

RÉPUBLIQUE ISLAMIQUE DE MAURITANIE

Honneur - Fraternité - Justice



Ministère de l'Education et de la Réforme
du Système d'Enseignement

INSTITUT PEDAGOGIQUE NATIONAL

Mathématiques

6^{ème} SN

Réalisé par :

Daouda Abdoul Diop
Inspecteur de l'enseignement
secondaire

Ely Abdella
Professeur de l'enseignement
secondaire

Révisé par :

Mohameden Sid ahmed
Inspecteur de l'enseignement
secondaire

Mohamed Ahmed Mahmoud Ebety
Professeur de l'enseignement
secondaire

l'illustratrice / maquettiste :

Cheikhoumi Sid'Ahmed Ejjejed Maquettiste /IPN

IPN

PRÉFACE

Dans le cadre de la mise en œuvre des orientations nationales visant l'amélioration de la qualité de l'enseignement et l'adaptation des apprentissages aux exigences du développement, l'Institut Pédagogique National a le plaisir de mettre à la disposition des enseignants et des élèves cette nouvelle collection de manuels scolaires scientifiques destinés au second cycle de l'enseignement secondaire.

Ces ouvrages couvrent l'ensemble des filières du lycée, aussi bien scientifiques que littéraires, dans les disciplines des Mathématiques, des Sciences de la Nature, de la Physique et de la Chimie. Ils ont été élaborés conformément aux programmes officiellement en vigueur et traduisent la volonté des autorités éducatives de garantir à tous les apprenants des ressources pédagogiques de qualité, adaptées aux objectifs de formation et aux réalités de notre système éducatif.

Depuis la réécriture des programmes en 1999 jusqu'à la validation des programmes actuellement en vigueur en 2022, notre système éducatif a connu plusieurs étapes de réforme et de modernisation curriculaires. Toutefois, cette collection marque une avancée historique, puisqu'il s'agit de la première fois que les filières littéraires, notamment les Lettres Modernes (LM) et les Lettres Originelles (LO), bénéficient de manuels scolaires dans les disciplines scientifiques pour tous les niveaux du second cycle, de la 5^e à la 7^e année. Les filières LO ont, en outre, bénéficié de manuels rédigés en langue arabe afin de répondre aux spécificités linguistiques et pédagogiques de ces séries et de garantir une meilleure accessibilité des contenus scientifiques aux apprenants concernés.

Le travail réalisé dans le cadre de ce projet a consisté, d'une part, à la révision de douze titres correspondant aux manuels des disciplines de base dans les différents niveaux du lycée et, d'autre part, à la conception de vingt-deux nouveaux titres couvrant les autres. Cette entreprise éditoriale d'envergure témoigne de l'engagement des autorités éducatives à renforcer les ressources pédagogiques nationales et à accompagner efficacement la mise en œuvre des nouveaux programmes. Conscient de l'importance stratégique du manuel scolaire dans le processus d'enseignement-apprentissage, l'Institut Pédagogique National a mobilisé les meilleures compétences nationales pour la réalisation de cette tâche. Des inspecteurs, des conseillers pédagogiques et des professeurs expérimentés, reconnus pour leur expertise scientifique et pédagogique, ont ainsi été sélectionnés afin de concevoir et de réviser des ouvrages répondant aux exigences de qualité académique, pédagogique et didactique.

Les équipes de conception se sont attachées à produire des manuels clairs, structurés et accessibles, favorisant le développement des connaissances, des compétences et de l'esprit scientifique chez les apprenants. Une attention particulière a été accordée à la cohérence des contenus, à la progressivité des apprentissages, à l'intégration des activités pratiques ainsi qu'à l'exploitation d'illustrations et de situations d'apprentissage adaptées au contexte national.

L'Institut Pédagogique National tient à exprimer sa profonde gratitude à la Banque Islamique de Développement pour l'appui précieux qu'elle a apporté à ce projet. Grâce à son financement, toutes les étapes de cette importante œuvre éducative ont pu être réalisées, depuis la rédaction et la révision des manuscrits jusqu'à leur édition, leur correction et leur impression. Cet accompagnement constitue une contribution majeure au développement de l'éducation et au renforcement de la qualité des apprentissages dans notre pays.

L'Institut Pédagogique National adresse également ses sincères remerciements à tous ceux qui ont contribué à l'aboutissement de cette œuvre : auteurs, relecteurs, inspecteurs, équipes techniques et partenaires ayant accompagné les différentes phases de conception et de production.

Nous espérons que ces manuels constitueront des outils pédagogiques efficaces au service des enseignants et des élèves et qu'ils contribueront au renforcement de l'enseignement des sciences, à l'amélioration des performances scolaires et à la formation d'une génération capable de participer activement au développement national.

Le Directeur Général de l'Institut Pédagogique National
Dr. Cheikh Mouadh Sidi Abdella

IPN

Table de matières

CHAPITRE I : POLYNOMES ET FRACTIONS RATIONNELLES..... 7

- I. Généralités sur les polynômes
- II. Fonctions rationnelles :..... 16

CHAPITRE II : EQUATIONS - INEQUATIONS -SYSTEMES- MATRICES17

- I. Equations
- II. Inéquations :
- III. Équation linéaire, système d'équations et d'inéquations :
- IV. Matrice 42

CHAPITRE III : SUITES NUMERIQUES43

- I. Généralités sur les suites
- II. Suites arithmétiques et suites géométriques.....
- III. Limites d'une suite 61

CHAPITRE IV : LIMITES ET CONTINUITE D'UNE FONCTION NUMERIQUE.....62

- I. Généralités :
- II. Continuité d'une fonction : 84

CHAPITRE V : DERIVATION DE FONCTIONS NUMERIQUES85

- I. Dérivabilité et dérivation d'une fonction en un point.....
- II. Applications de la dérivation :
- III. Propriétés des fonctions dérivables : 104

CHAPITRE VI : ETUDE ET REPRESENTATION DE FONCTIONS NUMERIQUES105

- I. Généralités sur les fonctions
- II. Plan d'étude d'une fonction donnée :
- III. Fonctions trigonométriques 128

CHAPITRE VII : TRIGONOMETRIE..129

- I. Cercle trigonométrique
- II. Angles orientés :
- III. Equations et inéquations trigonométriques 144

CHAPITRE VIII : DENOMBREMENT 145

- I. Langage des ensembles :
- II. Modèle du tirage de boules dans une urne
- III. Formule du binôme..... 158

CHAPITRE IX : PROBABILITES159

- I. Langage des événements :
- II. Loi de probabilité : 166

CHAPITRE X : STATISTIQUE : ECHANTILLONNAGE167

IPN

AVANT-PROPOS

L'**Institut Pédagogique National (IPN)** présente ce manuel de Mathématiques – **6e Sciences de la Nature**, élaboré conformément aux nouveaux programmes et dans le respect strict de la progression officielle.

Conçu selon une approche pragmatique, ce manuel met l'accent sur les points essentiels et privilégie les aspects pratiques. Le programme y est découpé en dix chapitres, chacun structuré pour favoriser une acquisition progressive et solide des connaissances.

Chaque chapitre comprend deux volets complémentaires :

Savoir : un résumé clair des notions fondamentales à retenir.

Savoir-faire : des exercices gradués, allant des applications directes aux problèmes de niveau avancé.

Cet ouvrage se veut un outil efficace, à la fois pour les élèves, en rendant l'apprentissage plus accessible et formateur, et pour les enseignants, en offrant un support structuré et conforme aux exigences du programme.

L'IPN exprime sa reconnaissance à tous ceux qui ont contribué à sa réalisation et invite les utilisateurs à lui adresser leurs remarques et suggestions constructives, afin d'améliorer les prochaines éditions.

Les auteurs

Daouda Abdoul Diop

Ely Abdalla

Inspecteur de l'enseignement secondaire

Professeur de l'enseignement secondaire

IPN

I. Généralités sur les polynômes

1. Monôme

Définition 1 Soit a un entier non nul. On appelle **monôme** de **coefficient** a et de **degré** n , toute fonction f de variable x définie par: $f(x) = ax^n$

Exemple 1

La fonction f définie par $f(x) = 2x^3$ est un monôme de coefficient 2 et de degré 3.

Exemple 2

La fonction g définie par $g(x) = -3x^4$ est un monôme de coefficient -3 et de degré 4.

2. Polynôme :

Définition 2 Une fonction polynôme est une somme de monômes. P un polynôme :

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n. (a_n \neq 0)$$

- L'entier n est appelé le degré de P , c'est le degré du monôme de plus haut degré.
- Les nombres réels $a_0, a_1, \dots, a_n$ sont appelés coefficients de P .

Exemple 3

P et Q sont deux polynômes définies par : $P(x) = x^4 - 8x^3 + x^2 - 5x + 7$ et

$$Q(x) = -9x^3 + x^2 - 3.$$

P est un polynôme de degré 4 et de coefficients 1; -8 ; 1; -5 ; 7 et Q est un polynôme de degré 3 et de coefficients : -9 ; 1; 0; -3

Exemple 4

Les fonctions constantes $x \rightarrow k$ (k fixé) sont des polynômes car $x^0 = 1$ donc $k = kx^0$

- Les fonctions affines $x \rightarrow ax + b$ avec ($a \neq 0$)
- Les fonctions trinômes : $x \rightarrow ax^2 + bx + c$ (a, b et c fixés avec $a \neq 0$)

Remarque 1.

Par abus de langage, on parle souvent de polynôme au lieu de fonction polynôme.

3. Polynômes égaux :

Propriété 1.

Deux **fonctions polynômes** non nulles sont égales si et seulement si :

- elles ont le même degré et
- les coefficients de leurs monômes de même degré sont égaux.

Cas particulier :

P est le **polynôme nul**, signifie que tous les coefficients de P sont nuls. On note $P = 0$

Par convention, le degré du polynôme nul est $-\infty$

Exemple 5 On donne : $P(x) = 4x^4 - 3x^3 + x - 2$ et $Q(x) = (x-1)(ax^3 + bx^2 + cx + d)$

1. Développer $Q(x)$
2. Déterminer les réels a, b, c et d pour que $P(x) = Q(x)$

Solution :

1. On a :

$$\begin{aligned} Q(x) &= (x-1)(ax^3 + bx^2 + cx + d) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx - ax^3 - bx^2 - cx - d \\ &= ax^4 + bx^3 - ax^3 + cx^2 - bx^2 + dx - cx - d = ax^4 + (b-a)x^3 + (c-b)x^2 + (d-c)x - d \end{aligned}$$

$$2. Q(x) = P(x) \Leftrightarrow ax^4 + (b-a)x^3 + (c-b)x^2 + (d-c)x - d = 4x^4 - 3x^3 + x - 2$$

Par identification des coefficients, on obtient :

$$\begin{cases} a = 4 \\ -a + b = -3 \\ -b + c = 0 \\ -c + d = 1 \\ -d = -2 \end{cases} \quad \text{ainsi } a = 4, b = 1, c = 1 \text{ et } d = 2 \text{ donc : } Q(x) = (x-1)(4x^3 + x^2 + x + 2)$$

4. Opérations sur les polynômes :

a. Somme de deux polynômes :

La somme de deux polynômes P et Q est un polynôme noté $P+Q$ et défini par :

$$(P+Q)(x) = P(x) + Q(x)$$

Son degré est inférieur ou égal au polynôme qui a le plus grand degré.

Exemple 6

Soient les deux polynômes P et Q définies sur $\mathbb{R}$ par : $P(x) = 5x^2 - 3x + 1$ et

$$Q(x) = -5x^2 + x - 4$$

La fonction $P+Q$ est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$(P+Q)(x) = P(x) + Q(x) = (5x^2 - 3x + 1) + (-5x^2 + x - 4) = -2x - 3$$

$P+Q$: est de degré 1

b. Produit de deux polynômes

Le produit de deux polynômes P et Q est un polynôme noté PQ et défini par

$$(PQ)(x) = P(x) \times Q(x)$$

Son degré est la somme des degrés de P et Q

Exemple 7

On donne les polynômes P et Q définis

par :

$$P(x) = 3x^2 + 2x - 1 \text{ et}$$

$$Q(x) = -3x^3 + 5x^2 - 4$$

Pour déterminer le polynôme PQ on peut soit effectuer un calcul en ligne, soit poser l'opération comme pour la multiplication des entiers.

$$\begin{array}{r} 3x^2 + 2x - 1 \\ \times 3x^3 + 5x^2 + 0x - 4 \\ \hline -12x^2 - 8x + 4 \\ 15x^4 + 10x^3 - 5x^2 \\ 9x^5 + 6x^4 - 3x^3 \\ \hline 9x^5 + 21x^4 + 7x^3 - 17x^2 - 8x + 4 \end{array}$$

Ainsi pour tout réel x :

$$(PQ)(x) = 9x^5 + 21x^4 + 7x^3 - 17x^2 - 8x + 4$$

P est de degré 2 et Q est de degré 3 et le produit PQ est de degré 5.

Si on note $\deg(P)$ le degré de P et $\deg(Q)$ le degré de Q , on a : $\deg(P) = 3$, $\deg(Q) = 2$
 $\deg(P \times Q) = 5$

Remarque 2.

Le quotient de deux fonctions polynômes, n'est pas en général un polynôme, mais une **fonction rationnelle**

5. Division euclidienne :

Théorème : Division euclidienne des polynômes

Etant donné deux polynômes A et B avec ($B \neq 0$) , il existe un **unique** polynôme Q et un **unique** polynôme R tels que : $A(x) = B(x).Q(x) + R(x)$ avec $\deg R < \deg B$.

Cette égalité est appelée la **division euclidienne** du polynôme A (le dividende) par le polynôme B (le **diviseur**). Q est appelé le polynôme quotient et R est appelé le polynôme **reste**.

Remarque 3.

Si R est nul ($R = 0$) alors $A(x) = B(x) \times Q(x)$. On obtient une factorisation de $A(x)$.

On dit que A est **divisible par** Q ou que Q (ou B) est un **diviseur** de A

Exemple 8 Division euclidienne de $4x^3 - x^2 + 7x + 1$ par $x^2 + x + 1$

On peut écrire :

$$4x^3 - x^2 + 7x + 1 = (x^2 + x + 1)(4x - 5) + 8x + 6$$

$4x^3 - x^2 + 7x + 1$	$x^2 + x + 1$
$- \quad 4x^3 + 4x^2 + 4x$	$4x - 5$
$- \quad -5x^2 + 3x + 1$	
$- \quad -5x^2 - 5x - 5$	
$- \quad \quad \quad 8x + 6$	

6. Factorisation d'un polynôme :

a. Zéro ou racine d'un polynôme

Définition 3

On dit qu'un réel α est une racine (ou un zéro) d'un polynôme P si $P(\alpha) = 0$

Exemple 9

Reprenons la fonction polynôme R définie par : $R(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x$.

0 et 1 sont des racines réelles de ce polynôme.

Propriété 2.

Si un polynôme P de degré n a une racine x_0 , alors on peut factoriser $P(x)$ par $(x - x_0)$ et on obtient : $P(x) = (x - x_0)Q(x)$ où Q est un polynôme de degré $n - 1$

b. Méthodes de factorisation d'un polynôme

Dans toutes les méthodes de factorisation d'un polynôme que nous allons voir ici, on identifie d'abord une racine de ce polynôme.

On peut essayer de remplacer la variable x par 1, -1, 0... et si la valeur du polynôme est 0, on dit qu'on a trouvé une « **racine évidente** » .

Méthode 1 : Identification des coefficients

On considère le polynôme P défini par : $P(x) = 3x^4 - x^3 + x^2 + 11x + 6$

Une solution évidente est $x_0 = -1$

donc, il existe un polynôme Q de degré $4 - 1 = 3$ tel que pour tout réel x :

$$\begin{aligned} P(x) &= (x + 1)Q(x) = (x + 1)(ax^3 + bx^2 + cx + d) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + ax^3 + bx^2 + cx + d \\ &= ax^4 + (b + a)x^3 + (c + b)x^2 + (d + c)x + d \end{aligned}$$

Les polynômes $3x^4 - x^3 + x^2 + 11x + 6$ et $ax^4 + (b+a)x^3 + (c+b)x^2 + (d+c)x + d$ sont égaux, leurs coefficients le sont aussi :

$$\begin{cases} a = 3 \\ a + b = -1 \\ b + c = 1 \\ c + d = 11 \\ d = 6 \end{cases} \quad \text{donc : } a = 3, b = -4, c = 5, d = 6 \quad \text{Conclusion : } P(x) = (x+1)(3x^3 - 4x^2 + 5x + 6)$$

Méthode 2 : Division euclidienne

On considère le polynôme P défini par :

$$P(x) = x^3 - 3x^2 + x + 1$$

Une racine évidente de P est $x_0 = 1$ donc $P(x)$ est divisible par : $x - 1$

On effectue la division euclidienne de $P(x)$ par $(x - 1)$ en utilisant les mêmes principes que pour la division des nombres

Conclusion : $P(x) = (x - 1)(x^2 - 2x - 1)$

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 3x^2 + x + 1 & x - 1 \\ - x^3 - x^2 & x^2 - 2x - 1 \\ \hline -2x^2 + x & \\ - -2x^2 + 2x & \\ \hline -x + 1 & \\ - -x + 1 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Méthode 3: Méthode du tableau de Hörner:

On considère le polynôme P défini par : $P(x) = x^3 - 2x^2 + 2x - 4$

On a : $P(2) = 0$ donc 2 est une racine de P donc $P(x)$ s'écrit :

$P(x) = (x - 2)(ax^2 + bx + c)$ on peut déterminer les coefficients a , b et c par le tableau suivant appelé **tableau de Hörner**.

	1	-2	2	-4
2		2	+ 0	+ 4
×	1	0	2	0

Exemple 10 $a = 1$, $b = 0$ et $c = 2$

II. Fonctions rationnelles :

1. Notion de fonction rationnelle

Définition 4

Soient P et Q deux polynômes. La fonction R telle que $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, est appelée **fonction rationnelle**. La fonction R est définie lorsque $Q(x) \neq 0$

Une fonction rationnelle est un quotient de polynômes.

- On définit l'addition et la multiplication de fractions rationnelles de façon naturelle :

$$\frac{P}{Q} + \frac{R}{S} = \frac{PS + QR}{QS} \text{ et } \frac{P}{Q} \times \frac{R}{S} = \frac{PR}{QS}$$

Exemple 11 La fonction f définie par $x \rightarrow \frac{x^3 + x^2 - 4x + 1}{x^2 - 9}$ est une fraction rationnelle

L'équation $x^2 - 9 = 0$ admet deux solutions : -3 et 3 . l'ensemble de définition de f est :

$$D_f =]-\infty; -3[\cup]-3; 3[\cup]3; +\infty[$$

Exemple 12 Soit la fonction $\mathbb{R} \setminus \{1\}$; $f(x) = 2x + 1 + \frac{3}{x-1}$

Après réduction au même dénominateur on obtient : $f(x) = \frac{2x^2 - x + 2}{x-1}$

Donc f est une fraction rationnelle.

2. Simplification d'une fonction rationnelle :

Exemple 13 Simplifier la fonction rationnelle :

$$f : x \rightarrow \frac{x^2 - 3x - 4}{x^2 - 1}$$

Solution

On a $x^2 - 3x - 4 = (x+1)(x-4)$ et

$$x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$$

$$f \text{ est définie sur } \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\} \text{ et } f(x) = \frac{(x+1)(x-4)}{(x-1)(x+1)}$$

$$\text{Ainsi pour tout } x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}, f(x) = \frac{x-4}{x-1}$$

On obtient une fraction rationnelle **irréductible**

Méthode

- On factorise le numérateur et le dénominateur
- S'il existe un facteur commun, on simplifie la fraction

3. Décomposition d'une fraction rationnelle :

Soit la fonction rationnelle f définie par : $f(x) = \frac{2x^2 - 5x - 2}{x-3}$

a) Déterminer le domaine de définition de la fonction f

b) Déterminer trois nombres a , b et c tels que pour tout $x \in D_f$: $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-3}$

Méthode 1

On a :

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x-3} = \frac{(ax+b)(x-3) + c}{x-3} = \frac{ax^2 - 3ax + bx - 3b + c}{x-3} = \frac{ax^2 + (-3a+b)x - 3b + c}{x-3}$$

Par identification, on obtient :

$$\begin{cases} a = 2 \\ -3a + b = -5 \\ -3b + c = -2 \end{cases} \Leftrightarrow a = 2 ; b = 1 \text{ et } c = 1 \quad ; \quad \text{ainsi } f(x) = 2x + 1 + \frac{1}{x-3}$$

Méthode 2

$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ est une fonction rationnelle avec $P(x) = 2x^2 - 5x - 2$ et $Q(x) = x - 3$

On fait une division euclidienne de $P(x)$ par $Q(x)$

On obtient :

$$2x^2 - 5x - 2 = (2x + 1)(x - 3) + 1 \text{ pour tout } x \in \mathbb{R} \text{ ou}$$

$$f(x) = \frac{2x^2 - 5x - 2}{x - 3} = 2x + 1 + \frac{1}{x - 3} \text{ pour tout } x \neq 3$$

$$\begin{array}{r|l} 2x^2 - 5x - 2 & x - 3 \\ - 2x^2 - 6x & 2x + 1 \\ \hline x - 2 & \\ - x - 3 & \\ \hline 1 & \end{array}$$

A. Applications

Exercice 1.

On donne : $F(x) = \frac{2x^2 - 5x + 9}{x^3 - 3x + 2}$. Ecrire $F(x)$ sous forme $\frac{a}{(x-1)^2} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+2}$

Solution :

On réduit la fraction $\frac{a}{(x-1)^2} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+2}$ au même dénominateur et on l'identifie avec

$$\frac{2x^2 - 5x + 9}{x^3 - 3x + 2}$$

$$F(x) = \frac{a}{(x-1)^2} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+2} = \frac{(b+c)x^2 + (a+b-2c)x + 2a-2b+c}{x^3 - 3x + 2}$$

Par identification on obtient :

$$\begin{cases} b+c=2 \\ a+b-2c=-5 \\ 2a-2b+c=9 \end{cases} \Leftrightarrow a=2, b=-1, c=3 \quad \text{Donc : } F(x) = \frac{2}{(x-1)^2} - \frac{1}{x-1} + \frac{3}{x+2}$$

Exercice 2.

Un groupe d'élèves a besoin de partager 2700 MRU pour organiser une fête de fin d'année. Ils décident de se cotiser. À la dernière minute 3 de ces élèves décident de ne pas participer, augmentant la part de chacun des autres de 30 MRU. Combien d'élèves étaient dans le groupe initial

Solution

Soit x le nombre d'élèves et y la part de chacun

$$xy = 2700 \text{ et } (x-3)(y+30) = 2700 \Rightarrow (x-3)(xy+30x) = 2700x \Rightarrow (x-3)(2700+30x) = 2700x \\ \Rightarrow (x-3)(90+x) = 90x \Rightarrow x^2 - 3x - 270 = 0 \Rightarrow \Delta = 9 + 1080 = 1089 = 33^2$$

$$x_1 = \frac{3+33}{2} = 18 \text{ et } x_2 = \frac{3-33}{2} = -15 \text{ (rejetée)}$$

Donc le nombre initial d'élèves est 18 dont chacun devait donner 150 MRU ($150 \times 18 = 2700$). Après le désistement de 3 élèves, il reste 15 élèves dont chacun cotise 180.

Exercice 3.

On veut doubler l'aire d'un terrain sous forme d'un rectangle de dimensions 24.5m et 16m de sorte qu'il devienne sous forme d'un carré.

De combien doit-on augmenter la longueur et la largeur de ce terrain rectangulaire ?

Solution

Soit x le côté du carré. L'aire initial est : $24,5 \times 16 = 392$

Le double de l'aire initial : $392 \times 2 = 784$

L'aire du carré est 784

$$\Rightarrow x^2 = 784 \Rightarrow x = 28 \text{ accepté ou } x = -28 \text{ rejeté et } 28 = 24.5 + 3.5 \text{ et } 28 = 16 + 12$$

On augmente la longueur de 3.5 et la largeur de 12

Exercice 4.

Trouver deux nombres réels dont la somme est 30 et le produit 221

Solution

Soient a et b ces deux nombres alors on a : $a + b = 30$ et $ab = 221$

donc a et b sont les solutions de l'équation:

$$x^2 - 30x + 221 = 0 ; a = 1 ; b = -30 \text{ et } c = 221 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 900 - 4(1)(221) = 16$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{30+4}{2} = 17 ; x_2 = \frac{30-4}{2} = 13 \text{ donc les deux nombres cherchés sont 13 et 17.}$$

B. Exercices divers

1. | Parmi les 5 affirmations suivantes, dire si elles sont vraies ou fausses. Si elles sont vraies, les démontrer, si elles sont fausses, donner un contre-exemple.

- a) Si une fonction polynôme est de degré 3, alors son carré est de degré 9.
- b) Une fonction polynôme admet toujours une racine.
- c) La fonction polynôme P définie par :
 $P(x) = x^5 + x^4 + 7x + 1$ n'a pas de racines positives.
- d) Deux fonctions polynômes qui ont les mêmes racines sont égales.
- e) Si a est une racine de deux fonctions polynômes R et S , alors, $R(x) - S(x)$ est factorisable par $x - a$.

2. | Soit le polynôme ;

$$P(x) = 2x^3 - 14x - 12$$

- a) Calculer $P(-1)$
- b) Factoriser $P(x)$ par la méthode de division euclidienne
- c) Résoudre l'équation $P(x) = 0$

3. | Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de $P(x)$ par le binôme $x - a$ dans les cas suivants

- a) $P(x) = x^3 + 5x^2 - x + 1$ et $x + 1$;
- b) $P(x) = 4x^3 - 5x^2 - 2x + 3$ et $x - 2$;
- c) $P(x) = x^4 + 5x^3 - x + 1$ et $x - 1$;

4. | On considère le polynôme,

$$P(x) = x^5 - 3x^4 + 4x^3 + 5x - 15$$

a) Montrer que le nombre 3 est une racine de $P(x)$

b) Déterminer le polynôme $Q(x)$ tel que :

$$P(x) = (x - 3)Q(x)$$

5. | Soit le polynôme

$$P(x) = 2x^3 + 7x^2 + 2x - 3.$$

a) Calculer $P(-3)$ puis déterminer le polynôme $Q(x)$ tel que :

$$P(x) = (x + 3)Q(x)$$

b) On suppose que $|x| \leq 1$, montrer que :

$$|2x^2 + x - 1| \leq 2 \text{ et que } |x + 3| \leq 4, \text{ en}$$

déduire que $|P(x)| \leq 8$.

6. | On considère le polynôme

$$P(x) = 2x^4 - ax + b, \text{ avec } a \text{ et } b \text{ deux}$$

nombres réels.

1) Montrer que $P(x)$ est divisible par

$$(x - 2) \text{ si et seulement si } 2a - b = 2^5.$$

2) On suppose que $2a - b = 2^5$.

a) Déterminer le polynôme $Q(x)$ tel

$$\text{que : } P(x) = (x - 2)Q(x).$$

b) Déterminer le réel a tel que

le polynôme $Q(x)$ soit divisible par $(x + 1)$.

- c) Sachant que $a = 10$, déterminer le polynôme $R(x)$ tel que $Q(x) = (x+1)R(x)$.
En déduire $P(x)$ sous forme d'un produit de trois polynômes de degré ≥ 1 .

7. | On considère le polynôme :

$$P(x) = x^4 - (a+b)x^2 + ab, \text{ avec } a \text{ et } b$$

deux nombres réels.

- a) Trouver une condition sur a et b pour que $P(x)$ ne possède aucune racine.

En déduire une factorisation en facteurs irréductibles sur $\mathbb{R}$.

- b) Trouver une condition sur a et b pour que $P(x)$ possède exactement deux racines.

En déduire une factorisation en facteurs irréductibles sur $\mathbb{R}$.

- c) Application : déterminer les racines et la factorisation en facteurs irréductibles sur $\mathbb{R}$ de : $Q(x) = x^4 - (\sqrt{2} + \sqrt{3})x^2 + \sqrt{6}$ et $R(x) = x^4 - (\sqrt{2} - \sqrt{3})x^2 - \sqrt{6}$.

8. | On donne un polynôme P et un nombre réel a .

Dans chacun des cas suivants :

- Vérifier que $P(x)$ est factorisable par $x - a$
- Déterminer le quotient de $P(x)$ par $x - a$.
- Factoriser $P(x)$ si possible, et étudier son signe.

a) 1) $P(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$ et $a = 2$

b) $P(x) = -2x^3 + 7x^2 - 12x + 9$ et $a = \frac{3}{2}$

c) $P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 9$ et $a = -3$

d) $P(x) = -3x^3 + 2x^2 + 9x - 6$ et $a = \sqrt{3}$

9. | On considère le polynôme :

$$x^3 + 4x^2 - 5x + 8$$

qui a trois racines : a , b et c .

Sans calculer les racines, déterminer :

$$a + b + c ; abc ; \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

10. | Soient P, Q deux polynômes non nuls à coefficients réels. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi ?

- a) Le degré de $P + Q$ est toujours la somme des degrés de P et de Q
- b) Le degré de $P + Q$ est toujours égal soit au degré de P soit au degré de Q
- c) Le degré de PQ est la somme des degrés de P et de Q .
- d) Le degré de PQ est toujours égal au degré de QP
- e) Le degré de PQ est le double de la somme des degrés de P et de Q .

11. | Après avoir déterminé l'ensemble de définitions, simplifier l'expression $f(x)$ dans les cas suivants :

a) $f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x^3 - 7x + 6}$ b) $f(x) = \frac{x^2 + 5x + 9}{x^3 - 19x - 30}$

c) $f(x) = \frac{2x^3 - 3x^2 - 8x - 3}{2x^3 - x^2 - 5x - 2}$

d) $f(x) = \frac{2x^3 - 7x - 4}{2x^3 + 7x^2 - 53x - 28}$

12. | Déterminer le réel a pour que 2 soit racine du polynôme P :

$$P(x) = 3x^2 - ax + 2a - 12.$$

En déduire l'autre racine.

13. | Soit P la fonction polynôme de degré 4 vérifiant : $P(0) = -10$; $P(1) = -11$; $P(-1) = -7$; $P(2) = 56$ et $P(-2) = 4$

Trouver l'expression de $P(x)$

14. | Soit la fonction rationnelle f définie par :

$$f(x) = \frac{x^3 + 4x^2 + 5x + 3}{x^2 + 3x + 2}$$

a) Quel est l'ensemble de définition de f ?

b) Trouver les réels a , b , c et d tels que :

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1} + \frac{d}{x+2}$$

15. |

a) Trouver les nombres réels a et b tels que :

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}$$

b) En déduire la valeur de la somme S :

$$S = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{n \times (n+1)}$$

CHAPITRE II: EQUATIONS -INÉQUATIONS -SYSTÈMES- MATRICES

I. Equations

1. Equations du premier degré :

Une équation de la forme $ax + b = 0$; où a et b sont deux réels donnés, est appelée équation du premier degré à une inconnue x .

Si	Alors l'ensemble des solutions est
$a = 0$ et $b = 0$	$\mathbb{R}$
$a = 0$ et $b \neq 0$	$\emptyset$
$a \neq 0$	$\left\{ -\frac{b}{a} \right\}$

Exemple 1

(Equations se ramenant au premier degré)

1. Résoudre l'équation : $(3x+1)(x+4) = (x+4)(2x-5)$

dans un membre pour essayer de factoriser

$$(3x+1)(x+4) - (x+4)(2x-5) = 0 \Leftrightarrow (x+4)[(3x+1) - (2x-5)] = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+4)[3x+1-2x+5] = 0 \Leftrightarrow (x+4)[x+6] = 0$$

L'équation-produit obtenu admet deux solutions : -4 et -6 .

2. Résoudre l'équation : $(2x-1)^2 - (3x+7)^2 = 0$

On a une différence de deux carrés ;

$$[(2x-1) - (3x+7)][(2x-1) + (3x+7)] = 0 \Leftrightarrow (-x-8)(5x+6) = 0$$

L'équation admet deux solutions : -8 et $-\frac{6}{5}$

3. Résoudre l'équation (E) : $\frac{x-2}{x+1} - \frac{1}{x-1} - \frac{-3x+1}{x^2-1}$

L'ensemble de définition de l'équation est $\mathbb{R} \setminus \{-1;1\}$

Tout dans un membre pour réduire au même dénominateur.

$$(E) \Leftrightarrow \frac{x^2-x}{x^2-1} = 0 \Leftrightarrow \frac{x(x-1)}{x^2-1} = 0$$

Le numérateur s'annule pour $x=0$ ou $x=1$, mais seul 0 appartient à l'ensemble de définition de (E)

L'équation (E) admet une solution unique : $x=0$

Remarque 1.

Pour résoudre une équation comportant des quotients, on peut résumer la démarche en quatre points :

✓ Ensemble de définition de l'équation

- ✓ Transformation de l'équation en une équation de la forme : $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$
- ✓ Résolution de $P(x) = 0$
- ✓ Contrôle : parmi les solutions de l'équation $P(x) = 0$, on ne retient que celles appartenant à l'ensemble de définition.

2. Equations du second degré :

a. Cas général

Une équation de la forme

$ax^2 + bx + c = 0$; où a , b et c sont des réels donnés et $a \neq 0$ est appelée **équation du second degré** à une inconnue x .

Le discriminant de cette équation est soit le nombre Δ , soit le nombre Δ' tel que :

$$\Delta = b^2 - 4ac \quad \text{et} \quad \Delta' = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac$$

Si	Alors l'ensemble des solutions est
$\Delta < 0$ $\Delta' < 0$	$\emptyset$
$\Delta = 0$ $\Delta' = 0$	$\left\{-\frac{b}{2a}\right\}$
$\Delta > 0$ $\Delta' > 0$	$\{x_1, x_2\}$ avec $\begin{cases} x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \\ x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$ Ou : $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta'}}{a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta'}}{a}$

Si	Alors
x_1 et x_2 sont les solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$	$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$ et $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$
$a + b + c = 0$	L'ensemble des solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ est $\left\{1, \frac{c}{a}\right\}$
$a - b + c = 0$	L'ensemble des solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ est $\left\{-1, \frac{-c}{a}\right\}$

b. Equation $x^2 = k$; où k est un réel donné.

Si	Alors l'ensemble des solutions est
$k < 0$	$\emptyset$
$k = 0$	$\{0\}$
$k > 0$	$\{-\sqrt{k}; \sqrt{k}\}$

c. Equation bicarrée :

La forme générale d'une équation bicarrée est : $ax^4 + bx^2 + c = 0$; avec a un réel non nul, b et c deux réels donnés. De plus, si on pose $X = x^2$, l'équation $ax^4 + bx^2 + c = 0$ s'écrit alors : $aX^2 + bX + c = 0$.

Exemple 2 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^4 + x^2 - 12 = 0$.

Réponse :

Soit $x^2 = X$, on a : $x^4 + x^2 - 12 = 0 \Leftrightarrow X^2 + X - 12 = 0 \Leftrightarrow (X + 4)(X - 3) = 0$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 4)(x^2 - 3) = 0.$$

- L'équation $x^2 + 4 = 0$ n'a pas de solution,
- L'équation $x^2 - 3 = 0$ a pour solution : $\sqrt{3}$ et $-\sqrt{3}$
- L'équation $x^4 + x^2 - 12 = 0$ a donc deux solutions $-\sqrt{3}$ et $\sqrt{3}$

II. Inéquations :

1. Inéquations du premier degré :

a. Signe d'un binôme

Soient a et b deux réels avec $a \neq 0$

L'expression $ax + b$ change de signe au point où

elle s'annule. C'est à dire en $-\frac{b}{a}$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax + b$	Signe de $-a$		0	Signe de a

Dans la pratique, on utilise un tableau de signes

b. Résolution d'une inéquation de premier degré

Une inéquation de la forme : $ax + b \leq 0$ ou $ax + b < 0$ ou $ax + b \geq 0$ ou $ax + b > 0$ est appelée une inéquation du premier degré.

Exemple 3 Résoudre l'inéquation : $-3x + 1 < 0$

$-3x + 1$ s'annule en $\frac{1}{3}$ et $-3x + 1$ est positif à gauche de $\frac{1}{3}$

(On teste une valeur 0 par exemple)

L'ensemble des solutions de l'équation est $S = \left] \frac{1}{3}; +\infty \right[$

2. Inéquations du second degré :

La forme générale d'un trinôme du second degré est $P(x) = ax^2 + bx + c$; où a est un réel non nul, b et c deux réels donnés. Δ discriminant du trinôme $ax^2 + bx + c$

a. Signe d'un trinôme du second degré :

Si	Alors	
$\Delta < 0$	x	$-\infty \quad +\infty$
	$ax^2 + bx + c$	Signe de a
$\Delta = 0$, racine unique $x_0 = \frac{-b}{2a}$ le signe est	x	$-\infty \quad x_0 \quad +\infty$
	$ax^2 + bx + c$	Signe de a Signe de a
$\Delta > 0$ les racines x_1 et x_2 ($x_1 < x_2$)	x	$-\infty \quad x_1 \quad x_2 \quad +\infty$
	$ax^2 + bx + c$	Signe de a Signe contraire de a Signe de a

Règle

Un polynôme du second degré est du signe de a sauf entre les racines. Si $\Delta < 0$ le polynôme est du signe de a

La forme générale d'une inéquation du second degré est :

$ax^2 + bx + c \leq 0$ ou $ax^2 + bx + c < 0$ ou $ax^2 + bx + c \geq 0$ ou $ax^2 + bx + c > 0$.

Exemple 4

$$3x^2 + x - 4 \quad \text{on a : } \Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4(3)(-4) = 49 > 0,$$

Le trinôme admet deux racines dans $\mathbb{R}$ $x_1 = \frac{-1 + \sqrt{49}}{2 \times 3} = 1$ et $x_2 = \frac{-1 - \sqrt{49}}{2 \times 3} = -\frac{4}{3}$

D'où le tableau de signe de : $3x^2 + x - 4$

x	$-\infty$	$-\frac{4}{3}$	1	$+\infty$
$3x^2 + x - 4$	+	-	+	

b. Signe d'un produit

Résoudre l'inéquation : $(x^2 - 9)(x + 1) < 0$

Étudions le signe de $P(x) = (x^2 - 9)(x + 1)$

On regroupe dans un même tableau les signes de chaque facteur.

Pour obtenir le signe de $P(x)$, on applique la règle des signes relative à un produit.

L'ensemble des solutions est : $S =]-\infty; -3[\cup]-1; 3[$

x	$-\infty$	-3	-1	3	$+\infty$		
$x+1$	$-$	$-$	0	$+$	$+$		
x^2-9	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$	
$P(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

c. Signe d'un quotient

Étudier le signe de $Q(x) = \frac{x-3}{2x^2-x}$

On commence par chercher le domaine de définition de Q

x	$-\infty$	0	$\frac{1}{2}$	3	$+\infty$
$x-3$	-	-	-	0	+
$2x^2-x$	+	0	-	0	+
$Q(x)$	-	+	-	0	+

$$2x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(2x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = \frac{1}{2}$$

Le quotient n'est pas défini pour : $x = 0$ ou $x = \frac{1}{2}$

On regroupe dans un même tableau les signes du numérateur et du dénominateur.

Pour obtenir le signe de $Q(x)$, on applique la règle des signes relative à un quotient.

d. Résolution d'une inéquation

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $\frac{2x^3 + 3x^2 + 2x - 1}{x^2 - x - 6} \geq -1$

Méthode

- On détermine l'ensemble de définition de l'inéquation.
- On ramène « tout » dans le premier membre et on réduit au même dénominateur.
- On construit un tableau de signes
- On conclut en tenant compte de l'ensemble de définition de l'inéquation.

- Le quotient est défini si et seulement si $x^2 - x - 6 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -2$ et $x \neq 3$

Le domaine de définition de l'inéquation est $\mathbb{R} \setminus \{-2; 3\}$

• On a $\frac{2x^3 + 3x^2 + 2x - 1}{x^2 - x - 6} + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2x^3 + 3x^2 + 2x - 1}{x^2 - x - 6} + \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - x - 6} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2x^3 + 4x^2 + x - 7}{x^2 - x - 6} \geq 0$

- 1 est racine du polynôme $2x^3 + 4x^2 + x - 7$ donc le polynôme se factorise par $x - 1$

- Tableau de Hörner :

On a : $2x^3 + 4x^2 + x - 7 = (x - 1)(2x^2 + 6x + 7)$

L'inéquation s'écrit : $\frac{(x - 1)(2x^2 + 6x + 7)}{x^2 - x - 6} \geq 0$

Le polynôme $2x^2 + 6x - 7$ est positif car son discriminant $\Delta < 0$

- Tableau de signes

	2	4	1	-7
1		2	6	7
	2	6	7	0

x	$-\infty$	-2	1	3	$+\infty$	
$x - 1$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	
$2x^2 + 6x + 7$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	
$x^2 - x - 6$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
$\frac{(x - 1)(2x^2 + 6x + 7)}{x^2 - x - 6}$	$-$	$+$	0	$-$	$+$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation est :

$$S =]-2; 1] \cup]3; +\infty[$$

III. Équation linéaire, système d'équations et d'inéquations :

1. Équation linéaire et système d'équations linéaires

Définition 1 On appelle équation linéaire à n inconnues $x_1, x_2, \dots, x_n$ toute équation de la forme $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$ avec $a_1, a_2, \dots, a_n, b$ des réels.

Exemple 5

- $3x - 4y = -5$ est une équation linéaire à deux inconnues x et y
- $x - 2y + 4z - 3t = 0$ est une équation linéaire à quatre inconnues x, y, z et t
- On appelle **système d'équations linéaires**, la donnée de deux ou plusieurs équations linéaires qui portent sur les mêmes inconnues

Une équation d'un système est aussi appelée **ligne** notée $L_1, L_2, \dots$ etc.

Exemple 6

$$(S) : \begin{cases} x - y + 3z = 0 \\ 2x + 7y - z = -4 \\ 5x + y + 8z = 1 \end{cases} \quad (S) \text{ est un système d'équations linéaires à trois inconnues.}$$

2. Système de deux équations linéaires à deux inconnues

a. Résolution

Définition 2 Soit le système d'équations linéaires à deux inconnues $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$

Définition 3 Le déterminant du système est le nombre Δ tel que: $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b$.

Théorème

- Si $\Delta \neq 0$, le système admet une solution unique
- Si $\Delta = 0$, le système admet :
 - une infinité de solutions si les deux équations sont équivalentes.
 - aucune solution sinon ?

Les équations sont équivalentes signifie qu'il existe un réel k tel que : $a = ka', b = kb'$ et $c = kc'$ autrement dit, les coefficients sont proportionnels.

Remarque 2.

Si $\Delta \neq 0$ on peut résoudre le système par :

- la méthode de substitution
- la méthode de combinaison
- ou la méthode de Cramer

Méthode de Cramer

Si $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \neq 0$, $\Delta_x = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}$ et $\Delta_y = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}$

alors le système admet une solution unique :

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} \quad \text{et} \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$$

Exemple 7

1) Cas $\Delta \neq 0$

Résoudre le système : $\begin{cases} 4x - 2y = 5 \\ 3x - 4y = 1 \end{cases}$ Le déterminant est :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = 4 \times (-4) - 3 \times (-2) = -10$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = 5 \times (-4) - 1 \times (-2) = -18 \quad \text{et} \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 4 \times 1 - 3 \times 5 = -11$$

On a : $x = \frac{-18}{-10} = 1,8$ et $y = \frac{-11}{-10} = 1,1$. La solution du système est le couple : $(x ; y) = (1,8 ; 1,1)$

2) $\Delta = 0$

a) Résoudre le système $\begin{cases} (\sqrt{5} - 2)x + y = 3 \\ x + (\sqrt{5} + 2)y = 1 \end{cases}$. $\Delta = \begin{vmatrix} \sqrt{5} - 2 & 1 \\ 1 & \sqrt{5} + 2 \end{vmatrix} = (\sqrt{5} - 2)(\sqrt{5} + 2) - 1 \times 1 = 0$

le couple $(0; 3)$ est solution de la première équation, mais pas de la seconde. : $S = \varnothing$

b) Résoudre le système $\begin{cases} 5x + 35y = 15 \\ 2x + 14y = 6 \end{cases}$ $\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 35 \\ 2 & 14 \end{vmatrix} = 5 \times 14 - 2 \times 35 = 0$

Les équations sont équivalentes car :

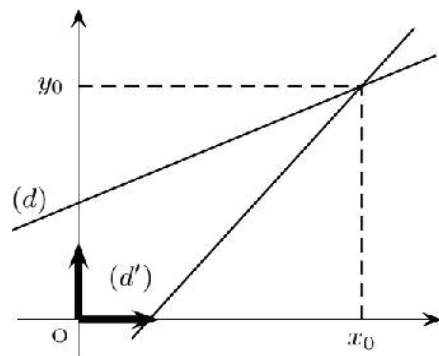
- $\left(0; \frac{3}{7}\right)$ est solution des deux équations
- ou encore car les coefficients sont proportionnels : $\frac{5}{2} = \frac{35}{14} = \frac{15}{6}$

Le système admet une infinité de solutions : tous les

couples $\left(x; \frac{3-x}{7}\right)$

b. Interprétation graphique

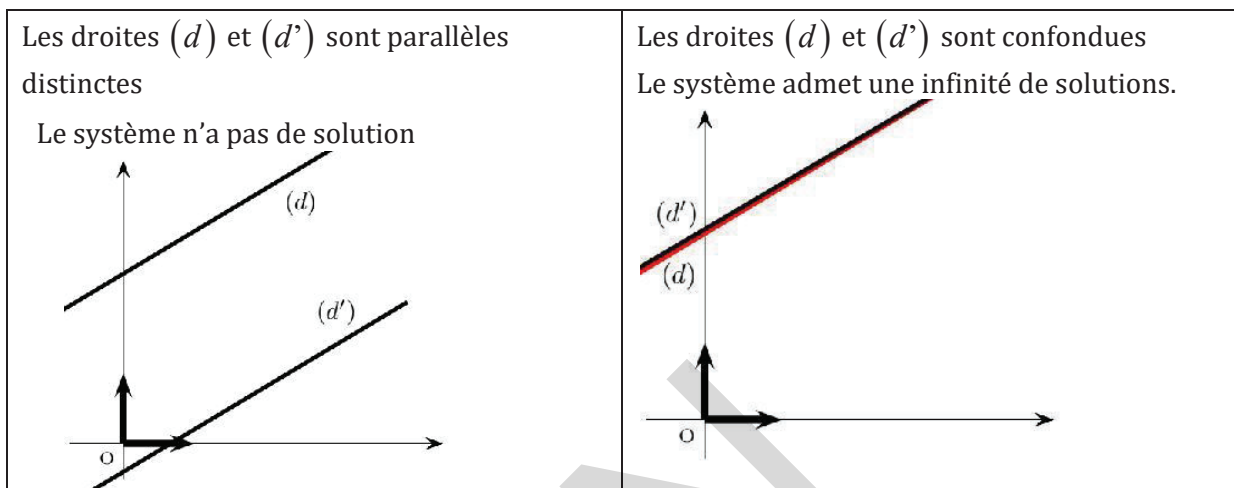
Soit (d) et (d') les deux droites d'équations cartésiennes $ax + by = c$ et $a'x + b'y = c'$ dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan



► Si $\Delta \neq 0$ alors :

- les droites (d) et (d') sont sécantes
- Le système admet un couple $(x; y)$ solution unique qui est le couple des coordonnées du point d'intersection de (d) et (d') .

