28.
Construire le tableau statistique de la série des âges (indiquer l'effectif, la fréquence, la fréquence cumulée).
Déterminer le mode, la moyenne m, la médiane, l'étendue de cette série statistique.

7.On a mesuré la durée de vie (en certaines heures) de 900 ampoules.
Les résultats ont permis de dresser la courbe des effectifs cumulés croissants.
Faire un tableau avec les classes, les effectifs et les effectifs cumulés croissants.
Déterminer graphiquement une approximation de la médiane.

8.La moyenne des notes d'un élève est actuellement de 12,5 sur 20. Avec une note de 16 sur 20 au prochain contrôle, cette moyenne passerait à 13.
Quel est le nombre de contrôles effectués à ce jour ?

9.La moyenne des notes de Français d'un élève à l'issue des neuf premiers devoirs est 11, 75 sur 20.
Quelle meilleure moyenne peut-il espérer obtenir après un dixième et dernier devoir ?
Sa moyenne peut-elle être inférieure à 10 à l'issue de ce dernier devoir ?

Caractéristiques de dispersion

10. On lance deux dés 60fois de suite et on note, pour chaque lancer, la somme des points obtenus.

Points	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Effectif	2	3	3	5	8	11	9	8	5	3	3

1°) Calculer la moyenne, l'écart moyen et l'écart type de cette série statistique.
2°) Construire les diagrammes en bâtons des effectifs cumulés croissants et décroissants.
En déduire la valeur de la médiane.

11. Lors d'un contrôle de 400 pointes, on relevé la taille (en mm) de chacune d'elles, et regroupé les résultats dans le tableau suivant :

Taille (en mm)	Effectif
28,5	2
28,8	9
29,1	5
29,4	15
29,7	60
30	165
30,3	95
30,6	21
30,9	15
31,12	9
31,5	4

1°) Calculer la moyenne m et l'écart type σ de cette série.

2°) Quel est le pourcentage du nombre de pointes dont la taille est comprise entre $m - \sigma$ et $m + \sigma$

12. Un professeur de français recense le nombre de livres lus par chacun de ses 180 élèves au cours du drenier mois. Il obtient le résultat suivant :

- 18 élèves n'ont lu aucun livre,
- 72 élèves ont lu 1 livres,
- 45 élèves ont lu 2 livres,
- 36 élèves ont lu 3 livres,
- 9 élèves ont lu 4 livres,

1°) Recopier et compléter le tableau suivnat :

Nombre de livres	0	1	2	3	4
Effectif					
Fréquence					
Fréquence (en %)					
Effectif cumulé croissant					
Effectif cumulé décroissant					

Combien d'élèves ont lu au moins 2 livres ? moins de 2 livres ?

2°) Quel est le mode de cette série statistique ?

3°) Calculer la moyenne, l'écart moyen et l'écart type.

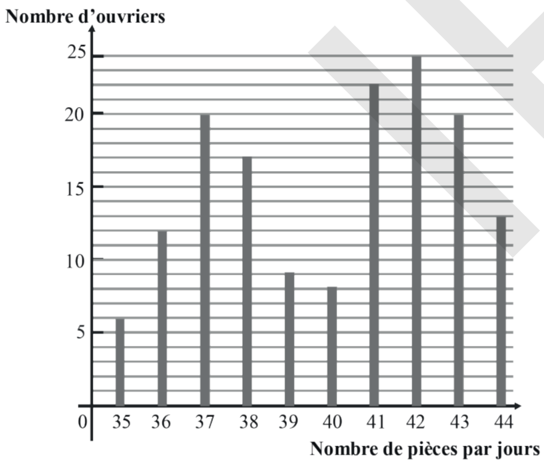
4°) Représenter le résultat de cette enquête par un diagramme circulaire.

13. Une usine utilise deux types de machines, M_1 et M_2, pour produire la même pièce. La direction a relevé la production journalière de chacun de ses ouvriers :

Les ouvriers travaillant sur une machine M_1 produisent entre 35 et 39 pièces par jour ;

Les ouvriers travaillant sur une machine M_2 produisent entre 40 et 44 pièces par jour.

On regroupe ces données dans le diagramme en bâtons suivant :



Organiser les données dans un tableau faisant apparaître les effectifs (nombre d'ouvriers) ni

Représentation graphique

14. On a relevé la taille (en m) de 50 individus.

Les résultats obtenus sont les suivants :

1,71 ; 1,72 ; 1,82 ; 1,57 ; 1,75 ; 1,78 ; 1,96 ; 1,67 ; 1,63 ; 1,72 ; 1,67 ; 1,73 ; 1,77 ; 1,69 ; 1,78 ; 1,71 ; 1,82 ; 1,62 ; 1,74 ; 1,69 ; 1,7 ; 1,79 ; 1,65 ; 1,75 ; 1,7 ; 1,84 ; 1,64 ; 1,73 ; 1,68 ; 1,74 ; 1,78 ; 1,68 ; 1,79 ; 1,74 ; 1,6 ; 1,73 ; 1,72 ; 1,79 ; 1,74 ; 1,75 ; 1,68 ; 1,74 ; 1,69 ; 1,73 ; 1,64 ; 1 ;74 ; 1,67 ; 1,72 ; 1,63 ; 1,75.

Regrouper les données dans un tableau suivant les classes [1,5 ; 1,6[; [1,6 ; 1,65[; [1,65 ; 1,7[; [1,7 ; 1,75[; [1,75 ; 1,8[; [1,8 ; 1,9[; [1,9 ; 2[.

Construire l'histogramme correspondant (une classe d'amplitude 0,1 sera représentée par un rectangle de base 3 cm et le rectangle représentant la classe [1,65 ; 1,7[aura une hauteur de 2 cm).

15. Le tableau ci-dessous recense les têtes de bétail (bovin et ovin) dans certains pays africains :

	Bovin(×1000)	**Fréquence**	Ovin(×1000)	**Fréquence(%)**
Burkina	4250			19,85
Cameroun	5 000			13,7
Guinée	1 750			1,6
Mali	5 500			18,6
Mauritanie	1 369			
Niger	4 750			18,75
Sénégal	2 750			16,6
Tchad	4 750			7,55
Total	Total		28 000	

1°) Compléter le tableau des fréquences(**arrondies10^{-3}près).**

2°) Dessiner un diagramme circulaire représentant la répartition de la population de bovins de ces huit pays.

Représenter par un diagramme à bandes les effectifs de la population ovine de ces pays.