► Si $\Delta = 0$ alors les droites (d) et (d') sont parallèles distinctes ou confondues



3. Système d'inéquations linéaires à deux inconnues :

a. Signe de $ax + by + c$

Théorème

La droite (d) d'équation $ax + by + c = 0$ partage le plan en deux demi-plans ouverts de frontière (d) tels que :

- pour tout point $M(x, y)$ de l'un $ax + by + c > 0$
- pour tout point $M(x, y)$ de l'autre $ax + by + c < 0$

Remarque 3. Un système d'inéquations linéaires à deux inconnues ne peut se résoudre que graphiquement.

Exemple 8

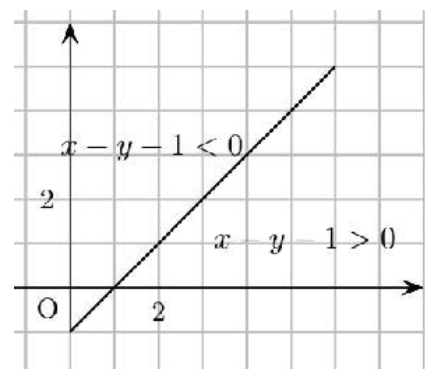
Déterminer graphiquement le signe de: $x - y - 1$

Réponse

On trace la droite (d) d'équation : $x - y - 1 = 0$,

Au point O origine du repère, $x - y - 1$ est négatif.

On en déduit le signe de $x - y - 1$ comme indiqué sur la figure ci-contre.



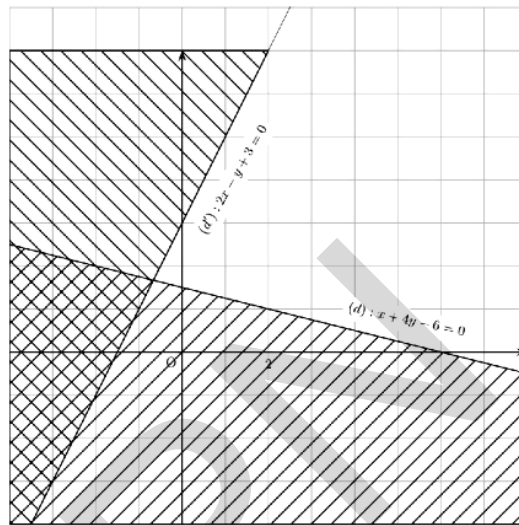
b. Résolution d'un système d'inéquation

Exemple 9

Résoudre le système :
$$\begin{cases} x + 4y - 6 \geq 0 \\ 2x - y + 3 > 0 \end{cases}$$

Solution

- Représentons graphiquement les droites d'équations :
 $(d): x + 4y - 6 = 0$ et $(d'): 2x - y + 3 = 0$
- Les solutions de la première inéquation correspondent au demi-plan fermé de frontière (d) ne contenant pas O
- Les solutions de la deuxième inéquation correspondent au demi-plan ouvert de frontière (d') qui contient O
- Les couples solutions du système sont les coordonnées des points de la zone non hachurée.



4. Méthodes de résolution de systèmes d'équations linéaires

a. Résolution par substitution :

Exemple 10

Résoudre le système (S_1) :

$$\begin{cases} x + y - 2z = -7 & (E_1) \\ 2x - y + z = 0 & (E_2) \\ 2x + y + z = 8 & (E_3) \end{cases}$$

Réponse :

A l'aide de l'équation (E_2) on exprime z en fonction de x et y : $z = -2x + y$ puis on remplace z par **(=substitue à)** $-2x + y$ dans les équations (E_1) et (E_3) . On obtient :

$$(S_1) : \begin{cases} 5x - y = -7 \\ 2y = 8 \\ z = \frac{6}{5} + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{5} \\ y = 4 \\ z = \frac{6}{5} + 4 = \frac{26}{5} \end{cases}$$

Donc ; le système (S_1) a un unique triplet solution $\left(-\frac{3}{5}; 4; \frac{26}{5}\right)$

Exemple 11

Résoudre le système (S_2) :
$$\begin{cases} 2x - y - 2z = 6 \\ x + y - z = 1 \\ x - 5y - z = 9 \end{cases}$$

Réponse :

On déduit de l'équation E_1 que : $y = 2x - 2z - 6$; on remplace y par sa valeur dans E_2 et E_3 :

$$(S_2) : \begin{cases} y = 2x - 2z - 6 & (E_1) \\ 3x - 3z = 7 & (E_2) \\ -9x + 9z = -21 & (E_3) \end{cases} \quad \text{On obtient le système } (S_2) : \begin{cases} 3x - 3z = 7 \\ -9x + 9z = -21 \end{cases}$$

Qui a pour solutions tous les couples $(x ; z)$ de nombres réels tels que : $3x - 3z = 7$.

On donne à l'une des inconnues une valeur arbitraire ($z = \lambda$) ; on en déduit

$$(S_2) : \begin{cases} x = \frac{7}{3} + \lambda \\ y = -\frac{4}{3} \\ z = \lambda \end{cases} ; \text{ donc l'ensemble de triplets solutions de } S_2 \text{ est : } \left\{ \left(\frac{7}{3} + \lambda, -\frac{4}{3}, \lambda \right) ; \lambda \in \mathbb{R} \right\},$$

b. Résolution par combinaison.

Exemple 12

Résoudre le système

$$(S_3) : \begin{cases} x - 5y - 7z = 3 & (1) \\ 5x + 3y + z = 3 & (2) \\ 3x + y - 2z = -1 & (3) \end{cases}$$

Solution :

On élimine x dans (E_2) et dans (E_3) en **combinant** convenablement les équations .

$$\begin{cases} x - 5y - 7z = 3 & (1) \\ 5x + 3y + z = 3 & (2) \\ 3x + y - 2z = -1 & (3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 5y - 7z = 3 & (1) \\ -28y - 36z = 12 & 5 \times (1) - (2) \\ -16y - 19z = 10 & 3 \times (1) - (3) \end{cases}$$

Les deux dernières équations donnent le système :

$$\begin{cases} -28y - 36z = 12 & (4) \\ -16y - 19z = 10 & (5) \end{cases}$$

On élimine y dans (5) par combinaison de (4) et (5) . On obtient :
$$\begin{cases} x - 5y - 7z = 3 \\ -7y - 9z = 3 \\ z = 2 \end{cases}$$

Il reste à résoudre ce **système triangulaire** en commençant par la dernière équation puis en remontant : $z = 2$; $y = -3$ et $x = 2$.

Donc le système (S_3) a pour solution le triplet $(2 ; -3 ; 2)$.

Exemple 13

Résoudre le système (S_4) :

$$\begin{cases} x + y - 2z = 1 & (1) \\ x - 2y + z = 1 & (2) \\ -2x + y + z = 1 & (3) \end{cases}$$

Réponse :

$$\begin{cases} x + y - 2z = 1 & (1) \\ x - 2y + z = 1 & (2) \\ -2x + y + z = 1 & (3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 2z = 1 & (1) \\ 3y - 3z = 0 & (1) - (2) \\ 3y - 3z = 3 & 2 \times (1) + (3) \end{cases}$$

Le système obtenu : $\begin{cases} 3y - 3z = 0 \\ 3y - 3z = 3 \end{cases}$ n'a pas de solution ; donc le système (S_4) n'a pas de solution.

Exemple 14 Résoudre le système (S_5) :

$$\begin{cases} x + 2y + 5z = 4 & (1) \\ x + 2y + 2z = 6 & (2) \\ 2x + 3y + 7z = 10 & (3) \end{cases}$$

Réponse :

On obtient :

$$\begin{cases} x + 2y + 5z = 4 & (1) \\ 3z = -2 & (1) - (2) \\ y + 3z = -2 & 2 \times (1) - (3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{22}{3} \\ y = 0 \\ z = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

Le système a pour solution le triplet $\left(\frac{22}{3}; 0; -\frac{2}{3}\right)$

c. Méthode de pivot de Gauss

Nous admettrons la propriété suivante :

Propriété 1.

En effectuant sur les équations (lignes) du système les opérations suivantes , on le transforme en un système ayant un même ensemble de solutions

On dit que ces deux systèmes sont **équivalents**

Opérations	Notation
Echanger les lignes L et L'	$L \leftrightarrow L'$
Remplacer la ligne L par αL	$L \leftarrow \alpha L$
Remplacer la ligne L par $L + \beta L'$	$L \leftarrow L + \beta L'$

Principe de la méthode

La méthode de Gauss consiste à transformer un système quelconque en un système triangulaire équivalent.

Exemple 15 Résoudre le système

$$\begin{cases} -3x + 4y + z = 14 & L_1 \\ 2x - y + 3z = 5 & L_2 \\ x + y + z = 4 & L_3 \end{cases}$$

Réponse

Le coefficient de x dans L_3 est simple, on échange L_1 et L_3

$$\begin{cases} -3x + 4y + z = 14 & L_1 \\ 2x - y + 3z = 5 & L_2 \\ x + y + z = 4 & L_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 4 & L_1 \leftrightarrow L_3 \\ 2x - y + 3z = 5 & L_2 \\ -3x + 4y + z = 14 & L_3 \end{cases}$$

On élimine x dans les équations L_2 et L_3 .

Le coefficient de x dans le nouveau système est appelé **1^{er} pivot de résolution**, il sert à éliminer x dans les équations suivantes.

$$\begin{cases} x + y + z = 4 & L_1 \\ 3y - z = 3 & L_2 \leftarrow 2 \times L_1 - L_2 \\ 7y + 4z = 26 & L_3 \leftarrow 3 \times L_1 + L_3 \end{cases} \quad \text{On élimine } y \text{ dans } L_3 \quad \begin{cases} x + y + z = 4 & L_1 \\ 3y - z = 3 & L_2 \leftarrow 2 \times L_1 - L_2 \\ -19z = -54 & L_3 \leftarrow 7 \times L_2 - 3L_3 \end{cases}$$

On résout le système en commençant par la dernière équation.

$$z = \frac{-54}{-19} = 3, \quad 3y - 3 = 3 \Leftrightarrow y = 2 \quad \text{et} \quad x + 2 + 3 = 4 \Leftrightarrow x = -1$$

Le système a un unique triplet solution $(-1; 2; 3)$

IV. Matrice

1. Notion de matrice

Définition 4

Une **matrice de dimension m par n** est un tableau de nombres réels comportant m lignes et n colonnes.

Ces nombres sont appelés **éléments** de la matrice.

Exemple 16

En général, on désigne une matrice par une lettre majuscule. M par exemple.

Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 3 \\ 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}$

M est une matrice de $m = 2$ lignes et $n = 3$ colonnes

M est une matrice de dimension 2 par 3

On note : M est une matrice de dimension 2×3

Si A est une matrice $m \times n$, on note a_{ij} l'élément de A situé à l'intersection de la ligne i et de la colonne j

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

A est une matrice $m \times n$ se note aussi $A_{m \times n}$

Exemple 17

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 8 & 2 & 3 \\ -3 & 2 & 0 & 5 & 7 \\ 9 & 6 & 2 & 10 & 6 \end{pmatrix}$$

- La dimension de A est 3×5
- L'élément a_{23} est 0.
- 10 est l'élément a_{34} .

2. Matrices particulières

a. Matrice nulle

Définition 5

Une **matrice nulle** est une matrice dont tous les éléments sont égaux à zéro. Cette matrice est notée O ou $O_{m \times n}$

Exemple 18

$$O_{3 \times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$O_{2 \times 4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b. Matrice ligne et matrice colonne

Définition 6

Une **matrice ligne** est une matrice de dimension $1 \times n$. Une **matrice colonne** est une matrice de dimension $m \times 1$

Exemple 19

$L = (-1 \ 3 \ 0 \ 7)$ est une matrice ligne de dimension 1×4

$$C = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ est une matrice colonne de dimension } 3 \times 1$$

c. Matrices carrées

Définition 7 Une **matrice carrée d'ordre n** , notée A_n est une matrice contenant n lignes et n colonnes

$$A_n = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{Les éléments } a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}, \text{ forment la diagonale de la matrice } A_n$$

Exemple 20

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 2 \\ 4 & -1 & 9 & 0 \\ 3 & 2 & 5 & -3 \\ 0 & 7 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

- La matrice M est une matrice carrée d'ordre 4
- Les éléments 2, -1 ; 5 et 8 forment la diagonale de M

Définition 8

Soit A une matrice

- (1) A est une matrice **triangulaire supérieure** si A est carrée et tous les éléments situés **au-dessous** de la diagonale principale sont nuls.

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$$

- (2) A est une matrice **triangulaire inférieure** si A est carrée et tous les éléments situés **au-dessus** de la diagonale principale sont nuls.

$$\begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ * & * & 0 \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

- (3) A est une **matrice diagonale** si A est carrée et tous les éléments qui ne sont pas situés sur la diagonale principale sont nuls.

$$\begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$$

Exemple 21

$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ A est une matrice triangulaire supérieure	$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 8 & 0 \\ 6 & 0 & \pi & 9 \end{pmatrix}$ B est une matrice triangulaire inférieure	$C = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ C est une matrice diagonale
--	---	--

Définition 9 Une **matrice identité** d'ordre n est une matrice diagonale dont tous les éléments de la diagonale sont égaux à 1 et tous les autres éléments sont nuls

Elle est notée I_n ou I

Exemple 22

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Opérations sur les matrices :

a. Addition de matrices

Pour additionner deux matrices de **même dimension**, on additionne respectivement les éléments qui sont à la même position de ces deux matrices.

Exemple 23

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}; \quad A+B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 3 \\ 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

b. Multiplication d'une matrice par un nombre

Pour multiplier une matrice par un nombre, on multiplie chaque élément de la matrice par ce nombre

Exemple 24

Soit les matrices

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -3 \\ 1 & 8 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{On a : } 2C = 2 \times \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 8 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$

Remarque 4.

- Nous avons $-1A = -A$, de plus $A - B = A + (-B)$
- $-A$ est l'opposé de A

$$C - D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 4 & -3 \\ 1 & 8 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$$

c. Multiplication de matrices

Définissons tout d'abord le produit d'une matrice ligne X de dimension $1 \times n$ et d'une matrice colonne Y de dimension $n \times 1$. Ce produit est le réel noté $X \bullet Y$ ou XY

$$XY = (x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$

Définition 10

Soit A une matrice de dimension $m \times p$ et B une matrice de dimension $p \times n$

Le produit AB des matrices de A et B est la matrice C de dimension $m \times n$ dont l'élément $c_{i,j}$ est égal au produit de la ligne i de la matrice A par la colonne j de la matrice B

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ip}b_{pj} \quad i = 1 \dots m, \quad j = 1 \dots n$$

Remarque 5.

1. Le produit matriciel AB de deux matrices est défini si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B . Nous pouvons alors écrire $AB = C$.
2. Le nombre de lignes de C est égal au nombre de lignes de A .

Le nombre de colonnes de C est égal au nombre de colonnes de B .

De façon générale $A_{m \times p} B_{p \times n} = C_{m \times n}$

Exemple 25

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

On a en effet, en effectuant les produits ligne par colonne :

$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 26 & 13 \end{pmatrix}$ $(1 \quad 2 \quad -1) \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 1 \times 5 + 2 \times 2 + (-1) \times 3 = 6,$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 26 & 13 \end{pmatrix}$ $(1 \quad 2 \quad -1) \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 1 \times 1 + 2 \times 3 + 0 \times 4 = 3$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 26 & 13 \end{pmatrix}$ $(4 \quad 3 \quad 0) \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 4 \times 5 + 3 \times 2 + 0 \times 3 = 26,$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 26 & 13 \end{pmatrix}$ $(4 \quad 3 \quad 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 4 \times 1 + 3 \times 3 + -1 \times 4 = 13.$

Définition 11

Pour une matrice carrée A : $A^n = \underbrace{A \times A \times \dots \times A}_{n \text{ fois}}$

Remarque 6.

De façon générale, la multiplication de matrices n'est pas commutative, c'est-à-dire que $AB \neq BA$

d. Propriétés de la multiplication des matrices :

Si A , B et C sont des matrices de dimensions compatibles, on a les propriétés suivantes :

- Associativité de la multiplication

$$A.B.C = (A.B).C = A.(B.C)$$

- Distributivité de la multiplication par rapport à l'addition :

$$A.(B+C) = A.B + A.C \text{ et } (B+C).A = B.A + C.A$$

- La matrice unité I_n est élément neutre pour la multiplication : pour toute matrice carrée A d'ordre n : $A.I_n = I_n.A = A$

Exemple 26

a) Soit $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$. Calculons A^3 .

$$\begin{aligned} A^3 &= (AA)A \\ &= \left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ -18 & 13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -16 & 25 \\ -75 & 34 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

b) Calculons $(A + I_2)^2$ ou I_2 est la matrice unité d'ordre 2. Comme $IA = AI$ on a :

$$\begin{aligned} (A + I_2)^2 &= A^2 + 2AI_2 + I_2^2 \\ &= A^2 + 2A + I_2 \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ -18 & 13 \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ -18 & 13 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -6 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ -24 & 22 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

4. Ecriture matricielle d'un système d'équations linéaires

Soit le système $(S) : \begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$

On peut transformer le système (S) sous forme de l'équation matricielle $A.X = B$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ est la matrice des coefficients. $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est la matrice des variables et

$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ est la matrice des constantes.

5. Méthode de résolution du pivot de Gauss (version matricielle) :

On constate que dans la résolution d'un système par la méthode du pivot de Gauss, les opérations sur les lignes ne font intervenir que les coefficients du système. On peut donc résoudre un système d'équations linéaires à l'aide des matrices

Exemple 25

Résoudre le système $(S) : \begin{cases} x - 4y + 2z = -7 \\ -x + 5y - 3z = 6 \\ 2x - y + z = 4 \end{cases}$

La traduction de (S) sous forme matricielle est :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -1 & 5 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{Matrice des coefficients}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{\text{Matrice des variables}} = \underbrace{\begin{pmatrix} -7 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}}_{\text{Matrice des constantes}}$$

Réponse :

Ecrivons les matrices $\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -1 & 5 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -7 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$ des coefficients et des constantes côte à côte

puis effectuons des opérations élémentaires pour transformer la matrice des coefficients en une matrice triangulaire supérieure équivalente.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 2 & -7 \\ -1 & 5 & -3 & 6 \\ 2 & -1 & 1 & 4 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \leftrightarrow \\ L_3 \end{array} \begin{array}{l} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 2 & -7 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 7 & -3 & 18 \end{array} \right) \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \leftrightarrow \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{array} \begin{array}{l} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 2 & -7 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 25 \end{array} \right) \\ L_3 \leftarrow L_3 - 7L_2 \end{array}$$

On résout le système suivant :

$$\begin{cases} x - 4y + 2z = -7 & (1) & (3) \rightarrow 4z = 25 \Leftrightarrow z = \frac{25}{4} \\ y - z = -1 & (2) & (2) \rightarrow y - z = -1 \Leftrightarrow y = -1 + z = -1 + \frac{25}{4} = \frac{21}{4} \\ 4z = 25 & (3) & (1) \rightarrow x - 4y + 2z = -7 \Leftrightarrow x = 4y - 2z - 7 = \frac{3}{2} \end{cases}$$

La solution du système (S) est le triplet $(x, y, z) = \left(\frac{3}{2}, \frac{21}{4}, \frac{25}{4} \right)$

Exemple 27

Résoudre le système. (S') $\begin{cases} 2x - y + 2z = 15 & (1) \\ 4x + 3y - 3z = -25 & (2) \\ -2x + 2y + z = -4 & (3) \end{cases}$

On a :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 2 & 15 \\ 4 & 3 & -3 & -25 \\ -2 & 2 & 1 & -4 \end{array} \right) \text{ puis } \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 2 & 15 \\ 0 & 5 & -7 & -55 \\ 0 & 1 & 3 & 11 \end{array} \right) \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 2 & 15 \\ 0 & 5 & -7 & -55 \\ 0 & 0 & -22 & 110 \end{array} \right)$$

$$(S') \text{ est équivalent au système } (S') \text{ est équivalent au système } \begin{cases} 2x - y + 2z = 15 & (1) \\ 5y - 7z = -55 & (2) \\ -22z = -110 & (3) \end{cases}$$

$$(3) \rightarrow z = \frac{-110}{-22} = 5 \quad \text{En remplaçant } z \text{ par } 5 \text{ dans l'équation (2):}$$

$$(2) \rightarrow 5y - 7 \times 5 = -55 \Leftrightarrow y = -4$$

En remplaçant z par 5 et y par -4 dans l'équation (1) :

$$(1) \rightarrow 2x + 4 + 2 \times 5 = 15 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

La solution du système (S) est le triplet $(x; y; z) = \left(\frac{1}{2}; -4; 5 \right)$

A. Applications

Exercice 1.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $4x^4 - 5x^2 + 1 > 0$ (1)

Solution :

Soit P le polynôme défini par $P(x) = 4x^4 - 5x^2 + 1$; On pose $X = x^2$.

On a : $4x^4 - 5x^2 + 1 = 4X^2 - 5X + 1$; le polynôme $4X^2 - 5X + 1$ a pour racines 1 et $\frac{1}{4}$. Donc :

$$4x^4 - 5x^2 + 1 = 4X^2 - 5X + 1 = (4X - 1)(X - 1) = (4x^2 - 1)(x^2 - 1) = (2x - 1)(2x + 1)(x - 1)(x + 1).$$

On en déduit le tableau suivant :

x	$-\infty$	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
$(2x-1)(2x+1)$	+	0	+	0	-	+
$(x-1)(x+1)$	+	0	-	0	-	+
$P(x)$	+	0	-	0	+	+

Donc l'ensemble des solutions de l'inéquation (1) est $S =]-\infty ; -1[\cup]-\frac{1}{2} ; \frac{1}{2}[\cup]1 ; +\infty[$.

Exercice 2.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $x^4 \geq x^2 + 12$... (2)

Solution :

On a : $x^4 \geq x^2 + 12 \Leftrightarrow x^4 - x^2 - 12 \geq 0$; on pose $X = x^2$. On a : $x^4 - x^2 - 12 = X^2 - X - 12$;

le polynôme $X^2 - X - 12$ a pour racine -3 et 4, donc

$$X^2 - X - 12 = (X + 3)(X - 4) = (x^2 + 3)(x^2 - 4) = (x^2 + 3)(x - 2)(x + 2).$$

Or, $x \in \mathbb{R}$; $x^2 + 3 > 0$; donc l'ensemble de solutions de l'inéquation (2) est

$$S =]-\infty ; -2[\cup]2 ; +\infty[.$$

Exercice 3.

Soit l'équation ; (E) : $x^3 + 2x^2 - 2x - 1 = 0$

a) Donner une solution évidente x_0 de l'équation (E) ;

b) Ecrire (E) sous la forme $(x - x_0)(ax^2 + bx + c) = 0$

c) Donner les deux autres solutions de (E).

Réponse :

a) 1 est solution évidente de l'équation (E), en effet ;

$$(1)^3 + 2(1)^2 - 2(1) - 1 = 1 + 2 - 2 - 1 = 3 - 3 = 0$$

b) Ecrivons (E)

$$(x - 1)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + bx^2 + cx - ax^2 - bx - c = ax^3 + (b - a)x^2 + (c - b)x - c$$

En identifiant les coefficients on obtient : $a = 1$, $b - a = 2 \Leftrightarrow b = 3$ et

$$c - b = -2 \Leftrightarrow -c = -1 \Leftrightarrow c = 1$$

$$\text{c) On a : } x^3 + 2x^2 - 2x - 1 = (x-1)(x^2 + 3x + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \Leftrightarrow x=1 \\ \text{ou} \\ x^2 + 3x + 1 = 0 \end{cases}$$

$x^2 + 3x + 1 = 0$ on a : $\Delta = 9 - 4 = 5$ L'équation admet deux solutions x_1 et x_2

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-3 - \sqrt{5}}{2} \\ x_2 = \frac{-3 + \sqrt{5}}{2} \end{cases} \quad \text{L'ensemble des solutions est : } S = \left\{ \frac{-3 - \sqrt{5}}{2}; \frac{-3 + \sqrt{5}}{2}; 1 \right\}$$

Exercice 4.

Soit l'équation ; $x^4 + 8x^2 - 9 = 0$ (1)

Solution :

Procédons à un changement de variable en posant ;

$x^2 = X$ l'équation devient $X^2 + 8X - 9 = 0$ (2) $\Delta = 64 + 36 = 100$; $\Delta > 0$

L'équation (2) admet deux solutions $X = \frac{-8+10}{2} = 1$ ou $X = \frac{-8-10}{2} = -9$

$$x^2 = X \Rightarrow \begin{cases} x^2 = -9 \text{ impossible} \\ x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = -1 \end{cases} \quad S = \{-1; 1\}.$$

Exercice 5.

On considère l'équation (E) : $x^4 - 2x^3 - 6x^2 - 2x + 1 = 0$

1) Vérifier que 0 n'est pas solution de (E).

2) Montrer que si α est solution de (E), alors $\frac{1}{\alpha}$ est aussi solution de (E).

3) Montrer que l'équation (E) est équivalente à : $E' : x^2 - 2x - 6 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$

4) Calculer $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2$.

5) En posant ; $X = x + \frac{1}{x}$;

Montrer que l'équation (E') est équivalente à l'équation ; (E'') : $X^2 - 2X - 8 = 0$.

6) Résoudre l'équation (E'').

7) En déduire les solutions de l'équation (E).

Solution :

1) $(0)^4 - 2(0)^3 - 6(0)^2 - 2(0) + 1 = 1 \neq 0$

2) α est solution E d'après la question 1) $\alpha \neq 0$ et on a :

$$\alpha^4 - 2\alpha^3 - 6\alpha^2 - 2\alpha + 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 \left(\alpha^2 - 2\alpha - 6 - \frac{2}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} \right) = 0$$

Or $\alpha^2 \neq 0$ donc : $\alpha^2 - 2\alpha - 6 - \frac{2}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2} - \frac{2}{\left(\frac{1}{\alpha}\right)} - 6 - 2\left(\frac{1}{\alpha}\right) + \left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 = 0$

D'où $\frac{1}{\alpha}$ est solution de l'équation (E)

3) En divisant les deux membres de l'équation (E) : $x^4 - 2x^3 - 6x^2 - 2x + 1 = 0$ par x^2 par on obtient équation équivalente : (E') : $\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} - 6 - 2x + x^2 = 0$

4°) Calcul de $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}$$

5) L'équation E' peut alors s'écrire ; (E') : $\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} - 6 - 2x + x^2 = 0$

Par regroupement de termes du premier membre : (E') : $\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - \left(2x + \frac{2}{x}\right) - 6 = 0$

$$(E') : \underbrace{\left(x^2 + \frac{1}{x^2} + 2\right)}_{\text{Ajouter et retrancher 2}} - 2 - \left(2x + \frac{2}{x}\right) - 6 = 0 \quad \text{c'est à dire} \quad (E') : \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2\left(x + \frac{1}{x}\right) - 8 = 0$$

En posant ; $X = x + \frac{1}{x}$. On obtient : (E'') : $X^2 - 2X - 8 = 0$

6°) Résolution de l'équation (E'')

(E'') : $X^2 - 2X - 8 = 0$ Le discriminant de (E'') : $\Delta = 4 + 32 = 36$

$$X = \frac{2-6}{2} = \frac{-4}{2} = -2 \quad \text{ou} \quad X = \frac{2+6}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

7°) Résolution de l'équation (E)

$$x + \frac{1}{x} = X \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{1}{x} = -2 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 & (1) \\ x + \frac{1}{x} = 4 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 1 = 0 & (2) \end{cases}$$

Résolution de l'équation (1) $x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$

Résolution de l'équation (2) : $x^2 - 4x + 1 = 0$ Le discriminant : $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 12$

et $\sqrt{\Delta} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$. Les solutions de l'équation (2) sont : $x_1 = \frac{4+2\sqrt{3}}{2} = 2 + \sqrt{3}$ ou

$$x_2 = \frac{4-2\sqrt{3}}{2} = 2 - \sqrt{3}$$

L'ensemble des solutions de (E) est : $S = \{2 - \sqrt{3}; -1; 2 + \sqrt{3}\}$

Exercice 6.

Soit le polynôme $P(x) = x^4 + x^3 - 5x^2 + x - 6$

a) Vérifier que -3 et 2 sont racines de P et en déduire une factorisation du polynôme $P(x)$.

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $x^4 + x^3 - 5x + x - 6 < 0$

Solution :

a) On a : $P(-3) = 81 - 27 - 45 - 3 - 6 = 0$

donc -3 est racine de P

$P(2) = 16 + 8 - 20 + 2 - 6 = 0$ donc 2 est racine de P

On en déduit qu'il existe un polynôme $Q(x)$ tel que $P(x) = (x-2)(x+3)Q(x)$

Pour déterminer ce polynôme Q , on peut utiliser la méthode de coefficients indéterminés.

Q est un polynôme de degré 2. On pose : $Q(x) = ax^2 + bx + c$

On a :

$$\begin{aligned} P(x) &= (x-2)(x+3)Q(x) = (x^2 + x - 6)(ax^2 + bx + c) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + ax^3 + bx^2 + cx - 6ax^2 - 6bx - 6c \\ &= ax^4 + (b+a)x^3 + (c+b-6a)x^2 + (c-6b)x - 6c \end{aligned}$$

et $P(x) = x^4 + x^3 - 5x + x - 6$

Par identification de coefficients on obtient :

$$\begin{cases} a = 1 \\ b + a = 1 \\ c + b - 6a = -5 \\ c - 6b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 - a = 0 \\ c = 1 + 6b = 1 \end{cases}$$

donc $P(x) = (x^2 + x - 6)(x^2 + 1)$

b) On a pour tout réel x ; $x^2 + 1 > 0$ $P(x)$ est donc du signe de $x^2 + x - 6$ on a : $\Delta = 25$ et les ses racines sont : $x_1 = -3$ et $x_2 = 2$

L'ensemble des solutions de l'inéquation $P(x) < 0$ est $S =]-3; 2[$

Exercice 7.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation irrationnelle : $\sqrt{2-x} = x+10$ (1)

(On appelle équation irrationnelle toute équation où l'inconnue figure sous un radical.)

Solution :

Nous allons proposer deux méthodes pour résoudre une telle équation.

• Résolution par implication :

Pour tous nombres réels a et b on a $a = b \Rightarrow a^2 = b^2$; on peut écrire :

$$\sqrt{2-x} = x+10 \Rightarrow 2-x = (x+10)^2 \Rightarrow x^2 + 21x + 98 = 0 \Rightarrow (x+7)(x+14) = 0 ;$$

L'équation $(x+7)(x+14) = 0$ admet deux solutions -7 et -14 .

Pour terminer la résolution **on doit vérifier** si, -7 et -14 sont solutions de l'équation (1) :

$$\sqrt{2-(-7)} = -7+10 \text{ donc } -7 \text{ est solution de l'équation (1)}$$

On a : $\sqrt{2-(-14)} = 4$ et $-14+10 = -4$; $\sqrt{2-(-14)} \neq -14+10$ donc -14 n'est pas solution de l'équation (1). L'équation (1) a une solution unique $x = -7$.

• **Résolution par équivalence :**

Pour tous nombres réels a et b positifs on a : $\sqrt{a} = b \Leftrightarrow \begin{cases} a = b^2 \\ b \geq 0 \end{cases}$

$$(1): \sqrt{2-x} = x+10 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 21x + 98 = 0 \\ x \geq -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+7)(x+14) = 0 \\ x \geq -10 \end{cases} \Leftrightarrow x = -7$$

L'équation (1) a une solution unique $x = -7$..

Exercice 8.

Pour tous nombres réels : $\sqrt{a} = \sqrt{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ a \geq 0 \text{ et } b \geq 0 \end{cases}$.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\sqrt{-x^2 + 5x + 9} = \sqrt{x-3}$ (2)

Solution :

On peut écrire :

$$\sqrt{-x^2 + 5x + 9} = \sqrt{x-3} \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 + 5x + 9 = x-3 \\ x-3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 + 4x + 12 = 0 \\ x \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = 6 \text{ ou } x = -2$$

(la solution -2 est rejetée car $-2 < 3$). . Donc, l'équation (2) admet une seule solution : $x = 6$.

Méthode

Pour résoudre une équation irrationnelle (E) on peut utiliser la méthode suivante :

- éliminer les radicaux par élévation au carré
- résoudre l'équation (E') sans radical ainsi obtenue .
- déterminer parmi les solutions de (E') celles qui sont solutions de (E).

Exercice 9.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $x + \sqrt{x-1} \geq 3$ (1).

Pour résoudre une inéquation irrationnelle, il est difficile de procéder par implication car les ensembles de solutions contiennent en général une infinité d'éléments ; on ne peut donc pas vérifier si chacun d'eux est solution de l'inéquation initiale.

Solution

- Contraintes sur l'inconnue : $x > 1$
- On a : pour tout $x \in]1; +\infty[$: $x + \sqrt{x-1} \geq 3 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} \geq 3-x$,

Etudions cette inégalité suivant le signe de $3-x$

1^{er} cas : si $3-x \leq 0$ soit $x \geq 3$

L'inéquation est vérifiée car $\sqrt{x-1} \geq 0$ pour tout $x > 1$ et l'ensemble $S_1 = [3; +\infty[$ est solution de (1)

2^e cas : si $3-x > 0$ soit $x < 3$, $\sqrt{x-1} \geq 3-x \Leftrightarrow x-1 \geq (3-x)^2 \Leftrightarrow x^2 - 7x + 10 \leq 0$

L'ensemble $S_2 = [2; 5]$ est solution de (1) .

L'ensemble des solutions de l'inéquation (1) est $S_1 \cup S_2 = [3; +\infty[\cup [2; 3] = [2; +\infty[$.

Exercice 10.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2} \geq 3$ (2).

Solution :

Contraintes sur l'inconnue :

L'inéquation est définie si et seulement si $\begin{cases} x \geq -1 \\ x \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq -1$

Pour tout $x \geq -1$ on a :

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2} \geq 3 \Leftrightarrow 2x+3+2\sqrt{(x+1)(x+2)} \geq 9 \Leftrightarrow \sqrt{(x+1)(x+2)} \geq -x+3$$

1^{er} cas : si $-x+3 \leq 0$ soit $x \geq 3$

L'inéquation est toujours vérifiée, dans ce cas, car $\sqrt{(x+1)(x+2)} \geq 0$ pour tout $x \geq -1$.

L'ensemble $S_1 = [3; +\infty[$ est solution de (2).

2^e cas : si $-x+3 > 0$ soit $x < 3$ on a :

$$\sqrt{(x+1)(x+2)} \geq -x+3 \Leftrightarrow (x+1)(x+2) \geq (-x+3)^2 \Leftrightarrow 9x-7 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{7}{9}$$

L'ensemble $S_2 = \left[\frac{7}{9}; 3\right[$ est solution de (2)

Donc l'ensemble des solutions de l'inéquation (2) est $S_1 \cup S_2 = [3; +\infty[\cup \left[\frac{7}{9}; 3\right[= \left[\frac{7}{9}; +\infty\right[$.

Soit l'équation : $ax^2 + bx + c = 0$, tels que $a \neq 0$ et $\Delta > 0$.

$$\text{on a : } ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \Leftrightarrow x^2 - Sx + P = 0$$

Le système linéaire $\begin{cases} x + y = S \\ xy = P \end{cases}$ est appelé **système homogène** et admet comme solution, les

solutions de l'équation $x^2 - Sx + P = 0$.

Exercice 11.

Déterminer deux nombres réels dont la somme est 7 et le produit est 6.

Solution :

Soit α et β les deux nombres recherchés, on a :

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 7 \\ \alpha\beta = 6 \end{cases}$$

La solution de ce système homogène, c'est les solutions de l'équation $x^2 - 7x + 6 = 0$

$$\text{On a ; } a+b+c=1-7+6=0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = \frac{6}{1} = 6 \end{cases}$$

Donc les deux nombres sont 1 et 6

B. Exercices divers

1. | Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes:

$$\left| \begin{array}{l} x^2 - 4x + 3 = 0 \\ x^4 - 4x^2 + 3 = 0 \\ x^2 - 3x - 4 = 0 \\ x^2 + x + 1 = 0 \\ x^2 + 1 = 0 \\ x^2 + 3x - 4 = 0 \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} x + 3\sqrt{x} + 1 = 0 \\ 2x^2 - x - 1 = 0 \\ 1 - 4x^2 = 0 \\ (2x+1)2 - 3(2x+1) - 4 = 0 \\ (x-1)(x+3) = 0 \end{array} \right|$$

2. | Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations :

a) $x+1 \leq 0$ b) $x+1 \geq 0$ c) $\frac{1}{3}x+1 \geq 0$.

Équations et inéquations se ramenant au second degré

3. | Résoudre les équations suivantes :

a) $\frac{x^2+2x+1}{x+1} = 2x-1$ b) $\frac{3x}{x+2} - \frac{x+1}{x-2} = -\frac{11}{5}$
c) $\frac{1}{x+2} - \frac{2}{2x-5} = \frac{9}{4}$ d) $\frac{3x^2+10x+8}{x+2} = 2x+5$

4. | Résoudre les inéquations suivantes :

a) $\frac{2x^2+5x+3}{x+1} > 0$ b) $(x+3)(x-1) < 2x+6$
c) $\frac{x+3}{1-x} \geq -5$

Equations bicarrées

5. | Résoudre les équations bicarrées suivantes

a) $4x^4 - 5x^2 + 1 = 0$ b) $2x^4 - x^2 + 1 = 0$
c) $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$ d) $4x^4 - 35 - \frac{9}{x^2} = 0$
e) $-2x^4 + 12x^2 - 16 = 0$ f) $x^4 + 5x^2 + 4 = 0$

Changement de variable

6. | Résoudre les équations suivantes

a) $2x - 3\sqrt{x} + 1 = 0$ b) $2x^2 - 3|x| + 1 = 0$

7. | Résoudre les équations suivantes

a) $\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{3}{(x+1)^2} - 4 = 0$
b) $\left(\frac{x+2}{2x-1}\right)^2 + \left(\frac{x+2}{2x-1}\right) - \frac{3}{4} = 0$

Equations et inéquations

8. | Résoudre les équations et inéquations suivantes :

a) $x^3 - 5x^2 + 4 < 0$; b) $x^3 - 19x + 3 \leq 0$
c) $x^3 - 8 > 0$; d) $-3x^3 - 4x^2 + x + 2 < 0$
e) $x^4 - 4x^2 - x + 2 > 0$

9. | Résoudre les inéquations suivantes :

a) $(x-1)(3x^2+5x-8) < 0$
b) $\frac{x^3-5x+4}{x^2-9} \geq 0$ c) $\frac{x^2-4}{x^3-x^2+x-1} < 0$
d) $\frac{(x+4)(x^2+1)}{x^2-9} \geq 0$

Systemes d'équations

10. | 1) Résoudre le système :

$$\begin{cases} 5a+2b=26 \\ 2a-3b=-1 \end{cases}$$

2) Déduire de 1) les solutions éventuelles des systèmes suivants :

$$\begin{cases} 5x + 2y^2 = 26 \\ 2x - 3y^2 = -1 \end{cases}; \begin{cases} 5\sqrt{x} + 2\sqrt{y} = 26 \\ 2\sqrt{x} - 3\sqrt{y} = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{5}{x} + \frac{2}{y} = 26 \\ \frac{2}{x} - \frac{3}{y} = -1 \end{cases}$$

Dans les exercices 11 et 12 résoudre par la méthode de son choix les systèmes proposés.

11.

$$a) \begin{cases} 7x + 2y = -43 \\ x + 2z = 109 \\ y - 10z = 10 \end{cases} \quad b) \begin{cases} 4x - 3y + 2z = 85 \\ x + y - z = 166 \\ x - 2y - 3z = 11 \end{cases}$$

12.

$$a) \begin{cases} x - y + 3z = 18 \\ x + 5y - 2z = 0 \\ -7x - 6y + 5z = 8 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 2x + 3y - 5z = 23 \\ 4x + 13y - 8z = 2 \\ x + 2y + 7z = -16 \end{cases}$$

Méthode de pivot de Gauss

Résoudre les systèmes suivants par la méthode de pivot de Gauss

13.

$$a) \begin{cases} 3x + 2y - 2z = -1 \\ -3y + 2z = -4 \\ -z = -7 \end{cases} \quad b) \begin{cases} -4x + 6y + 5z = 1 \\ -4y - 3z = 4 \\ -2z = 4 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 3x = -6 \\ x - 2y = -4 \\ x + 3y - 2z = -5 \end{cases}$$

14.

$$a) \begin{cases} 3x + 4y + 9z = 53 \\ 7x - 10y + 3z = -23 \\ 2x + 9y - 5z = -18 \end{cases} \quad b)$$

$$\begin{cases} 4x + 4y - z = 1 \\ 3x + y - 2z = 2 \\ -2x + 2y + 3z = 5 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 3x + 2y - 2z = 2 \\ -2x + y + 3z = 1 \\ -x + 4y + 4z = 4 \end{cases}$$

15. Résoudre dans $\mathbb{R}^3$, chacun des systèmes :

$$1) \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 3x + 2y + 4z = 5 \\ -2x - 5y + 2z = 6 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x + y + z = 12 \\ 3x - 2y + 3z = 12 \\ 5x - y + z = 12 \end{cases}$$

Inéquations et systèmes d'inéquations

16. Résoudre graphiquement

1) les inéquations suivantes :

$$a) x + 2 \leq 0 \quad b) y \geq 0 \quad c) x \leq 1.$$

2) les systèmes d'inéquations suivantes :

$$a) \begin{cases} x + y - 1 < 0 \\ 2x - 3y > 0 \end{cases} \quad b) \begin{cases} x + y - 1 \geq 0 \\ x - 2y + 4 \geq 0 \end{cases}$$

17.

Représenter l'ensemble des points dont les coordonnées sont solutions des inéquations suivantes :

$$\begin{cases} -2x + y + 2 \leq 0 \\ -3x + 4y - 1 > 0 \end{cases}$$

Equations à coefficients symétriques

18. On donne l'équation

$$(E) : x^4 - 8x^3 - 5x^2 - 8x + 1 = 0.$$

$$1) \text{ Montrer que } (E) \Leftrightarrow \begin{cases} X = x + \frac{1}{x} \\ X^2 - 8X - 7 = 0 \end{cases}$$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E)

I. Généralités sur les suites

1. Définitions relatives aux suites

a. Définition d'une suite

Définition 1

Une suite u est une fonction de $\mathbb{N}$ (ou une partie de $\mathbb{N}$) vers $\mathbb{R}$ qui à tout n associe un nombre, noté $u(n)$ ou u_n

$$u : n \rightarrow u(n) = u_n$$

b. Notation et vocabulaire

La suite se note u ou (u_n) : u_n est le terme général de rang n se lit : u indice n

Le terme initial est u_0 ou u_p lorsque la suite est définie à partir du rang p .

Une suite peut être définie à l'aide d'une fonction f :

- Soit de manière explicite : $u_n = f(n)$
- Soit par récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ dans ce cas il faut indiquer le terme initial.

ou par la donnée des deux premiers termes et une formule de récurrence entre u_{n+1} , u_n et u_{n-1}

Exemple 1

Soit (u_n) la suite définie par : $u_n = \frac{2n+1}{n+2}$

Cette suite est déterminée par une formule explicite, le terme général de cette suite est :

$$\frac{2n+1}{n+2} \text{ et son premier terme est } u_0 = \frac{1}{2}, \text{ et } u_{10} = \frac{2 \times 10 + 1}{10 + 2} = \frac{21}{12} = \frac{7}{4}$$

Soit la suite (v_n) définie par récurrence : $v_0 = 1$ et $v_{n+1} = \frac{1}{v_n} + 2$

$$\text{On a : } v_1 = \frac{1}{v_0} + 2 = 3 ; v_2 = \frac{1}{v_1} + 2 = \frac{1}{3} + 2 = \frac{7}{3} ; v_3 = \frac{1}{v_2} + 2 = \frac{1}{\frac{7}{3}} + 2 = \frac{3}{7} + 2 = \frac{17}{7}$$

2. Représentations graphiques d'une suite numérique

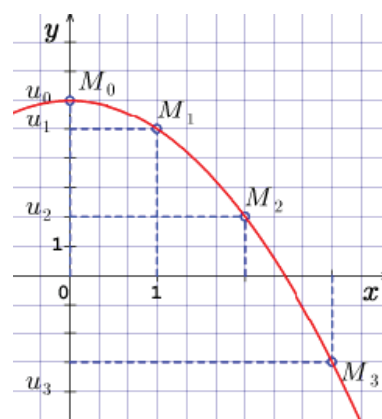
a. Représentation graphique d'une suite définie par une formule explicite

Une suite numérique est une fonction, donc elle peut être représentée dans le plan muni d'un repère, il est également possible de représenter les termes d'une suite sur un axe

Exemple 2

Soit (u_n) la suite de terme général $u_n = 6 - n^2$. On a : $u_0 = 6$; $u_1 = 5$; $u_2 = 2$; $u_3 = -3$

Le plan est muni du repère $(O; I; J)$. Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction : $f : x \rightarrow 6 - x^2$.



Pour tout entier naturel n , on désigne par M_n le point de coordonnées $(n; f(n))$. L'ensemble des points M_n est une représentation graphique de la suite (u_n) dans le plan.

Lorsqu'on projette les points M_n sur l'axe des ordonnées, on obtient une représentation des points de la suite sur l'axe (OJ) .

b. Représentation graphique d'une suite définie par une formule de récurrence

Exemple 3

Soit (v_n) la suite définie par :

$$v_0 = 6 \text{ et pour tout } n > 1 \quad v_{n+1} = \frac{1}{2} \left(v_n + \frac{3}{v_n} \right)$$

$$\text{On a : } v_0 = 6 ; \quad v_1 = \frac{13}{4} = 3,25 ; \quad v_2 = \frac{217}{104} = 2,08 ;$$

$$v_3 = 1,76$$

Le plan est muni du repère $(O; I; J)$. Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction :

$$g : x \mapsto \frac{1}{2} \left(x + \frac{3}{x} \right) \text{ et } \Delta \text{ la droite d'équation } y = x$$

Construction de v_1 : Soit M_0 le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse

$v_0 = 6$. L'ordonnée de M_0 est $v_1 = g(v_0)$

Soit P_0 le point de Δ d'ordonnée v_1 , l'abscisse de P_0 est v_1 .

Construction de v_2 : Soit M_1 le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse v_1 . L'ordonnée de M_1 est $v_2 = g(v_1)$ Soit

P_1 le point de Δ d'ordonnée v_2 , l'abscisse de P_1 est v_2 .

Cette méthode permet une construction de proche en proche sur l'axe (OI) des termes d'une suite définie par une formule de récurrence.

Exemple 4

1. Calculer u_1, u_2, u_3, u_4 et u_5 dans chacun des cas suivants :

(u_n) est défini sur $\mathbb{R}$ par $u_n = 5 \times 10^n + 2$

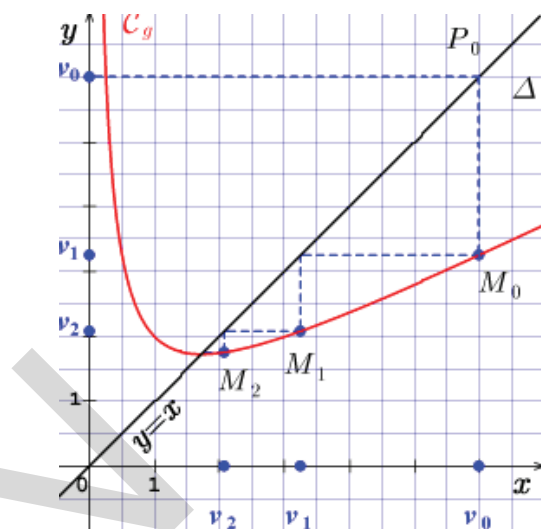
2. (u_n) définie sur $\mathbb{R}$ par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{1}{1+u_n}$

3. (u_n) est la somme des inverses des n premiers entiers naturels non nuls.

Indication : On peut noter que pour tout entier naturel non nul $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n+1}$

Solution

1. Calcul de : $u_1 = 5 \times 10^1 + 2 = 52$, $u_2 = 5 \times 10^2 + 2 = 502$, $u_3 = 5 \times 10^3 + 2 = 5002$,
 $u_4 = 5 \times 10^4 + 2 = 50002$, $u_5 = 5 \times 10^5 + 2 = 500002$



$$2. \quad u_1 = \frac{1}{1+u_0} = \frac{1}{2}, \quad u_2 = \frac{1}{1+u_1} = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}, \quad u_3 = \frac{1}{1+u_2} = \frac{1}{1+\frac{2}{3}} = \frac{3}{5}, \quad u_4 = \frac{1}{1+u_3} = \frac{1}{1+\frac{3}{5}} = \frac{5}{8},$$

$$u_5 = \frac{1}{1+u_4} = \frac{1}{1+\frac{5}{8}} = \frac{8}{13}$$

$$3. \quad \text{On a : } u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

$$u_1 = \frac{1}{1} = 1, \quad u_2 = u_1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, \quad u_3 = u_2 + \frac{1}{3} = \frac{3}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6},$$

$$u_4 = u_3 + \frac{1}{4} = \frac{11}{6} + \frac{1}{4} = \frac{50}{24} = \frac{25}{12}, \quad u_5 = u_4 + \frac{1}{5} = \frac{25}{12} + \frac{1}{5} = \frac{137}{60},$$

Exemple 5

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{R}$ par $u_0 = -5$ et $u_{n+1} = \sqrt{6+u_n}$

1. Représenter dans un même repère $(O; I; J)$ la droite Δ d'équation $y = x$ et la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction $f(x) = \sqrt{6+x}$
2. Utiliser $\mathcal{C}$ et Δ pour représenter graphiquement les premiers termes de la suite sur l'axe des abscisses.
3. Faire une conjecture sur le sens de variation de la suite (u_n) et ses bornes éventuelles.
4. De quel nombre semble se rapprocher u_n quand n devient grand.

Solution 2

Il semble que la suite (u_n) soit croissante donc minorée par son premier terme $u_0 = -5$

Il semble que la suite (u_n) est majorée par 3 et que u_n ne cesse de se rapprocher de 3 quand n grandit.

3. Raisonnement par récurrence

But : montrer qu'une propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geq p$

Initialisation : on vérifie que la propriété est vraie au rang p

Hérédité : on montre que si la propriété est vraie au rang n , alors elle est encore vraie au rang $n+1$

Conclusion : la propriété est vraie pour tout $n \geq p$

Exemple 6

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$; $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 2$

Montrons l'encadrement de u_n par récurrence.

Initialisation : On a $u_0 = 1$ donc $0 < u_0 < 2$

Hérédité : On suppose que $0 < u_n < 2$ et on montre que : $0 < u_{n+1} < 2$

$$0 < u_n < 2 \Rightarrow 2 < 2 + u_n < 4 \Rightarrow \sqrt{2} < \sqrt{2 + u_n} < 2 \Rightarrow 0 < \sqrt{2} < u_{n+1} < 2$$

Conclusion : D'après le principe de récurrence pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 2$

Exemple 7

La suite (v_n) est définie par $v_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ $v_{n+1} = 2v_n + 1$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 2^n - 1$

Notons $\mathcal{P}(n) : n \in \mathbb{N}, v_n = 2^n - 1$

Initialisation : On a $v_0 = 0$ donc $v_0 = 2^0 - 1$

Hérédité : On suppose que $v_n = 2^n - 1$ Montrons que $v_{n+1} = 2^{n+1} - 1$

$$v_{n+1} = 2v_n + 1 = 2(2^n - 1) + 1 = 2^{n+1} - 1$$

Conclusion : D'après le principe de récurrence pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 2^n - 1$

4. Propriétés d'une suite numérique

a. Suite majorée, Suite minorée ; Suite bornée

Une suite (u_n) est majorée s'il existe un réel M tel que pour tout entier $n : u_n \leq M$

Une suite (u_n) est minorée s'il existe un réel m tel que pour tout entier $n : u_n \geq m$

Une suite qui est à la fois majorée et minorée est dite bornée.

Remarques

- Les suites (u_n) et (v_n) définies par : $u_n = \frac{1}{n}$ et $v_n = \frac{1}{n^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ sont minorées par 0 et majorées par 1.
- Une suite décroissante est majorée par son premier terme
$$u_0 \geq u_1 \geq u_2 \dots \geq u_n \geq \dots$$
- Une suite croissante est minorée par son premier terme
$$u_0 \leq u_1 \leq u_2 \dots \leq u_n \leq \dots$$
- Dans la pratique, pour montrer qu'une suite (u_n) est majorée, minorée ou bornée, plusieurs méthodes sont possibles :
 - ✓ On montre directement la majoration par M ou la minoration par m , en étudiant le signe de $u_n - M$ ou celui de $u_n - m$
 - ✓ Lorsque $u_n = f(n)$, si la fonction f est bornée alors (u_n) est bornée.
 - ✓ On utilise un raisonnement par récurrence.

Exemple 8

➤ Soit la suite de terme général : $u_n = \frac{n+1}{n-4}$ (la suite est définie à partir du rang 5)

)Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 < u_n \leq 6$

$$u_n - 6 = \frac{n+1}{n-4} - 6 = \frac{n+1-6(n-4)}{n-4} = \frac{-5n+25}{n-4} = \frac{-5(n-5)}{n-4} < 0$$
$$u_n - 6 \leq 0 \Leftrightarrow u_n \leq 6$$

On montre de même que $u_n > 1$

➤ La suite (u_n) est définie par : $u_n = \cos(n) + 1$ est bornée.

On a : $u_n = f(n)$ où $f(x) = \cos x + 1$,

La fonction f est définie $[0; +\infty[$ et $1 \leq f(x) \leq 2$ donc $1 \leq u_n \leq 2$

5. Sens de variation d'une suite (monotonie)

Une suite (u_n) est croissante si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} > u_n$

Une suite (u_n) est décroissante si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} < u_n$

Une suite qui est croissante ou décroissante est dite monotone.

1) Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_{n+1}$ la suite est dite constante

2) Dans la pratique, pour étudier le sens de variation d'une suite (u_n) plusieurs méthodes sont possibles :

a) On étudie le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$

b) Lorsque les termes de la suite sont strictement positifs, on compare $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1 :

- Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ alors la suite est croissante
- Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ alors la suite est décroissante
- Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ alors la suite est constante

c) Lorsque $u_n = f(n)$, si la fonction f est monotone sur $[0; +\infty[$ alors, la suite (u_n) et la fonction f ont le même sens de variation.

3) On emploie de préférence la méthode b) lorsque dans l'expression de la suite figurent des produits ou des quotients comportant des exposants.

4) On emploie de préférence la méthode c). lorsque $u_n = f(n)$ et que l'on peut trouver simplement le sens de variation de f .

Exemple 9

Etudions le sens de variation des suites suivantes :

1) (u_n) définie par : $u_n = 2^n - n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

2) (v_n) définie par : $v_n = \frac{2^n}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

3) (w_n) définie par : $w_n = -3n + 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Solution

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = (2^{n+1} - (n+1)) - (2^n - n) = 2^{n+1} - 2^n - 1 = 2^n - 1 \geq 0$
 $u_{n+1} - u_n \geq 0$, la suite (u_n) est croissante.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n > 0$ et $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{2^{n+1}}{n+1} \times \frac{n}{2^n} = \frac{2n}{n+1}$ et $\frac{v_{n+1}}{v_n} - 1 = \frac{2n}{n+1} - 1 = \frac{n-1}{n+1} \geq 0$

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{v_{n+1}}{v_n} \geq 1, \text{ La suite } (v_n) \text{ est croissante.}$$

3) On a : $w_n = f(n)$ avec $f : x \mapsto -3x + 2$, f est une fonction affine définie et décroissante sur $[0; +\infty[$ donc la suite (w_n) est décroissante

II. Suites arithmétiques et suites géométriques

1. Suite arithmétique

a. Définitions et exemples

Définition 2

Dire qu'une suite (u_n) est arithmétique signifie qu'il existe un réel r , tel que, pour tout naturel n ; $u_{n+1} = u_n + r$, r est appelé **la raison** de la suite (u_n) .

Exemple 10

La suite (u_n) des entiers naturels : $u_n = n$ est une suite arithmétique de raison 1
 $u_0 = 0$; $u_1 = 1$...

La suite (v_n) des entiers naturels pairs : $v_n = 2n$ est une suite arithmétique de raison 2
 $v_0 = 0$; $v_1 = 2$; $v_2 = 4$...

La suite (w_n) définie par $w_n = 4 - 3n$ est une suite arithmétique de raison -3 . En effet :
 $w_{n+1} - w_n = (4 - 3(n+1)) - (4 - 3n) = -3$ et par conséquent $w_{n+1} = w_n - 3$

Remarques

- Pour démontrer qu'une suite donnée est arithmétique, il suffit de montrer que pour tout naturel n , le réel : $u_{n+1} - u_n$ est constant (c'est-à-dire ne dépend pas de n).
- Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r .
 - ✓ Si $r > 0$, alors la suite (u_n) est croissante
 - ✓ Si $r < 0$, alors la suite (u_n) est décroissante.
 - ✓ Si $r = 0$, alors la suite (u_n) est constante

b. Expression explicite d'une suite arithmétique

On admet la propriété suivante

Propriété 1.

Si (u_n) est une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r alors on a :

$$u_n = u_0 + nr$$

Remarque 1.

On déduit de cette propriété que pour tous entiers naturels n et p on a :

$$u_n = u_p + (n - p)r$$

En particulier : $u_n = u_1 + (n - 1)r$

Exemple 11

Soit u_n la suite des entiers naturels impairs, le premier terme de cette suite est $u_1 = 1$ et sa raison $r = 2$. On a : $u_n = u_1 + (n - 1)r = 1 + 2(n - 1) = 2n - 1$

Soit (v_n) la suite arithmétique de raison $r = 4$ tel que $v_3 = 2$. En appliquant la formule $v_n = v_p + (n - p)r$ on obtient : $v_{13} = v_3 + (13 - 3) \times (-4) = -36$

c. Somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique

On admet la propriété suivante :

Si S est une somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique alors :

$$S = \frac{\text{nombre de termes} \times (\text{1}^{\text{er}} \text{ terme} + \text{dernier terme})}{2}$$

Cas particuliers

Si le premier terme de la suite (u_n) est u_0 alors la somme des $(n+1)$ termes consécutifs est :

$$S = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n = (n+1) \frac{u_0 + u_n}{2}$$

Si le premier terme de la suite (u_n) est u_1 alors la somme des n termes consécutifs est :

$$S = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2}$$

Exemple 12

- La somme des n premiers entiers naturels non nuls est :

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

- La somme des n premiers entiers naturels impairs est :

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = \frac{n(1 + (2n-1))}{2} = n^2$$

- La somme des n premiers entiers naturels pairs est :

$$2 + 4 + 6 + \dots + 2n = \frac{n(2 + 2n)}{2} = n(n+1)$$

2. Suite géométrique

a. Définitions et exemples

Définition 3

Dire qu'une suite (u_n) est géométrique signifie qu'il existe un réel q tel que :

pour tout naturel n , $u_{n+1} = qu_n$.

Le réel q est la raison de la suite (u_n) .

Exemple 13

La suite (u_n) des puissances de 2 ; $u_n = 2^n$ est une suite géométrique de raison 2

$$u_0 = 2^0 = 1 ; u_1 = 2^1 = 2 ; u_2 = 2^2 = 4 ; u_3 = 2^3 = 8 \dots$$

La suite (v_n) définie pour tout entier n , $v_n = 5 \times 3^n$ est une suite géométrique de premier terme $v_0 = 5$ et de raison $q = 3$

Remarque 2.

- Pour démontrer qu'une suite donnée est géométrique, il suffit de montrer que pour tout naturel n , le réel $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est constant (c'est-à-dire ne dépend pas de n).
- Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} = q$ alors q est la raison de (u_n)
- Soit (u_n) une suite géométrique positive de raison q .
 - ✓ Si $q > 1$, alors la suite (u_n) est strictement croissante
 - ✓ Si $0 < q < 1$, alors la suite (u_n) est strictement décroissante.
 - ✓ Si $q = 1$, alors la suite (u_n) est constante

b. Expression explicite d'une suite géométrique

On admet la propriété suivante

Propriété 2.

Si (u_n) est une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q alors on a :

$$u_n = u_0 q^n$$

Remarque 3.

On déduit de cette propriété que pour tous entiers naturels n et p on a : $u_n = u_p q^{n-p}$

En particulier : $u_n = u_1 q^{n-1}$

Exemple 14

Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_1 = 3$ et sa raison $q = 2$. On a :

$$u_{10} = u_1 q^{10-1} = 3 \times 2^9$$

c. Somme des termes consécutifs d'une suite géométrique

On admet la propriété suivante :

Si S est une somme des termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $q \neq 1$ alors :

$$S = u_p + u_{p+1} + \dots + u_n = u_p \times \frac{(1 - q^{n-p+1})}{1 - q}$$

$n - p + 1$ correspond au nombre de termes de u_p à u_n

Cas particuliers

Si le premier terme de la suite (u_n) est u_0 alors la somme des $(n+1)$ termes consécutifs est :

$$S = u_0 + u_1 + \dots + u_n = u_0 \times \frac{(1 - q^{n+1})}{1 - q}$$

Si le premier terme de la suite (u_n) est u_1 alors la somme des n termes consécutifs est :

$$S = u_1 + u_2 + \dots + u_n = u_1 \times \frac{(1 - q^n)}{1 - q}$$

Exemple 15

La somme des $(n+1)$ premières puissances de 2 est :

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n = \frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2} = 2^{n+1} - 1$$

III. Limite d'une suite

1. Suites convergentes

a. Définitions et exemples

Soit une suite (u_n) et ℓ un réel

S'il existe un entier naturel p , tel que $|u_n - \ell|$ est aussi petit que l'on veut dès que $n \geq p$, on dit que la suite (u_n) a pour limite ℓ et on note : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$

On dit qu'une suite est **convergente** lorsqu'elle admet une limite finie ℓ

On dit aussi que la suite u_n **converge** vers ℓ

b. Suites de références de limite 0

On admet le théorème suivant :

Théorème

Les suites : $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)_{\alpha > 0}$, $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, $(a^n)_{|a| < 1}$ convergentes vers 0 et sont appelées suites de références de limite zéro.

Exemple 16

$$u_n = \frac{1}{n^3} \rightarrow 0 \quad w_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n \rightarrow 0$$

c. Suites divergentes

Soit une suite (u_n)

S'il existe un entier naturel p , tel que u_n soit aussi grand que l'on veut dès que $n \geq p$, on dit que la suite (u_n) a pour limite $+\infty$ et on note : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

Par définition : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} (-u_n) = +\infty$

Une suite qui n'est pas convergente est **divergente**.

Une suite est divergente dans deux cas :

- Lorsqu'elle admet une limite infinie.
- Ou bien lorsqu'elle n'a pas de limite.

d. Suites de références pour la limite ∞

On admet le théorème suivant :

Théorème

Les suites $(\sqrt[n]{n})$, (n^α) ($\alpha > 0$), (a^n) ($a > 1$) divergent vers $+\infty$: et sont appelées suites de références pour la limite infinie.

Exemple 17

$$u_n = n^3 \rightarrow +\infty \quad w_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n \rightarrow +\infty$$

Propriété

Soit (u_n) une suite numérique définie par :

$u_n = f(n)$ ou f est une fonction numérique. Si f admet une limite finie ℓ en $+\infty$ alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$$

Exemple 18

Suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 2 \end{cases}$$

1. Montrer que : $u_1 = \frac{11}{4}$

2. On pose $v_n = u_n - 8$

a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique

b) Exprimer v_n en fonction de n et calculer la limite de la suite (v_n)

Réponse :

1. Calcul de u_1 : $u_1 = \frac{3}{4}u_0 + 2 = \frac{3}{4} \times 1 + 2 = \frac{11}{4}$

2. a) Montrons que (v_n) est une suite géométrique.

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 8 = \frac{3}{4}u_n + 2 - 8 = \frac{3}{4}(u_n - 8) = \frac{3}{4}v_n$$

D'où (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{3}{4}$

b) Expression de v_n en fonction de n

$$\text{On a : } v_0 = 1 - 8 = -7, \quad v_n = -7 \left(\frac{3}{4}\right)^n \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} -7 \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0 \text{ car } \frac{3}{4} < 1$$

2. Opérations et limites :

Les théorèmes concernant les opérations sur les limites de suites sont analogues à ceux concernant les opérations sur les limites de fonctions : appliquer les théorèmes des opérations sur les limites, lever l'indétermination, comparer la suite aux suites de références, utiliser les théorèmes de comparaison etc.

Pour calculer la limite d'une suite on utilisera les mêmes techniques de calcul de limites d'une fonction.

Théorème :

Si deux suites (u_n) et (v_n) sont convergentes avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell'$ alors

$\lim_{n \rightarrow +\infty} ku_n = k\ell \quad (k \in \mathbb{R})$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n + v_n = \ell + \ell'$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \cdot v_n = \ell \times \ell'$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = \frac{\ell}{\ell'} \quad (\text{avec } \ell' \neq 0)$

Exemple 19

Calculer les limites suivantes : 1) $u_n = \frac{n^2 - 4n + 1}{n^2 - 1}$ 2) $v_n = \frac{1}{n} \sqrt{n+2}$ 3) $w_n = \frac{\sqrt{n+3}}{n+2}$

Réponse :

$$1) \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 - 4n + 1}{n^2 - 1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 \left(1 - \frac{4}{n} + \frac{1}{n^2}\right)}{n^2 \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{4}{n} + \frac{1}{n^2}}{1 - \frac{1}{n^2}} = 1$$

$$2) \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sqrt{n+2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{n+2}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}} = 0$$

$$3) \text{ On a : } \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n+3}}{n+2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n \left(1 + \frac{3}{n}\right)}}{n \left(1 + \frac{2}{n}\right)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n} \sqrt{1 + \frac{3}{n}}}{(\sqrt{n})^2 \left(1 + \frac{2}{n}\right)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{3}{n}}}{\sqrt{n} \left(1 + \frac{2}{n}\right)}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0 \text{ d'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0$$

Théorèmes de comparaison :

(u_n) et (v_n) sont deux suites

$\begin{cases} \text{si } v_n \leq u_n \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty \\ \text{alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty \end{cases}$	$\begin{cases} \text{si } u_n \leq v_n \leq w_n \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \ell \\ \text{alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell \end{cases}$ (Théorème de Gendarmes)
$\begin{cases} \text{si } u_n \leq v_n \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty \\ \text{alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty \end{cases}$	

Exemple 20

Soit (u_n) la suite définie par $u_n = \frac{\sin(n)}{n}$, $n > 0$.

En encadrant (u_n) par deux suites convenables, déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

Réponse :

On a : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-1 \leq \sin(n) \leq 1$ donc $-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin(n)}{n} \leq \frac{1}{n}$

On a : $-\frac{1}{n} \leq u_n \leq \frac{1}{n}$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ d'après le théorème de Gendarmes : $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$

A. Applications

Exercice 1.

Soit (u_n) la suite réelle définie par:
$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{2}{5}u_n + 3 \end{cases}$$

Partie A

- 1) Calculer u_1 et u_2 . (u_n) est-elle une suite géométrique ? Une suite arithmétique ?
- 2) Montrer que : pour tout $n \in \mathbb{N}$ $2 \leq u_n \leq 5$.
- 3) Montrer que (u_n) est croissante sur $\mathbb{N}$.
- 4) En déduire que (u_n) est convergente et calculer sa limite.

Partie B

On pose, pour tout entier naturel n : $v_n = u_n - 5$.

- 1) Montrer que (v_n) soit une suite géométrique
- 2) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n .
- 3) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.
- 4) Soit pour tout $n \in \mathbb{N}$: $s_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ et $s'_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$
 - a) Exprimer s_n puis s'_n en fonction de n
 - b) Calculer alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} s'_n$

Solution

Partie A

- 1) Calculons u_1 et u_2 ; et examinons si (u_n) est une suite géométrique ou une suite arithmétique

$$\begin{aligned} & \begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{2}{5}u_n + 3 \end{cases} \\ u_1 &= \frac{2}{5}u_0 + 3 = \frac{4}{5} + 3 = \frac{19}{5}; & u_2 &= \frac{2}{5}u_1 + 3 = \frac{38}{25} + 3 = \frac{113}{25} \text{ et on a : } \frac{u_1}{u_0} = 1.9; \frac{u_2}{u_1} = \frac{113}{95} \\ &= 1.19; & u_1 - u_0 &= \frac{19}{5} - 2 = \frac{9}{5} = 1.8; & u_2 - u_1 &= \frac{113}{25} - \frac{19}{5} = \frac{18}{25} = 0.72; \end{aligned}$$

d'où $\frac{u_1}{u_0} \neq \frac{u_2}{u_1}$ et $u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$ donc la suite (u_n) n'est ni géométrique ni arithmétique.

- 2) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2 \leq u_n \leq 5$

- Initialisation :

On a $u_0 = 2$ et $2 \leq 2 \leq 5$, donc la relation est vraie pour $n = 0$

- Hérédité :

Supposons que $2 \leq u_n \leq 5$ et montrons que $2 \leq u_{n+1} \leq 5$

$$2 \leq u_n \leq 5 \Rightarrow 2 \times \frac{2}{5} \leq \frac{2}{5} \times u_n \leq \frac{2}{5} \times 5 \Rightarrow \frac{4}{5} + 3 \leq \frac{2}{5}u_n + 3 \leq 2 + 3 \Rightarrow 2 \leq \frac{19}{5} \leq u_{n+1} \leq 5 \Rightarrow 2 \leq u_{n+1} \leq 5$$

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2 \leq u_n \leq 5$

- 3) Montrons que (u_n) est croissante sur $\mathbb{N}$

$$u_{n+1} - u_n = -u_n = \frac{2u_n + 15 - 5u_n}{5} = \frac{-3u_n + 15}{5} = \frac{3(5 - u_n)}{5} \geq 0 \text{ car } u_n \leq 5$$

Donc la suite (u_n) est croissante sur $\mathbb{N}$

4) Dédudons que (u_n) est convergente et calculons sa limite

Comme (u_n) est croissante sur $\mathbb{N}$ et majorée par 5, (u_n) est convergente.

La limite de (u_n) vérifie l'équation $f(x) = x$ où $f(x) = \frac{2}{5}x + 3$

$$\frac{2}{5}x + 3 = x \Rightarrow 2x + 15 = 5x \Rightarrow 3x = 15 \Rightarrow x = 5 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 5$$

Partie B

On pose, pour tout entier naturel n : $v_n = u_n - 5$

1) Montrons que (v_n) est une suite géométrique

$$\text{On a } v_{n+1} = u_{n+1} - 5 = \frac{2}{5}u_n + 3 - 5 = \frac{2}{5}u_n - 2 = \frac{2u_n - 10}{5} = \frac{2(u_n - 5)}{5} = \frac{2}{5}v_n$$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{2}{5}$

2) Exprimons v_n puis u_n en fonction de n .

$$\text{On a : } v_0 = u_0 - 5 = 2 - 5 = -3 \Rightarrow v_n = v_0 \times q^n \Rightarrow v_n = -3 \times \left(\frac{2}{5}\right)^n$$

$$\text{Et comme } u_n = v_n + 5, \quad u_n = 5 - 3 \times \left(\frac{2}{5}\right)^n$$

3) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

$$\text{La raison de } v_n \text{ est } q = \frac{2}{5} \text{ vérifiant : } -1 < q < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$$

4) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ et $S'_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

a) Exprimons S_n puis S'_n en fonction de n

$$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n = \frac{v_0(1 - q^{n+1})}{1 - q} = \frac{-3\left(1 - \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}\right)}{1 - \frac{2}{5}} = \frac{-15\left(1 - \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}\right)}{5 - 2} \Rightarrow$$

$$S_n = 5\left(\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1} - 1\right)$$

$$S'_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = (v_0 + 5) + (v_1 + 5) + \dots + (v_n + 5) = S_n + 5(n+1) =$$

$$5\left(\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1} - 1\right) + 5n + 5 = 5n + 5\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1} \Rightarrow S'_n = 5n + 5\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}$$

b) Calculons $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} S'_n$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 5 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} S'_n = +\infty$$

B. Exercices divers

Définition des suites

1. | Déterminer les 5 premiers termes des suites suivantes :

a. $u_n = 2n^2 - n + 1$

b. $v_n = \frac{2n+1}{2-3n}$

c. $\sqrt{3n+25}$

d. $3 \times [1 + (-1)^n] + 2$

2. | Calculer les quatre premiers termes des suites définies ci-dessous :

a. $u_n = n + 1$

b. $u_n = n^2 - n$

c. $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 3u_n + 1 \end{cases}$

d. $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2u_n} \end{cases}$

3. | Soit (u_n) la suite définie par $u_n = 5 + 2n, \forall n \in \mathbb{N}$.

1. Exprimer u_{n-3} en fonction de n .
2. Donner la forme simplifiée de $u_{n-3} + u_3$.
3. Donner la forme simplifiée de $u_{n-5} + u_5$.
4. Soit k et n deux entiers tels que $k < n$.
Montrer que $u_{n-k} + u_k$ est indépendant de k .

4. | Une suite (u_n) est périodique de période p , avec $p \neq 0$, si pour tout $n \in \mathbb{N}$,
 $u_{n+p} = u_n$.

Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 0$ et

$$u_{n+1} = \frac{1-u_n}{1+u_n}, \forall n \in \mathbb{N}$$

1. Déterminer les cinq premiers termes de la suite (u_n) .
2. Montrer que $u_{n+2} = u_n, \forall n \in \mathbb{N}$.
3. Que peut-on dire des termes de cette suite ?
4. Déterminer les réels a et b tels que :
 $u_n = a[1 + (-1)^2] + b, \forall n \in \mathbb{N}$

Récurrence

5. | Montrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^n > n$.

6. | Soit la suite (x_n) définie par : $x_0 = 1$
et $x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n - 1$.

Démontrer par récurrence que : $\forall n \geq 0$,
 $x_n > -2$.

7. | Soit la suite (u_n) définie par : $u_0 = 2$
et $u_{n+1} = 2u_n - 3$.

Démontrer par récurrence que : $\forall n \geq 0$,
 $u_n = 3 - 2^n$.

8. | Démontrer par récurrence les propriétés suivantes pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

1. $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

2. $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

3. $S_n = 1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + (2n-1)^3 = 2n^4 - n^2$

Monotonie

9. | Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = \frac{3n+4}{n+3}$

1. Calculer u_0, u_1 et u_2
2. Montrer que (u_n) est croissante. En déduire un minorant pour u_n
3. Montrer que (u_n) est majorée par 3

10. | Soit (u_n) définie par : $u_n = \frac{3^n}{2n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

1.

a. Simplifier $\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1$

b. En déduire les variations de (u_n)

2. Soit $(v_n) = \frac{1-n}{1+n}$

a. Simplifier $v_{n+1} - v_n$

b. En déduire les variations de (v_n)

11. | Montrer que $u_n = \frac{5^n}{n+2}$ est croissante.

Montrer que $v_n = n^3 - 2n^2 - 3n$ est croissante pour $n \geq 3$

12. | Soit $u_n = \frac{3n}{1+n+n^2}$ pour $n \geq 1$

1. Calculer u_1, u_2 et u_3
2. Montrer que (u_n) est décroissante
3. Montrer que (u_n) est bornée

13. | Soit (u_n) définie par

$$u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \text{ pour } n \geq 1$$

1. Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4
2. Étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$
3. Soit k tel que $1 \leq k \leq n$, montrer que $\frac{1}{n+k} \leq \frac{1}{n}$

En déduire un majorant de u_n et montrer que (u_n) est bornée.

14. | Soit (u_n) définie par

par récurrence : $u_0 = 1, u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$

1. Calculer u_1, u_2 et u_3
2. Montrer par récurrence que $u_n \leq 2$
3. Montrer par récurrence que (u_n) est croissante

15. | Soit (u_n) définie par

$$u_0 = 4, u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{1}{u_n} \right)$$

1. Calculer u_1, u_2, u_3
2. Montrer que tous les termes de la suite sont positifs et en déduire un minorant
3. Montrer que 1 est un minorant
4. Montrer que : $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2} \left(\frac{1-u_n^2}{u_n} \right)$
5. En déduire les variations de (u_n)

16. | Raisonement par récurrence

Soit (u_n) définie par

$$u_0 \in]0;1[\text{ et } u_{n+1} = u_n(2-u_n)$$

Démontrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_n < 1$$

Limite d'une suite

Dans les exercices 17, 18 et 19, déterminer la limite de la suite (u_n) en utilisant les théorèmes sur les opérations de limites.

17.

a. $u_n = \frac{2n+5}{3n-1}$

b. $u_n = \frac{n}{4} - 2 + \frac{2n}{n^2+5}$

c. $u_n = \frac{-3n^2+2n+1}{2(n+1)^2}$

18.

a. $u_n = \frac{10n-3}{n^2-2}$

b. $u_n = \frac{2n^2-1}{3n+2}$

c. $u_n = \frac{3n^2-4}{n+1} - 3n$

19.

a. $u_n = \frac{\sqrt{n+2}}{n+2}$

b. $u_n = \frac{n\sqrt{n}+n}{n-2}$

21. Déterminer la limite des suites suivantes à l'aide du théorème de comparaison.

a. $u_n = \frac{\cos(2n)}{\sqrt{n}}, n \in \mathbb{N}^*$

b. $v_n = n+1 - \cos n$

Limite d'une suite géométrique

20. Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$

et $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n - 2$

Soit la suite (v_n) telle que : $v_n = u_n + 3$

1) a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique.

b) Calculer v_n puis u_n en fonction de n .

2) On note $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ et

$S' = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

a) Calculer S_n et S'_n

b) En déduire les limites de S_n et S'_n .

Suite monotone

21. La suite (u_n) est définie par :

$u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$

1. Étudier la monotonie de la suite (u_n)

2. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n : $u_n > n^2$

3. Que peut-on dire sur la convergence de la suite (u_n) ?

22. Deux méthodes pour trouver la limite d'une suite.

La suite (u_n) est définie par : $u_0 = 0$ et

$$u_{n+1} = \frac{2u_n + 1}{u_n + 2}$$

Partie A : première méthode.

1) a) Démontrer par récurrence que pour tout n , $0 \leq u_n < 1$

b) Vérifier que : $u_{n+1} - u_n = \frac{1 - u_n^2}{u_n + 2}$ puis

montrer que la suite est alors croissante.

3) En déduire que la suite est convergente vers une limite L

4) On admet que cette limite L vérifie $f(L) = L$ avec f définie sur $[0; 1]$ par

$$f(x) = \frac{2x + 1}{x + 2}$$

Déterminer la valeur de L .

Partie B : deuxième méthode

1) La suite (v_n) est définie pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$$

Démontrer que (v_n) est une suite géométrique. Préciser la raison et le premier terme.

2) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n .

3) En déduire que la suite (u_n) est convergente et donner sa limite.

23. On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{2u_n}$

1) Démontrer que pour tout entier naturel n : $0 < u_n \leq 2$

2) Déterminer le sens de variation de la suite (u_n)

3) Montrer que la suite (u_n) est convergente.

24. Soit (u_n) la suite réelle définie par :

$$u_0 = 3 \text{ et } u_{n+1} = \sqrt{\frac{1 + u_n^2}{2}}.$$

On pose, pour tout entier naturel

$$n : v_n = u_n^2 - 1.$$

1) Montrer que (v_n) soit une suite géométrique

2) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n .

3) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

25. On considère la suite réelle (u_n)

définie par : $u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = 3 - \frac{2}{u_n}$

1) Montrer que (u_n) est minorée par 2.

2) Étudier la monotonie de la suite (u_n)

3) En déduire que (u_n) est convergente et calculer sa limite.

4) Montrer par récurrence que pour tout n

$$\text{de } \mathbb{N} : u_n = 2 + \frac{1}{2^{n+1} - 1}$$

5) Calculer alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

26.1 Suites adjacentes

Deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes si l'une est croissante et l'autre est décroissante et la limite de leur différence est égale à 0.

Soient (u_n) et (v_n) deux suites définies par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{3u_n + v_n}{4} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_0 = 3 \\ v_{n+1} = \frac{3v_n + u_n}{4} \end{cases}$$

1) Calculer u_1 et v_1 , puis u_2 et v_2

- (u_n) est-elle une suite géométrique ?
 (u_n) est-elle une suite arithmétique?

- (v_n) est-elle une suite géométrique ?

(v_n) est-elle une suite arithmétique?

2) On pose pour tout entier naturel n :

$$x_n = u_n - v_n$$

a) Montrer que (x_n) est une suite géométrique.

b) Exprimer (x_n) en fonction de n

3) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_n \leq v_n$

4) Montrer que (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante

5) En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$u_n \leq 3 \quad \text{et} \quad v_n \geq 2$$

6) En déduire que (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite.

I. Généralités :

1. Notion de fonction et ensemble de définition :

a. Premières définitions

Définition 1

Une fonction est une application de $\mathbb{R}$ ou une partie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui associe à tout nombre $x \in \mathbb{R}$ une image $f(x)$, et on note :

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow y = f(x)$$

Soit f une fonction numérique de la variable réelle, c'est-à-dire, une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

L'ensemble $\mathcal{D}_f$ de définition de f est l'ensemble des réels x tels que $f(x)$ existe.

Exemple 1

L'ensemble de définition d'une fonction polynôme est $\mathbb{R}$.

L'ensemble de définition d'une fonction rationnelle (c'est-à-dire quotient de deux polynômes) est $\mathbb{R}$ privé des valeurs éventuelles qui annulent le dénominateur.

L'ensemble de définition de la racine carrée d'une fonction polynôme est l'ensemble des réels pour lesquels cette fonction est positive.

Exemple 2

Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes :

$$1) f_1(x) = 5x^3 - 2x^2 + 3x - 7 ; \quad 2) f_2(x) = \frac{x^2 - 6x + 9}{2x - 4} \quad 3) f_3(x) = \frac{1}{x^2 - 5x + 6}$$

$$4) f_4(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - x + 1} \quad 5) f_5(x) = \frac{x^2 + 1}{x^3 - 6x^2 + 9x} \quad 6) f_6(x) = \sqrt{\frac{2x + 1}{x - 4}}$$

Solution :

$$1) f_1(x) = 5x^3 - 2x^2 + 3x - 7 : \mathcal{D}_{f_1} = \mathbb{R} \text{ car } f_1 \text{ est une fonction polynôme}$$

$$2) f_2(x) = \frac{x^2 - 6x + 9}{2x - 4} : f_2(x) \text{ est définie si, et seulement si :}$$

$$2x - 4 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2 \Leftrightarrow \mathcal{D}_{f_2} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

$$3) f_3(x) = \frac{1}{x^2 - 5x + 6} : f_3(x) \text{ est définie si, et seulement si : } x^2 - 5x + 6 \neq 0 \quad \Delta = 25 - 24 = 1 > 0$$

$$x_1 = \frac{5-1}{2} = \frac{4}{2} = 2, \quad x_2 = \frac{5+1}{2} = \frac{6}{2} = 3 \quad \mathcal{D}_{f_3} = \mathbb{R} \setminus \{2, 3\}$$

$$4) f_4(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - x + 1}$$

$$f_4(x) \text{ est définie si, et seulement si : } x^2 - x + 1 \neq 0 \quad \Delta = 1 - 4 = -3 < 0 ; \mathcal{D}_{f_4} = \mathbb{R}$$

$$5) f_5(x) = \frac{x^2 + 1}{x^3 - 6x^2 + 9x} : f_5(x) \text{ est définie si, et seulement si : } x^3 - 6x^2 + 9x \neq 0$$

$$x^3 - 6x^2 + 9x = x(x^2 - 6x + 9) = x(x-3)^2 : x(x-3)^2 \neq 0; \mathcal{D}_{f_5} = \mathbb{R} \setminus \{0, 3\}$$

$$6) f_6 \text{ est définie si et seulement si } \frac{2x+1}{x-4} \geq 0 \text{ et } x-4 \neq 0 \text{ donc } D_{f_6} = [-\frac{1}{2}; 4[\cup]4; +\infty[$$

b. Centre de symétrie d'une courbe :

Définition 2 On dit que le point $A(\alpha; \beta)$ est le centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$ si et seulement si Pour tout $x \in D_f$, $2\alpha - x \in D_f$. et

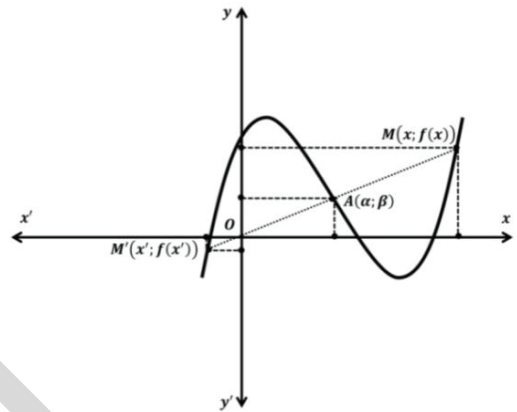
$$f(2\alpha - x) + f(x) = 2\beta$$

Interprétation géométrique

On a $A = M * M'$ alors,

$$\begin{cases} \frac{x+x'}{2} = \alpha \Leftrightarrow x+x' = 2\alpha \Leftrightarrow x' = 2\alpha - x \\ \frac{f(x)+f(x')}{2} = \beta \Leftrightarrow f(x)+f(x') = 2\beta \end{cases}$$

$$f(x) + f(2\alpha - x) = 2\beta$$



Exemple 3

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{5x-3}{x+2}$.

Montrer que le point $A(-2; 5)$ est le centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$.

Réponse :

Le point $A(-2; 5)$ est le centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$ si $f(x) + f(2 \times (-2) - x) = 2 \times 5$

$$\begin{aligned} f(x) + f(-4-x) &= \frac{5x-3}{x+2} + \frac{5(-4-x)-3}{(-4-x)+2} = \frac{5x-3}{x+2} + \frac{-20-5x-3}{-4-x+2} = \frac{5x-3}{x+2} + \frac{-5x-23}{-x-2} \\ &= \frac{5x-3}{x+2} + \frac{-(5x+23)}{-(x+2)} = \frac{5x-3}{x+2} + \frac{5x+23}{x+2} = \frac{5x-3+5x+23}{x+2} = \frac{10x+20}{x+2} = \frac{10(x+2)}{x+2} = 10 = 2 \times 5 \end{aligned}$$

D'où, le point $A(-2; 5)$ est centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$.

Remarque 1.

$$A = O(0; 0)$$

Si $f(2 \times 0 - x) + f(x) = 2 \times 0 \Leftrightarrow f(-x) + f(x) = 0$

$$\Leftrightarrow f(-x) = -f(x)$$

Propriété d'une fonction impaire. La fonction f admet l'origine O du repère comme centre de symétrie.

Exemple 4

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{3x^3 - 2x - 1}{x^2 + x - 2}$

1) On pose $h(x) = 3x^3 - 2x - 1$. Calculer $h(1)$ et factoriser $h(x)$.

2) Simplifier $f(x)$.

3) Déterminer les réels a, b et c tels que : $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+2}$

Montrer que le point $A(-2, -2a+b)$ est le centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$.

Réponse :

1) $h(1) = 3 \times (1)^3 - 2 \times (1) - 1 = 3 - 2 - 1 = 0$

Factorisation de $h(x) = (x-1)(3x^2 + 3x + 1)$

2) Simplification de $f(x) = \frac{(x-1)(3x^2 + 3x + 1)}{(x-1)(x+2)} = \frac{3x^2 + 3x + 1}{x+2}$

Déterminons a, b et c tels que : $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+2}$

En utilisant la méthode de l'identification, on a : $a = 3, b = -3, c = 7$

$$f(x) = 3x - 3 + \frac{7}{x+2}$$

Le point $A(-2, -2a+b) = A(-2, -9)$ est le centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$ si :

$f(-4-x) + f(x) = 2 \times -9 = -18$. On a :

$$f(-4-x) + f(x) = 3(-4-x) - 3 + \frac{7}{(-4-x)+2} + 3x - 3 + \frac{7}{x+2}$$

$$= -12 - 3x - 3 + \frac{7}{-4-x+2} + 3x - 3 + \frac{7}{x+2}$$

$$= -3x - 15 + \frac{7}{-x-2} + 3x - 3 + \frac{7}{x+2} = -18 = 2 \times -9 \Rightarrow A(-2, -9)$$

est le centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$.

Remarque 2.

On pourra également utiliser la formule :

$f(\alpha - x) + f(\alpha + x) = 2\beta$ (resp.) $f(a - x) = f(a + x)$ pour montrer que $A(\alpha ; \beta)$ est centre de symétrie de la fonction.

2. Limite d'une fonction en 0 :

a. Limite infinie d'une fonction en 0 :

• Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle ouvert en 0, de la forme $]0; c]$ ou $[b; 0[$ ou sur $[b; 0[\cup]0; c]$.

Si $f(x)$ est aussi grand (resp. aussi petit) que l'on veut dès que x est assez proche de 0, on dit que : f a pour limite $+\infty$ en 0 (resp. $-\infty$ en 0).

On écrit $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ (resp. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$).

b. Limite infinie à gauche et à droite d'une fonction en 0

Fonctions de référence

Quand x tend vers 0, avec $x > 0$ les fonctions :

$x \rightarrow \frac{1}{x}$, $x \rightarrow \frac{1}{x^2}$, $x \rightarrow \frac{1}{x^3}$, $x \rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}}$ tendent vers $+\infty$.

Quand x tend vers 0, avec $x < 0$ les fonctions : $x \rightarrow \frac{1}{x}$, $x \rightarrow \frac{1}{x^3}$ tendent vers $-\infty$ et la fonction $x \rightarrow \frac{1}{x^2}$ tend vers $+\infty$.

Remarque 3.

On note la limite à gauche en 0 de la fonction $x \rightarrow \frac{1}{x}$ $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ ou $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x} = -\infty$

On note la limite à droite en 0 de la fonction $x \rightarrow \frac{1}{x}$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ ou $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty$

c. Limite finie d'une fonction en 0

• Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle ouvert en 0, ou au voisinage de 0, de la forme $]0; c]$ ou $[b; 0[$ ou $[b; 0[\cup]0; c]$, et soit L un réel.

Si la distance $|f(x) - L|$ est aussi petite que l'on veut dès que x est assez proche de 0, on dit que : f a pour limite L en 0.

On écrit $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = L$ ou $\lim_0 f(x) = L$.

Exemple 5

Calculer les limites en 0 des fonctions :

a) $f(x) = \frac{2x}{x+1}$, b) $g(x) = x^2 - 2x$.

Réponse :

a) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x+1} = \frac{2 \times 0}{0+1} = \frac{0}{1} = 0$. b) $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 - 2x) = 0^2 - 2 \times 0 = 0$.

d. Limite finie à gauche et à droite d'une fonction en 0 :

• Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle ouvert en 0, ou au voisinage de 0, de la forme $]0; c]$ ou $[b; 0[$ ou $[b; 0[\cup]0; c]$, et soit L un réel.

Si la distance $|f(x) - L|$ est aussi petite que l'on veut dès que x est assez proche de 0, et $x < 0$, on dit que : f a pour limite L à gauche en 0. On écrit $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = L$, ou $\lim_{0^-} f(x) = L$.

• Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle ouvert en 0, ou au voisinage de 0, de la forme $]0; c]$ ou $[b; 0[$ ou $[b; 0[\cup]0; c]$, et soit L un réel.

Si la distance $|f(x) - L|$ est aussi petite que l'on veut dès que x est assez proche de 0, et $x > 0$, on dit que : f a pour limite L à droite en 0. On écrit $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = L$; ou $\lim_{0^+} f(x) = L$.

Remarque 4.

D'après ce qui précède : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} |f(x) - L| = 0$

Exemple 6

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{3x+2}{x-1}$. Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -2$.

Réponse :

Soit la fonction $g(x) = f(x) + 2$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (f(x) + 2) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x+2}{x-1} + 2 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x+2+2x-2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{x-1} = 0$$

Donc, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -2$.

e. Fonctions de référence pour la limite nulle en 0

Quand x tend vers 0, les fonctions : $x \rightarrow x$, $x \rightarrow x^2$, $x \rightarrow x^3$, $x \rightarrow \sqrt{x}$ tendent vers 0.

3. Limite d'une fonction en a :

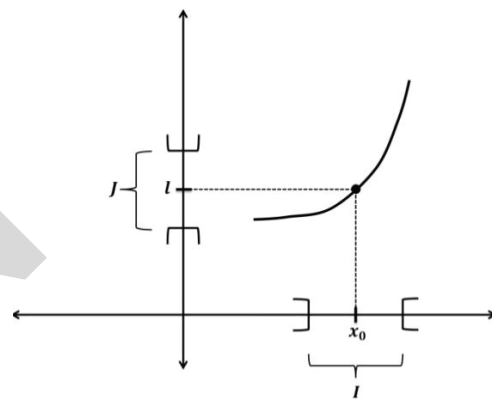
a. Limite finie d'une fonction en a :

Définition 1

Soit une fonction numérique f définie sur un intervalle ouvert en a , ou au voisinage de a , de la forme $]a; c[$ ou $[b; a[$ ou $[b; a[\cup]a; c[$, et soit L un réel.

La limite de la fonction f en a , si elle existe, est égale à la limite en 0 de la fonction $h \rightarrow f(a+h)$,

$$\text{Soit } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(a+h).$$



Définition 2 (Autre Définition)

On dit qu'une fonction f admet une limite finie L en x_0 et on écrit : $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$, si la fonction $g(h) = f(x_0 + h)$ admet la limite L lorsque h tend vers 0.

Exemple 7

Soit la fonction f définie par $f(x) = x^2 + 3x - 1$. Montrer que $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$.

Réponse

Soit la fonction

$$g(x) = f(h+1) = (h+1)^2 + 3(h+1) - 1 = h^2 + 2h + 1 + 3h + 3 - 1 = h^2 + 5h + 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(h+1) = \lim_{h \rightarrow 0} (h^2 + 5h + 3) = 3$$

b. Limite à gauche et limite à droite d'une fonction en a

On dit que f tend vers L lorsque x tend vers a à gauche (resp. à droite) et on écrit ;

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L \text{ (resp. } \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L), \text{ si } \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = l \text{ et } x < a \text{ (resp. } \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = l \text{ et } x > a).$$

c. Limite finie d'une fonction à l'infini

• Soit une fonction numérique f définie sur un intervalle du type $[x_0; +\infty[$ avec $x_0 \in \mathbb{R}$ et L un nombre réel. Si la distance $|f(x) - L|$ est aussi petite que l'on veut dès que x est assez grand, on dit que : f a pour limite L en $+\infty$ On écrit $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$; ou $\lim_{+\infty} f(x) = L$.

• Soit une fonction numérique f définie sur un intervalle du type $]-\infty; x_0]$ avec $x_0 \in \mathbb{R}$ et L un nombre réel.

Si la distance $|f(x) - L|$ est aussi petite que l'on veut dès que x est assez petit, on dit que : f a pour limite L en $-\infty$

On écrit $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$; ou $\lim_{-\infty} f(x) = L$.

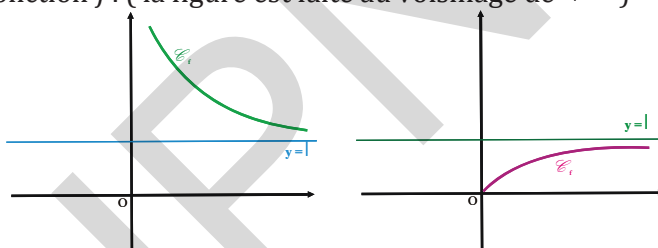
d. Asymptote horizontale :

• Si $\lim_{+\infty} f(x) = L$

On dit que la droite d'équation $y = L$ est asymptote horizontale en $+\infty$ à la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de la fonction f .

• Si $\lim_{-\infty} f(x) = L$

On dit que la droite d'équation $y = L$ est asymptote horizontale en $-\infty$ à la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de la fonction f . (la figure est faite au voisinage de $+\infty$)



e. Asymptote horizontale :

• Si $\lim_{+\infty} f(x) = L$

On dit que la droite d'équation $y = L$ est asymptote horizontale en $+\infty$ à la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de la fonction f .

• Si $\lim_{-\infty} f(x) = L$

On dit que la droite d'équation $y = L$ est asymptote horizontale en $-\infty$ à la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de la fonction f .

f. Limite infinie d'une fonction en a

Soit a un réel, et soit f une fonction définie sur un intervalle contenant a ou d'extrémité a .

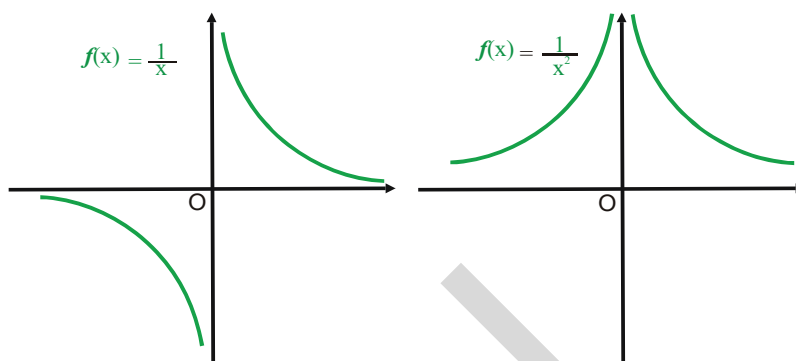
- On dit que f tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers a et on note $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$; si pour tout réel $A > 0$, il existe un intervalle ouvert I de centre a et de rayon $\alpha > 0$, tel que :
 $\forall x \in I \setminus \{a\}, f(x) > A$.

- On dit que f tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers a et on note $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$; si pour tout réel $A > 0$, il existe un intervalle ouvert I de centre a et de rayon $\alpha > 0$, tel que $\forall x \in I \setminus \{a\}, f(x) < -A$.

g. Asymptote verticale :

Soit f une fonction numérique. On dit que la droite d'équation $x = a$ est asymptote verticale à la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de f , si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$.

Exemple 8



Remarque 5.

Les courbes représentatives des fonctions : $x \rightarrow \frac{1}{x}$, $x \rightarrow \frac{1}{x^2}$, $x \rightarrow \frac{1}{x^3}$, $x \rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}}$ admettent l'axe des ordonnées comme asymptote verticale.

4. Limite d'une fonction à l'infini :

a. Limite infinie d'une fonction à l'infini :

Soit une fonction définie sur un intervalle du type $[x_0; +\infty[$ avec $x_0 \in \mathbb{R}$.

Si $f(x)$ est aussi grand (resp. aussi petit) que l'on veut dès que x est assez grand, on dit que : f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ (resp. $-\infty$ en $+\infty$).

On écrit $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ (resp. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$).

Fonctions de référence

Quand x tend vers $+\infty$, les fonctions : $x \mapsto x$, $x \mapsto x^2$, $x \mapsto \sqrt{x}$ tendent vers $+\infty$.

Quand x tend vers $-\infty$, la fonction : $x \mapsto x^2$ tend vers $+\infty$.

Quand x tend vers $-\infty$, les fonctions : $x \mapsto x$, $x \mapsto x^3$ tendent vers $-\infty$.

Plus généralement : $x \mapsto x^n$

Si n est paire, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Si n est impaire, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

b. Limite finie à l'infini :

- Soit une fonction numérique f définie sur un intervalle du type $[x_0; +\infty[$ avec $x_0 \in \mathbb{R}$ et L un nombre réel.

Si la distance $|f(x) - L|$ est aussi petite que l'on veut dès que x est assez grand, on dit que :

f a pour limite L en $+\infty$. On écrit $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$; ou $\lim_{+\infty} f(x) = L$.

- Soit une fonction numérique f définie sur un intervalle du type $]-\infty; x_0]$ avec $x_0 \in \mathbb{R}$ et L un nombre réel.

Si la distance $|f(x) - L|$ est aussi petite que l'on veut dès que x est assez petit, on dit que :

f a pour limite L en $-\infty$. On écrit $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$; ou $\lim_{-\infty} f(x) = L$.

- On dit que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$ (resp. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$), si pour tout intervalle ouvert J de centre l et de rayon $\beta > 0$, il existe un réel strictement positif A tel que $\forall x > A, f(x) \in J$ (resp. $\forall x < -A, f(x) \in J$).

Fonctions de référence :

Quand x tend vers $+\infty$, les fonctions : $x \rightarrow \frac{1}{x}$, $x \rightarrow \frac{1}{x^2}$, $x \rightarrow \frac{1}{x^3}$, $x \rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}}$ tendent vers 0.

Quand x tend vers $-\infty$, les fonctions : $x \rightarrow \frac{1}{x}$, $x \rightarrow \frac{1}{x^2}$, $x \rightarrow \frac{1}{x^3}$ tendent vers 0.

Exemple 9

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{3x^2 + x + 1}{x^2 - 3x + 2}$

- 1) Déterminer $\mathcal{D}_f$,
- 2) Calculer les limites de f et en déduire ses asymptotes,

Solution :

1) La fonction f existe si $x^2 - 3x + 2 \neq 0$. ; $x^2 - 3x + 2 = 0$ on a $1 - 3 + 2 = 0$.

Donc $x_1 = 1$ et $x_2 = 2$. $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{1, 2\} =]-\infty; 1[\cup]1; 2[\cup]2; +\infty[$

2°) Les bornes du domaine de définition sont donc : $-\infty, 1, 2, +\infty$.

Les limites de f et ses bornes sont :

- $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \frac{5}{0^+} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \frac{5}{0^-} = -\infty \end{cases}$ donc la droite d'équation : $x = 1$ est une asymptote verticale à C_f
- $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \frac{15}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \frac{15}{0^+} = +\infty \end{cases}$ donc la droite d'équation : $x = 2$ est une asymptote verticale à C_f
- $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 + x + 1}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2}{x^2} = 3 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + x + 1}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{x^2} = 3 \end{cases}$ donc la droite d'équation : $y = 3$ est une asymptote horizontale à C_f

Remarque 6.

$$\text{Si } k > 0 \text{ alors } \begin{cases} \frac{k}{0^-} = -\infty \\ \frac{k}{0^+} = +\infty \end{cases}, \begin{cases} \frac{k}{-\infty} = 0^- \\ \frac{k}{+\infty} = 0^+ \end{cases} \quad \text{Si } k < 0 \text{ alors } \begin{cases} \frac{k}{0^-} = +\infty \\ \frac{k}{0^+} = -\infty \end{cases}, \begin{cases} \frac{k}{+\infty} = 0^- \\ \frac{k}{-\infty} = 0^+ \end{cases}$$

5. Opérations sur les limites :

Dans toute cette partie :

- α désigne soit $+\infty$, soit $-\infty$, soit un nombre réel ;
- Lorsque la limite indiquée est $\pm\infty$, le signe est celui de la fonction au voisinage de α ;
- L'abréviation *F.I* dans les tableaux désigne les formes indéterminées, c'est-à-dire les cas où les théorèmes ne permettent pas de conclure.

Limite de λf

Si $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x)$	L	$+\infty$	$-\infty$
Alors $\lim_{x \rightarrow \alpha} (\lambda f)(x)$ avec $\lambda > 0$	λL	$+\infty$	$-\infty$
Alors $\lim_{x \rightarrow \alpha} (\lambda f)(x)$ avec $\lambda < 0$	λL	$-\infty$	$+\infty$

- Le tableau suivant donne la limite de la somme de deux fonctions f et g .

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	$l \in \mathbb{R}$	$l \in \mathbb{R}$	$l \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	$l' \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)]$	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI	$-\infty$

- Le tableau suivant donne la limite du produit de deux fonctions f et g .

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	$l \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	$l' \in \mathbb{R}$	$l' > 0$	$l' < 0$	$l' > 0$	$l' < 0$	∞	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \times g(x)]$	$l \times l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$

- Le tableau suivant donne la limite du quotient de deux fonctions f et g .

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	$l \in \mathbb{R}$	$l \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	∞
$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	$l \neq 0$	∞	$l' > 0$	$l' < 0$	$l' > 0$	$l' < 0$	0	∞
$\lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]$	$\frac{l}{l'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI	FI

Remarque 7. les formes : $+\infty - \infty$; $0 \times \infty$; $\frac{0}{0}$ et $\frac{\infty}{\infty}$ sont des formes indéterminées (FI)

b. Asymptote oblique

Schéma de recherche de l'asymptote oblique

Si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$, il y a une possibilité d'avoir une asymptote oblique. On calcule $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$

Trois cas peuvent se présenter ;

- Si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$, on a une branche parabolique (BP) de direction (yOy') .
- Si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, on a une branche parabolique de direction (xOx') .
- Si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a \neq 0$, on calcule $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - ax)$. Deux cas peuvent se présenter ;
 - Si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - ax) = \pm\infty$, on a une branche parabolique de direction la droite $y = ax$.
 - Si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - ax) = b$, la droite $(\Delta) : y = ax + b$ est asymptote oblique à la courbe de f .

Exemple 10

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{3x^2 - 2x + 2}{x + 4}$

1) Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f et préciser ses bornes.

2) Déterminer les asymptotes éventuelles à la courbe $\mathcal{C}_f$ de f .

Réponse :

1) Déterminons $\mathcal{D}_f$ et précisons ses bornes :

$f(x)$ existe si $x + 4 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -4$.

Donc ; $\mathcal{D}_f = \{x \in \mathbb{R} / x \neq -4\}$ d'où, $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-4\} =]-\infty, -4[\cup]-4, +\infty[$

2) Déterminons les asymptotes éventuelles à la courbe $\mathcal{C}_f$ de f .

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 - 2x + 2}{x + 4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 3x = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 2x + 2}{x + 4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 3x = +\infty \end{cases} \quad (\text{Inexistence d'asymptote horizontale, éventualité d'asymptote oblique}).$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -4^-} f(x) = \frac{58}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -4^+} f(x) = \frac{58}{0^+} = +\infty \end{cases} \quad \text{La courbe } \mathcal{C}_f \text{ admet une asymptote verticale d'équation : } x = -4$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{3x^2 - 2x + 2}{x + 4}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x^2 - 2x + 2}{x^2 + 4x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x^2}{x^2} = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - 3x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{3x^2 - 2x + 2}{x + 4} - 3x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-14x + 2}{x + 4} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-14x}{x} = -14$$

La courbe $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote d'équation : $y = 3x - 14$

Remarque 8.

Soient a et b deux réels et soient f et g deux fonctions telles que :
$$\begin{cases} f(x) = ax + b + g(x) \\ \text{et} \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = 0 \end{cases}$$

alors, la droite $(\Delta) : y = ax + b$ est une asymptote oblique à la courbe $\mathcal{C}_f$ de f .

Exemple 11

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{2x^2 + 3x + 1}{x - 1}$.

1) Déterminer $\mathcal{D}_f$, ses bornes, préciser les limites de f en ces bornes et en déduire les asymptotes éventuelles à $\mathcal{C}_f$.

2) Déterminer les réels a , b et c tels que : $f(x) = ax + b + \frac{c}{x - 1}$

Puis en déduire que $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote oblique qu'on notera Δ .

Réponse :

1) Déterminons $\mathcal{D}_f$, ses bornes, précisons les limites de f en ces bornes et déduisons-en les asymptotes éventuelles à $\mathcal{C}_f$: $f(x)$ existe si $x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$. Donc ; $\mathcal{D}_f = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 1\}$, d'où : $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{1\} =]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$.

Limites aux bornes de $\mathcal{D}_f$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 + 3x + 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x = -\infty ; \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 3x + 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x = +\infty$$

(Inexistence d'asymptote horizontale, éventualité d'asymptote oblique).

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \frac{6}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \frac{6}{0^+} = +\infty \end{cases} \quad \text{La courbe admet une asymptote verticale d'équation : } x = 1$$

2) Déterminons les réels a , b et c tels que : $f(x) = ax + b + \frac{c}{x - 1}$

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x - 1} = \frac{(ax + b)(x - 1) + c}{x - 1} = \frac{ax^2 + (b - a)x + c - b}{x - 1}$$

$$\text{Par identification, on a : } \begin{cases} a = 2 \\ b - a = 3 \Leftrightarrow a = 2, b = 5, c = 6 \\ c - b = 1 \end{cases} \quad f(x) = 2x + 5 + \frac{6}{x - 1}$$

Déduisons-en que $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote oblique que l'on notera Δ :

$$\text{On a : } \begin{cases} f(x) = 2x + 5 + \frac{6}{x - 1} \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{6}{x - 1} = 0 \end{cases} \quad \text{donc la droite } \Delta : y = 2x + 5 \text{ est une asymptote oblique à } \mathcal{C}_f$$

6. Théorèmes de comparaison :

a. Théorème de majoration, de minoration :

α désigne un réel, $-\infty$ ou $+\infty$

Si $f(x) \geq u(x)$ et si $\lim_{x \rightarrow \alpha} u(x) = +\infty$ alors, $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = +\infty$.

Si $f(x) \leq u(x)$ et si $\lim_{x \rightarrow \alpha} u(x) = -\infty$ alors, $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = -\infty$.

Exemple 12

Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x + \sin x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}$

• On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $\sin x \leq 1 \Rightarrow f(x) \leq 1 - x$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - x = -\infty$

• On a : $1 + x^2 \geq 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2} \geq \frac{1}{x^2}$ et comme $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ on a : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2} = +\infty$

b. Théorèmes d'encadrements :

Si pour x assez grand on a $|f(x) - l| \leq u(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = 0$ alors, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$.

Exemple 13

Calculer a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{\sin x}{x}$ b) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(2 - x \cos \frac{1}{x} \right)$

.Solution

a) On a : $|f(x) - 1| = \left| \frac{\sin x}{x} \right| = \frac{|\sin x|}{x}$

Pour tout $x > 0$: $|\sin x| \leq 1 \Rightarrow |f(x) - 1| \leq \frac{1}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ d'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$

b) On $|f(x) - 2| = \left| 2 - x \cos \frac{1}{x} - 2 \right| = \left| x \cos \frac{1}{x} \right|$:

.or pour tout $x > 0$, $\left| \cos \frac{1}{x} \right| \leq 1 \Leftrightarrow |x| \times \left| \cos \frac{1}{x} \right| \leq |x| \Leftrightarrow \left| x \cos \frac{1}{x} \right| \leq |x| \Leftrightarrow |f(x) - 2| \leq |x|$

On a donc : $\begin{cases} |f(x) - 2| \leq |x| \\ \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0 \end{cases}$ d'où : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$

c. Théorème des Gendarmes :

Si, pour x assez grand, $u(x) \leq f(x) \leq v(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} v(x) = \ell \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$.

Exemple 14

Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$; On a pour tout $x > 0$

$$x^2 \leq 1+x^2 \leq (1+x)^2 \Leftrightarrow x \leq \sqrt{1+x^2} \leq 1+x \Leftrightarrow \frac{x}{x} \leq \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} \leq \frac{1+x}{x} \Leftrightarrow 1 \leq f(x) \leq \frac{1}{x} + 1$$

On a : $\begin{cases} 1 \leq f(x) \leq 1 + \frac{1}{x} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{x} = 1 \end{cases}$ donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$

II. Continuité d'une fonction :

1. Continuité d'une fonction en un point :

a. Continuité à gauche, continuité à droite :

Définition 1

Soit f une fonction et I un intervalle de son domaine de définition et x_0 un réel de I .

On dit que f est continue en x_0 si seulement si : $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

On dit que f est continue à gauche en x_0 si ; $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$

On dit que f est continue à droite en x_0 si ; $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$

Exemple 15

Etudier la continuité de f en x_0 dans chacun des cas suivants :

$$1^\circ / \begin{cases} f(x) = \frac{|x^2 - 5x + 6|}{x-2} & \text{si } x \neq 2 \\ f(2) = \frac{5}{4} & \text{si } x = 2 \end{cases}, \quad 2^\circ / \begin{cases} f(x) = \frac{1}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad x_0 = 0$$

$x_0 = 2$

Solution :

$$1^\circ / \begin{cases} f(x) = \frac{|x^2 - 5x + 6|}{x-2} & \text{si } x \neq 2 \\ f(2) = \frac{5}{4} & \text{si } x = 2 \end{cases},$$

La division euclidienne de $x^2 - 5x + 6$ par $x - 2$ est ; $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$.

x	$-\infty$	2	3	$+\infty$	
$x^2 - 5x + 6$	+	0	-	0	+

Si $x \in]-\infty; 2] \cup [3; +\infty[$ alors $|x^2 - 5x + 6| = x^2 - 5x + 6$ et

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x-2)(x-3)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x-2)(x-3)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x-3) = 2-3 = -1$$

Si $x \in [2; 3]$ alors $|x^2 - 5x + 6| = -x^2 + 5x - 6$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|(x-2)(x-3)|}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)(3-x)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} (3-x) = 3-2 = 1$$

Donc, $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ D'où, f n'est pas continue en 2 mais elle est continue à gauche et à droite

$$2^\circ / \begin{cases} f(x) = \frac{1}{x^2} \text{ si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases} \quad (x_0 = 0) \quad \text{On a : } f(0) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \frac{1}{0} = +\infty$$

D'où, f n'est pas continue en 0.

2. Continuité sur un intervalle :

Définition 2

On dit qu'une fonction f est continue sur un intervalle I , si f est continue en tout point de I .

- f est continue sur $[a; b[$ (resp. $[a; +\infty[$) $\Leftrightarrow f$ est continue sur $]a; b[$ (resp. $]a; +\infty[$) et à droite en a .
- f est continue sur $]a; b]$ (resp. $] -\infty; b]$) $\Leftrightarrow f$ est continue sur $]a; b[$ (resp. $] -\infty; b[$) et à gauche en b .
- f est continue sur $[a; b]$ $\Leftrightarrow f$ est continue sur $]a; b[$, à droite en a et à gauche en b .
- Toutes les fonctions construites algébriquement par somme, produit, quotient, composition de fonctions usuelles sont continues sur tout intervalle contenu dans leur ensemble de définition

Remarque 9.

a) Toute fonction polynôme est continue sur $\mathbb{R}$.

b) Toute fonction rationnelle (quotient de fonctions polynômes) définie dans l'intervalle I est continue sur I .

Les fonctions $\cos$ et $\sin$ sont continues sur $\mathbb{R}$.

c) La fonction $\tan$ est continue sur son ensemble de définition.

d) Si u et v sont deux fonctions continues sur un intervalle I , alors les fonctions :

e) $u+v$, $u \cdot v$, u^n ($n \in \mathbb{N}$) et $|u|$ sont continues sur I .

f) Si u est continue sur I , et si $\forall x \in I, u(x) \geq 0$, alors $\sqrt{u}$ est continue sur I .

g) Si u et v sont deux fonctions continues sur un intervalle I , et si v ne s'annule pas sur I ,

alors les fonctions : $\frac{u}{v}$ et $\frac{1}{v}$ sont continues sur I ,

h) Si u est continue sur I , et v est continue sur $J = f(I)$, alors $v \circ u$ est continue sur I .

Exemple 16

Soit f la fonction définie par :
$$f(x) = \begin{cases} x\sqrt{-x} & \text{si } x < 0 \\ x^2 + 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Etudier la continuité de f .

Réponse :

Le domaine de définition de f : $D_f = \mathbb{R}$

Continuité de f : pour tout $x \in]-\infty; 0[$ on a : $f(x) = x\sqrt{-x}$

f est le produit des fonctions $x \rightarrow x$ (fonction polynôme) et de $x \rightarrow \sqrt{-x}$ (fonction racine carrée d'une fonction polynôme positive), donc f est continue sur $]-\infty; 0[$

Pour tout $x \in]0; +\infty[$ on a : $f(x) = x^2 + 1$. f est continue sur $]0; +\infty[$

Etudions la continuité de f à droite en 0. On a : $f(0) = 0^2 + 1 = 1$

Continuité à gauche : $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x\sqrt{-x} = 0 \neq f(0)$ donc f n'est pas continue à gauche.

Continuité à droite : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 + 1 = 1 = f(0)$ donc f est continue à droite.

La fonction f est continue sur la réunion d'une part sur $]-\infty; 0[$ et d'autre part sur $[0; +\infty[$

3. Prolongement par continuité :

Définition 3

Soit I un intervalle. x_0 un point de I et f une fonction définie sur un intervalle $I \setminus \{x_0\}$ et si f admet une limite finie l en x_0 , alors f admet un **prolongement** g par continuité en x_0

défini par
$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq x_0 \\ l & \text{si } x = x_0 \end{cases}$$

Exemple 17

Dans chacun des cas suivants, préciser si f admet un prolongement par continuité en x_0 puis préciser ce prolongement s'il existe ;

$$1) f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} \quad x_0 = 3 \quad 2) f(x) = \frac{\sin x}{x} \quad x_0 = 0 \quad 3) f(x) = \frac{1}{x^2} \quad x_0 = 0$$

Réponse :

$$1) \text{ On a : } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{\sqrt{x+1}+2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \frac{1}{4} \text{ donc } f \text{ admet un prolongement par continuité } g \text{ en } x_0 = 3 \text{ et}$$

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq 3 \\ \frac{1}{4} & \text{si } x = 3 \end{cases}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \text{ donc } f \text{ admet un prolongement par continuité } g \text{ en } x_0 = 0 \text{ et}$$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

3) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$; donc f n'admet pas un prolongement par continuité en $x_0 = 0$

4. Théorème des valeurs intermédiaires :

Théorème : (admis)

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur cet intervalle. Pour tout réel y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = y$

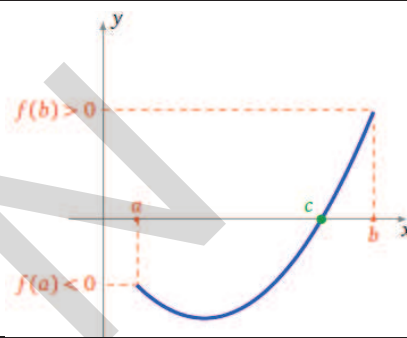
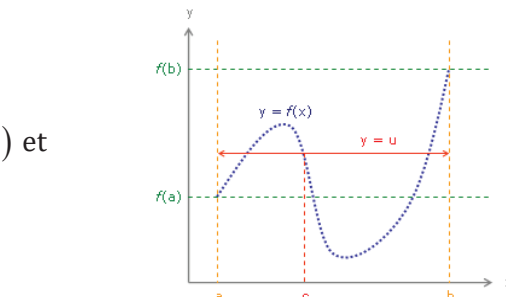
Remarque 10.

Ce théorème est appelé **Théorème des valeurs intermédiaires**. Voici la version la plus utilisée du théorème des valeurs intermédiaires.

Corollaire

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$.

Si $f(a) \cdot f(b) < 0$ alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = 0$.



Démonstration :

Il s'agit d'une application directe du théorème des valeurs intermédiaires avec $y = 0$.

L'hypothèse $f(a) \cdot f(b) < 0$ signifiant que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires.

Exemple 18

Soit la fonction f définie par : $f(x) = x^3 + x - 1$

Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $]0; 1[$.

Solution :

Comme f est une fonction polynôme définie et continue sur $\mathbb{R}$, et comme $f(0) = -1$ et $f(1) = 1$, donc d'après le corollaire du théorème de la valeur intermédiaire, il existe au moins un réel $c \in]0; 1[$ tel que ; $f(c) = 0$.

L'équation $f(x) = 0$ admet donc au moins une solution dans l'intervalle $]0; 1[$.

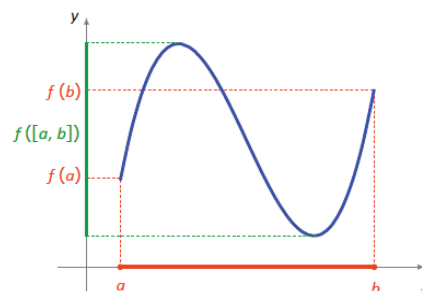
Voici une formulation plus théorique du théorème des valeurs intermédiaires.

Corollaire

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle.

Alors $f(I)$ est un intervalle.

Attention ! Il serait faux de croire que l'image par une fonction f de l'intervalle $[a, b]$ soit l'intervalle $[f(a), f(b)]$



(voir la figure ci-contre).

Théorème

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur cet intervalle. Alors il existe deux réels m et M tels que $f([a, b]) = [m, M]$. Autrement dit, l'image d'un segment par une fonction continue est un segment.

Remarque 11.

Comme on sait déjà par le théorème des valeurs intermédiaires que $f([a, b])$ est un intervalle, le théorème précédent signifie exactement que :

Si f est continue sur $[a, b]$, alors f est bornée sur $[a, b]$, et elle atteint ses bornes.

Donc m est le minimum de la fonction sur l'intervalle $[a, b]$ alors que M est le maximum.

A. Applications :

Exercice 1.

Calculer la limite en $+\infty$ de la fonction : $f(x) = 3x^4 - 2x^2$

Solution

$$\text{On a : } \forall x \in \mathbb{R}_+, f(x) = 3x^4 - 2x^2 = 3x^4 \left(1 - \frac{2}{3x^2}\right)$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^4 = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2}{3x^2}\right) = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Plus généralement, on a, la propriété suivante :

La limite à l'infini d'une fonction polynôme est égale à la limite de son monôme du plus haut degré.

Exercice 2.

Calculer la limite en $+\infty$ de la fonction rationnelle : $f(x) = \frac{3x^4 + 2x^2}{-7x^5 + 11}$.

Solution

$$\text{On a : } \forall x \in \mathbb{R}^* ; \quad \frac{3x^4 + 2x^2}{-7x^5 + 11} = \frac{3x^4 \left(1 + \frac{2x^2}{3x^4}\right)}{-7x^5 \left(1 - \frac{11}{7x^5}\right)} = \frac{3x^4}{-7x^5} \times \frac{1 + \frac{2x^2}{3x^4}}{1 - \frac{11}{7x^5}} \text{ on a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^4}{7x^5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{7x} = 0$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{2x^2}{3x^4}}{1 - \frac{11}{7x^5}} = 1 ; \text{ d'où } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^4 + 2x^2}{-7x^5 + 11} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^4}{-7x^5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{-7x} = 0,$$

Plus généralement, on a la propriété suivante :

La limite à l'infini d'une fonction rationnelle est égale à la limite à l'infini du quotient des monômes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur.

Exercice 3. Déterminer la limite en 2 de la fonction $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 2x - 8}$.

Solution

On a $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 - 4 = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 + 2x - 8 = 0$; donc on ne peut conclure directement.

$$\text{Mais, } \forall x \in \mathbb{R} - \{-4; 2\} \text{ on a : } \frac{x^2 - 4}{x^2 + 2x - 8} = \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x+4)} = \frac{x+2}{x+4}$$

$$\text{Or } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+2)}{(x+4)} = \frac{2}{3} ; \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{2}{3}.$$

Exercice 4. Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$

Solution

- On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2+1} - x = +\infty - (+\infty) = ;$ donc on ne peut pas conclure directement (c'est une forme indéterminée)

Mais, $\forall x \in \mathbb{R}; \sqrt{x^2+1} + x \neq 0$, donc on peut écrire ;

$$f(x) = \frac{(\sqrt{x^2+1} - x)(\sqrt{x^2+1} + x)}{(\sqrt{x^2+1} + x)} = \frac{1}{(\sqrt{x^2+1} + x)} \text{ d'où } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \frac{1}{(\sqrt{x^2+1} + x)} = 0$$

Exercice 5. L'objectif de cet exercice est d'établir des limites qui seront investies

ultérieurement. On admet le résultat suivant : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

- a) Vérifier que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \times \frac{1}{1 + \cos x}$, (indication : $1 - \cos^2 x = \sin^2 x$)

En déduire que : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$.

- c) Déterminer la limite en 0 de la fonction f définie par : $f(x) = \frac{\cos x - 1}{x}$

Solution

a) On a : $\left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \times \frac{1}{1 + \cos x} = \frac{\sin^2 x}{x^2} \times \frac{1}{1 + \cos x} = \frac{\sin^2 x}{x^2(1 + \cos x)} = \frac{1 - \cos^2 x}{x^2(1 + \cos x)} = \frac{1 - \cos x}{x^2}$.

$$\left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \cos x} = \frac{1}{2} \right) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \times \frac{1}{1 + \cos x} = 1 \times \frac{1}{2} ; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

On a : $\frac{1 - \cos x}{x} = x \frac{1 - \cos x}{x^2}$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \frac{1 - \cos x}{x^2} = 0 \times \frac{1}{2} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$.

Exercice 6.

Calculer les limites des fonctions aux points x_0 :

1) $f(x) = \frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 4}, (x_0 = 2),$ 2) $g(x) = \frac{3x^3 - 7x + 4}{x^2 - 7x + 6}, (x_0 = 1)$

3) $p(x) = \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x^2 - 4x + 3}, (x_0 = 1)$ 4) $h(x) = \frac{\sqrt{x+6} - 3}{\sqrt{x+1} - 2}, (x_0 = 3)$

Solution:

1) On a :

$$\frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 4} = \frac{(x-2)(x-5)}{(x-2)(x+2)} = \frac{x-5}{x+2} \text{ et } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-5}{x+2} = \frac{2-5}{2+2} ; \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{-3}{4}$$

2) On a :

$$\frac{3x^3 - 7x + 4}{x^2 - 7x + 6} = \frac{(x-1)(3x^2 + 3x - 4)}{(x-1)(x-6)} = \frac{3x^2 + 3x - 4}{x-6} \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 + 3x - 4}{x-6}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \frac{-2}{5}$$

3) On a :

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x^2-4x+3} &= \frac{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}{(x^2-4x+3)(\sqrt{x+3}+2)} = \frac{x+3-4}{(x-1)(x-3)(\sqrt{x+3}+2)} = \frac{x-1}{(x-1)(x-3)(\sqrt{x+3}+2)} \\ &= \frac{1}{(x-3)(\sqrt{x+3}+2)} ; \quad \lim_{x \rightarrow 1} p(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-3)(\sqrt{x+3}+2)} ; \quad \lim_{x \rightarrow 1} p(x) = \frac{-1}{8} \end{aligned}$$

4) On a :

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{x+6}-3}{\sqrt{x+1}-2} &= \frac{(\sqrt{x+6}-3)(\sqrt{x+6}+3)}{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+6}+3)} \times \frac{(\sqrt{x+1}+2)}{(\sqrt{x+1}+2)} = \frac{(x+6-9)(\sqrt{x+1}+2)}{(x+1-4)(\sqrt{x+6}+3)} \\ &= \frac{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}{(x-3)(\sqrt{x+6}+3)} = \frac{\sqrt{x+1}+2}{\sqrt{x+6}+3} \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow 3} h(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1}+2}{\sqrt{x+6}+3} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Exercice 7.

Déterminer les limites suivantes :

$$\begin{aligned} 1^\circ / \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 6x + 9}{x-2}, 2^\circ / \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+1}{x^2-x+1}, 3^\circ / \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2-4x+1}{2x^2-3x+2}, 4^\circ / \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{x^2-5x+6}{x-4} \\ 5^\circ / \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{x^2-5x+6}{x-4}, 6^\circ / \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{(x-2)^2}, \end{aligned}$$

Solution :

$1^\circ / \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 6x + 9}{x-2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$	$2^\circ / \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+1}{x^2-x+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x} = \frac{2}{-\infty} = 0$
$3^\circ / \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2-4x+1}{2x^2-3x+2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$	$4^\circ / \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{x^2-5x+6}{x-4} = \frac{4^2-5 \times 4+6}{4-4} = \frac{2}{0^+} = +\infty$
$5^\circ / \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{x^2-5x+6}{x-4} = \frac{4^2-5 \times 4+6}{4-4} = \frac{2}{0^-} = -\infty$	$6^\circ / \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{(x-2)^2} = \frac{1}{(2-2)^2} = \frac{1}{(0^+)^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

Exercice 8.

Déterminer les limites suivantes :

$$1) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \sin x - 1}{x - \frac{\pi}{6}} \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{2 \sin x - x}$$

Solution :

1) Pour calculer cette limite on procède par changement de variable. On pose : $t = x - \frac{\pi}{6}$

$$\lim_{t \rightarrow 0} t = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \left(x - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = 0 \quad \text{et} \quad x = t + \frac{\pi}{6}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \sin x - 1}{x - \frac{\pi}{6}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2 \sin \left(t + \frac{\pi}{6} \right) - 1}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2 \left(\sin t \cos \frac{\pi}{6} + \cos t \sin \frac{\pi}{6} \right) - 1}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin t + \frac{1}{2} \cos t \right) - 1}{t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3} \sin t + \cos t - 1}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \sqrt{3} \frac{\sin t}{t} + \frac{\cos t - 1}{t} = \sqrt{3} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} - \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos t}{t} = \sqrt{3} \times 1 - 0$$

$$2) \text{ On a : } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{2 \sin x - x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 6x}{6x}}{\frac{2 \sin x - x}{6x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 6x}{6x}}{\frac{2 \sin x}{6x} - \frac{x}{6x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 6x}{6x}}{\frac{\sin x}{3x} - \frac{1}{6}}$$

$$\text{Calculons } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{6x} \quad \text{On pose } t = 6x \text{ donc : } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{6x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$$

$$\text{Ainsi : } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{2 \sin x - x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 6x}{6x}}{\frac{\sin x}{3x} - \frac{1}{6}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 6x}{6x}}{\frac{1}{3} \times \frac{\sin x}{x} - \frac{1}{6}} = \frac{1}{\frac{1}{3} \times 1 - \frac{1}{6}} = 6$$

B. Exercices divers

1. | Utiliser les propriétés de comparaison pour calculer les limites des fonctions suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + \cos^2 x} ; \lim_{x \rightarrow +\infty} x\sqrt{1 + \sin^2 x} ;$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x\sqrt{1 + \sin^2 x}$$

2. | Soit la fonction $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x}-1}$

Démontrer que

$$\forall x \in]1; +\infty[; f(x) > \sqrt{x} + 1, \text{ en déduire la}$$

limite de f en $+\infty$.

3. | Dans chacun des cas suivants calculer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.

a) $f(x) = -4x^3 - 3x^2 + 2$;

b) $f(x) = x^4 - 1$

c) $f(x) = x^2 - x + \sqrt{2}$

e) $f(x) = \frac{4x-5}{2x+1}$

4. | Dans chacun des cas suivants, calculer les limites de f en x_0 (éventuellement à gauche et à droite).

a) $f(x) = \frac{3}{(x-2)^2}$; $x_0 = 2$;

b) $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 2}$; $x_0 = -2$;

c) $f(x) = \frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 - 2}$; $x_0 = -1$;

d) $f(x) = \frac{x}{x^2 - 4} - \frac{1}{x - 2}$; $x_0 = 2$;

e) $f(x) = \frac{1}{x(x-1)} - \frac{1}{x}$; $x_0 = 0$

;

5. | Dans chacun des cas suivants étudier la limite de f en x_0 (éventuellement à gauche et à droite).

a) $f(x) = \frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$; $x_0 = 4$

b) $f(x) = \frac{\sqrt{x+2} - 2}{x-2}$; $x_0 = 2$

c) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}-1}$; $x_0 = 0$;

d) $f(x) = \frac{x\sqrt{x} - 8}{4-x}$; $x_0 = 4$

6. | Dans chacun des cas suivants calculer la limite de f en $+\infty$ et $-\infty$.

a) $f(x) = \frac{\sqrt{3x+1}}{3x-1}$

b) $f(x) = x + 2 + \sqrt{x^2 - 3x + 1}$

c) $f(x) = \frac{\sqrt{3x^2+1} + 5x}{3x-1}$

d) $f(x) = \sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2+1}$

e) $f(x) = \frac{\sqrt{3x^2+1}}{\sqrt{4x^2+3}}$ f) $f(x) = \frac{x - \sqrt{x^2 - 3x + 1}}{2x + \sqrt{4x^2 + x}}$

7. | Calculer les limites suivantes :

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x}$ b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} + \tan x$;

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{3x}$ d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{2x}$

8. | Etudier la continuité des fonctions en x_0 .

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4 & ; x \leq 2 \\ 3x + 2 & ; x > 2 \end{cases}$; $x_0 = 2$

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{2x+3} & ; x \leq 0 \\ x^2 + x + 0 & ; x > 0 \end{cases}$; $x_0 = 0$

9. | Donner les prolongements par continuité éventuelle de f en x_0 .

a) $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{3x^2 - 7x + 2} ; x_0 = 2$

b) $f(x) = \frac{x}{|x|} ; x_0 = 0$

c) $f(x) = \frac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{x}} ; x_0 = 0$

10. | Soit la fonction :

$$f(x) = \frac{x + E(\sqrt{x})}{x} ;$$

1) Démontrer que :

$$\forall x \in]0 ; +\infty[; 2 \leq f(x) \leq \frac{2x+1}{x},$$

2) En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

11. | Soit $f(x) = \frac{E(\sqrt{x})}{x}$, ou E désigne la partie entière.

1) Démontrer que : $\forall x \in]0 ; 1[; f(x) = 0$,

en déduire $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

2) Démontrer que :

$$\forall x \in]0 ; +\infty[; 0 \leq f(x) \leq \frac{1}{\sqrt{x}},$$

en déduire la limite de f en $+\infty$.

12. | Vérifier que la fonction :

$$g(x) = \frac{1}{1 + \sqrt{1+x}}$$

est le prolongement par continuité en 0 de la

fonction $f(x) = \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$.

13. | Dans les deux cas suivants calculer la limite f de en 0

a) $f(x) = \frac{\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}}{x} ;$

b) $f(x) = \frac{\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}}{x}$

14. | Soient f et g deux fonctions réelles définies par :

$$f(x) = \frac{(1-x)^2}{2} + \frac{3}{(1-x)^2}$$

et $g(x) = \frac{3x+13}{x+4}$.

1) Montrer que la droite d'équation $x = 1$ est un axe de symétrie de la courbe C_f .

2) Montrer que le point $A(-4 ; 3)$ est un centre de symétrie de la courbe C_g .

CHAPITRE V : DÉRIVATION DE FONCTIONS NUMÉRIQUES

I. Dérivabilité et dérivation d'une fonction en un point

1. Dérivabilité d'une fonction en x_0

Définition 1

Soit f une fonction, I un intervalle de son domaine de définition, et x_0 un élément de I . On dit que f est dérivable en x_0 si $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ a une limite finie en x_0 .

Autrement dit ; s'il existe un réel l tel que : $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l$

On dit alors que cette limite l est le nombre dérivé de f en x_0 , et on note : $f'(x_0) = l$.

On a alors ; $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) = l$.

Remarque 1. (Changement de variable)

On peut également poser $h = x - x_0$, lorsque x tend

vers x_0 , h tend vers 0. On a donc ; $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = l$

Exemple 1

Soit la fonction f définie par $f(x) = x^2$, étudions la dérivabilité de f en $x_0 = -1$. On a :

$$\frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \frac{x^2 - 1}{x + 1} = \frac{(x+1)(x-1)}{x+1} = x-1, \text{ d'où : } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim_{x \rightarrow -1} (x-1) = -2$$

La fonction f est donc, dérivable en -1 et $f'(-1) = -2$.

2. Dérivabilité à gauche, dérivabilité à droite :

a. Définitions

Définition 2

Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant x_0 , ou d'extrémité x_0 .

- On dit que f est dérivable à gauche en x_0 , si $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ a une limite finie l_1 à gauche en x_0 .

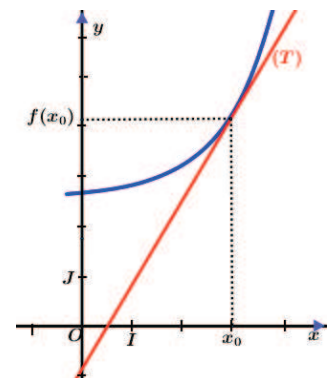
Cette limite est appelée nombre dérivé de f à gauche en x_0 . On note :

$$f'_g(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l_1$$

- On dit que f est dérivable à droite en x_0 , si $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ a une limite finie l_2 à droite en x_0 .

Cette limite est appelée nombre dérivé de f à droite en x_0 . On note :

$$f'_d(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l_2$$



b. Interprétation graphique (ou géométrique) du nombre dérivé

Soit f une fonction, $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative et A un point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse x_0 .

Si f est dérivable en x_0 , c'est-à-dire s'il existe un réel l tel que :

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l = f'(x_0)$$

Alors la courbe $\mathcal{C}_f$ de f admet au point A d'abscisse x_0 une tangente (T) dont le coefficient directeur est $f'(x_0)$ et dont l'équation cartésienne est : $(T) : y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

Exemple 2

Soit la fonction f définie par $f(x) = x^2 + x - 3$.

Donner une équation de la tangente (T) à la courbe $\mathcal{C}$ de f au point d'abscisse $x_0 = 2$.

On a : $f(2) = 4 + 2 - 3 = 3$;

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 + x - 3) - 4 - 2 + 3}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 3)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 3) = 5, \text{ d'où}$$

$f'(2) = 5$ Donc, l'équation de la tangente (T) à la courbe $\mathcal{C}$ de f au point d'abscisse $x_0 = 2$ est : $y - 3 = 5(x - 2)$ donc : $(T) : y = 5x - 7$.

Si il existe deux réels distincts l_1 et l_2 tels que ; $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l_1$ et

$f \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l_2$ alors la courbe $\mathcal{C}_f$ de f admet au point d'abscisse x_0 deux demi-

tangentes. : une à gauche de coefficient directeur l_1 et d'équation $y = l_1(x - x_0) + f(x_0)$, et l'autre à droite de coefficient directeur l_2 et d'équation : $y = l_2(x - x_0) + f(x_0)$.

On dit alors que c'est un **point anguleux**.

Remarque 1.

Une fonction f peut être dérivable à gauche et à droite en un point x_0 sans être dérivable en x_0 .

C'est dans le cas où il existe deux nombres dérivés différents l_1 et l_2 tels que :

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l_1 ; \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l_2$$

Si x_0 est une borne supérieure (resp. inférieure) de $\mathcal{D}_f$, il suffit alors que f soit dérivable à gauche (resp. à droite) en x_0 .

Propriété 1.

Une fonction f est dérivable en x_0 si et seulement si, elle est dérivable à gauche en x_0 et elle est dérivable à droite en x_0 et les nombres dérivés à gauche et à droite sont égaux.

$$\text{C'est-à-dire : } \begin{cases} f'_d(x_0) = l \\ \text{et} \\ f'_g(x_0) = l \end{cases} \quad (l \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow f'(x_0) = l$$

c. Demi-tangente parallèle à l'axe des ordonnées :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant x_0 .

Si $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ admet une limite infinie à gauche ou à droite en x_0 , c'est-à-dire :

$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty$ alors la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de f admet une demi-tangente parallèle à l'axe des ordonnées ($y'Oy$) au point d'abscisse x_0 .

Exemple 3

Soit g la fonction définie par : $g(x) = \begin{cases} 2x^2 - 2x & \text{si } x \in [-1, 1] \\ x^2 - 1 & \text{si } x \in]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[\end{cases}$

- Dérivabilité de g à gauche en 1 :

$$\frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = \frac{2x^2 - 2x - 0}{x - 1} = \frac{2x^2 - 2x}{x - 1} = \frac{2x(x - 1)}{x - 1} = 2x \quad \text{Donc :}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} 2x = 2. \quad g'_g(1) = 2.$$

- Dérivabilité de g à droite en 1 :

$$\frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = \frac{x^2 - 1 - 0}{x - 1} = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x + 1)(x - 1)}{x - 1} = x + 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x + 1) = 2. \quad g'_d(1) = 2.$$

On a : $g'_g(1) = g'_d(1)$ donc g est dérivable en 1.

Exemple 4

Le repère $(O; I; J)$ est orthonormé.

Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x}$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative ; On a :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty. \quad \text{Donc } f \text{ n'est pas dérivable à droite en } 0.$$

$\mathcal{C}$ admet une demi-tangente parallèle à l'axe des ordonnées au point d'abscisse 0

3. Fonction dérivée :

a. Dérivabilité d'une fonction sur un intervalle :

Définition 3

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Lorsque pour tout réel x appartenant à I , f est dérivable en x , on dit que f est **dérivable** sur I .

La fonction qui associe à tout réel x appartenant à I son nombre dérivé $f'(x)$ est appelée la **fonction dérivée** de f sur l'intervalle I . Elle est notée f' .

Exemple 5

► Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x - 2$: Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, pour tout $x \neq x_0$;

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{(3x - 2) - (3x_0 - 2)}{x - x_0} = \frac{3(x - x_0)}{x - x_0} = 3; \quad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 3 \text{ d'où pour tout } x_0 \in \mathbb{R}; f'(x_0) = 3$$

La fonction $f : x \rightarrow 3x - 2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $f'(x) = 3$

► Soit la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = \sqrt{x}$, soit x_0 un élément de $]0; +\infty[$.

$$\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0} = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{x_0})(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})}{(x - x_0)(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})} = \frac{(x - x_0)}{(x - x_0)(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}}$$

et $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$. Donc g est dérivable en x_0 et sa valeur dérivée est $g'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$

Donc g est dérivable en x_0 et sa valeur dérivée est : $g'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$

4. Dérivées des fonctions usuelles :

► **Fonction constante**, Soit : $f : x \rightarrow k (k \in \mathbb{R})$ Soit $x_0 \in \mathbb{R}$; pour tout $x \neq x_0$;

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{k - k}{x - x_0} = \frac{0}{x - x_0} = 0;$$

La fonction constante $f : x \rightarrow k$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $f'(x) = 0$

La fonction constante $f : x \rightarrow k$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $f'(x) = 0$

► **Fonction identité** : $f : x \rightarrow x$

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$; pour tout $x \neq x_0$; $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1$; $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 1$

La fonction : $f : x \rightarrow x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $f'(x) = 1$

► **Fonction carrée** : $f : x \rightarrow x^2$ Soit $x_0 \in \mathbb{R}$; pour tout $x \neq x_0$;

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} = x + x_0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow x_0} (x + x_0) = 2x_0$$

Donc, $f : x \rightarrow x^2$ dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa fonction dérivée est : $f'(x) = 2x$

De manière générale la fonction $f : x \rightarrow x^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa fonction dérivée est $f'(x) = nx^{n-1}$

Exemple 6

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x^3$. On a : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = 3x^2$

► **Fonction inverse** : $f : x \rightarrow \frac{1}{x}$

Soit $x_0 \in \mathbb{R}^*$; pour tout $x \neq x_0$;

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}}{x - x_0} = \frac{(x_0 - x)}{(x - x_0)xx_0} = \frac{-1}{xx_0} \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{-1}{xx_0} \right) = \frac{-1}{x_0^2}$$

Donc, $f : x \rightarrow \frac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et sa fonction dérivée est : $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

De manière générale la fonction $f : x \rightarrow \frac{1}{x^n}$ ($n \in \mathbb{N}^*$) dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et sa fonction dérivée est

$$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$$

► **Fonction racine carrée** : $f : x \rightarrow \sqrt{x}$

Soit $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}_+^* / x \neq x_0$;

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0} = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{x_0})(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})}{(x - x_0)(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})} = \frac{(x - x_0)}{(x - x_0)(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}}$$

$$\text{et} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}.$$

La fonction $f : x \rightarrow \sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$; sa fonction dérivée est : $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

► **Fonctions sinus et cosinus** :

$f : x \rightarrow \sin x$ et $f : x \rightarrow \cos x$

On admet :

- La fonction $f : x \rightarrow \sin x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction $x \rightarrow \cos x$
- La fonction $f : x \rightarrow \cos x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction $x \rightarrow -\sin x$

a. Tableau récapitulatif

f	f'	Intervalle I
k	0	$\mathbb{R}$
x		$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$\frac{-1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+^*$

$x^n (n \in \mathbb{N})$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x^n} (n \in \mathbb{N}^*)$	$\frac{-n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$
$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$
$\tan x$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\left] -\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi \right[$

5. Dérivées et opérations sur les fonctions :

Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle ouvert I , u' et v' leurs fonctions dérivées respectives.

a. Dérivée de la somme de deux fonctions :

La fonction f définie par $f = u + v$ est dérivable sur I et on a : $f' = (u + v)' = u' + v'$

Exemple 7

Soit la fonction f définie par : $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$.

Posons $u(x) = x^2$ et $v(x) = \frac{1}{x}$, on a $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $f'(x) = 2x - \frac{1}{x^2}$.

b. Dérivée du produit de deux fonctions :

La fonction f définie par : $f = u.v$ est dérivable sur I et on a : $f' = (uv)' = u'.v + u.v'$

Cas particuliers :

- Si, u est la fonction définie par $u(x) = k$ ($k \in \mathbb{R}$), on a $u'(x) = 0$;

On en déduit que $f'(x) = (kv)' = k.v'$

- Si, $u = v$ alors $f = u^2$ on a : $u' = v'$, on en déduit que $f' = 2u'u$.

Exemple 8

Soit f et g deux fonctions définies par $f(x) = x^2 \cos x$ et $g(x) = 5x^2$.

$f'(x) = (x^2)' \cdot \cos x + x^2 (\cos x)' = 2x \cos x - x^2 \sin x$ et $g'(x) = 5(x^2)' = 5 \times 2x = 10x$.

c. Dérivée de la puissance d'une fonction :

Soit n un entier naturel ; $n \geq 2$

La fonction f définie par: $f = u^n$ est dérivable sur I et on a : $f' = (u^n)' = n \cdot u' u^{n-1}$.

Exemple 9

- Soit f la fonction définie par $f(x) = x^n$ ($n \geq 2$.)

$$f'(x) = (x^n)' = n(x)' \cdot x^{n-1} = n(1) \cdot x^{n-1} = n \cdot x^{n-1}$$

- Soit g la fonction définie par $g(x) = \cos^3 x$

$$g'(x) = (\cos^3 x)' = 3(\cos x)' (\cos^2 x) = -3 \sin x \cdot \cos^2 x.$$

d. Dérivée de l'inverse d'une fonction :

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I tel que, pour $x \in I$, $u(x) \neq 0$.

La fonction f définie par : $f = \frac{1}{u}$ est dérivable sur I et on a : $f' = \left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$

Exemple 10

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ Pour tout réel x : $f'(x) = -\frac{(x^2 + 1)'}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-2x}{(x^2 + 1)^2}$

e. Dérivée du quotient de deux fonctions :

Si pour tout $x \in I$, $v(x) \neq 0$. La fonction f définie par : $f = \frac{u}{v}$ est dérivable sur I et on a :

$$f' = \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Exemple 11

f est une fonction définie par ; $f(x) = \frac{1-x}{2x^2 + 1}$

$$f'(x) = \frac{(1-x)'(2x^2 + 1) - (1-x)(2x^2 + 1)'}{(2x^2 + 1)^2} = \frac{-1(2x^2 + 1) - (1-x)(4x)}{(2x^2 + 1)^2} = \frac{2x^2 - 4x - 1}{(2x^2 + 1)^2}$$

On admet le théorème suivant :

Théorème

Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant un réel a et g une fonction définie sur un intervalle J contenant $f(a)$

Si f est dérivable en a et g en $f(a)$ alors $g \circ f$ est dérivable en a

$$(g \circ f)'(a) = f'(a) \times g'(f(a))$$

f. Dérivée de la racine carrée d'une fonction :

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I , tel que, pour $x \in I$, $u(x) > 0$.

La fonction f définie par : $f(x) = \sqrt{u}$ est dérivable sur I et on a : $f'(x) = (\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$.

Exemple 12

Soit la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 + 1 > 0$; f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

6. Tableaux récapitulatifs :

Fonction f	Dérivée f'	Fonction f	Dérivée f'
$k.u$ ($k \in \mathbb{R}$)	$k.u'$	$\cdot \sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$u + v$	$u' + v'$	u^n ($n \in \mathbb{N}$)	$nu' \cdot u^{n-1}$
$u \cdot v$	$u'v + uv'$	$\frac{1}{u^n}$	$\frac{-nu'}{u^{n+1}}$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$	$\sin u$	$u' \cos u$
$\frac{1}{u}$	$\frac{-u'}{u^2}$	$\cos u$	$-u' \sin u$
		$\tan u$	$u'(1 + \tan^2 u) = \frac{u'}{\cos^2 u}$

Exemple 13

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \cos\left(2x - \frac{2\pi}{3}\right)$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = 2 \times (-) \sin\left(2x - \frac{2\pi}{3}\right) = -2 \sin\left(2x - \frac{2\pi}{3}\right)$$

II. Applications de la dérivation :

1. Signe de la dérivée et sens de variation :

Le théorème suivant, permet de déterminer les variations d'une fonction sur un intervalle suivant le signe de sa dérivée.

Théorème 2:

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

- Si pour tout réel x appartenant à I , $f'(x) = 0$ alors f est constante sur I .
- Si pour tout réel x appartenant à I , $f'(x) \geq 0$ alors f est croissante sur I .
- Si pour tout réel x appartenant à I , $f'(x) \leq 0$ alors f est décroissante sur I .

Exemple 14

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = x^3 - 3x - 1$$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

x	$-\infty$	-1	$+1$	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$					

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x-1)(x+1).$$

$$\forall x \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[, f'(x) > 0$$

, donc f est croissante,

- $\forall x \in [-1; 1], f'(x) \leq 0$ donc f est décroissante, on en déduit le tableau de f que l'on complète en calculant $f(-1) = 1$ et $f(1) = -3$

2. Extremum relatif d'une fonction :

Théorème :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ et x_0 un réel appartenant à I .

- Si f admet un **extremum local** en x_0 (maximum ou minimum), alors $f'(x_0) = 0$
- Si la dérivée f' s'annule en x_0 en **changeant de signe**, alors f admet un extremum local en x_0 .

f admet un maximum relatif M en x_0

x	a	x_0	b
$f'(x)$		+	-
$f(x)$		M	

f admet un minimum relatif m en x_0

x	a	x_0	b
$f'(x)$		-	+
$f(x)$		m	

Méthode

En pratique, pour étudier les variations d'une fonction f dérivable sur son ensemble de définition $\mathcal{D}_f$:

- on détermine la dérivée f' de f ;
- on étudie le signe de f' sur $\mathcal{D}_f$;
- on applique le théorème 2 sur chacun des intervalles de $\mathcal{D}_f$ où le signe de f' est constant ;
- on dresse le tableau des variations en indiquant les extremums, s'il y a lieu et éventuellement les limites aux bornes de son ensemble de définition.

Exemple 15 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{4x-3}{x^2+1}$.

Calcul de la dérivée f' de f

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme et quotient de deux fonctions dérivables. pour tout réel

$$x, \quad f'(x) = \frac{4(x^2+1) - 2x(4x-3)}{(x^2+1)^2} = \frac{4x^2+4-8x^2+6x}{(x^2+1)^2} = \frac{-4x^2+6x+4}{(x^2+1)^2}$$

- Etude du signe de la dérivée

Pour tout réel x , $(x^2+1)^2 > 0$. Par conséquent, $f'(x)$ est du même signe que le polynôme du second degré $-4x^2+6x+4$. Le discriminant du trinôme est : $\Delta = 6^2 - 4 \times (-4) \times (-4) = 100$

Comme $\Delta > 0$, le trinôme admet deux racines :

$$x_1 = \frac{-6-10}{-8} = 2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-6+10}{-8} = -\frac{1}{2}$$

- Tableau de variations de la fonction f
- f' s'annule et change de signe en $-\frac{1}{2}$ et en 2
- f admet un minimum relatif (-4) en $-\frac{1}{2}$ et un maximum relatif 1 en 2

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$		2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	0	$\searrow$	$\nearrow$	1	$\searrow$
		-4			0

Exemple 18:

La courbe ci-contre est la représentation graphique de la fonction f de l'exemple précédent : $f(x) = x^3 - 3x - 1$.

- f' s'annule et change de signe en (-1) et en (1) .
- f admet un maximum relatif (1) en (-1) et un minimum relatif (-3) en (1) .



III. Propriétés des fonctions dérivables :

1. Inégalité des accroissements finis :

Théorème

Si f est une fonction dérivable sur I et s'il existe deux réels m et M tels que pour tout $x \in I$, $m \leq f'(x) \leq M$ alors pour tous a et b de I ($a \neq b$)

$$\text{on a : } m \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq M$$

Si f est une fonction dérivable sur I et s'il existe un réel $k > 0$ tel que pour tout $x \in I$, $|f'(x)| \leq k$ alors pour tous réels a et b de I on a $|f(b) - f(a)| \leq k|b - a|$

Exemple 16

Soit f la fonction définie par; $f(x) = \frac{x+6}{x+2}$

- 1) Etudier les variations de f .
- 2) Montrer que $\forall x \in [1; +\infty[$, $f(x) \in [1; +\infty[$.
- 3) Montrer que $\forall x \in [1; +\infty[$, $|f'(x)| \leq \frac{4}{9}$.
- 4) Soit (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

- a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [1; +\infty[$.

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - 2| \leq \frac{4}{9} |u_n - 2|$,

puis que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - 2| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n$.

c) En déduire que, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$.

Solution :

1) $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\} =]-\infty; -2[\cup]-2; +\infty[$, f est continue et dérivable sur $\mathcal{D}_f$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{4}{0^-} = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{4}{0^+} = +\infty \text{ et pour tout } x \in \mathcal{D}_f, f'(x) = \frac{-4}{(x+2)^2} < 0$$

Tableau de variations de f

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f'(x)$	—		—
$f(x)$	1	$+\infty$	1

2) D'après le tableau de variation de f ; $f(]-2; +\infty[) =]1; +\infty[$

Or, $]1; +\infty[\subset]-2; +\infty[$; d'où : $f([1; +\infty[) \subset f(]-2; +\infty[)$ Or, $]1; +\infty[\subset [1; +\infty[$ d'où $f([1; +\infty[) \subset [1; +\infty[$ C'est-à-dire $\forall x \in [1; +\infty[, f(x) \in [1; +\infty[$.

$$\text{On a : } f'(x) = \frac{-4}{(x+2)^2}; \quad x \in [1; +\infty[\Leftrightarrow x \geq 1 \Leftrightarrow x+2 \geq 3 \Leftrightarrow (x+2)^2 \geq 9$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(x+2)^2} \leq \frac{1}{9} \Leftrightarrow \frac{-4}{(x+2)^2} \geq \frac{-4}{9} \text{ donc : } \forall x \in [1; +\infty[, |f'(x)| \leq \frac{4}{9}$$

4°) a) Montrons par récurrence que ; $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [1; +\infty[$

Initiation : Pour $n=0$, on a $u_0 = 1$ donc, $u_0 \in [1; +\infty[$

Transmission : On suppose que pour un entier naturel n , $u_n \in [1; +\infty[$. Alors, d'après 2), on a $f(u_n) \in [1; +\infty[$. Or, $f(u_n) = u_{n+1}$, d'où, $u_{n+1} \in [1; +\infty[$. Donc, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [1; +\infty[$.

b) On a montré en 3) que ; $\forall n \in [1; +\infty[, |f'(x)| \leq \frac{4}{9}$

D'où, d'après l'inégalité des accroissements finis, $\forall a, b \in [1; +\infty[, |f(b) - f(a)| \leq \frac{4}{9} |b - a|$

Or, $2 \in [1; +\infty[$, et $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [1; +\infty[$ $\forall n \in \mathbb{N}, |f(u_n) - f(2)| \leq \frac{4}{9} |u_n - 2|$

Or, $f(2)$ et $\forall n \in \mathbb{N}, f(u_n) = u_{n+1}$. D'où, $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - 2| \leq \frac{4}{9} |u_n - 2|$

Donc, $|u_1 - 2| \leq \frac{4}{9} |u_0 - 2|$

$$|u_2 - 2| \leq \frac{4}{9} |u_1 - 2|$$

... ..

$$|u_n - 2| \leq \frac{4}{9} |u_{n-1} - 2|$$

En multipliant membre par membre et en simplifiant on obtient ; $|u_n - 2| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n |u_0 - 2|$

$$\text{Or, } u_0 = 1 ; |u_0 - 2| = |1 - 2| = |-1| = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}, |u_n - 2| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n$$

c) On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - 2| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, -\left(\frac{4}{9}\right)^n \leq u_n - 2 \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n \text{ Donc, } 2 - \left(\frac{4}{9}\right)^n \leq u_n \leq 2 + \left(\frac{4}{9}\right)^n$$

$$\text{Or, } -1 < \frac{4}{9} < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^n = 0 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2 - \left(\frac{4}{9}\right)^n\right) = 2 - 0 = 2, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2 + \left(\frac{4}{9}\right)^n\right) = 2 + 0 = 2.$$

D'où, d'après le théorème du gendarme ; $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$

2. Fonction dérivée seconde et concavité :

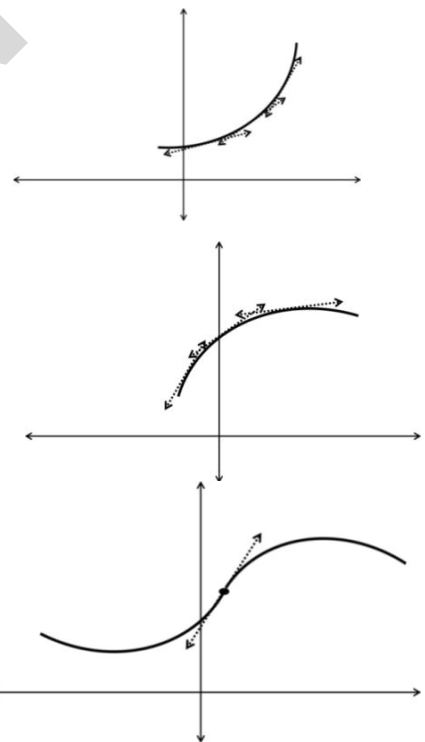
Définition 4

La fonction dérivée seconde d'une fonction f est la fonction dérivée f'' de f' .

Si f'' est positive sur I , alors la concavité de C_f est vers le haut, c'est-à-dire que C_f est au-dessus de ses tangentes.

Si f'' est négative sur I , alors la concavité de C_f est vers le bas, c'est-à-dire que C_f est au-dessous de ses tangentes.

Si f'' s'annule en un point x_0 en changeant de signe, alors la tangente à C_f au point A d'abscisse x_0 traverse C_f . On dit que $A(x_0; f(x_0))$ est un **point d'inflexion**.



A. Applications :

Dérivation en un point :

Exercice 1.

Dans chacun des cas suivants, calculer le nombre dérivé de la fonction f en x_0 , puis donner une équation de la tangente à la courbe représentative de f en son point d'abscisse x_0 .

a) $f(x) = x^2 - x$; $x_0 = 1$; b) $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$; $x_0 = 2$

Réponse :

a) $f(1) = 0$; et $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - x}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x(x-1)}{(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} x = 1$

donc, $f'(1) = 1$, d'où l'équation de la tangente cherchée est : $y - 0 = 1(x - 1) \rightarrow y = x - 1$;

b) $f(2) = 3$; On a :

$$\frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \frac{\frac{x+1}{x-1} - 3}{x - 2} = \frac{\frac{x+1-3x+3}{(x-1)(x-2)}}{x - 2} = \frac{\frac{-2x+4}{(x-1)(x-2)}}{x - 2} = \frac{-2(x-2)}{(x-1)(x-2)} = \frac{-2}{x-1}$$

$$f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-2}{x-1} = -2 ; \text{ d'où l'équation de la tangente cherchée est :}$$

$$y - 3 = -2(x - 2) \rightarrow y = -2x + 7 ;$$

Exercice 2. On considère la fonction f définie par $f(x) = |x - 2|$.

a) Donner l'expression de la fonction f sans le symbole de la valeur absolue ;

b) Etudier la dérivabilité de f en 2.

Réponse :

a) $\begin{cases} f(x) = -x + 2; & \text{si } x < 2 \\ f(x) = x - 2; & \text{si } x \geq 2 \end{cases} ; f(2) = 0$

b) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-x + 2}{x - 2} = -1$ et $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x - 2}{x - 2} = 1$

f est dérivable à gauche en 2 et $f'_g(2) = -1$; f est dérivable à droite en 2 et $f'_d(2) = 1$.

Calcul de dérivées :

Déterminer la dérivée de f dans chacun des cas :

a) $f(x) = 4x^3 - 5x^2 + 2$ b) $f(x) = x \cos x$ c) $f(x) = \frac{2-3x}{x^2-1}$ d) $f(x) = \sqrt{x(3-x)}$

e) $\sin\left(3x - \frac{\pi}{2}\right)$ f) $f(x) = \frac{2x^2 + 7x + 4}{x + 3}$ g) $f(x) = (2x^2 + 3x)^4$.

Réponse :

a) $f(x) = 4x^3 - 5x^2 + 2$ Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = 12x^2 - 10x$

b) $f(x) = x \cos x$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = (x)' \cos x + x(\cos x)'$; $f'(x) = \cos x - x \sin x$

c) $f(x) = \frac{2-3x}{x^2-1}$ Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$:

$$f'(x) = \frac{-3(x^2-1) - 2x(2-3x)}{(x^2-1)^2} = \frac{-3x^2+3-4x+6x^2}{(x^2-1)^2} = \frac{3x^2-4x+3}{(x^2-1)^2}$$

d) $f(x) = \sqrt{3-x}$ pour tout $x < 3$ $f'(x) = \frac{(3-x)'}{2\sqrt{3-x}} = \frac{3-2x}{2\sqrt{3-x}}$

e) $f(x) = \sin\left(3x - \frac{\pi}{2}\right)$ $f'(x) = 3\cos\left(3x - \frac{\pi}{2}\right)$

f) $f(x) = \frac{2x^2+7x+4}{x+3}$

$$f'(x) = \frac{(4x+7)(x+3) - 1(2x^2+7x+4)}{(x+3)^2} = \frac{4x^2+19x+21-2x^2-7x-4}{(x+3)^2} = \frac{2x^2+12x+17}{(x+3)^2}$$

g) $f(x) = (2x^2+3x)^4$; $f'(x) = 4(4x+3)(2x^2+3x)^3$

Exercice 3.

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \sqrt{x^2-4x+3}$

- 1) Donner le domaine de définition de f
- 2) Etudier la dérivabilité de f en en précisant les éventuelles tangentes ou demi-tangentes remarquables
- 3) Dresser le tableau de variations de f

Réponse :

1) Domaine de définition de f

f est définie si $x^2-4x+3 \geq 0$,

$$x^2-4x+3 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = 3$$

$$\mathcal{D}_f =]-\infty; 1] \cup [3; +\infty[$$

x	$-\infty$	1		3	$+\infty$
x^2-4x+3	+	0	-	0	+

2) Dérivabilité

f est définie continue sur son domaine de définition et dérivable $]-\infty; 1] \cup [3; +\infty[$

- Dérivabilité à gauche en 1

On a : $f(1) = 0$, et $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \frac{0}{0}$ (forme indéterminée)

$$\begin{aligned} \text{On a : } \frac{f(x) - f(1)}{x-1} &= \frac{\sqrt{x^2-4x+3}}{x-1} = \frac{(\sqrt{x^2-4x+3})(\sqrt{x^2-4x+3})}{(x-1)(\sqrt{x^2-4x+3})} = \frac{x^2-4x+3}{(x-1)(\sqrt{x^2-4x+3})} \\ &= \frac{(x-1)(x-3)}{(x-1)(\sqrt{x^2-4x+3})} = \frac{x-3}{\sqrt{x^2-4x+3}} ; \text{ Ainsi : } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-3}{\sqrt{x^2-4x+3}} = -\frac{2}{0^+} \end{aligned}$$

$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = -\infty$ donc f n'est pas dérivable à gauche en 1 et sa courbe admet au point de coordonnées (1;0) une demi-tangente verticale.

• **Dérivabilité à droite en 3.**

On a : $f(3) = 0$, et $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \frac{0}{0}$ (forme indéterminée)

$$\frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 3}}{x - 3} = \frac{(\sqrt{x^2 - 4x + 3})(\sqrt{x^2 - 4x + 3})}{(x - 3)(\sqrt{x^2 - 4x + 3})} =$$

$$\frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \frac{x^2 - 4x + 3}{(x - 3)(\sqrt{x^2 - 4x + 3})} = \frac{(x - 1)(x - 3)}{(x - 3)(\sqrt{x^2 - 4x + 3})} = \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 4x + 3}}$$

Ainsi : $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 4x + 3}} = \frac{2}{0^+}$

$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = +\infty$, donc f n'est pas dérivable à droite en 3 et sa courbe admet au point de coordonnées (3;0) une demi-tangente verticale.

2) Etude des variations

• Dérivée

Pour tout $x \in]-\infty; 1[\cup]3; +\infty[$ on a : $f'(x) = \frac{2x - 4}{2\sqrt{x^2 - 4x + 3}} = \frac{x - 2}{\sqrt{x^2 - 4x + 3}}$

Le dénominateur étant positif, le signe de $f'(x)$ est celui du numérateur ;

$x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \quad 2 \notin]-\infty; 1[\cup]3; +\infty[$

• Tableau de variation :

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
$f'(x)$	-			+
$f(x)$	$+\infty$ ↘	0	0	↗ $+\infty$

Applications de la dérivation.

Exercice 4.

On pose $f(x) = x^2 - 4x + 3$ Etudier la dérivabilité de f et tracer sa courbe C représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Solution :

1°) $\mathcal{D}_f =]-\infty; +\infty[= \mathbb{R}$.

f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 - 4x + 3 = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 4x + 3) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$$

On a : $f'(x) = 2x - 4$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$,

$$f(2) = -1 :$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 4x + 3}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	-1	$+\infty$

D'où, C admet une branche parabolique de direction $(y'Oy)$ au voisinage de $-\infty$.

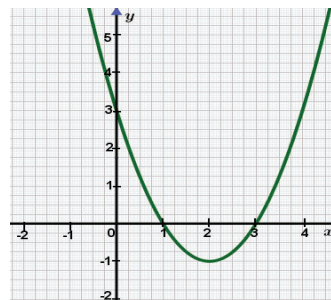
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 4x + 3}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

D'où, C admet une branche parabolique de direction $(y'Oy)$ au voisinage de $+\infty$.

Intersection avec les axes de coordonnées :

$$f(0) = 3 \quad ; \quad C \cap (y'Oy) = A(0; 3)$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ \text{ou} \\ x=3 \end{cases} ; C \cap (x'Ox) = \begin{cases} B(1; 0) \\ C(3; 0) \end{cases}$$



Exercice 5.

Soit f la fonction définie par $f(x) = 2x^4 - x^2 - 1$

Calculer la dérivée de $f(x)$ et dresser son tableau de variation, citer les extremums relatifs de f

Solution :

$$f(x) = 8x^3 - 2x = 2x(4x^2 - 1) = 2x(2x - 1)(2x + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = \frac{1}{2} \text{ ou } x = -\frac{1}{2}$$

$$f(0) = -1 \quad , \quad -f\left(-\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{9}{8}$$

Tableau de variation

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$-\frac{9}{8}$	-1	$-\frac{9}{8}$	$-\frac{9}{8}$	$+\infty$

• f s'annule et change de signe en $-\frac{1}{2}$; 0 ; $\frac{1}{2}$.

• f admet un maximum relatif -1 en 0 et un minimum relatif $-\frac{9}{8}$ en $-\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}$.

Exercice 6.

Soit fonction : $f(x) = \frac{2x-4}{\sqrt{4x-x^2}}$.

1) Etudier les variations de f .

2) Calculer $f''(x)$ et en déduire la concavité de C_f . Montrer que C_f admet un point d'inflexion A que l'on précisera, puis donner une équation de la tangente T à C_f en A .

3) Tracer C_f dans un repère orthonormé.

Solution :

1) f est définie si $4x-x^2 > 0$ $4x-x^2 = 0 \Leftrightarrow x=0$ ou $x=4$

x	$-\infty$	0		4	$+\infty$
$4x-x^2$	$-$	0	$+$	0	$-$

$D_f =]0;4[$ f est continue et dérivable sur D_f

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x-4}{\sqrt{4x-x^2}} = \frac{-4}{0^+} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{2x-4}{\sqrt{4x-x^2}} = \frac{4}{0^+} = +\infty$$

$$f'(x) = \frac{2\sqrt{4x-x^2} - \frac{(2x-4)^2}{\sqrt{4x-x^2}}}{4x-x^2} = \frac{4(4x-x^2) + (2x-4)^2}{2(4x-x^2)\sqrt{4x-x^2}} = \frac{16x-4x^2+4x^2-16x+16}{2(4x-x^2)\sqrt{4x-x^2}}$$

$$f'(x) = \frac{8}{(4x-x^2)\sqrt{4x-x^2}} > 0, \forall x \in]0;4[$$

Tableau de variations de f

x	0	4
$f'(x)$		$+$
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

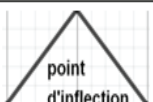
2) on a $\forall x \in D_f; f'(x) = 8(4x-x^2)^{-\frac{3}{2}}$

$$f''(x) = 8 \left(\frac{-3}{2} \right) (4-2x)(4x-x^2)^{-\frac{5}{2}} = -12(4-2x)(4x-x^2)^{-\frac{5}{2}}$$

$$f''(x) = \frac{-24(2-x)}{(4x-x^2)^2 \sqrt{4x-x^2}}$$

Le dénominateur étant positif sur $]0;4[$, d'où, $f(x)$ dépend du signe du numérateur.

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2-x = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

x	0	2	4
f''	+	0	-
Concavité de C_f			

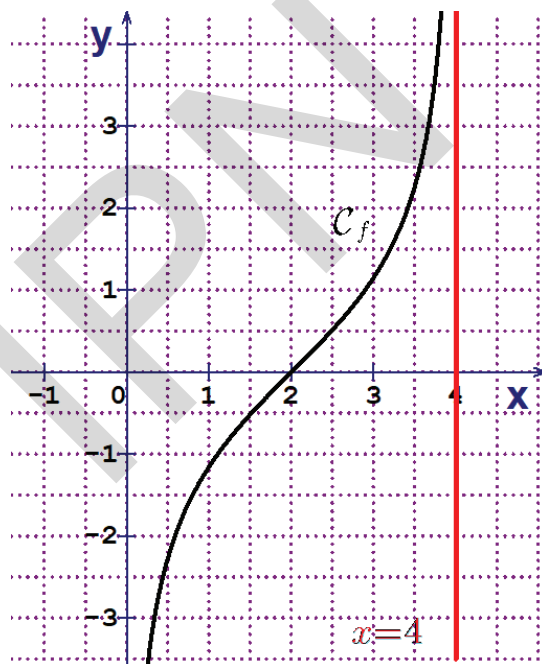
Le point $A(2;0)$ est un point d'inflexion de C_f . $y = f'(2)(x-2) + f(2)$.

Or, $f(2)=0$ et $f'(2)=1$, d'où, l'équation de la tangente en A est $(T): y = x - 2$

3) Les droites d'équations $x=0$ et $x=4$ sont des asymptotes verticales (AV),

On a : $f(x)=0 \Leftrightarrow x=2$ donc la courbe C_f coupe l'axe des abscisses au point $A(2;0)$

Courbe de f .



B. Exercices divers

1. | Dans chacun des cas suivants, calculer, en utilisant la définition, le nombre dérivé de la fonction f en x_0

a) $f(x) = -3x^2 + 4x + 5$; $x_0 = 2$

b) $f(x) = \frac{2x-3}{x-2}$; $x_0 = \frac{-1}{2}$

c) $f(x) = \frac{x+1}{x^2}$; $x_0 = 1$

d) $f(x) = \sqrt{2x+5}$; $x_0 = -\frac{1}{2}$

d) $f(x) = \sqrt{2x-3}$; $x_0 = 2$;

e) $f(x) = x^3$; $x_0 = \frac{1}{2}$;

f) $f(x) = \frac{1}{x}$; $x_0 = -2$.

3. | Soit f la fonction définie par $f(x) = x\sqrt{x}$.

C sa courbe représentative.

a) Déterminer l'ensemble de définition de f .

b) Calculer le nombre dérivé de f en 2.

c) Calculer le nombre dérivé de f en 0 et donner une équation de la demi-tangente à C au point d'abscisse 0.

4. | Soit f la fonction définie par $f(x) = x|x-3|$

a) Calculer le nombre dérivé de f à droite et à gauche en 3.

f est-elle dérivable en 3 ?

a) Etudier la dérivabilité de f en 0.

5. Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2}{2} - 1 ; \text{ si } x < 1 \\ f(x) = \frac{x-2}{x+1} ; \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$$

Démontrer que f est continue en 1.

Etudier la dérivabilité de f en 1.

2. | Dans chacun des cas suivants, déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse x_0 .

a) $f(x) = x^2 - 3x - 1$; $x_0 = -2$

b) $f(x) = \frac{x^3+1}{x}$; $x_0 = \frac{1}{3}$;

c) $f(x) = \frac{2-3x}{x-2}$; $x_0 = 0$;

Dans les exercices 5 à 14, déterminer le (ou les) intervalle(s) : de sur le(s)quel(s) chacune des fonctions suivantes est dérivable, et expliciter la dérivée

5. |

a) $f(x) = -x^2 + 3x + 1$;

b) $f(x) = \frac{x^3}{3} + 2x^2 + 3x$; c) $f(x) = 4x^2 - 3x + 1$

d) $f(x) = -2x^3 + x^2$; e) $f(x) = 2x - 4 + \frac{3}{x}$;

f) $f(x) = x - 1 + \sqrt{x}$

.

6. |

a) $f(x) = (2x+3)(3x-7)$;

b) $f(x) = (5x-4)\left(1-\frac{x}{2}\right)$

c) $f(x) = (2x^2+1)(3x-1)$;

d) $f(x) = (2x^2+5)^3$

e) $f(x) = (x^2+x)\cos^2 x$.

.

7. |

a) $f(x) = \frac{2x+1}{3x-1}$;

b) $f(x) = \frac{3x-7}{2-5x}$

c) $f(x) = \frac{1}{x+1}$;

d) $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$

8.1

a) $f(x) = (x^3 - x)(x - 9)$;

b) $f(x) = \sqrt{x}(3 - 4x)$

c) $f(x) = -x + (1 - x)(3 - x)$;

d) $f(x) = \left(2x + \frac{1}{x}\right)(3x - 1)$.

9.1

a) $f(x) = \left(0,5 - \frac{x}{10}\right)^2$;

b) $f(x) = (3x - 1)^5$

c) $f(x) = x^2(1 - \sqrt{x})$;

d) $f(x) = \left(\frac{1}{x} + 2\right)(\sqrt{x} + 1)$

10.1

a) $f(x) = \frac{1}{1 - 3x}$;

b) $f(x) = \frac{2x}{x^2 - 4}$

c) $f(x) = 2x + \frac{1}{\sqrt{x}}$;

d) $f(x) = \frac{1}{1 + \sqrt{x}}$

11.1

a) $f(x) = \frac{1}{x^2 + x - 2}$;

b) $f(x) = \frac{2x^2 - 5x + 3}{x - 3}$

c) $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$;

d) $f(x) = \frac{x - 1}{x(x + 1)}$

12.1

a) $f(x) = \left(\frac{x - 1}{3 - x}\right)^2$;

b) $f(x) = \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}$

c) $f(x) = \frac{x}{x + \sqrt{x}}$;

d) $f(x) = \left(\frac{1}{1 + x}\right)^3$

13.1

a) $f(x) = -\cos x + \sin x$; b) $f(x) = \sin^2 x$

c) $f(x) = \cos^2 x$;

d) $f(x) = \cos x \sin x$.

14.1

a) $f(x) = (\sin x + \cos x)^2$;

b) $f(x) = \frac{1}{2 - \cos x}$

c) $f(x) = \frac{\sin^2 x}{1 + \cos^2 x}$

CHAPITRE VI: ETUDE ET REPRÉSENTATION DE FONCTIONS NUMÉRIQUES

I. Généralités sur les fonctions

1. Domaine de définition :

Définition 1

On appelle domaine de définition de f l'ensemble noté $\mathcal{D}_f$ ou $\mathcal{D}$: $\{x \in \mathbb{R} / f(x) \text{ existe}\}$.

Exemple 1 : $f : x \rightarrow \frac{4}{x(x-1)}$, $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} - \{0, 1\}$

2. Parité :

On dit que la fonction f est paire si,

- $\mathcal{D}_f$ est symétrique par rapport à zéro
- Pour tout $x \in \mathcal{D}_f$; on a $f(-x) = f(x)$

On dit que la fonction f est impaire si

- $\mathcal{D}_f$ est symétrique par rapport à zéro.
- Pour tout $x \in \mathcal{D}_f$; on a $f(-x) = -f(x)$

Exemple 2 :

$f : x \mapsto x^2$; $\mathcal{D}_f =]-\infty; 0] \cup [0; +\infty[$; $\forall x \in \mathcal{D}_f$; $(-x)^2 = (x)^2 = x^2 \Rightarrow f(-x) = f(x)$, donc; f est paire.

Exemple 3 :

$f : x \mapsto x^3$; $\mathcal{D}_f =]-\infty; 0] \cup [0; +\infty[$; $\forall x \in \mathcal{D}_f$; $(-x)^3 = -x^3 \Leftrightarrow f(-x) = -f(x)$; Donc; f est impaire.

3. Eléments de symétries :

a. Axe de symétrie :

Soit f une fonction numérique; $\mathcal{D}_f$ son domaine de définition $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O; I, J)$.

Pour démontrer que l'axe Δ d'équation : $x = a$ est un axe de symétrie de $\mathcal{C}_f$ on peut utiliser l'une des deux méthodes suivantes :

Méthode 1 :

Démontrer que : $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à la droite $x = a \Leftrightarrow \begin{cases} 2a - x \in \mathcal{D}_f \\ f(2a - x) = f(x) \end{cases}$

Exemple 4 :

$\begin{cases} f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{4}{x(x-4)} \end{cases}$ La droite d'équation $\Delta : x = 2$ est axe de symétrie de la courbe représentative de f , car :

$$f(4-x) = \frac{4}{(4-x)(4-x-4)} = \frac{4}{-x(4-x)} = f(x)$$

Méthode 2 :

Démontrer que f est paire dans le repère $(O'; \overrightarrow{O'I}, \overrightarrow{O'J})$ tel que $O'(a; 0)$.

Exemple 5 :

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \frac{4}{x(x-4)}$; On a : $y = \frac{4}{x(x-4)}$ soit $X = x-2$, $Y = y$

Donc; $Y = \frac{4}{(X-2)(X+2)}$

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; X \rightarrow \frac{4}{(X-2)(X+2)}$ La fonction f est paire.

b. Centre de symétrie :

Pour démontrer que le point $\Omega(a; b)$ est centre de symétrie de la courbe $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f , on peut utiliser l'une des deux méthodes suivantes :

Méthode 1 :

Démontrer que : $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à $\Omega \Leftrightarrow \begin{cases} 2a-x \in \mathcal{D}_f \\ f(2a-x) + f(x) = 2b \end{cases}$

Exemple 6 :

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \rightarrow 2 + \frac{3}{x-1}$; Le point $\Omega(1; 2)$ est centre de symétrie, car

$$f(2-x) + f(x) = 2 + \frac{3}{2-x-1} + 2 + \frac{3}{x-1} = 2 - \frac{3}{x-1} + 2 + \frac{3}{x-1} = 4$$

Méthode 2 :

Démontrer que f est impaire dans le repère $(O'; \overrightarrow{O'I}, \overrightarrow{O'J})$ tel que $O'(a; b)$.

Exemple 7 :

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \rightarrow 2 + \frac{3}{x-1}$ On pose : $X = x-1$; $Y = y-2$;

Donc l'expression de f dans ce nouveau repère est : $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \rightarrow \frac{3}{X}$

4. Asymptotes :

a. Asymptotes parallèles aux axes de repère :

- Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$, on dit que la droite $x = x_0$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$; c'est une droite parallèle à (Oy) ,

Exemple 8 :

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \rightarrow \frac{1}{x^2}$ On a : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$, donc, la droite $x = 0$ est une asymptote à $\mathcal{C}_f$ parallèle à (Oy) ,

- Si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = l$, on dit que la droite $y = l$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$; c'est une droite parallèle à (Ox) .

Exemple 9 :

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \rightarrow 2 - \frac{1}{x}$

On a : $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(2 - \frac{1}{x}\right) = 2$, donc, la droite $y = 2$ est une asymptote à $\mathcal{C}_f$ parallèle à (Ox) ,

b. Asymptotes obliques :

Lorsqu'elle existe, une fonction affine : $x \rightarrow ax + b$; telle que : $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$,

on dit que la droite d'équation : $y = ax + b$ est une asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$.

Exemple 10 :

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \rightarrow x + 1 - \frac{1}{x-3}$ On a : $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x-3} = 0$, donc, la droite d'équation $y = x + 1$ est une asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$.

II. Plan d'étude d'une fonction donnée :

- Déterminer l'ensemble de définition de la fonction à étudier, s'il n'est pas précisé,
- Etudier la parité éventuelle de la fonction donnée,
- Etudier la périodicité éventuelle de la fonction donnée,
- Etudier la dérivabilité de f sur $\mathcal{D}_f$, calculer $f'(x)$ pour tout x de $\mathcal{D}_f$,
- A partir du signe de $f'(x)$, déduire le sens de variation de la fonction,
- Etudier les limites aux bornes de $\mathcal{D}_f$,
- Dresser le tableau de variation,
- Représenter, les asymptotes s'ils existent et les tangentes pour une représentation nette et soignée.

1. Exemples d'étude de fonctions :

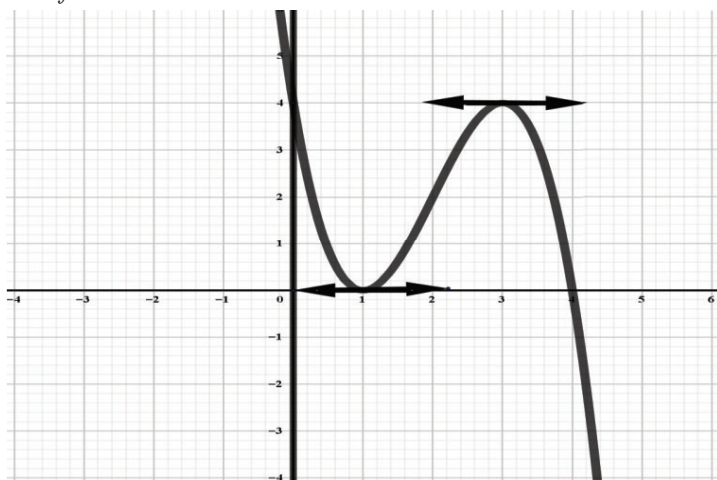
a. Etude d'une fonction polynôme :

Soit $f : x \rightarrow -x^3 + 6x^2 - 9x + 4$

- Domaine de définition : la fonction f est un polynôme ; donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$;
- Limites aux bornes : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = -\infty$;
- Dérivabilité : f est dérivable sur $\mathbb{R}$, par définition, sa dérivée est : $f' : x \rightarrow -3x^2 + 12x - 9$;
- Sens de variation de $f(x)$; soit $f'(x) = 0$;
 $-3x^2 + 12x - 9 = 0 \Leftrightarrow -3(x^2 - 4x + 3) = 0 \Leftrightarrow -3(x-3)(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 3$ ou $x = 1$
 $\forall x \in]-\infty; 1] \cup [3; +\infty[: f'(x) \leq 0$ d'où, f est décroissante sur cet intervalle,
 $\forall x \in [1; 3] : f'(x) \geq 0$ d'où, f est croissante sur cet intervalle,
- Calcul de l'image de certains points : $f(1) = 0$ et $f(3) = 4$.
- Tableau de variation

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	0	-
$f(x)$	$+\infty$	0	4	$-\infty$

- Courbe représentative de f



b. Etude d'une fonction homographique

Soit $f : x \rightarrow \frac{x+1}{x+2}$

- Domaine de définition : la fonction f est une fonction homographique (rationnelle) ; $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} / \{-2\}$;

- Limites aux bornes : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x+2} = 1$, $\lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = -\infty$;

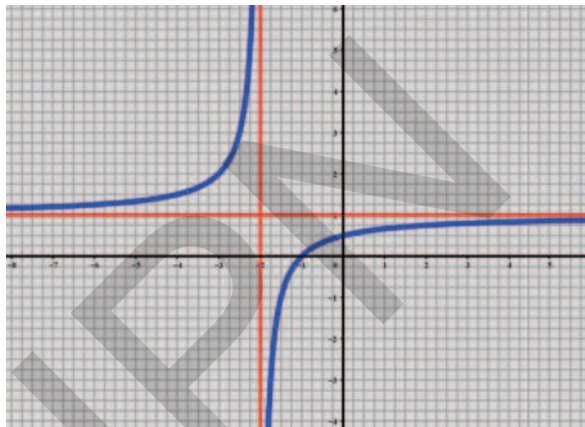
La courbe C_f admet deux asymptotes d'équations : $x = -2$ (A.V) et $y = 1$ (A.H)

- Dérivabilité : f est dérivable sur $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} / \{-2\}$ $f' : x \rightarrow \frac{1}{(x+2)^2}$ est la dérivée de f
- Sens de variation : de $f(x)$; $\forall x \in \mathcal{D}_f$, $f'(x) > 0$, donc f est strictement croissante sur $\mathcal{D}_f$.
- Calcul de l'image de certains points : $f(0) = \frac{1}{2}$.

- Tableau de variation

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f'(x)$	+		+
$f(x)$	1	$+\infty$	$-\infty$

- Représentation graphique



Etude de la fonction $g : x \rightarrow \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} + \frac{2}{x+1}$:

- Domaine de définition : $\mathcal{D}_g = \mathbb{R} / \{-1\}$
- Limites aux bornes : $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} g(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} g(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$
- La courbe C_g admet deux asymptotes : une asymptote verticale d'équation : $x = -1$ et une asymptote oblique d'équation : $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ (car $g(x) = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} + \frac{2}{x+1}$ et $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2}{x+1} = 0$)
- Dérivabilité : comme g est une fonction rationnelle ; elle est continue et dérivable sur son domaine de définition. La dérivée est la fonction : $g' : x \rightarrow \frac{(x-1)(x+3)}{2(x+1)^2}$

- Sens de variation :

Soit $g'(x) = 0$; donc $x = -3$ ou $x = 1$, d'où :

$\forall x \in]-\infty ; -3] \cup [1 ; +\infty[$, $g'(x) \geq 0$; donc g est croissante sur ces intervalles ;

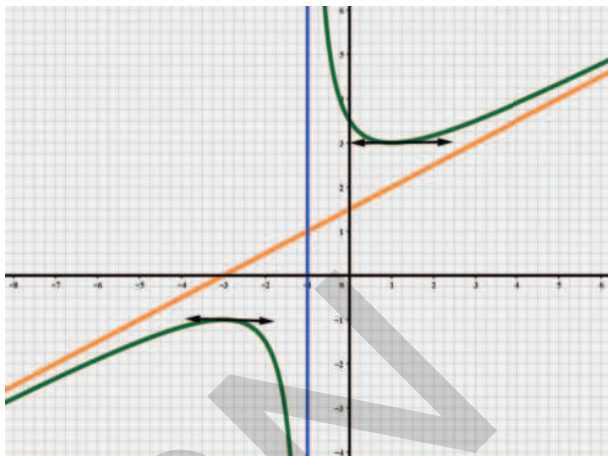
$\forall x \in [-3 ; -1[\cup]-1 ; 1]$; $g'(x) \leq 0$; d'où, g est décroissante sur ces intervalles.

Calcul de l'image de certains points : $g(-3) = \frac{1}{2}(-3) + \frac{3}{2} - \frac{2}{2} = -1$; $g(1) = 3$.

- Tableau de variation

x	$-\infty$	-3	-1	1	$+\infty$	
$g'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$-\infty$	-1	$+\infty$	3	$+\infty$	

- Représentation graphique



Exemple 11:

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$

- 1°) Dresser le tableau de variation de f ;
- 2°) Déterminer les intersections de $\mathcal{C}_f$ avec les axes de coordonnées ;
- 3°) Dans un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, tracer la courbe $\mathcal{C}_f$.

Réponse :

Domaine de définition : $\mathcal{D}_f =]-\infty; -1[\cup]-1; 1[\cup]1; +\infty[$

- Limites :
$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = \frac{2}{0^+} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = \frac{2}{0^-} = -\infty \end{cases} \text{ et } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = \frac{2}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = \frac{2}{0^+} = +\infty \end{cases}$$

La courbe $\mathcal{C}_f$ admet deux asymptotes verticales d'équations : $x = -1$ et $x = 1$.

On a : $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = 1$ donc la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 1$.

- Variations de f : f est une fonction rationnelle, elle est dérivable sur son ensemble de définition

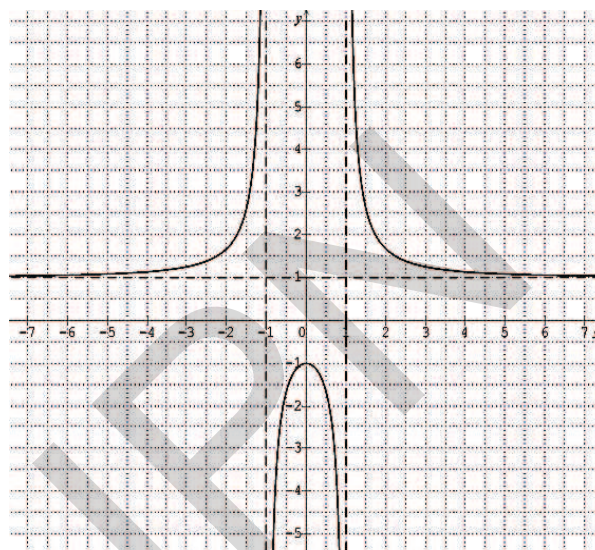
$$\text{et } f'(x) = \frac{2x(x^2 - 1) - 2x(x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-4x}{(x^2 - 1)^2} \text{ et } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-4x}{(x^2 - 1)^2} = 0 \Leftrightarrow -4x = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

- Tableau de variations

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+		+ 0 -		-
$f(x)$	$1 \nearrow +\infty$	$-\infty \nearrow -1 \searrow -\infty$		$+\infty \searrow 1$	

2°) Intersection avec les axes de coordonnées :

On a : $f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = 0 \Leftrightarrow x^2 + 1 = 0$ Cette équation n'admet pas de solution donc $\mathcal{C}_f$ ne coupe pas l'axe des abscisses ($x'Ox$) et $f(0) = -1$ donc $\mathcal{C}_f$ coupe l'axe des ordonnées ($y'Oy$) au point de coordonnées $(0; -1)$



Exemple 12 :

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{x - 1}$

1°) Déterminer les réels a et b sachant que $\mathcal{C}_f$ passe par $A(3; 5)$ et admet en ce point une tangente parallèle à (Ox) ;

2°) Dresser le tableau de variations de f ;

3°) Construire $\mathcal{C}_f$ et ses asymptotes.

Réponse :

1°) Déterminons les réels a et b : $\mathcal{C}_f$ passe par $A(3; 5) \Leftrightarrow f(3) = 5 \Leftrightarrow \frac{3^2 + 3a + b}{3 - 1} = 5 \Leftrightarrow 3a + b = 1$ (1)

$\mathcal{C}_f$ admet en A une tangente parallèle à $(Ox) \Leftrightarrow f'(3) = 0$. On a :

$$f'(x) = \frac{(2x + a)(x - 1) - (x^2 + ax + b)}{(x - 1)^2} = \frac{2x^2 - 2x + ax - a - x^2 - ax - b}{(x - 1)^2} = \frac{x^2 - 2x - a - b}{(x - 1)^2}$$

$$f'(3) = \frac{3^2 - 2 \times 3 - a - b}{(3 - 1)^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{3 - a - b}{4} = 0 \Leftrightarrow a + b = 3 \quad (2) \text{ . Les égalités (1) et (2) donnent le système :}$$

$$\begin{cases} 3a+b=1 \\ a+b=3 \end{cases} \quad \text{On en déduit : } a=-1 \text{ et } b=4 \quad \text{d'où : } f(x) = \frac{x^2 - x + 4}{x-1}$$

2°)

• Domaine de définition : $\mathcal{D}_f =]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$

• Limite : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - x + 4}{x-1} = \frac{4}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - x + 4}{x-1} = \frac{4}{0^+} = +\infty \end{cases} \quad \text{donc la courbe admet une asymptote verticale d'équation}$$

$x=1$

• Variations de f : $f'(x) = \frac{(2x-1)(x-1) - (x^2 - x + 4)}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 3x + 1 - x^2 + x - 4}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2}$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow (x-3)(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = -3 \text{ ou } x = 3;$$

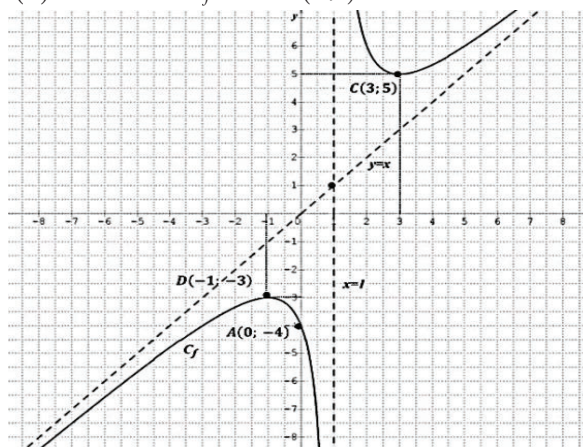
• Tableau de variation

x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	-3	$-\infty$	$+\infty$	5	$+\infty$

3°) On peut écrire : $f(x) = x + \frac{4}{x-1}$ et comme $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4}{x-1} = 0$ on a : $\Delta: y = x$ est une asymptote à C_f

• Intersection avec les axes de coordonnées :

On a : $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - x + 4 = 0$ $\Delta = 1 - 16 = -15 < 0$ l'équation n'a pas de solution, donc la courbe ne coupe pas l'axe (Ox) et $f(0) = -4$, donc C_f coupe (Oy) au point de coordonnées $(0; -4)$.



Exemple 17

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{2x^2 - 7x + 5}{x-3}$

1°) Dresser le tableau de variation de f ;

2°) Déterminer les intersections de $\mathcal{C}_f$ avec les axes de coordonnées puis construire $\mathcal{C}_f$ et ses asymptotes ;

3°) Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = m$, tel que m est un paramètre réel.

Solution :

1°) $f(x) = \frac{2x^2 - 7x + 5}{x - 3}$ $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} / \{3\} =]-\infty; 3[\cup]3; +\infty[$

• Limites $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x = +\infty$

$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2x^2 - 7x + 5}{x - 3} = \frac{2}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2x^2 - 7x + 5}{x - 3} = \frac{2}{0^+} = +\infty \end{cases}$ donc la courbe admet une asymptote verticale d'équation $x = 3$

• Variations de f :

$$f'(x) = \frac{(4x - 7)(x - 3) - (2x^2 - 7x + 5)}{(x - 3)^2} = \frac{4x^2 - 12x - 7x + 21 - 2x^2 + 7x - 5}{(x - 3)^2} = \frac{2x^2 - 12x + 16}{(x - 3)^2},$$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 12x + 16 = 0 \Leftrightarrow x = 4 \text{ ou } x = 2$

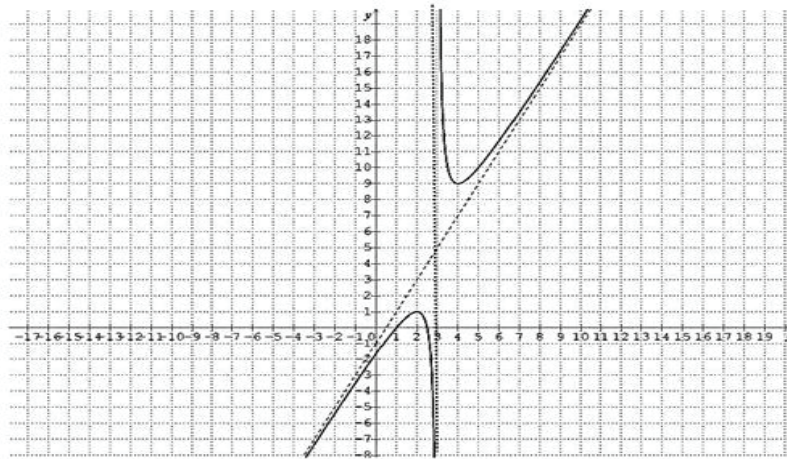
• Tableau de variations suivant :

Tableau de variations suivant :						
x	$-\infty$	2	3	4		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+
$f(x)$		1		$+\infty$		$+\infty$
	$-\infty$	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$	
			$-\infty$	9		

On a : $f(x) = 2x - 1 + \frac{2}{x - 3}$ et $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2}{x - 3} = 0$ donc la droite d'équation : $y = 2x - 1$ est une asymptote oblique à la courbe $\mathcal{C}_f$

2°) $f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 7x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = \frac{5}{2}$ donc $\mathcal{C}_f$ coupe l'axe des abscisses aux points de coordonnées $(1; 0)$ et $(\frac{5}{2}; 0)$ et : $f(0) = \frac{-5}{3}$, donc $\mathcal{C}_f$ coupe (Oy) au point de coordonnées $(0; \frac{-5}{3})$.

3°) Résolution graphique de l'équation $f(x) = m$



Si $m \in]-\infty; 1[\cup]9; +\infty[$ l'équation $f(x) = m$ admet deux solutions

Si $m = 1$ ou $m = 9$ l'équation $f(x) = m$ admet une solution.

Si $m \in]1; 9[$ l'équation $f(x) = m$ n'admet pas de solution

2. Extrémums :

a. Maximum et minimum

Définition 2

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et $x_0 \in I$. Si f' s'annule en x_0 en changeant de signe, alors f admet un extrémum au point x_0 .

Si f' change du négatif au positif cet extrémum est un minimum.

Si f' change du positif au négatif cet extrémum est un maximum.

Remarque 1 :

Au niveau d'un extrémum, la courbe représentative d'une fonction f admet une tangente horizontale.

b. Bijection :

Définition 3

Si f est une fonction continue et strictement monotone (C.-à-d. strictement décroissante ou strictement croissante) sur un intervalle I , on dit alors que f réalise une bijection de I sur un intervalle $J = f(I)$.

Exemple 18

Soit la fonction définie par : $f(x) = \frac{2x^2 - 3x}{x^2 - 3x + 3}$

1°) Dresser le tableau de variation de f ;

2°) Résoudre l'équation $f(x) = 0$ en interprétant les résultats ;

3°) Construire $\mathcal{C}_f$;

4°) Soit la fonction $g(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$.

Montrer que : $f''(x) = \frac{6g(x)}{(x^2 - 3x + 3)^2}$;

5°) Etudier $g(x)$ et montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet 3 solutions α, β, γ ;

6°) Soit A, B, C les points de $\mathcal{C}_f$ d'abscisses respectifs : α, β, γ .

a) Etudier les signes de $f''(x)$;

b) Que représente A, B, C pour $\mathcal{C}_f$?

Solution :

1°) $f(x) = \frac{2x^2 - 3x}{x^2 - 3x + 3}$

- Domaine de définition :

$f(x)$ existe si et seulement si $x^2 - 3x + 3 \neq 0$ L'équation $x^2 - 3x + 3 = 0$ n'a pas de solution car $\Delta = -3 < 0$

donc $\mathcal{D}_f =]-\infty; +\infty[$

- Limites : On a :
$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2 \end{cases}$$
 donc la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote horizontale

d'équation : $y = 2$

- Dérivée de f Pour tout $x \in \mathcal{D}_f$ On a : $f'(x) = \frac{-3x^2 + 12x - 9}{(x^2 - 3x + 3)^2}$ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 12x - 9 = 0$

L'équation a deux solutions : $x = 1$ ou $x = 3$

- Tableau de variations

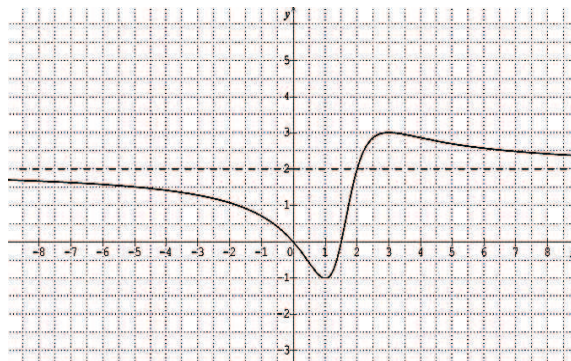
x	$-\infty$	1	3	$+\infty$			
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$	2		-1		3		2

2°) Résolution de l'équation $f(x) = 0$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow x(2x - 3) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = \frac{3}{2}$$

Interprétation : les points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec l'axe des abscisses (Ox) sont $O(0;0)$ et $A\left(\frac{3}{2};0\right)$.

3°) Courbe de f



4°) On a :

$$f''(x) = \frac{6x^3 - 36x^2 + 54x - 18}{(x^2 - 3x + 3)^3} = \frac{6(x^3 - 6x^2 + 9x - 3)}{(x^2 - 3x + 3)^3}$$

On sait que $g(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$

Donc : $f''(x) = \frac{6g(x)}{(x^2 - 3x + 3)^3}$

5°) Etude de la fonction g

- g est un polynôme donc $\mathcal{D}_g =]-\infty; +\infty[$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$
- Dérivée de g : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = -3x^2 + 12x - 9$ et
 $g'(x) = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 12x - 9 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ et $x = 3$

Tableau de variations de f

x	$-\infty$	α	1	β	3	γ	$+\infty$
$g'(x)$		+	0	-	0	+	
$g(x)$	$-\infty$		1		-3		$+\infty$

Du tableau de variations on déduit le tableau de signes de g

x	$-\infty$	α	1	β	2	γ	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+	0	-	0	+

6°) a) Soit $A(\alpha; f(\alpha))$, $B(\beta; f(\beta))$, $C(\gamma; f(\gamma))$ On a

$$g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha^3 - 6\alpha^2 + 9\alpha - 3 = 0 \Leftrightarrow \alpha^3 - 6\alpha^2 + 9\alpha - 3 + (2\alpha^2 - 3\alpha) = 0 + 2\alpha^2 - 3\alpha$$

$$\Leftrightarrow \alpha^3 - 4\alpha^2 + 6\alpha - 3 = 2\alpha^2 - 3\alpha \Leftrightarrow \frac{\alpha^3 - 4\alpha^2 + 6\alpha - 3}{\alpha^2 - 3\alpha + 3} = \frac{2\alpha^2 - 3\alpha}{\alpha^2 - 3\alpha + 3} = f(\alpha)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\alpha^2 - 3\alpha}{\alpha^2 - 3\alpha + 3} = \alpha - 1 \Leftrightarrow f(\alpha) = \alpha - 1$$

De la même façon on obtient : $f(\beta) = \beta - 1$ et $f(\gamma) = \gamma - 1$.

a) Signe de f'' : On a : $f''(x) = \frac{6g(x)}{(x^2 - 3x + 3)^2}$ et $(x^2 - 3x + 3)^2 > 0$ donc le signe de $f''(x)$ est celui de $g(x)$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{6g(x)}{(x^2 - 3x + 3)^2} = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0 \Leftrightarrow x = \alpha \text{ ou } x = \beta \text{ ou } x = \gamma.$$

Si $x \in]-\infty; \alpha[\cup]\beta; \gamma[$ alors $f''(x) < 0$ et si $x \in]\alpha; \beta[\cup]\gamma; +\infty[$ alors $f''(x) > 0$

b) f'' s'annule en changeant de signe aux points A , B et C , ces points sont donc des points d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}_f$.

Remarque 2 :

[1] Si une fonction f est monotone (croissante ou décroissante) sur un intervalle I alors :

- f réalise une bijection de l'intervalle I sur l'intervalle $J = f(I)$.
- La fonction réciproque de f notée f^{-1} réalise une bijection de J sur I
- Les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ des fonctions f et f^{-1} sont symétriques par rapport à la première bissectrice c'est-à-dire la droite d'équation $y = x$
- Les fonctions f et f^{-1} ont le même sens de variation

[2] Si f^{-1} est dérivable au point d'abscisse y , alors : $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$

Exercice 3:

On pose $f(x) = x^2 - 4x + 3$

1°) Etudier la dérivabilité de f et tracer sa courbe C représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

2°) Soit g la restriction de f sur l'intervalle $[2; +\infty[$,

a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur intervalle J que l'on déterminera.

b) Déterminer le domaine D de dérivabilité de g^{-1} .

c) Donner l'expression de $g^{-1}(x)$.

d) Calculer de deux façons $(g^{-1})'(x)$ pour $x \in D$.

e) Tracer la courbe C_f de g^{-1} dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Solution :

1°) La fonction f est un polynôme donc : $\mathcal{D}_f =]-\infty; +\infty[= \mathbb{R}$.

f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ (car polynôme), $f'(x) = 2x - 4$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

On a : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 - 4x + 3 = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - 4x + 3 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$

Tableau de variations

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	-1	$+\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 4x + 3}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$ On en déduit que :

C_f admet une branche parabolique (BP) parallèle à l'axe des ordonnées $(y'Oy)$ au voisinage de $-\infty$.

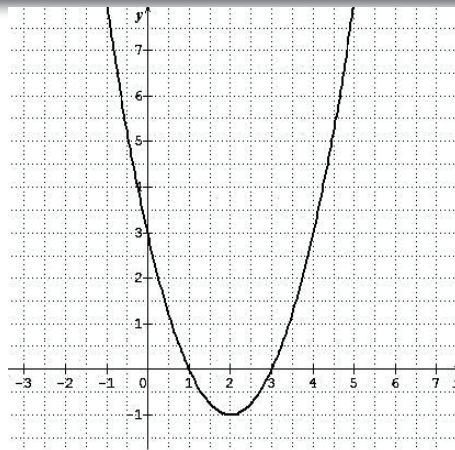
De même $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 4x + 3}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$

Donc C_f admet une branche parabolique (BP) parallèle à l'axe des ordonnées $(y'Oy)$ au voisinage de $+\infty$.

• Intersection avec les axes de coordonnées

On a : $f(0) = 3$: la courbe coupe l'axe des ordonnées au point $A(0;3)$

L'équation $f(x) = 0$ a pour solution : $x = 1$ ou $x = 3$ donc la courbe coupe l'axe des ordonnées aux points $B(1;0)$ et $C(3;0)$



2°/a)

Comme g est continue et strictement monotone sur l'intervalle $I = [2; +\infty[$ elle réalise une bijection de I sur l'intervalle $J = g(I) = [-1; +\infty[$

b) Comme $g'(2) = 0$, la fonction g^{-1} n'est pas dérivable en $g(2) = -1$. Et comme g est dérivable et comme sa dérivée ne s'annule pas sur l'intervalle ouvert $]2; +\infty[$, la fonction g^{-1} est dérivable sur l'intervalle :

$$g([2; +\infty[) = [-1; +\infty[$$

Le domaine de dérivabilité de g^{-1} est donc l'intervalle ouvert $D =]-1; +\infty[$.

c) On pose : $g^{-1}(x) = y \Leftrightarrow g(y) = x$

$$g(y) = x \Leftrightarrow y^2 - 4y + 3 = x \Leftrightarrow y^2 - 4y + 4 = x + 1 \Leftrightarrow (y - 2)^2 = x + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 - \sqrt{x+1} \\ y = 2 + \sqrt{x+1} \end{cases} \text{ ou}$$

. Or, $y \in]2; +\infty[$ c'est-à-dire que $y > 2$ d'où, l'expression retenue est $y = 2 + \sqrt{x+1}$.

Ce qui signifie que : $g^{-1}(x) = 2 + \sqrt{x+1}$

d) Dérivée de g^{-1}

Méthode 1 :

Pour tout $x \in D$ on a : $g^{-1}(x) = 2 + \sqrt{x+1}$, les règles de dérivation donnent : $(g^{-1})'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$

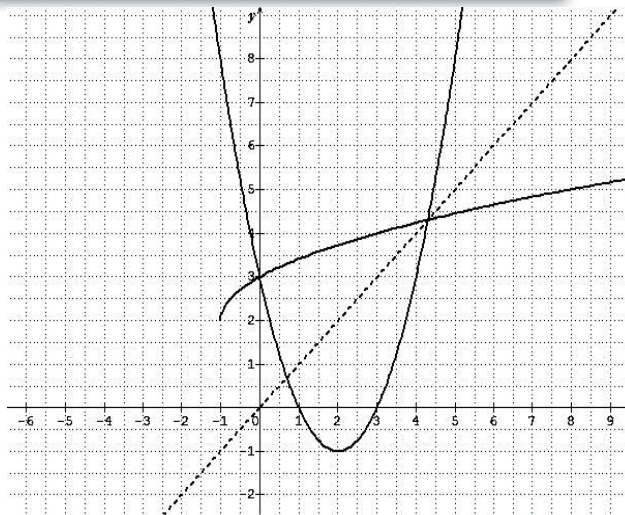
Méthode 2 :

Formule de la dérivée de fonction de la fonction réciproque : $\forall x \in J, (g^{-1})'(x) = \frac{1}{g'(g^{-1}(x))}$

$$\text{donc } (g^{-1})'(x) = \frac{1}{2g^{-1}(x) - 4} = \frac{1}{4 + 2\sqrt{x+1} - 4} = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$$

e) La courbe C' de g^{-1} dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ est la symétrique de celle C de g par rapport à la droite d'équation $y = x$:

x	2	$+\infty$
$g'(x)$	0	+
$g(x)$	-1	$+\infty$



Exemple 19

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{4-2x}{\sqrt{4x-x^2}}$

1°) Etudier les variations de f et tracer sa courbe représentative C dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

2°) a) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à préciser.

b) Montrer que f^{-1} est dérivable sur J .

c) Donner l'expression de $f^{-1}(x)$.

Solution :

1°) f est définie si $4x-x^2 > 0$ $4x-x^2 = 0 \Leftrightarrow x=0$ ou $x=4$

$\mathcal{D}_f =]0; 4[$; f est continue et dérivable sur $\mathcal{D}_f$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4-2x}{\sqrt{4x-x^2}} = \frac{4}{0^+} = +\infty$; C' admet une asymptote horizontale (AH) d'équation $x=0$

$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{4-2x}{\sqrt{4x-x^2}} = \frac{-4}{0^+} = -\infty$; C' admet une asymptote horizontale (AH) d'équation $x=4$

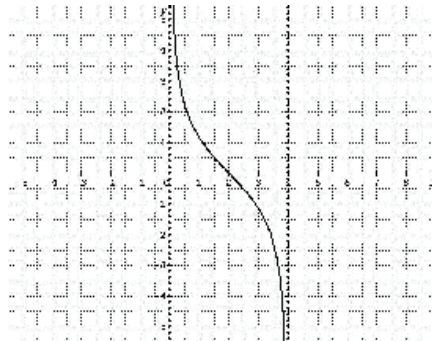
Dérivée de f : Pour tout $x \in]0; 4[$ on a :

$$f'(x) = \frac{-2\sqrt{4x-x^2} - \frac{(4-2x)^2}{2\sqrt{4x-x^2}}}{4x-x^2} = \frac{-4(4x-x^2) - (4-2x)^2}{2(4x-x^2)\sqrt{4x-x^2}} = \frac{-16x+4x^2-16+16x-4x^2}{2(4x-x^2)\sqrt{4x-x^2}}$$

$f'(x) = \frac{-8}{(4x-x^2)\sqrt{4x-x^2}} < 0$. On en déduit le tableau de variations suivant :

x	0	4
$f'(x)$	—	
$f(x)$	$+\infty$	$-\infty$

L'équation $f(x)=0$ admet une solution $x=2$ donc la courbe C coupe l'axe des abscisses au point $A(2;0)$
 Courbe C



2°) a) Comme f est continue et strictement monotone sur l'intervalle $I =]0; 4[$, elle admet donc une fonction réciproque f^{-1} définie sur $J = f(I) = \mathbb{R}$.

b) Comme f est dérivable sur I , et comme pour tout $x \in]0; 4[$, $f'(x) \neq 0$, la fonction f^{-1} est donc dérivable sur $f(]0; 4[) = J = \mathbb{R}$.

c) Expression de f^{-1} : On pose : $f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow x = f(y) \Leftrightarrow \frac{4-2y}{\sqrt{4y-y^2}} = x \Leftrightarrow \frac{(4-2y)^2}{4y-y^2} = x^2$

$$\Leftrightarrow 16 - 16y + 4y^2 = x^2(4y - y^2) \Leftrightarrow (x^2 + 4)y^2 - 4(x^2 + 4)y = -16 \Leftrightarrow y^2 - 4y + 4 = \frac{-16}{x^2 + 4} + 4$$

$$\Leftrightarrow (y-2)^2 = \frac{-16 + 4x^2 + 16}{x^2 + 4} \Leftrightarrow (y-2)^2 = \frac{4x^2}{x^2 + 4} \Leftrightarrow y-2 = -\frac{2x}{\sqrt{x^2 + 4}} \Leftrightarrow y = 2 - \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 4}}$$

donc : pour tout $x \in \mathbb{R}$, : $f^{-1}(x) = 2 - \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 4}}$

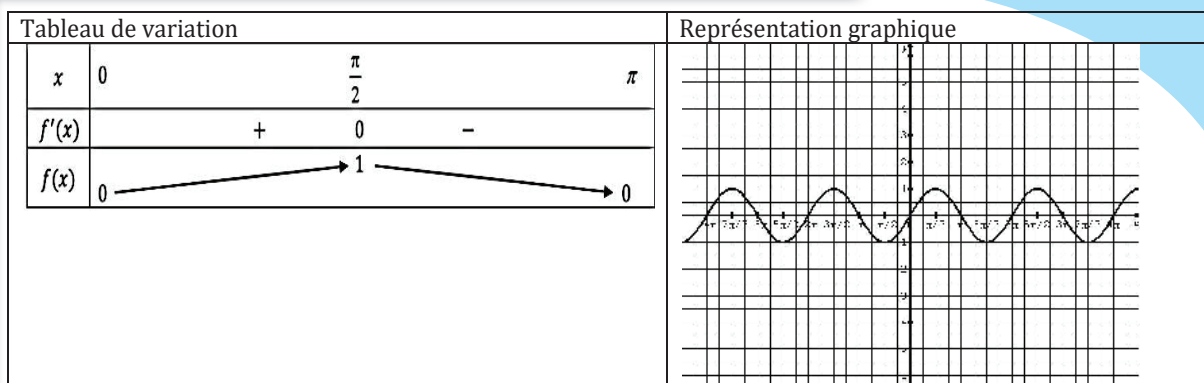
III. Fonctions trigonométriques

1. Etude de la fonction $f : x \rightarrow \sin x$

- Domaine de définition est $\mathbb{R}$;
- Périodicité ; elle est périodique de période 2π
- Parité : elle est impaire. donc il suffit de réduire l'intervalle d'étude à $[0 ; \pi]$.
- Dérivée : cette fonction est dérivable et par conséquent continue, sur cet ensemble et sa dérivée est la fonction $f' : x \rightarrow \cos x$
- Sens de variation ;

Pour tout $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$; $\cos x \geq 0$; d'où $f'(x) \geq 0$; donc f est croissante sur cet intervalle ;

Pour tout $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$; $\cos x \leq 0$; d'où $f'(x) \leq 0$, donc f est décroissante sur cet intervalle.



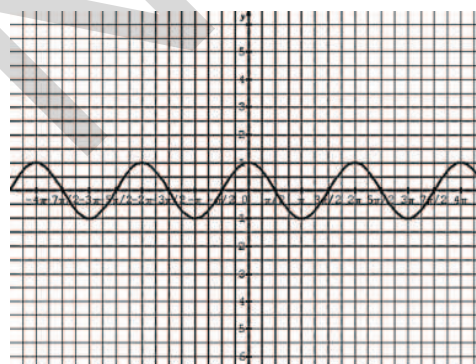
2. Etude de la fonction $f : x \rightarrow \cos x$

- Domaine de définition est $\mathbb{R}$;
- Périodicité ; elle est périodique de période 2π
- Parité : elle est paire. Donc, il suffit de réduire l'intervalle d'étude à $[0 ; \pi]$.
- Dérivée : cette fonction est dérivable et par conséquent continue, sur cet intervalle.
Sa dérivée est la fonction $f' : x \rightarrow -\sin x$
- Sens de variation ; $\forall x \in [0 ; \pi] ; -\sin x \leq 0$; d'où $f'(x) \leq 0$; donc f est décroissante sur cet intervalle.

Tableau de variation

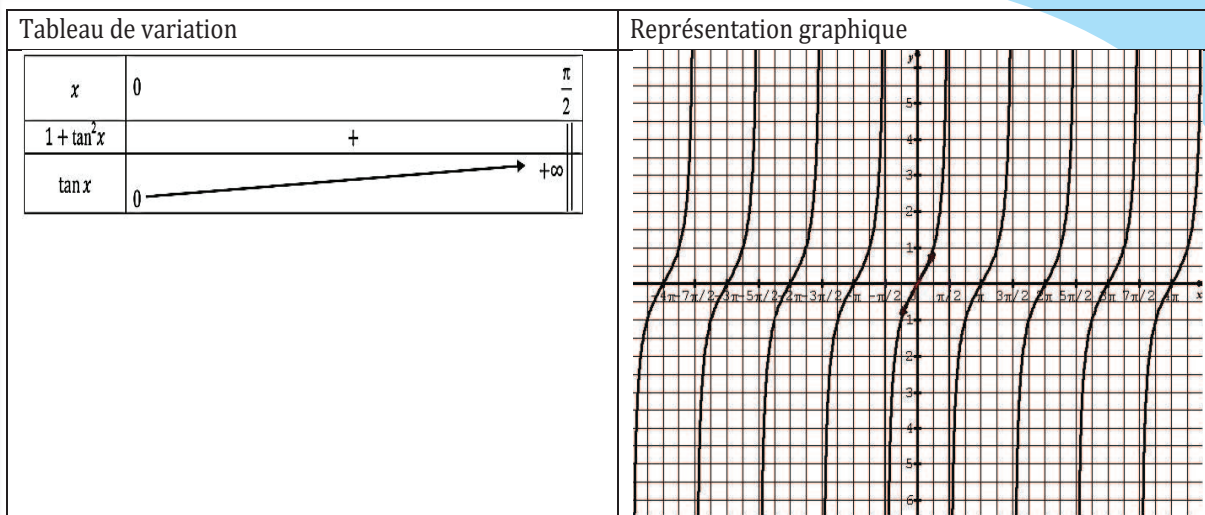
x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$-\sin x$	-	-1	-
$\cos x$	1	0	-1

Représentation graphique



3. Etude de la fonction $f : x \rightarrow \tan x$

- Domaine de définition est $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi ; k \in \mathbb{Z} \right\}$
- Périodicité ; elle est périodique de période π ;
- Parité : elle est impaire, donc il suffit de réduire l'intervalle d'étude à l'intervalle : $\left[0 ; \frac{\pi}{2} \right[$.
- Limites aux bornes : $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty$
- Dérivée : cette fonction est dérivable et par conséquent continue, sur cet intervalle.
Sa dérivée est la fonction $f' : x \rightarrow 1 + \tan^2 x$.
- Sens de variation ; $\forall x \in \left[0 ; \frac{\pi}{2} \right[; 1 + \tan^2 x \geq 0$; d'où $f'(x) \geq 0$; donc f est croissante sur cet intervalle.

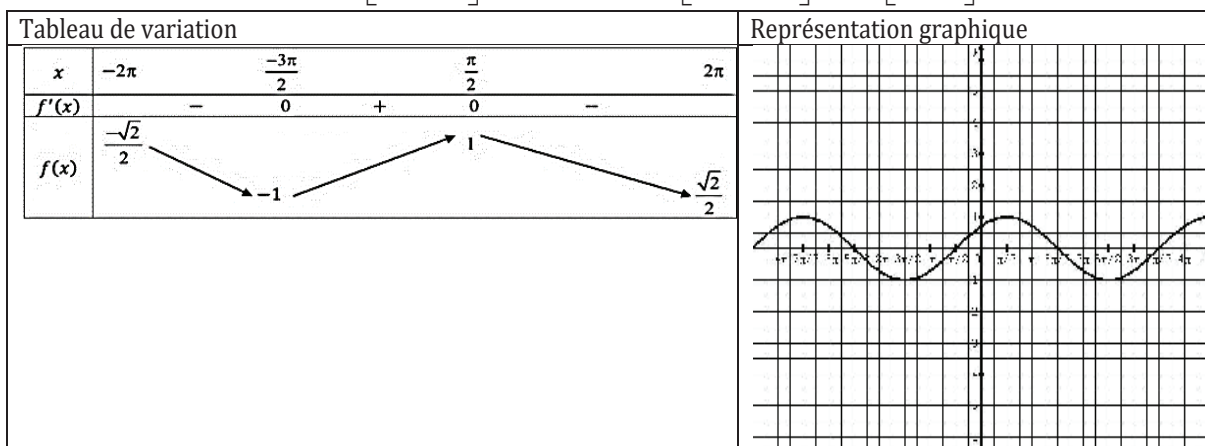


4. Etude de la fonction : $f : x \mapsto \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$

- Domaine de définition est $\mathbb{R}$;
- Périodicité ; elle est périodique de période 4π ; car, $f(x + 4\pi) = \sin\left(\frac{x}{2} + 2\pi + \frac{\pi}{4}\right) = f(x)$;
- On peut réduire l'étude à l'intervalle $[-2\pi ; 2\pi]$
- Dérivée et sens de variation : cette fonction est dérivable et par conséquent continue, sur cet intervalle.
- Sa dérivée est la fonction ; $f' : x \rightarrow \frac{1}{2} \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2} \\ \text{ou} \\ \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{3\pi}{2} \\ \text{ou} \\ x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

La fonction f est croissante sur $\left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$; décroissante sur $\left[-2\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$ et sur $\left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$.



5. Etude de la fonction $f : x \rightarrow 2\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$

- Domaine de définition est $\mathbb{R}$;

- Périodicité ; elle est périodique de période 4π ; car, $f(x+4\pi) = 2\cos\left(\frac{x}{2} + 2\pi + \frac{\pi}{4}\right) = f(x)$

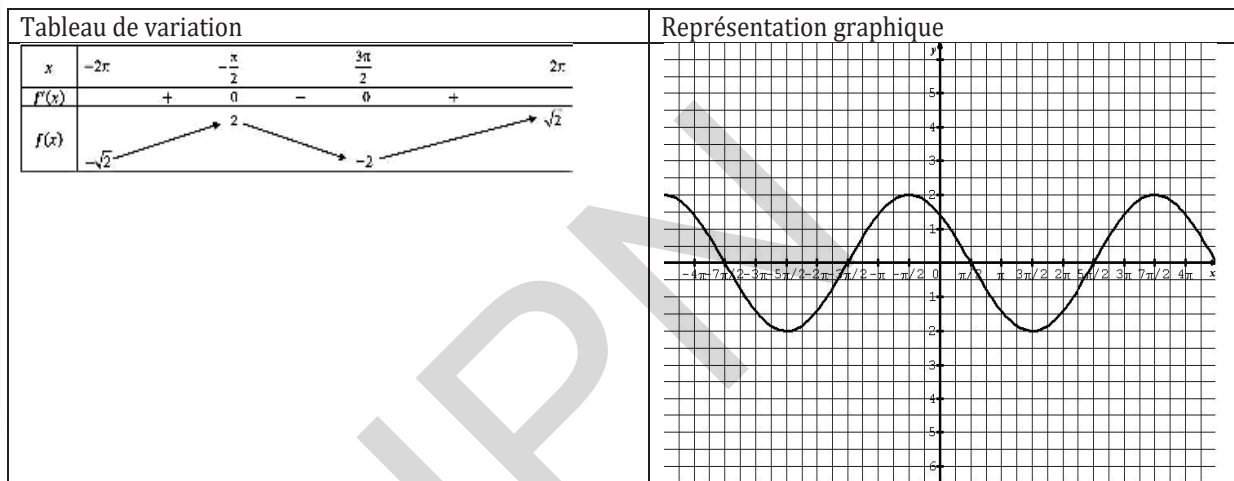
On peut réduire l'étude à l'intervalle $[-2\pi; 2\pi]$

- Dérivée et sens de variation : cette fonction est dérivable et par conséquent continue, sur cet intervalle.

Sa dérivée est la fonction $f' : x \rightarrow -\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$; Soit $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} = 0$

ou $\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} = \pi$; donc ; les valeurs de x dans l'intervalle d'étude sont : $\left\{-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right\}$.

La fonction f est donc, croissante sur $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$ et sur $\left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$; décroissante sur $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$;



A. Applications

Exercice 1. Etudier la fonction $f : x \rightarrow 2x^2 - 3x + 1$.

Réponse :

- Domaine de définition : $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$;
- limites aux bornes : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$
- Dérivabilité : comme f est une fonction polynôme ; elle est continue et dérivable sur son domaine de définition. La dérivée est la fonction : $f' : x \mapsto 4x - 3$;

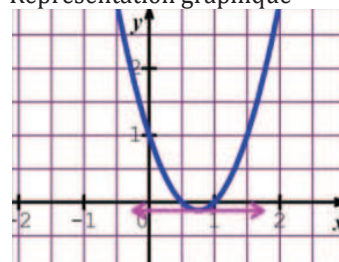
La dérivée est une fonction affine

- Sens de variation:

Tableau de variation

x	$+\infty$	$\frac{3}{4}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$-0,125$	$+\infty$

Représentation graphique



Exercice 2.

Soit g la fonction définie par : $g(x) = \frac{2x^2 + 2x - 1}{2x - 1}$

a) Déterminer les nombres réels a' ; b' et c' tels que : $x \in \mathbb{R} / \left\{ \frac{1}{2} \right\}$; $g(x) = a'x + b' + \frac{c'}{2x - 1}$.

b) Etudier la fonction g et tracer sa courbe représentative.

Réponse :

$$g(x) = a'x + b' + \frac{c'}{2x - 1} = g(x) = \frac{(a'x + b')(2x - 1) + c'}{2x - 1} = \frac{2a'x^2 - a'x + 2b'x - b' + c'}{2x - 1}$$

$$g(x) = \frac{2a'x^2 - (a' - 2b')x - (b' - c')}{2x - 1}$$

Par identification des deux écritures, on trouve $\begin{cases} 2a' = 2 & (1) \\ 2b' = 2 & (2) \\ c' - b' = -1 & (3) \end{cases}$; l'équation (1) donne $a' = 1$; l'équation (2)

donne $b' = \frac{3}{2}$; l'équation (3) donne $c' = \frac{1}{2}$ donc $g(x) = x + \frac{3}{2} + \frac{1}{2(2x - 1)}$.

- Domaine de définition : $D_g = \mathbb{R} / \left\{ \frac{1}{2} \right\}$
- Limites aux bornes : $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^-} g(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^+} g(x) = +\infty$

La courbe admet deux asymptotes l'une verticale d'équation : $x = \frac{1}{2}$ et l'autre oblique d'équation : $y = x + \frac{3}{2}$

(car $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{2(2x - 1)} = 0$).

- Dérivabilité : comme g est une fonction rationnelle ; elle est continue et dérivable sur son domaine de définition. La dérivée est la fonction : $g' : x \mapsto 1 + \frac{-2}{2(2x - 1)^2}$ d'où $g' : x \mapsto \frac{4x(x - 1)}{(2x - 1)^2}$;

On a : $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 1 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 1$.

- Sens de variation : g est croissante sur $]-\infty; 0] \cup [1; +\infty[$ et décroissante sur $[0; 1]$

D'où le tableau de variation suivant :

Tableau de variation					Représentation graphique	
x	$+\infty$	0	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$	
$g'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	0	
$g(x)$	$-\infty$	1	$-\infty$	3	$+\infty$	

Eléments de symétrie d'une courbe :

Exercice 3.

Soit f la fonction définie par ; $f : x \rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{x - 1}$.

Démontrer que la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$ est l'axe de symétrie de la courbe représentative de cette fonction.

Réponse :

Il suffit de démontrer que : $f(1-x) = f(x)$.

On a : $f(1-x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{1-(1-x)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} = f(x)$; donc la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$ est l'axe de symétrie de

la courbe représentative de la fonction $f : x \rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1}$

Exercice 4.

Voici une partie de la courbe représentative de la fonction ; $g : x \rightarrow \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} + \frac{2}{x+1}$

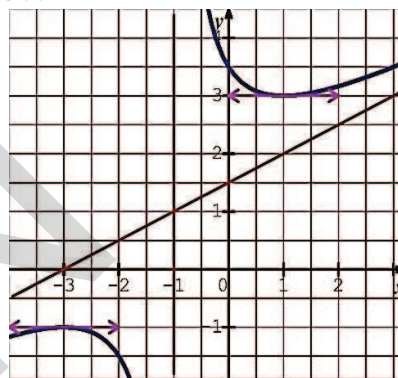
Cette courbe admet-elle un centre de symétrie ? si oui, lequel ? Démontrer.

Réponse :

D'après la courbe, le point de concours des asymptotes est le centre de symétrie pour cette courbe, il s'agit du point de coordonnées $(-1 ; 1)$. Il suffit de démontrer que : $g(-2-x) = 2 - g(x)$.

$$\begin{aligned} \text{On a : } \forall x \in D_g, g(-2-x) &= \frac{-2-x}{2} + \frac{3}{2} + \frac{2}{-2-x+1} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{x}{2} - \frac{2}{x+1} = 2 - \left(\frac{x}{2} + \frac{3}{2} + \frac{2}{x+1} \right) = 2 - g(x) \end{aligned}$$

d'où le point de coordonnées $(-1 ; 1)$ est le centre de symétrie pour la courbe donnée.



Exercice 5.

Soit la fonction $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$

Montrer que f réalise des bijections sur chacun des intervalles $]-\infty; 0]$, $[0; 2]$ et $[2; +\infty[$.

En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet trois solutions α, β et γ sur $\mathbb{R}$.

Réponse :

- Domaine de définition : $D_f =]-\infty; +\infty[= \mathbb{R}$
- Limites $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$
- Variations
 $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$; et $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 2$ d'où le tableau de variation

x	$-\infty$	α	0	β	2	γ	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$		3		-1		$+\infty$

- Comme f est continue et strictement croissante de l'intervalle $I_1 =]-\infty; 0]$ sur l'intervalle $J_1 =]-\infty; 3]$

f réalise donc une bijection de I_1 sur J_1 .

- Comme f est continue et strictement croissante de l'intervalle $I_2 =]0; 2]$ sur l'intervalle $J_2 =]3; -1]$,

f réalise donc une bijection de I_2 sur J_2 .

- Comme f est continue et strictement croissante de l'intervalle $I_3 =]2; +\infty[$ sur l'intervalle $J_3 =]-1; +\infty[$, f réalise donc une bijection de I_3 sur J_3 .

Comme $0 \in J_1$, il existe donc $\alpha \in I_1$ tel que $f(\alpha) = 0$, et comme $0 \in J_2$, il existe donc $\beta \in I_2$ tel que $f(\beta) = 0$ et comme $0 \in J_3$, il existe donc $\gamma \in I_3$ tel que $f(\gamma) = 0$.

L'équation $f(x) = 0$ admet donc trois solutions α, β et γ .

B. Exercices divers

1. Le repère $(O; I; J)$ est orthogonal.

a) Tracer la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto x^2 - 6x + 5$.

b) En déduire la courbe représentative de la fonction : $x \mapsto |x^2 - 6x + 5|$

2. Etudier et représenter les fonctions suivantes

a) $f(x) = 1 - \frac{1}{x-2}$; b) $f(x) = \frac{2x+1}{3x+2}$;

c) $f(x) = x - 2 - \frac{2}{x+3}$

3. Le repère $(O; I; J)$ est orthonormé.

Soit la fonction $f : x \mapsto \cos 2x$.

Etudier f et construire sa courbe représentative C_f .

4. 1) Déterminer les réels a ; b et c pour que la courbe d'équation $y = \frac{ax+b}{x+c}$ ait le

point $\Omega(-1; 2)$ comme centre de symétrie admet, au point d'abscisse 1, une tangente parallèle à la droite d'équation $y = -x$.

2) Construire cette courbe.

5. Soit f la fonction définie sur

$$[1; +\infty[\text{ par ; } f(x) = \frac{x}{2} - 1 + \frac{2}{x}$$

C_f désignera la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i} ; \vec{j})$.

1) a) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

b) Etudier le sens de variation de f .

c) Dresser le tableau de variation de f .

2) Etudier la position relative de C_f par rapport à la droite Δ d'équation $y = \frac{x}{2} - 1$

3) Tracer C_f et Δ

6. Soit f la fonction définie sur $[-3; 4[$ par ;

$$f(x) = \frac{x(2x-1)}{2x^2 - 2x + 5}.$$

1) C_f désigne la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O; \vec{i} ; \vec{j})$.

Déterminer le sens de variation de f .

2) Montrer que $A\left(\frac{1}{2}; 0\right)$ est centre de symétrie de C_f .

3) Tracer C_f la courbe représentative de f .

7. | Soit f la fonction définie sur

$$\mathbb{R} / \{0; 4\} \quad f(x) = \frac{4}{x(x-4)}$$

Etudier puis tracer la courbe représentative de f .

8. | Soit h la fonction définie sur

$$\mathbb{R} / \{1\} \text{ par } h(x) = \frac{3x+1}{-x+1}.$$

On pose (H) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}; \vec{j})$.

1) Etudier les limites de h aux bornes de son ensemble de définition.

2) Préciser les asymptotes à (H) .

2) Etudier les variations de h et faire le tableau de variation.

3) Représenter (H) et ses asymptotes.

Démontrer que le point $A(1; 3)$ est centre de symétrie pour (H) .

9. | Soit f la fonction définie sur par

$$f(x) = x + \frac{1}{x}$$

On note (Γ) sa courbe représentative dans un repère $(O, \vec{i}; \vec{j})$.

1) Démontrer que f est impaire.

2) a) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$. Interpréter, graphiquement le résultat.

b) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, démontrer que la droite Δ : d'équation $y = x$ est asymptote à (Γ) au voisinage de $+\infty$.

3) Etudier les variations de f sur $]0; +\infty[$ et faire son tableau de variation. Représenter Δ et (Γ) .

10. | Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{4}{x^2 + 3}.$$

On note (C) sa courbe dans un repère $(O, \vec{i}; \vec{j})$.

Démontrer que l'axe des abscisses est asymptote à (C) , étudier les variations de f et faire son tableau de variation.

11. | Soit $f(x) = \frac{2-x}{2x+3}$

a. Etudier les variations de f et tracer sa courbe (C) .

b. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$

par : $g(x) = \frac{2-|x|}{2|x|+3}$: dont la courbe est (C) .

c. Etudier la parité de g ;

d. En déduire de ce qui précède la courbe (C) de g .

12. | Soit $f(x) = \frac{3x^2 + ax + b}{x^2 + 1}$

a. Déterminer les réels a et b pour que la droite d'équation $y = 4x + 3$ soit tangente à

la courbe (C) de f au point d'abscisse 0 et étudier le sens de variations de f .

b. Démontrer que le point $I(0,3)$ est centre de symétrie de (C) ..

c. Tracer (C) et sa tangente en I .

d. En déduire la courbe (C') de la fonction g telle que : $g(x) = -f(x)$.

e. Discuter graphiquement suivant les valeurs du paramètre a le nombre de solutions de l'équation

$$x^2 - (7+a)x + 10 + a = 0$$

13. | Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = -1 + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

1°) Etudier la dérivabilité de f au point d'abscisse 0 ;

2°) Dresser le tableau de variations de f ;

3°) a) Montrer que f réalise une bijection de l'intervalle $I =]-1;1[$ sur un intervalle J à déterminer ;

b) Construire $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ dans le même repère ;

4°) Montrer que f^{-1} est dérivable au point B d'abscisse -1 et calculer $(f^{-1})'(-1)$;

5°) Expliciter $f^{-1}(x)$.

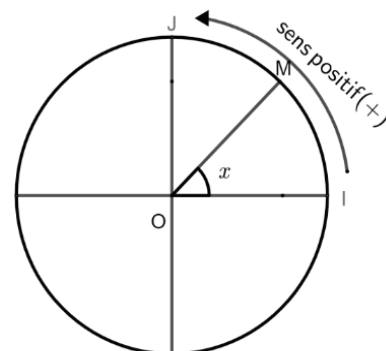
I. Cercle trigonométrique

1. Généralités

a. Premières définitions et propriétés

Définition 1

On appelle **cercle trigonométrique** dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O ; I, J)$ un cercle (C) de centre O et de rayon 1 qui est **orienté** ce qui signifie qu'on a choisi un sens positif : le sens inverse des aiguilles d'une montre (voir figure)



Remarque 1.

Le sens positif est aussi appelé **sens trigonométrique**

b. Graduation en radians :

A tout réel x , on associe un point M du cercle trigonométrique (C) de la façon suivante :

- Au réel 0, on associe le point I ;
- A un réel $x > 0$, on associe le point M tel que l'arc IM , parcouru dans le sens positif, ait pour longueur x ;
- A un réel $x < 0$, on associe le point M tel que l'arc, IM parcouru dans le sens contraire du sens trigonométrique, ait pour longueur $|x|$.

II. Angles orientés :

1. Angle de vecteurs :

a. Mesures en radians :

Soit x un réel et M le point correspondant (M est appelé image de x) du cercle trigonométrique (C) , on dit que x est une mesure en radian de l'angle orienté $(\overrightarrow{OI} ; \overrightarrow{OM})$.

L'ensemble des mesures en radians de l'angle $(\overrightarrow{OI} ; \overrightarrow{OM})$ est l'ensemble des réels de la forme $x + 2k$, où $(k \in \mathbb{Z})$.

Notation :

L'angle orienté des vecteurs unitaires $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OM}$ se note $(\overrightarrow{OI} ; \overrightarrow{OM})$.

On peut écrire : $(\overrightarrow{OI} ; \overrightarrow{OM}) = x + 2k\pi$ ou $(\overrightarrow{OI} ; \overrightarrow{OM}) = x \text{ rad}$ ou plus simplement : $(\overrightarrow{OI} ; \overrightarrow{OM}) = x$

b. Autres unités d'angles :

On peut utiliser les mesures en degrés ou en grades.

En mathématiques, on utilise le radian car la longueur de l'arc est mesurée avec la même unité que la longueur OI .

Si les mesures en radians, degrés, grades d'un même angle sont respectivement α , β et γ , elles se

déduisent les unes des autres par les égalités suivantes : $\frac{\alpha}{\pi} = \frac{\beta}{180} = \frac{\gamma}{200}$

2. Lignes trigonométriques d'un angle orienté :

a. Cosinus et sinus d'un angle orienté :

Définition 2

Soit $(\vec{u}, \vec{v})$ un angle orienté de mesure α et M l'image de α sur $(\mathbb{C})$.

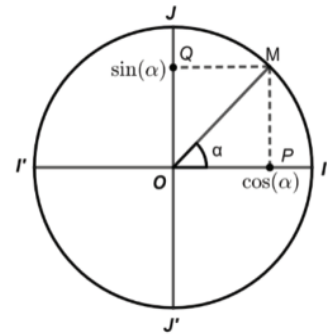
- le cosinus de $(\vec{u}, \vec{v})$ ou de α est l'abscisse de M et est noté $\cos(\alpha)$.
- le sinus de $(\vec{u}, \vec{v})$ ou de α est l'ordonnée de M et est noté $\sin(\alpha)$.

Remarque 2.

- Si P et Q sont les projetés orthogonaux respectifs de M sur les axes $(I'I)$ et $(J'J)$,

$$\text{on a : } \cos \alpha = \overline{OP} \quad \text{et} \quad \sin \alpha = \overline{OQ}$$

- Dans le plan muni du repère $(O; I; J)$, on a : $M(\cos \alpha; \sin \alpha) \Leftrightarrow \overline{OM} = \cos \alpha \cdot \overline{OI} + \sin \alpha \cdot \overline{OJ}$



b. Propriétés immédiates

Pour tout nombre réel α et pour tout nombre entier relatif k , on a :

$$1) \quad -1 \leq \cos \alpha \leq 1 \quad \text{et} \quad -1 \leq \sin \alpha \leq 1 \quad 2) \quad \begin{cases} \cos(\alpha + 2k\pi) = \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha + 2k\pi) = \sin(\alpha) \end{cases}$$

c. Tangente d'un angle orienté :

Définition 3

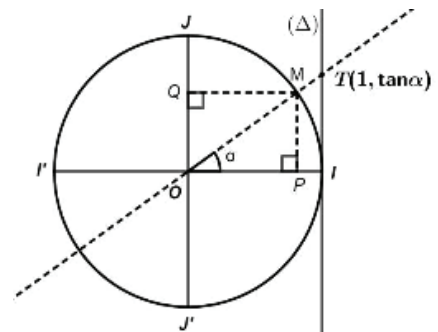
Soit $(\vec{u}, \vec{v})$ un angle orienté non droit de mesure α . La tangente de $(\vec{u}, \vec{v})$ ou de α est le nombre réel,

noté $\tan \alpha$, défini par : $\tan(\vec{u}, \vec{v}) = \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$

Interprétation géométrique

Si Δ est la tangente en I au cercle trigonométrique $\mathbb{C}$ et T le point d'intersection de la droite (OM) avec (Δ) alors

$$\overline{IT} = \tan(\alpha) \quad \text{pour tout } \alpha \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$$



Montrons que $T(1; \tan \alpha)$

Fixons un point M appartenant à l'arc de cercle (IJ) . Dans le triangle OIT : $\overline{OP} = \cos \alpha$,

$\overline{MP} = \sin \alpha$, $\overline{OI} = 1$ et les droites MP et (TI) sont parallèles.

D'après le théorème de Thalès on a : $\frac{\overline{OP}}{\overline{OI}} = \frac{\overline{MP}}{\overline{TI}} \Leftrightarrow \frac{\cos \alpha}{1} = \frac{\sin \alpha}{\overline{TI}} \Leftrightarrow \overline{TI} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \Leftrightarrow \overline{TI} = \tan \alpha$

On pourra raisonner par analogie si M appartient aux arcs (JI') , ou $(I'J')$ ou encore à $(J'I)$.

Remarque 3.

- $\tan \alpha$ n'est pas définie pour les nombres réels associés aux points J et J' , c'est-à-dire les nombres réels α de la forme ; $\frac{\pi}{2} + k\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$
- $\cos \alpha$, $\sin \alpha$ et $\tan \alpha$ sont appelés « lignes trigonométriques » de l'angle $(\overline{OI}, \overline{OM})$ ou du réel α .
- Pour tout n entier naturel, $(\cos \alpha)^n$, $(\sin \alpha)^n$ et $(\tan \alpha)^n$ peuvent s'écrire plus simplement $\cos^n \alpha$, $\sin^n \alpha$ et $\tan^n \alpha$

3. Formule fondamentale

- En appliquant le théorème de Pythagore au triangle OPM rectangle (voir figure ci-dessus)
- en P on obtient : $\overline{OP}^2 + \overline{MP}^2 = \overline{OM}^2 \Leftrightarrow (\cos \alpha)^2 + (\sin \alpha)^2 = 1^2 = 1$; pour tout

$$\alpha \in \mathbb{R} : \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$$

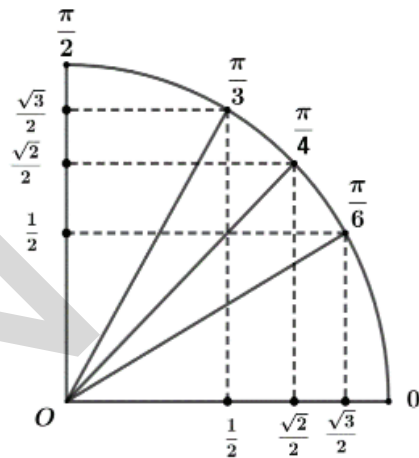
- Pour tout réel $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ on a : $1 + \tan^2 \alpha = 1 + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{\overbrace{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}^{=1}}{\cos^2 \alpha}$ donc

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

4. Lignes trigonométriques des angles remarquables :

Le tableau ci-dessous indique les lignes trigonométriques remarquables à retenir

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan \alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	



5. Lignes trigonométriques d'angles associés :

Soit $(\vec{u}, \vec{v})$ un angle orienté de mesure α . Les angles orientés de mesures : $-\alpha$, $\pi - \alpha$, $\pi + \alpha$, $\frac{\pi}{2} + \alpha$, $\frac{\pi}{2} - \alpha$ sont habituellement appelés angles associés à α . Au lieu de retenir directement les formules suivantes, il vaut mieux apprendre à les retrouver sur les deux figures suivantes ci-dessous.

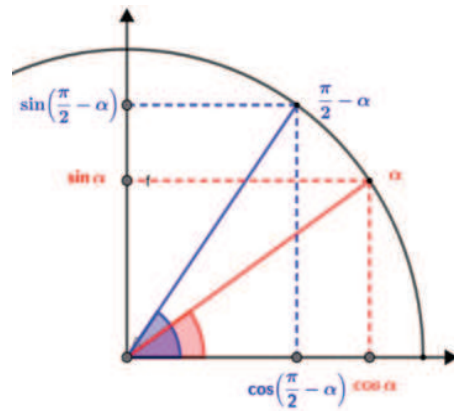
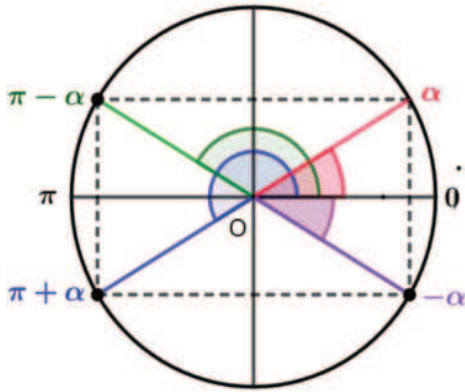
Propriété 1.

- Angles opposés :** $-\alpha$ et α . $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$; $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$
On retiendra que la fonction cosinus est paire et la fonction sinus impaire.
- Angles dont la somme est π :** α et $\pi - \alpha$: $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$; $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$
Les deux angles ont même sinus et des cosinus opposés.
- Angles dont la différence est π :** α et $\pi + \alpha$: $\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$; $\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$.
Les cosinus sont opposés et les sinus sont opposés
- Angles dont la somme est $\frac{\pi}{2}$:** α et $\frac{\pi}{2} - \alpha$: $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin(\alpha)$; $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos(\alpha)$

Le sinus de l'un est le cosinus de l'autre.

- Angles dont la différence est $\frac{\pi}{2}$:** α et $\frac{\pi}{2} + \alpha$: $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin(\alpha)$; $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos(\alpha)$

- $\frac{\pi}{2} + \alpha = \frac{\pi}{2} - (-\alpha)$ donc la dernière relation se déduit de l'avant dernière .
- Les tangentes des angles associés se déduisent des formules précédentes ;



6. Formules d'addition

Pour tous nombres réels a et b on a : Soit $(\mathcal{C})$ le cercle trigonométrique et M et N deux points de $(\mathcal{C})$, on pose ;
 $a = (\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OM})$ et $b = (\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{ON})$.

Considérons les points M et N , les images respectives des nombres réels a et b sur le cercle trigonométrique,

► On a : $M(\cos a; \sin a)$, $N(\cos b; \sin b)$ dans le repère $(O; I, J)$ on a :

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{OM}; \overrightarrow{ON}) &= (\overrightarrow{OM}; \overrightarrow{OI}) + (\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{ON}) = -(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OM}) + (\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{ON}) \\ &= -a + b = b - a \end{aligned}$$

Calculons de deux manières différentes le produit scalaire $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON}$;

- $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} \cos(\overrightarrow{OM}; \overrightarrow{ON}) = OM \cdot ON \cos(b - a) = 1 \times 1 \cos(b - a)$ Donc

$$\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = \cos(a - b) \quad \text{(I)}$$

- $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = \begin{pmatrix} \cos a \\ \sin a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos b \\ \sin b \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = \cos a \cos b + \sin a \sin b \quad \text{(II)}$

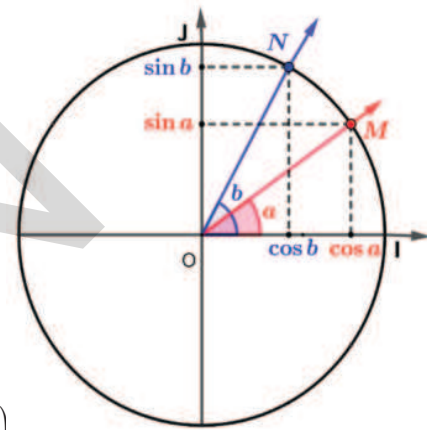
Des égalités (I) et (II) on déduit : $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \quad \text{(1)}$

► En remplaçant b par $-b$ dans la formule (1) on obtient la formule (2), en effet ;

$$\cos(a - (-b)) = \cos a \cos(-b) + \sin a \sin(-b) : \cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \quad \text{(2)}.$$

► Etablissons maintenant la formule : $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$.

$$\text{On sait que : } \sin(a - b) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (a - b)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} + b\right) - a\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + b\right) \cos a + \sin\left(\frac{\pi}{2} + b\right) \sin a$$



Or $\cos\left(\frac{\pi}{2} + b\right) = -\sin b$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2} + b\right) = \cos b$ donc $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$ (3)

► En remplaçant b par $-b$ dans la formule (3) on obtient :

$$\sin(a - (-b)) = \sin a \cos(-b) - \cos a \sin(-b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b \quad (4)$$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$	$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$	$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$,
$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$	$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$	$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$

7. Formules de duplication et de linéarisation :

a. Formules de duplication

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a \quad ; \quad \sin 2a = 2 \sin a \cos a \quad ; \quad \tan(2a) = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$$

Démonstration :

En reprenant les formules d'addition donnant $\cos(a+b)$ et $\sin(a+b)$ pour $b = a$ on a :

$$\cos(a+a) = \cos a \cos a - \sin a \sin a \Leftrightarrow \cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a$$

$$\text{et } \sin(a+a) = \sin a \cos a + \cos a \sin a \Leftrightarrow \sin(2a) = 2 \sin a \cos a.$$

b. Formules de linéarisation

$$\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}, \quad \sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$$

Démonstration :

En reprenant les formules de duplication et en utilisant la relation $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$,

$$\begin{aligned} \text{on a : } \begin{cases} \cos^2 a + \sin^2 a = 1 & (1) \\ \cos^2 a - \sin^2 a = \cos 2a & (2) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{aligned} (1) + (2) &\rightarrow 2 \cos^2 a = 1 + \cos 2a \Leftrightarrow \cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2} \\ (1) - (2) &\rightarrow 2 \sin^2 a = 1 - \cos 2a \Leftrightarrow \sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2} \end{aligned} \end{aligned}$$

c. Expressions de $\cos a$, $\sin a$ et $\tan a$ en fonction de $\tan \frac{a}{2}$

Pour tout nombre réel $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$ en posant $t = \tan \frac{\alpha}{2}$, on a :

$$\cos a = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \sin a = \frac{2t}{1+t^2} \quad \tan a = \frac{2t}{1-t^2}$$

Démonstration :

$$\bullet \text{ On a : } \cos^2 \frac{a}{2} = \frac{1}{1 + \tan^2 \left(\frac{a}{2}\right)} = \frac{1}{1+t^2} \text{ d'où } \cos a = \cos^2 \frac{a}{2} - \sin^2 \frac{a}{2} = \cos^2 \frac{a}{2} \left(1 - \frac{\sin^2 \left(\frac{a}{2}\right)}{\cos^2 \left(\frac{a}{2}\right)}\right) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

- $\sin a = 2 \cos \frac{a}{2} \sin \frac{a}{2} = \cos^2 \frac{a}{2} \left(2 \frac{\sin \frac{a}{2}}{\cos \frac{a}{2}} \right) = \frac{2t}{1+t^2}$. Si de plus, $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ alors $\tan a = \frac{2t}{1-t^2}$

d. Formules de transformation :

$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$	$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$
$\cos p - \cos q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$	$\sin p - \sin q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$

$\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)]$	$\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)]$
$\sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a+b) - \cos(a-b)]$	$\cos a \sin b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) - \sin(a-b)]$

Démonstration :

Démontrons à l'aide des formules suivantes :

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \quad \text{et} \quad \cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

En additionnant membre à membre, on obtient : $\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2 \cos a \cos b$

En posant $\begin{cases} p = a+b \\ \text{et} \\ q = a-b \end{cases}$, on a : $\begin{cases} p+q = 2a \\ \text{et} \\ p-q = 2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{p+q}{2} \\ \text{et} \\ b = \frac{p-q}{2} \end{cases}$ d'où ; $\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$

D'une manière analogue, on peut démontrer, à l'aide des quatre premières formules d'addition.

Exemple 20

En utilisant les formules de duplication, calculer a) $\cos \frac{\pi}{12}$; $\sin \frac{\pi}{12}$ b) $\cos \frac{\pi}{8}$; $\sin \frac{\pi}{8}$

Réponse :

a) On sait : $\cos \frac{\pi}{6} = \cos \left(2 \times \frac{\pi}{12} \right) = \cos^2 \frac{\pi}{12} - \sin^2 \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\cos^2 \frac{\pi}{12} + \sin^2 \frac{\pi}{12} = 1$

On a donc :

$$\begin{cases} \cos^2 \frac{\pi}{12} + \sin^2 \frac{\pi}{12} = 1 & (1) \\ \cos^2 \frac{\pi}{12} - \sin^2 \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}}{2} & (2) \end{cases} \quad (1)+(2) \rightarrow 2 \cos^2 \frac{\pi}{12} = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \cos^2 \frac{\pi}{12} = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$$

Or $0 < \frac{\pi}{12} < \frac{\pi}{2}$ donc $\cos \frac{\pi}{12} > 0$ d'où $\cos \frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}}$

(1)-(2) $\rightarrow 2 \sin^2 \frac{\pi}{12} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin^2 \frac{\pi}{12} = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$ Or $\sin \frac{\pi}{12} > 0$ d'où $\sin \frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}$

b) On sait que : $\cos \frac{\pi}{4} = \cos \left(2 \times \frac{\pi}{8} \right) = \cos^2 \frac{\pi}{8} - \sin^2 \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\cos^2 \frac{\pi}{8} + \sin^2 \frac{\pi}{8} = 1$

On a donc :
$$\begin{cases} \cos^2 \frac{\pi}{8} + \sin^2 \frac{\pi}{8} = 1 & (1) \\ \cos^2 \frac{\pi}{8} - \sin^2 \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2} & (2) \end{cases} \quad (1)+(2) \rightarrow 2\cos^2 \frac{\pi}{8} = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos^2 \frac{\pi}{8} = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$$

Or $0 < \frac{\pi}{8} < \frac{\pi}{2}$ donc $\cos \frac{\pi}{8} > 0$ d'où $\cos \frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}$

$(1)-(2) \rightarrow 2\sin^2 \frac{\pi}{8} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin^2 \frac{\pi}{8} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$ Or $\sin \frac{\pi}{8} > 0$ d'où $\sin \frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}$

8. Linéarisation des fonctions polynômes trigonométriques :

La linéarisation c'est la transformation d'un produit ou d'une puissance en une somme.

Exemple 21

Linéariser l'expression ; $\cos 4x \sin 2x$

Réponse :

pour tout $x \in \mathbb{R}$; on a : $\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)]$

En posant : $a = 4x$ et $b = x$ on obtient :

$$\cos 4x \sin 2x = \frac{1}{2} [\sin(4x+2x) - \sin(4x-2x)] = \frac{1}{2} [\sin(6x) - \sin(2x)] = \frac{1}{2} \sin(6x) - \frac{1}{2} \sin(2x)$$

Exemple 22

Linéariser $\cos^3 x$

Réponse :

$$\cos^3 x = \cos^2 x (\cos x) \text{ or } \cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$$

$$\text{D'où } \cos^3 x = \cos x \left(\frac{1 + \cos(2x)}{2} \right) = \frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{2} \cos x \cos 2x$$

$$\text{Or } \cos x \cos 2x = \frac{1}{2} (\cos(x+2x) + \cos(x-2x)) = \frac{1}{2} (\cos(3x) + \cos(-x)) = \frac{1}{2} (\cos(3x) + \cos x)$$

$$\cos^3 x = \frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} (\cos(3x) + \cos x) \right] = \frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{4} (\cos(3x) + \cos x) = \frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{4} \cos(3x) + \frac{1}{4} \cos x$$

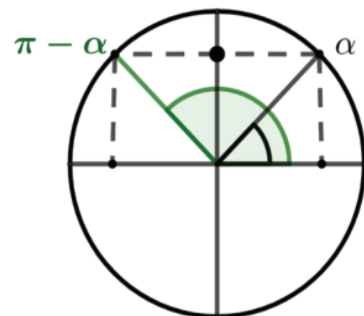
III. Equations et inéquations trigonométriques

1. Equation type $\sin x = a$, avec $a \in \mathbb{R}$:

On distingue les cas suivants :

- Si $a \notin]-1; 1[$ l'équation n'admet pas de solution car pour tout $x \in \mathbb{R}$; $-1 \leq \sin x \leq 1$
- Si $a \in]-1; 1[$ alors il existe un nombre réel α tel que :
 $\sin x = \sin a$.on a donc :

$$\sin x = \sin a \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \pi - \alpha + 2k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$



Exemple 23

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :

$$1) \sqrt{3} \sin x = \frac{3}{2} \quad 2) 3 \sin 2x = 0 \quad 3) 5 \sin \left(3x + \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{\frac{75}{4}}$$

Solution : On a :

$$\sqrt{3} \sin x = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \sin x = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$S = \left\{ \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } \frac{2\pi}{3} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$$

2) On a :

$$3 \sin 2x = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = \sin 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi \\ \text{ou} \\ 2x = (2k+1)\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2k\pi}{2} = k\pi \\ \text{ou} \\ x = \frac{(2k+1)\pi}{2} \end{cases} \quad S = \left\{ k\pi \text{ ou } \frac{(2k+1)\pi}{2} / k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$3) \text{ On a : } 5 \sin \left(3x + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{5\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin \left(3x + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin \left(3x + \frac{\pi}{4} \right) = \sin \frac{\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ 3x + \frac{\pi}{4} = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ 3x = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4} + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = \frac{\pi}{12} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ 3x = \frac{5\pi}{12} + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3} \\ \text{ou} \\ x = \frac{5\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3} \end{cases}$$

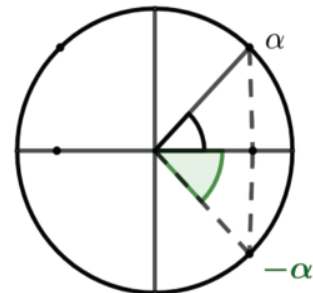
$$S = \left\{ \frac{\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3} \text{ ou } \frac{5\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3} / k \in \mathbb{Z} \right\}$$

2. Equation type $\cos x = a$, avec $a \in \mathbb{R}$:

On distingue les cas suivants :

- Si $a \notin]-1; 1[$ l'équation n'admet pas de solution car pour tout $x \in \mathbb{R}; -1 \leq \cos x \leq 1$
- Si $a \in]-1; 1[$ alors il existe un nombre réel α tel que : $\cos x = \cos a$
on a donc :

$$\cos x = \cos a \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = -\alpha + 2k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$



Exemple 24

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$1) \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad 2) \cos x = \frac{1}{2} \quad 3) \cos x = 3 - \sqrt{2}$$

Réponse :

$$1) \text{ On a : } \cos \frac{5\pi}{6} = \cos \left(\pi - \frac{\pi}{6} \right) = -\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ donc } \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos \frac{5\pi}{6} \\ \Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$2) \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$3) \text{ On a : } 1 < \sqrt{2} < 2 \Leftrightarrow -2 < -\sqrt{2} < -1 \Leftrightarrow 1 < 3 - \sqrt{2} < 2 ; 3 - \sqrt{2} \notin [-1; 1]$$

Donc, l'équation $\cos x = 3 - \sqrt{2}$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$

3. Equation type $\tan x = a$:

La fonction tangente prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$, donc pour tout nombre réel a , il existe un nombre réel α tel que : $\tan \alpha = a$.

$$\tan x = a \Leftrightarrow \tan x = \tan \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Exemple

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :

$$1) \tan x = \sqrt{3} \quad 2) \sqrt{3} \tan x = -1 \quad 3) \tan^2 x - \tan x = 0$$

Solution:

$$1) \text{ On a : } \tan x = \sqrt{3} \Leftrightarrow \tan x = \tan \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$2) \sqrt{3} \tan x = -1 \Leftrightarrow \tan x = \frac{-1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \tan x = \tan \left(\frac{-\pi}{6} \right) \Leftrightarrow x = \frac{-\pi}{6} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

3) On a :

$$\tan^2 x - \tan x = 0 \Leftrightarrow \tan x (\tan x - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = 0 \\ \text{ou} \\ \tan x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = 0 \\ \text{ou} \\ \tan x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = \tan(0) \\ \text{ou} \\ \tan x = \tan \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

4. Equation type $a \cos x + b \sin x = c$:

► Si $a = 0$ ou $b = 0$, on se ramène à une équation du type : $\cos x = k$ ou $\sin x = k'$.

Si $a \neq 0$ et $b \neq 0$, alors $a^2 + b^2 \neq 0$ et on a :

$$a \sin x + b \cos x = c \Leftrightarrow \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x \right) = c$$

$$\text{or } \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 = \frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2} = 1 \text{ d'où, il existe un réel } \alpha \text{ tel que ; } \begin{cases} \cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \text{et} \\ \sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{cases}$$

L'équation devient donc ;

$$\sqrt{a^2 + b^2} (\cos \alpha \cos x + \sin \alpha \sin x) = c \Leftrightarrow \sqrt{a^2 + b^2} \cos(x - \alpha) = c \Leftrightarrow \cos(x - \alpha) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Si $\frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \notin [-1; 1]$ c'est-à-dire $|c| > \sqrt{a^2 + b^2}$ alors l'équation n'admet pas de solution

Si $\frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \in [-1; 1]$ c'est-à-dire $|c| \leq \sqrt{a^2 + b^2}$ alors il existe un réel β tel que $\cos \beta = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

L'équation devient $\cos(x - \alpha) = \cos \beta$. On obtient alors $\begin{cases} x - \alpha = \beta + 2k\pi \\ x - \alpha = -\beta + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + \beta + 2k\pi \\ x = \alpha - \beta + 2k\pi \end{cases}$

Exemple 25

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $\sqrt{3} \cos x + \sin x = 1$ 2) $\cos x + \sin x = \sqrt{3}$

Réponse :

$$\sqrt{3} \cos x + \sin x = 1 \Leftrightarrow 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x \right) = 1 \Leftrightarrow 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} \cos x + \sin \frac{\pi}{6} \sin x \right) = 1 \Leftrightarrow 2 \cos \left(x - \frac{\pi}{6} \right) =$$

$$\cos \left(x - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos \left(x - \frac{\pi}{6} \right) = \cos \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ x - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}$$

$$2) \cos x + \sin x = \sqrt{3} \Leftrightarrow \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos x + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin x \right) = \sqrt{3}$$

$$\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} \cos x + \sin \frac{\pi}{4} \sin x \right) = \sqrt{3} \Leftrightarrow \sqrt{2} \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{3} \Leftrightarrow \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \notin [-1; 1] \text{ d'où, l'équation n'a pas de solution}$$

5. Types $\cos^2 x = a$; $\sin^2 x = a$; $\tan^2 x = a$:

Exemple 26

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes : 1) $\cos^2 x = 1$ 2) $\sin^2(x + \pi) = 3$

Solution :

1) $\cos^2 x = 1 \Leftrightarrow \cos x = -1$ ou $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)

$$2) 4 \sin^2(x + \pi) = 3 \Leftrightarrow \sin^2(x + \pi) = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin(x + \pi) = \frac{\sqrt{3}}{2} & (1) \\ \text{ou} \\ \sin(x + \pi) = -\frac{\sqrt{3}}{2} & (2) \end{cases}$$

$$(1) \rightarrow \sin(x + \pi) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x + \pi = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x + \pi = \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$$

$$(2) \rightarrow \sin(x + \pi) = \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \pi = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x + \pi = \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-2\pi}{3} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$S = \left\{ \frac{\pi}{3} + k\pi \text{ ou } -\frac{\pi}{3} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$$

6. Types $a \cos^2 x + b \cos x + c = 0$, $a \sin^2 x + b \sin x + c = 0$ ($a \neq 0$)

Exemple 27

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $2 \cos^2 x - 5 \cos x + 3 = 0$ 2) $\sin^2(x - 3\pi) + 2 \sin(x - 3\pi) - 4 = 0$

Solution :

1) $2 \cos^2 x - 5 \cos x + 3 = 0$. Procédons à un changement de variable en posant $X = \cos x$,

l'équation devient : $2X^2 - 5X + 3 = 0$; on remarque que : $a + b + c = 2 - 5 + 3 = 0$

l'équation a deux solutions $X = 1$ et $X = \frac{3}{2}$. On a : $\begin{cases} X = \frac{3}{2} \\ \text{ou} \\ X = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{3}{2} \\ \text{ou} \\ \cos x = 1 \end{cases}$

l'équation $\cos x = \frac{3}{2}$ n'a pas de solution car $\frac{3}{2} > 0$ et $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) $S = \{2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$

2) $\sin^2(x - 3\pi) + 2 \sin(x - 3\pi) - 4 = 0$. Posons $X = \sin(x - 3\pi)$, l'équation devient :

$X^2 + 2X - 4 = 0$ et le discriminant est : $\Delta = 4 + 16 = 20$ et $\sqrt{\Delta} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

Les solutions de l'équation : $X = \frac{-2 - 2\sqrt{5}}{2} = -1 - \sqrt{5} \notin [-1; 1]$ ou $X = \frac{-2 + 2\sqrt{5}}{2} = -1 + \sqrt{5} \notin [-1; 1]$

Les deux solutions n'appartiennent pas à $[-1; 1]$ donc $S = \emptyset$

7. Inéquations trigonométriques

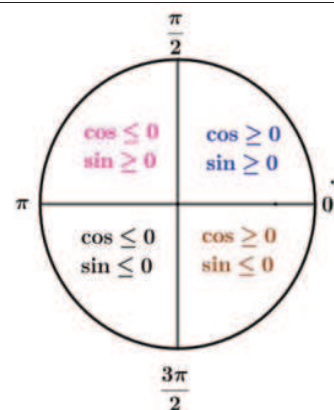
On se limitera aux inéquations simples de type : $\cos x \leq a$ ou $\sin x \leq a$, le signe d'inégalité $\leq$ pouvant être remplacé par $<$, $>$ ou $\geq$

Si $a = 0$: les solutions de l'inéquation sont données par le cercle trigonométrique.

Résoudre l'inéquation : $\cos x \leq 0$

On a :

$$\cos x \leq 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$$



Si $a \neq 0$:

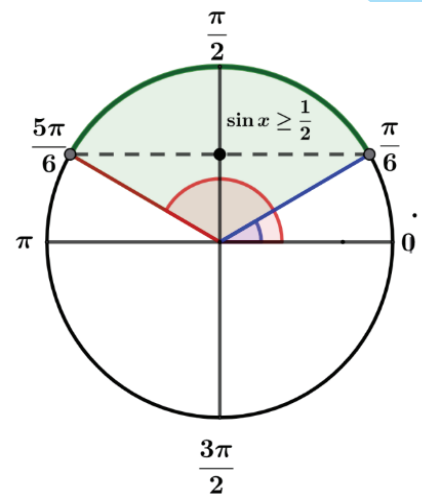
Résoudre l'inéquation : $\sin x \geq \frac{1}{2}$

Pour résoudre cette inéquation, on commence par résoudre l'équation $\sin x = \frac{1}{2}$ puis sur le cercle trigonométrique on pourra déterminer les solutions de l'inéquation

$$\sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

$$S = \left\{ \frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{6} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$$



A. Applications :

Formules d'addition :

Exercice 1.

Calculer $\cos \frac{5\pi}{12}$ et $\sin \frac{5\pi}{12}$ en remarquant que $\frac{5\pi}{12} = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$.

Solution

$$\cos \frac{5\pi}{12} = \cos \left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) = \cos \frac{2\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{2\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} = -\frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} (\sqrt{3} - 1)$$

$$\sin \frac{5\pi}{12} = \sin \left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) = \sin \frac{2\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} - \cos \frac{2\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \left(-\frac{1}{2} \right) \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} (\sqrt{3} + 1)$$

Exercice 2. 1) Démontrer que ; $2 \sin a \cos b = \sin(a+b) + \sin(a-b)$, tels que a et b des réels quelconques.

2) En déduire que : $A = 2 \sin \frac{\pi}{7} \left(\cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} + \cos \frac{5\pi}{7} \right) = \sin \frac{6\pi}{7}$.

Solution

1) D'après les formules d'addition on a :

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a; \text{ et } \sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a.$$

En additionnant ces deux égalités, on obtient : $\sin(a+b) + \sin(a-b) = 2 \sin a \cos b$

2) On pose : $A = 2 \sin \frac{\pi}{7} \left(\cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} + \cos \frac{5\pi}{7} \right)$.

$A = 2 \sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{\pi}{7} + 2 \sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{3\pi}{7} + 2 \sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{5\pi}{7}$, En appliquant le résultat précédent, on obtient :

$$A = \sin \frac{2\pi}{7} + \sin \frac{4\pi}{7} - \sin \frac{2\pi}{7} + \sin \frac{6\pi}{7} - \sin \frac{4\pi}{7} = \sin \frac{6\pi}{7}.$$

Formules de duplication et linéarisation :

Exercice 3.

En utilisant les formules de linéarisation, calculer $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.

Solution

- $\cos^2 \frac{\pi}{12} = \frac{1 + \cos \frac{\pi}{6}}{2} = \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{8} = \frac{(\sqrt{3} + 1)^2}{8}$
- $\sin^2 \frac{\pi}{12} = \frac{1 - \cos \frac{\pi}{6}}{2} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{8} = \frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{8}$
- $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$ sont des nombres réels positifs. Donc : $\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}}$ et $\sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}$.

Résolution des équations trigonométriques :

Exercice 4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) :

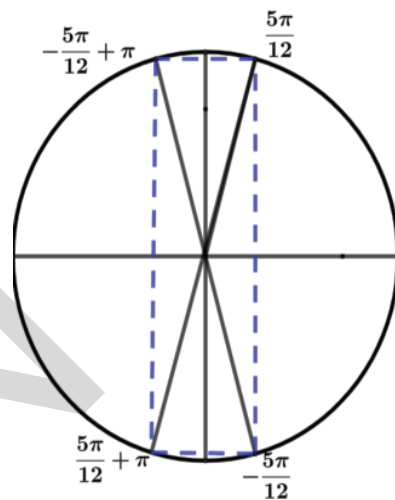
$$\cos 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Réponse :

$$(E) : \cos 2x = \cos \frac{5\pi}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \\ 2x = -\frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}) \quad \text{Les}$$

solutions de l'équation (E) sont les nombres réels x de la forme : $x = \frac{5\pi}{12} + k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$ ou $x = -\frac{5\pi}{12} + k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$.

Les images des solutions sont les sommets d'un rectangle inscrit dans le cercle trigonométrique.



Exercice 5. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) :

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}.$$

Réponse :

On a : $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$ l'équation (E) s'écrit :

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x - \frac{\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Les solutions de l'équation (E) sont les nombres réels x de la forme : $x = \frac{5\pi}{12} + 2k\pi$ ou $x = \frac{13\pi}{12} + 2k\pi$

Exercice 6.

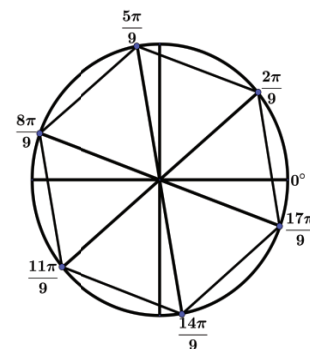
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $\tan 3x = -\sqrt{3}$

Réponse :

$$\tan 3x = \tan \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow 3x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Les solutions de l'équation (E) sont les nombres réels x de la forme : $x = \frac{2\pi}{9} + k\frac{\pi}{3}$; $k \in \mathbb{Z}$

Les images des solutions sont les sommets d'un hexagone régulier inscrit dans le cercle trigonométrique.



Exercice 7.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :

a) $\frac{1}{2} \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\sqrt{2}(\cos x + \sin x) = -1$

Réponse :

a) On remarque que $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ et $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Donc :

$$\frac{1}{2} \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) \cos x + \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(-\frac{\pi}{3} - x\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{3} + x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ \frac{\pi}{3} + x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{12} + 2k\pi \\ x = -\frac{7\pi}{12} + 2k\pi \end{cases}$$

b) En divisant les deux membres de l'équation $\sqrt{2}(\cos x + \sin x) = -1$ par $\sqrt{2}$, on obtient :

$$\cos x + \sin x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ qui est de la forme : } a \cos x + b \sin x = c.$$

On a donc :

$$\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos x + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin x\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{4} \cos x + \sin \frac{\pi}{4} \sin x\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \cos \frac{2\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{4} - x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \\ \frac{\pi}{4} - x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{5\pi}{12} + 2k\pi \\ x = \frac{11\pi}{12} + 2k\pi \end{cases}$$

Les solutions de l'équation sont les réels x tels que : $x = -\frac{5\pi}{12} + 2k\pi$ ou $x = \frac{11\pi}{12} + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)

B. EXERCICES DIVERS

- 1.** Calculer le sinus, le cosinus et la tangente de chacun des nombres réels suivants :

$$\frac{-5\pi}{2} ; -\frac{121\pi}{6} ; -\frac{1999\pi}{6} ; \frac{29\pi}{4}.$$

- 2.** Démontrer que, pour tout nombre réel α , on a :

a) $\cos(\alpha) + \cos\left(\alpha + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(\alpha + \frac{4\pi}{3}\right) = 0$

b) $-\sin(\alpha) + \sin\left(\alpha + \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(\alpha + \frac{4\pi}{3}\right) = 0$

- 3.** Calculer en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$ les expressions suivantes :

$$A = \cos(\pi + x) + \cos(\pi - x) + \cos(-x);$$

$$B = \sin(\pi + x) + \sin(\pi - x) + \sin(-x)$$

$$C = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)$$

$$D = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + 2\sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) + \sin\left(x + \frac{5\pi}{2}\right).$$

- 4.** Démontrer que pour tout nombre réel x

$$\sin x = \sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$$

$$\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$$

- 5.** En remarquant que: $\frac{\pi}{4} = 2 \times \frac{\pi}{8}$, démontrer que :

$$\cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \text{ et } \sin \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.$$

En remarquant que : $\frac{3\pi}{8} = \frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{8}$, calculer

$$\cos \frac{3\pi}{8} \text{ et } \sin \frac{3\pi}{8}.$$

- 6.** 1) Ecrire $\cos 3x$ en fonction de $\cos x$ et $\sin 3x$ en fonction de $\sin x$.

3) En déduire que :

$$\tan 3x = \tan x \frac{3 - \tan^2 x}{1 - 3 \tan^2 x}.$$

- 7.** 1) Calculer :

$$A = \cos \frac{\pi}{12} \cos \frac{5\pi}{12} + \sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{5\pi}{12};$$

$$B = \cos \frac{\pi}{12} \cos \frac{5\pi}{12} - \sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{5\pi}{12}.$$

2) En déduire que :

$$\sin \frac{\pi}{12} \sin \frac{5\pi}{12} = \cos \frac{\pi}{12} \cos \frac{5\pi}{12} = \frac{1}{4}$$

- 8.** En remarquant que l'on a : $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$,

Calculer $\cos \cos \frac{\pi}{12}$, $\sin \frac{\pi}{12}$ et $\tan \frac{\pi}{12}$.

- 9.** Démontrer que, pour tous réels a , b et c , on a :

1) $\sin a \sin(b-c) + \sin b \sin(c-a) + \sin c \sin(a-b)$

2) $\cos a \sin(b-c) + \cos b \sin(c-a) + \cos c \sin(a-b)$

- 10.** Démontrer que :

$$16 \sin \frac{\pi}{9} \sin \frac{2\pi}{9} \sin \frac{3\pi}{9} \sin \frac{4\pi}{9} = 3$$

$$16 \cos \frac{\pi}{9} \cos \frac{2\pi}{9} \cos \frac{3\pi}{9} \cos \frac{4\pi}{9} = 1$$

- 11.** Résoudre les équations suivantes et représenter les images de leurs solutions sur le cercle trigonométrique.

a) $\sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{3} - x\right)$

b) $\sin(3x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$

c) $\sin\left(-x + \frac{3\pi}{2}\right) + \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$

- 12.** 1) Quels sont les réels x de $[0; 2\pi[$.

$$\text{vérifiant : } \cos x = \frac{1}{2}$$

- 1) Même question pour x de $[-\pi; \pi[$.

1) Quels sont les réels x de $[0; 2\pi[$

vérifiant $\sin x = -\frac{1}{2}$

13. | $16 \cos \frac{\pi}{9} \cos \frac{2\pi}{9} \cos \frac{3\pi}{9} \cos \frac{4\pi}{24} = 1$

2) Même question pour $x \in]-\pi; \pi]$.

14. | Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes et représenter les images de leurs solutions sur le cercle trigonométrique.

1) $3 \cos x - \sqrt{3} \sin x + \sqrt{6} = 0$

2) $\cos 2x + \sin 2x = -1$

3) $4 \sin^2 x - 3 = 0$

4) $2 \cos^2 x + \sqrt{3} \cos x - 3 = 0$

15. | Dans chacun des cas suivants, représenter les réels x qui satisfont les conditions proposées.

1) $\sin x \geq 0$ 2) $\cos x \geq 0$ 3) $\sin x \leq \frac{1}{2}$

4) $\cos x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ 5) $\begin{cases} \sin x \geq \frac{1}{2} \\ \sin x \leq 0 \end{cases}$

16. | Résoudre dans D les équations suivantes :

1) $\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \tan\left(2x + \frac{\pi}{8}\right) = 0$ $D = \mathbb{R}$

2) $3 \tan^2 x - 1 = 0$ $D = [-\pi; \pi[$

3) $\tan^2 x + (1 + \sqrt{3}) \tan x + \sqrt{3} = 0$ $D = [0; 2\pi[$

17. | 1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :
 $\cos 2x + \sqrt{3} \sin 2x = -1$

2) Représenter ces solutions sur le cercle trigonométrique.

3) Donner les solutions appartenant à l'intervalle $\left] \frac{3\pi}{2}; 2\pi \right[$

18. | Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$\tan 2x + \tan\left(x - \frac{3\pi}{4}\right) = 0$$

19. | Résoudre dans $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ l'inéquation

$$\sin 3x - \cos 2x - \sin x + 1 > 0$$

20. |

1) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$;

$$\cos 5x = \cos x (16 \cos^4 x - 20 \cos^2 x + 5) \text{ et}$$

$$1 - \cos 5x = (1 - \cos x)(4 \cos^2 x + 2 \cos x - 1)^2$$

2) En déduire que $\cos \frac{2\pi}{5}$ est une solution de

l'équation : $4x^2 + 2x - 1 = 0$ puis calculer

$$\cos \frac{2\pi}{5}; \cos \frac{\pi}{5}; \cos \frac{\pi}{30}$$

I. Langage des ensembles :

1. Ensemble et sous-ensemble

a. Vocabulaire:

Définition 1

Un **ensemble** est un groupe d'objets ou d'éléments bien définis et deux-à-deux distincts.

Un sous-ensemble A d'un ensemble Ω est une partie des éléments de Ω .

Remarque 1.

- $x \in \Omega$ signifie que x appartient à Ω , dans le cas contraire, on écrit $x \notin \Omega$
- A est un sous-ensemble de Ω , c'est-à-dire que tout élément de A appartient aussi à Ω . On note $A \subset \Omega$ qui se lit « A est inclus dans Ω ».

La représentation de la figure ci-contre est appelée **diagramme de Venn**

$E = \{b, d\}$, $F = \{a, b, c, d\}$ deux ensembles. $E \subset F$

L'ensemble des entiers naturels est noté $\mathbb{N}$. $2 \in \mathbb{N}$, $-4 \notin \mathbb{N}$



b. Complémentaire d'un ensemble

Définition 2

A est un sous-ensemble d'un ensemble Ω

Le **complémentaire** de A dans Ω , noté $\bar{A}$, est le sous-ensemble de Ω dont les éléments n'appartiennent pas à A .

$\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ et $A = \{2, 3, 5\}$

On a : $\bar{A} = \{0, 1, 4\}$

Cardinal d'un ensemble fini :

Définition 3

Un ensemble est **fini** lorsqu'il admet un nombre fini d'éléments.

Soit E un ensemble fini, on appelle **cardinal** de E , le nombre de ses éléments. On le note : $\text{card}(E)$

- Si E est vide, son cardinal est l'entier 0 on note : $\text{card}(\emptyset) = 0$ $E = \{\triangle, \square, \square, \bigcirc\}$ est un ensemble fini $\text{card}(E) = 4$
- $\Omega = \{a_0; a_1; a_2; a_3; a_4; \dots; a_n\}$ et $\text{card}(\Omega) = n+1$
- L'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$, l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$, l'intervalle $[0; 1]$ sont des ensembles **infinis** (ne sont pas finis)
- Un ensemble ayant un seul élément est appelé **singleton**
- Un ensemble ayant deux éléments est appelé **paire**

Propriété 1.

Si A et Ω sont deux ensembles finis tels que $A \subset \Omega$, le complémentaire de A par rapport à Ω alors

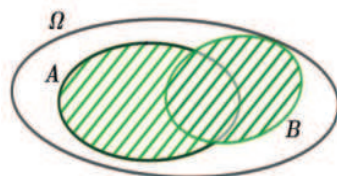
$$\text{card}(\bar{A}) = \text{card}(\Omega) - \text{card}(A)$$

2. Réunion d'ensembles finis

Définition 4

L'**union** des deux ensembles A et B , notée $A \cup B$, est l'ensemble des éléments appartenant à A **OU** à B .

$A \cup B$ se lit « A union B »



Remarque

Le « OU » est dit inclusif, c'est-à-dire que les éléments appartiennent soit à A mais pas à B , soit à B mais pas à A , soit aux deux ensembles.

$A = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$ et $B = \{0, 3, 6, 9\}$ On a : $A \cup B = \{0, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 10\}$

3. Intersection d'ensembles finis

Définition 5

L'**intersection** des deux ensembles A et B , notée $A \cap B$, est l'ensemble des éléments appartenant à A **ET** à B .

$A \cap B$ se lit « A inter B ».

Exemple 1 Lorsque $A \cap B = \emptyset$, on dit les ensembles A et B sont disjoints.

$A = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$ et $B = \{0, 3, 6, 9\}$

On a : $A \cap B = \{0, 6\}$

4. Propriétés

- 1) Soit A et B deux ensembles on a : $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$.
- 2) Si $A \cap B = \emptyset$ alors $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B)$
- 3) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ et $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ (Formule de Morgan)

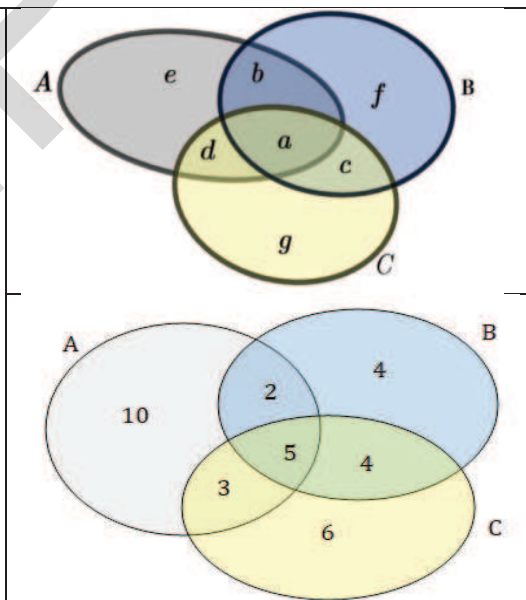
Exemple 3 :

On a effectué une enquête auprès des lecteurs de trois revues A , B et C . Chacun des lecteurs lit au moins une revue. 5 personnes lisent les trois revues, 7 lisent A et B , 8 lisent A et C , 9 lisent B et C . Au total 20 lisent A , 15 lisent B et 18 lisent C . Quel est l'effectif des lecteurs ?

Réponse :

- 5 personnes lisent les 3 revues donc $a = 5$
- 7 personnes lisent revue A et revue B , donc $a + b = 7$, et par suite $b = 2$.
- 8 personnes lisent revue A et revue C , donc $a + d = 8$, et par suite $d = 3$
- 9 personnes lisent revue B et C : $a + c = 9$, et par suite $c = 4$.
- Globalement, 20 personnes lisent revue A , donc $a + b + d + e = 20$, et par suite : $e = 10$.
- De même 15 personnes lisent revue B donc $a + c + b + f = 15$, $f = 4$
- De même, 18 personnes lisent revue C , donc $a + c + d + g = 18$ d'où $g = 6$

Par simple comptage, on obtient l'effectif du club qui est de 34 lecteurs.



5. Le produit cartésien

Définition 6

On appelle **produit cartésien** de E_1 et E_2 , noté $E_1 \times E_2$ l'ensemble des couples dont le premier élément est un élément de E_1 et le second un élément de E_2

Notation : Le produit cartésien de E par lui-même est noté E^2 et plus généralement : $\underbrace{E \times E \times \dots \times E}_{n \text{ fois}} = E^n$

$E_1 = \{0, 1\}$ et $E_2 = \{a, b, c\}$ on a : $E_1 \times E_2 = \{(0, a), (0, b), (0, c), (1, a), (1, b), (1, c)\}$

et $E_2 \times E_1 = \{(a, 0), (b, 0), (c, 0), (a, 1), (b, 1), (c, 1)\}$

Le produit cartésien de deux ensembles finis E_1 et E_2 est fini et tel que : $\text{card}(E_1 \times E_2) = \text{card}E_1 \times \text{card}E_2$

Cette formule se généralise par récurrence ; le produit cartésien de n ensembles finis $E_1, E_2, \dots, E_n$ est fini et

tel que : $\text{card}(E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n) = \text{card}E_1 \times \text{card}E_2 \times \dots \times \text{card}E_n$

6. Les p-listes

Définition 7

Soit E un ensemble et p un entier naturel non nul .

On appelle **p-liste (ou p-uplet)** de E , un élément de E^p

Propriété 2. .

Si E un ensemble fini et $\text{card}E = n$ alors $\text{card}E^p = n^p$

Le nombre de p-uplets de E est n^p

Soit $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5\}$ un ensemble $(1; 1; 2; 3)$ est une 4-liste dans Ω et $(1; 2; 3; 2; 1; 3)$

est une 6-liste dans Ω $(1; 2; 1; 2; 3; 3; 3)$ est une 8-liste dans Ω

Tirages successifs avec remise :

Une urne contient quatre boules numérotées de 1 à 4, on tire successivement 5 boules en remettant chaque fois dans l'urne, la boule qu'on vient de tirer .

La suite des numéros obtenus par exemple $(1, 2, 4, 2, 4)$ est une 5-liste.

Le nombre de tirages possibles est : $4^5 = 1024$

7. Les p-arrangements et permutations

a. Factorielle

Définition 8

Soit n un entier naturel. On appelle **factorielle** de n noté $n!$, le produit des entiers consécutifs non inférieurs à n .

$$n! = n \times (n-1) \times \dots \times 2 \times 1$$

On pose par convention : $0! = 1$ et $1! = 1$

Exemple 2 $7! = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5040$, $4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$, $3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$; $2! = 1 \times 2 = 2$; $5! = 5 \times 4! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$; $4 \times 3! = 4!$

8. Les p-arrangements

Définition 9

Soit E un ensemble fini et $\text{card}E = n$ et p un entier tel que $p \leq n$

Un p-arrangement de E est un p-uplet d'éléments distincts de E .

Remarque 2.

Dans un arrangement, l'ordre des éléments compte et les éléments ne se répètent pas .

Soit $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5\}$ $(1; 2; 3)$ est un 3-arrangement dans Ω

$(1; 2; 5; 4; 3)$ est un 5-arrangement dans Ω

Un 6-arrangement dans Ω n'existe pas.

Propriété 3.

Soit E un ensemble fini et $\text{card}E = n$

Le nombre de p -arrangements de E est noté A_n^p et égal à : $A_n^p = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times (n-p+1)$ et

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Exemple 3

$$A_4^2 = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4!}{2!} = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2!} = 4 \times 3 = 12 \quad A_7^3 = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7!}{4!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4!}{4!} = 7 \times 6 \times 5 = 210$$

Exemple 4

Une urne contient 7 jetons numérotés de 1 à 7. On tire successivement et sans remise 3 jetons de cette urne. Calculer le nombre de tirages possibles

Solution :

Le nombre de tirages possibles est :

$$A_7^3 = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7!}{4!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 7 \times 6 \times 5 = 210$$

Exemple 5

Dans une salle il y a 10 chaises, 10 personnes entrent dans cette salle pour s'y installer. Calculer le nombre de dispositions possibles.

Solution :

Le nombre de dispositions possibles est : $A_{10}^{10} = 10! = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times \dots \times 2 \times 1 = 3628800$

Propriété 4.

a) $A_n^1 = \frac{n!}{(n-1)!} = \frac{n(n-1)!}{(n-1)!} = n ; A_n^1 = n$	c) $A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n! ; A_n^n = n!$
b) $A_n^0 = \frac{n!}{(n-0)!} = \frac{n!}{n!} = 1 ; A_n^0 = 1$	d) $A_n^{n-1} = \frac{n!}{(n-(n-1))!} = \frac{n!}{1!} = \frac{n!}{1} = n! ; A_n^{n-1} = n!$

9. Permutations

Définition 10

Soit E un ensemble fini et $\text{card}E = n$

Une permutation de E est un n -arrangement de E .

Propriété 5.

Soit E un ensemble fini et $\text{card}E = n$

Le nombre de permutations de E est : $n!$.

Exemple 6

Avec combien de façons peut-on garer 5 voitures numérotées de 1 à 5 dans 5 garages numérotés de A à E ?

Le nombre de façons est égal au nombre de permutations ; $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$.

Exemple 7

Dans un jeu de 32 cartes, on tire successivement sans remise 4 cartes. Calculer le nombre de cas donnant :

a) Les cartes de la même couleur,

- b) Les cartes contiennent un seul roi,
c) Les cartes de même niveau,

Solution :

a) Les cartes sont de la même couleur :

$$A_{16}^4 + A_{16}^4 = \frac{16!}{(16-4)!} + \frac{16!}{(16-4)!} = 2 \times \frac{16!}{12!} = 2 \times \frac{16 \times 15 \times 14 \times 13 \times 12!}{12!} = 2 \times 16 \times 15 \times 14 \times 13 = 87360$$

b) Les cartes contiennent un seul roi :

$$A_4^1 \times A_{28}^3 = \frac{4!}{(4-1)!} \times \frac{28!}{(28-3)!} = \frac{4!}{3!} \times \frac{28!}{25!} = 4 \times 28 \times 27 \times 26 = 78624$$

$$c) \text{ Les cartes de même niveau : } 8A_4^4 = 8 \times \frac{4!}{(4-4)!} = 8 \times \frac{4!}{0!} = 8 \times \frac{4!}{1} = 8 \times 4 \times 3 \times 2 = 192$$

10. Combinaisons

Définition

Soit E un ensemble fini ; $\text{card}E = n$ et p un entier naturel avec $p \leq n$

Une p -combinaison est un sous-ensemble de E à p éléments.

Exemple 8 C_n^p se lit : « p parmi n » et la notation $\binom{n}{p}$ désigne aussi C_n^p .

Soit $E = \{0;1;2;3\}$. Le nombre de 3-combinaisons de E est $C_4^3 = 4$: $\{0;1;2\}$, $\{0;1;3\}$, $\{0;2;3\}$ et $\{1;2;3\}$

Remarque 3.

Les combinaisons sont mises entre accolades, car ce sont des sous-ensembles de E

Propriété 6.

Soit E un ensemble fini et $\text{card}E = n$

Le nombre de p -combinaisons de E est noté C_n^p et égal à : $C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ et $C_n^p = \frac{A_n^p}{p!}$

Exemple 9

$$C_5^2 = \frac{5!}{(5-2)!2!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{3!2!} = 5 \times 2 = 10$$

Propriété 7.

$$a) C_n^0 = 1 \quad b) C_n^n = 1 \quad c) C_n^1 = n \quad d) C_n^{n-p} = C_n^p \quad e) C_n^p + C_n^{p+1} = C_{n+1}^{p+1}$$

Remarque 4.

Soit Ω un ensemble fini ayant n éléments

- $C_n^0 = 1$: Il y a une seule partie de Ω ayant 0 élément c'est l'ensemble vide $\emptyset$
- $C_n^n = 1$: Il y a une seule partie ayant n élément c'est Ω (la partie pleine)
- $C_n^1 = n$: Il y a n parties ayant chacune 1 élément (les singletons de Ω).
- $C_n^{n-p} = C_n^p$: A toute partie de Ω ayant p éléments correspond une seule partie de Ω ayant $n-p$ éléments et réciproquement (ce sont des parties complémentaires dans Ω). Ce qui signifie que le nombre de parties à p éléments est le même que le nombre de parties à $(n-p)$ éléments.

La dernière formule $C_n^p + C_n^{p+1} = C_{n+1}^{p+1}$ permet de calculer les nombres C_n^p de proche en proche en formant le **triangle de PASCAL**.

On a C_0^0 Pour tout entier n non nul, $C_n^n = 1$. On obtient ainsi 1 de la 1^{re} colonne, pour $p=0$, et les 1 de la diagonale, pour $p=n$ on obtient un autre nombre du tableau en additionnant le nombre juste au-dessus et le nombre situé à gauche sur la ligne précédente. En pratique, le triangle de Pascal se présente comme suit :

$n \downarrow p \rightarrow$	0	1	2	3	4	5	6
0	C_0^0						
1	C_1^0	C_1^1					
2	C_2^0	C_2^1	C_2^2				
3	C_3^0	C_3^1	C_3^2	C_3^3			
4	C_4^0	C_4^1	C_4^2	C_4^3	C_4^4		
5	C_5^0	C_5^1	C_5^2	C_5^3	C_5^4	C_5^5	
6	C_6^0	C_6^1	C_6^2	C_6^3	C_6^4	C_6^5	C_6^6

1							
1	1						
1	2	1					
1	3	3	1				
1	4	6	4	1			
1	5	10	10	5	1		
1	6	15	20	15	6	1	

II. Modèle du tirage de boules dans une urne

Tirage des boules dans une urne peut être pris comme un modèle pour résoudre des problèmes récurrents de dénombrement.

E ensemble de cardinal n (nombre des boules numérotées).

p un entier naturel ($p \leq n$) (nombre des boules tirées de l'urne)

Modélisation	Les p éléments sont ordonnés	Les p éléments sont distincts	Outil	Nombre de tirages possibles
Tirages successifs avec remise	oui	non	p-liste de E	n^p
Tirages successifs sans remise	oui	oui	p-arrangement de E	A_n^p
Tirage simultané	non	oui	p-combinaison de E	C_n^p

Exemple 10

Une urne contient quatre boules vertes numérotées de 1 à 4, trois boules rouges numérotées de 1 à 3 et deux boules jaunes numérotées 1 à 2. On tire simultanément trois boules de cette urne.

1°/ Calculer le nombre de tirages possibles.

2°/ Calculer le nombre de tirages dans chacun des cas suivants :

- Les trois boules tirées sont vertes.
- Le tirage est unicolore.
- Le tirage est tricolore.
- Le tirage est bicolore.
- Le tirage comporte exactement deux boules rouges.
- Le tirage ne comporte aucune boule jaune.
- Le tirage comporte au moins une boule jaune.
- Les numéros des boules sont identiques.

Réponse :

1°/ Le nombre de tirages possible est : $C_9^3 = \frac{9!}{6!3!} = 84$

2°/a) Le nombre de tirages où les trois boules tirées sont vertes : $C_4^3 = \frac{4!}{1!3!} = 4$

b) Le nombre de tirages où les trois boules sont unicolores : $C_4^3 + C_3^3 = 4 + 1 = 5$

c) Le nombre de tirages où les trois boules sont tricolores : $C_4^1 \times C_3^1 \times C_2^1 = 4 \times 3 \times 2 = 24$

d) Le nombre de tirages où les trois boules sont bicolores :

$$C_4^2 \times C_3^1 + C_4^1 \times C_2^2 + C_3^2 \times C_2^1 + C_3^1 \times C_4^2 + C_2^2 \times C_4^1 + C_2^1 \times C_3^2 \\ = \frac{4!}{2!2!} \times 3 + \frac{4!}{2!2!} \times 2 + 3 \times 2 + 3 \times 4 + 1 \times 4 + 1 \times 3 = 18 + 12 + 6 + 12 + 4 + 3 = 55$$

e) Le nombre de tirages comportant exactement deux boules rouges : $C_3^2 \times C_6^1 = 3 \times 6 = 18$

f) Le nombre de tirages ne comportant aucune boule jaune : $C_7^3 = \frac{7!}{4!3!} = 35$

g) Le tirage comporte au moins une boule jaune. $C_2^1 \times C_7^2 + C_2^2 \times C_7^1 = 2 \times \frac{7!}{2!5!} + 7 = 49$

Une autre méthode :

« au moins une boule jaune » est le complémentaire de « aucune boule jaune » $84 - 35 = 49$

h) Le nombre de tirages où les numéros des boules sont identiques : $C_3^3 + C_3^3 = 1 + 1 = 2$

III. Formule du binôme

Théorème

Soient a et b deux réels et n un entier naturel non nul.

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + b^n$$

Exemple 11 Développer les binômes suivants : $(a+b)^2$, $(a+b)^3$, $(a+b)^4$, $(a+b)^5$, $(a+b)^6$, $(a-b)^4$

Solution :

$$(a+b)^2 = C_2^0 a^2 b^0 + C_2^1 a^1 b^1 + C_2^2 a^0 b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = C_3^0 a^3 b^0 + C_3^1 a^2 b^1 + C_3^2 a^1 b^2 + C_3^3 a^0 b^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a+b)^4 = C_4^0 a^4 b^0 + C_4^1 a^3 b^1 + C_4^2 a^2 b^2 + C_4^3 a^1 b^3 + C_4^4 a^0 b^4 = a^4 + 4a^3 b + 6a^2 b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$(a+b)^5 = C_5^0 a^5 b^0 + C_5^1 a^4 b^1 + C_5^2 a^3 b^2 + C_5^3 a^2 b^3 + C_5^4 a^1 b^4 + C_5^5 a^0 b^5 = a^5 + 5a^4 b + 10a^3 b^2 + 10a^2 b^3 + 5ab^4 + b^5$$

$$(a+b)^6 = C_6^0 a^6 b^0 + C_6^1 a^5 b^1 + C_6^2 a^4 b^2 + C_6^3 a^3 b^3 + C_6^4 a^2 b^4 + C_6^5 a^1 b^5 + C_6^6 a^0 b^6 \\ = a^6 + 6a^5 b + 15a^4 b^2 + 20a^3 b^3 + 15a^2 b^4 + 6ab^5 + b^6$$

$$(a-b)^4 = C_4^0 a^4 b^0 - C_4^1 a^3 b^1 + C_4^2 a^2 b^2 - C_4^3 a^1 b^3 + C_4^4 a^0 b^4 = a^4 - 4a^3 b + 6a^2 b^2 - 4ab^3 + b^4$$

A. Applications

Listes :

Exercice 1.

L'allumage d'une grande salle de jeux, est assuré par 10 ampoules commandées chacune par un interrupteur. Combien y-t-il de manières différentes d'éclairer cette salle ?

Réponse :

- On note 1 pour : une ampoule est allumée ; 0 pour : une ampoule est éteinte
- On pose : $\Omega = \{0 ; 1\}$.
- Chaque manière d'éclairer la salle est une 10-liste dans Ω différentes de la 10-liste (0 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0), qui correspond à la salle non éclairée.
- Donc, le nombre de manières d'éclairer la salle est : $2^{10} - 1 = 1024 - 1 = 1023$

Exercice 2.

Combien de façons différentes a-t-on pour ranger 3 livres dans 5 casiers de couleurs différentes ne pouvant contenir chacun qu'un seul livre?

Réponse :

- On note $C_1 ; C_2 ; C_3 ; C_4 ; C_5$; les cinq casiers.
- On pose : $\Omega = \{C_1 ; C_2 ; C_3 ; C_4 ; C_5\}$.
- Chaque façon de ranger les 3 livres est un 3-arrangement dans Ω , alors, le nombre de façons différentes de ranger les livres est :

$$A_5^3 = \frac{5!}{2!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2!} = 60.$$

Tirages :

Exercice 3.

Une classe de 29 élèves procède à un tirage au sort pour désigner une commission de trois membres de cette classe.

1°/ Calculer le nombre de commissions possibles dans chacun des deux cas suivants :

- a) La commission est composée d'un coordinateur, d'un responsable sportif et d'un responsable culturel.
- b) La commission est composée de trois élèves sans tâche particulière.

2°/ Calculer dans le deuxième cas, le nombre de commissions qui comportent exactement deux garçons sachant qu'il y a exactement 7 filles dans cette classe.

Solution :

1°/ a) Dans le premier cas, le nombre de commissions possible est :

$$A_{29}^3 = \frac{29!}{(29-3)!} = \frac{29!}{26!} = \frac{29 \times 28 \times 27 \times 26!}{26!} = 29 \times 28 \times 27 = 21924$$

b) Dans le deuxième cas, le nombre de commissions est le nombre de combinaisons possibles :

$$C_{29}^3 = \frac{29!}{(29-3)!3!} = \frac{29 \times 28 \times 27 \times 26!}{26!3!} = 29 \times 14 \times 9 = 3654$$

2°/ Dans le second cas, le nombre de commissions qui comportent exactement 2 garçons est :

$$C_{22}^2 \times C_7^1 = \frac{22!}{(22-2)!2!} \times 7 = \frac{22 \times 21 \times 20!}{20!2!} \times 7 = 11 \times 21 \times 7 = 1617$$

Exercice 4.

Une caisse contient 7 boules indiscernables au toucher.

- 1) On tire au hasard successivement avec remise 3 boules de la caisse. Quel est le nombre de tirages possibles ?
- 2) On tire maintenant successivement sans remise 3 boules de la caisse. Quel est le nombre de tirages possibles ?
- 3) On tire maintenant simultanément 3 boules de la caisse. Quel est le nombre de tirages possibles ?

Réponse :

- On note : $b_1 ; b_2 ; b_3 ; b_4 ; b_5 ; b_6 ; b_7$ les 7 boules.

- On pose : $\Omega = \{b_1 ; b_2 ; b_3 ; b_4 ; b_5 ; b_6 ; b_7\}$.

1) Chaque tirage successif avec remise de 3 boules est une 3-liste dans Ω .
Donc ; le nombre de tirages possibles est :

$$7^3 = 7 \times 7 \times 7 = 343.$$

2) Chaque tirage successif sans remise de 3 boules est un 3-arrangement dans Ω .

$$\text{Donc ; le nombre de tirages possibles est : } A_7^3 = \frac{7!}{4!} = 7 \times 6 \times 5 = 210.$$

3) Chaque tirage simultané de 3 boules est une combinaison de 3 éléments de Ω .

$$\text{Donc ; le nombre de tirages possibles est : } C_7^3 = \frac{7!}{3!4!} = \frac{7!}{3!4!} = \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} = 35.$$

Nombre de parties d'un ensemble fini :

Exercice 5.

1) a) Montrer que pour tout n , entier naturel : $(k+1)! - k! = k \cdot k!$

b) Calculer la somme : $S = 1 \times 1! + 2 \times 2! + 3 \times 3! + \dots + 2019 \times 2019!$

2) a) Montrer que pour tout, entier naturel n : $\sum_{k=0}^n C_n^k = 2^n$

b) Quel est le nombre de parties d'un ensemble Ω ayant n éléments ?

Réponse :

1) a) On a : $(k+1)! = (k+1)k!$ pour tout entier k Donc ; $(k+1)! - k! = (k+1)k! - k! = (k+1-1)k! = k \cdot k!$

d'où pour tout entier naturel n : $(k+1)! - k! = k \cdot k!$

b) D'après la question 1)

$\begin{cases} 1 \times 1! = 2! - 1! \\ 2 \times 2! = 3! - 2! \\ 3 \times 3! = 4! - 3! \\ \dots = \dots \\ 2019 \times 2019! = 2020! - 2019! \end{cases}$	En additionnant membre à membre, on obtient : $S = (2! - 1!) + (3! - 2!) + (4! - 3!) + \dots + (2020! - 2019!)$ $S = 2020! - 1$
---	--

2) a) Si a et b deux réels et n un entier naturel non nul. On a :

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + b^n$$

En posant $a = b = 1$, on obtient : $a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + b^n = (1+1)^n$. Donc ; $\sum_{k=0}^n C_n^k = 2^n$

b) le nombre de parties de Ω à 0 élément est C_n^0

- Le nombre de parties de Ω à 1 élément est C_n^1

- Le nombre de parties de Ω à 2 éléments est C_n^2

- Le nombre de parties de Ω à n éléments est C_n^n

- Donc le nombre de parties de Ω est : $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = \sum_{k=0}^n C_n^k = 2^n$

Exercice 6.

Une urne contient 12 boules ; 5 rouges, 3 vertes et 4 blanches. On tire simultanément 3 boules de l'urne.

1°/ Déterminer le nombre de cas possibles.

2°/ Déterminer le nombre de cas donnant :

a) Les trois boules tirées sont de même couleur.

b) Les trois boules tirées de couleurs différentes.

c) Les trois boules tirées contiennent au moins une verte.

d) Les trois boules tirées contiennent exactement deux de même couleur.

Solution :

$$1^\circ / \text{Nombre de cas possibles : } C_{12}^3 = \frac{12!}{(12-3)!3!} = 220$$

2°/ a) Nombre de cas donnant les trois boules tirées sont de même couleur :

$$C_5^3 + C_4^3 + C_3^3 = \frac{5!}{(5-3)!3!} + \frac{4!}{(4-3)!3!} + \frac{3!}{(3-3)!3!} = 10 + 4 + 1 = 15$$

b) Nombre de cas donnant les trois boules tirées sont de couleurs différentes :

$$C_5^1 \times C_4^1 \times C_3^1 = \frac{5!}{(5-1)!1!} \times \frac{4!}{(4-1)!1!} \times \frac{3!}{(3-1)!1!} = 5 \times 4 \times 3 = 60$$

c) Nombre de cas donnant les trois boules tirées contiennent au moins une verte :

$$C_3^1 \times C_9^2 + C_3^2 \times C_9^1 + C_3^3 \times C_9^0 = \frac{3!}{(3-1)!1!} \times \frac{9!}{(9-2)!2!} + \frac{3!}{(3-2)!2!} \times \frac{9!}{(9-1)!1!} + \frac{3!}{(3-3)!3!} \times \frac{9!}{(9-0)!0!}$$

$$= 3 \times 36 + 3 \times 9 + 1 \times 1 = 136$$

d) Nombre de cas donnant les trois boules tirées contiennent exactement deux de même couleur :

$$C_5^2 \times C_7^1 + C_4^2 \times C_8^1 + C_3^2 \times C_9^1 = \frac{5!}{(5-2)!2!} \times \frac{7!}{(7-1)!1!} + \frac{4!}{(4-2)!2!} \times \frac{8!}{(8-1)!1!} + \frac{3!}{(3-2)!2!} \times \frac{9!}{(9-1)!1!}$$

$$= 10 \times 7 + 6 \times 8 + 3 \times 9 = 145$$

Exercice 7.

1°/ Montrer que pour tous entiers naturels n et p tels que : $p+2 \leq n$, on a : $C_n^p = C_{n-2}^p + 2C_{n-2}^{p-1} + C_{n-2}^{p-2}$

2°/ Montrer que pour tous entiers naturels n et p tels que : $p \geq 1$, et $p-1 \leq n$, on a : $pC_{n+1}^p = (n+1)C_n^{p-1}$

Solution :

$$1^\circ / C_{n-2}^p + 2C_{n-2}^{p-1} + C_{n-2}^{p-2} = C_{n-2}^p + C_{n-2}^{p-1} + C_{n-2}^{p-1} + C_{n-2}^{p-2} = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1} = C_n^p$$

2°/ On a :

$$pC_{n+1}^p = \frac{p(n+1)!}{(n+1-p)!p!} = \frac{p(n+1)!}{(n+1-p)!p(p-1)!} = \frac{(n+1)!}{(n+1-p)!(p-1)!} = \frac{(n+1)n!}{(n-(p-1))!(p-1)!}$$

$$= (n+1) \frac{n!}{(n-(p-1))!(p-1)!} = (n+1)C_n^{p-1}$$

Exercice 8.

On considère la fonction : $f(x) = (1+x)^n$, ($n \in \mathbb{N}$)

1°/ Calculer $f'(x)$ et en déduire la somme : $\sum_{k=1}^n kC_n^k$

2°/ En s'inspirant de 1°, calculer les sommes : $\sum_{k=1}^n k(k-1)C_n^k$ et $\sum_{k=2}^n k^2C_n^k$

Solution :

1°/ On a : $f(x) = (1+x)^n$ la dérivée de f s'écrit : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = n(1+x)^{n-1}$ (1)

En développant $(1+x)^n$ à l'aide de la formule du binôme on obtient

$$f(x) = C_n^0 + C_n^1x + C_n^2x^2 + \dots + C_n^nx^n = \sum_{k=0}^n C_n^kx^k \text{ et pour tout } x \in \mathbb{R}$$

$$f'(x) = C_n^1 + 2C_n^2x + \dots + nC_n^nx^{n-1} = \sum_{k=1}^n kC_n^kx^{k-1} \quad (2) \quad \text{D'après les égalités (1) et (2)}$$

$$\sum_{k=1}^n k C_n^k x^k = n(1+x)^{n-1} \quad (3) \text{ En remplaçant } x \text{ par } 1 \text{ dans (3) on obtient : } \sum_{k=1}^n k C_n^{k-1} = n.2^{n-1}$$

$$2^\circ / \text{On a : } \begin{cases} f'(x) = n(1+x)^{n-1} \\ f'(x) = C_n^1 + 2C_n^2 x + \dots + nC_n^n x^{n-1} = \sum_{k=1}^n k C_n^k x^{k-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f''(x) = n(n-1)(1+x)^{n-2} \\ f''(x) = 2C_n^2 + 6C_n^3 x + \dots + n(n-1)C_n^n x^{n-2} \\ = \sum_{k=2}^n k(k-1)C_n^k x^{k-2} \end{cases}$$

$$\text{Donc : } \sum_{k=2}^n k(k-1)C_n^k x^{k-2} = n(n-1)(1+x)^{n-2} \quad (4) \text{ remplaçant } x \text{ par } 1 \text{ dans (4) on obtient :}$$

$$\sum_{k=2}^n k(k-1)C_n^k = n(n-1)(1+1)^{n-2} \quad \text{D'où : } \sum_{k=2}^n k(k-1)C_n^k = n(n-1)2^{n-2}$$

$$\text{On a ; } \sum_{k=2}^n k(k-1)C_n^k = n(n-1)2^{n-2} \Leftrightarrow \sum_{k=2}^n k^2 C_n^k - \sum_{k=2}^n k C_n^k = n(n-1).2^{n-2} \Leftrightarrow \sum_{k=2}^n k^2 C_n^k = \sum_{k=2}^n k C_n^k + n(n-1).2^{n-2}$$

$$\sum_{k=2}^n k^2 C_n^k = \underbrace{\sum_{k=2}^n k C_n^k}_{\sum_{k=1}^n k C_n^k} - C_n^1 + n(n-1).2^{n-2} \quad \text{Donc :}$$

$$\sum_{k=2}^n k^2 C_n^k = \sum_{k=1}^n k C_n^k + n(n-1).2^{n-2} \Leftrightarrow \sum_{k=2}^n k^2 C_n^k = n.2^{n-1} + n(n-1).2^{n-2} \Leftrightarrow \sum_{k=2}^n k^2 C_n^k = n.2^{n-1} + n(n-1).2^{n-2}$$

$$\sum_{k=2}^n k^2 C_n^k = n[(2 + (n-1))2^{n-2} - 1] \Leftrightarrow \sum_{k=2}^n k^2 C_n^k = n[(n+1)2^{n-2} - 1]$$

B. EXERCICES DIVERS

1.] Les numéros de téléphones d'un réseau téléphonique sont des nombres entiers de 6 chiffres.

Quelle est la capacité de ce réseau ?

2.] Un livreur doit livrer des colis à 5 personnes (A, B, C, D, E).

Combien y a-t-il de trajets possibles dans chacun des cas suivants :

- a) L'ordre des livraisons est arbitraire ;
- b) il doit livrer (A) en premier ;
- c) il doit livrer A avant B et C .

3.] Dans un jeu de dominos, chaque pièce comporte deux cases portant chacune l'un des symboles : blanc, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Déterminez le nombre de pièces de ce jeu sachant que toutes les pièces possibles y figurent en un seul exemplaire.

4.] Un sondage est réalisé auprès de 100 clients d'un supermarché afin de connaître les goûts de ceux-ci au sujet de trois produits A, B, C . Les 100 clients ayant répondu, les résultats du sondage sont les suivants :

- 20 sont satisfaits des trois produits ; 25 sont satisfaits des produits B et C , 35 des produits A et C , 30 des produits A et B .
- 40 n'apprécient pas le produit B , 45 le produit C et 45 le produit A .

1) Faites un diagramme résumant les résultats de ce sondage.

2) Déterminez le nombre de personnes :

- a) satisfaites de l'un au moins des trois produits ;
- b) satisfaites de deux produits et de deux seulement ;
- c) n'appréciant aucun des trois produits.

5.] Une urne contient quatre boules numérotées de 1 à 4.

On en tire successivement, et sans remise, trois.

1) Dénombrez les tirages possibles.

2) On s'intéresse à la somme s des trois numéros sortis.

a) Quelles sont les valeurs possibles de s ?

b) Donnez pour chacune d'elles le nombre de tirages y conduisant.

6.] Pour se rendre à son travail, un automobiliste traverse successivement quatre carrefours munis de feux de signalisation ; chaque feu peut être rouge (R), orange (O) ou vert (V). On appelle « trajet » de l'automobiliste un ensemble ordonné de quatre lettres choisies parmi R, O, V (ex. : RRVO).

7.]

a) En utilisant un arbre (éventuellement incomplet), calculez combien il existe de « trajets » possibles.

b) L'automobiliste s'arrête si un feu est rouge ou orange. Combien y a-t-il de trajets pour lesquels l'automobiliste s'arrête au moins une fois ?

c) Combien y a-t-il de trajets pour lesquels les deux premiers feux sont rouges ?

8.| On appelle « mot », toute suite de lettres ayant un sens ou non.

- a) Déterminez le nombre de mots de quatre lettres que l'on peut former avec les lettres du mot CURIEUX.
- b) Combien de ces mots contiennent seulement des consonnes ?
- c) Combien de ces mots commencent et se terminent par une voyelle ?
- d) Combien de ces mots commencent par la lettre S ?
- e) Combien de ces mots commencent par S et finissent par X ?
- f) Combien de ces mots contiennent dans cet ordre, et consécutivement les lettres E et R ?
- g) Combien de ces mots contiennent toutes les voyelles ?

On lance deux dés cubiques de couleurs différentes, un noir et un jaune. On relève dans l'ordre le numéro présenté par le dé noir, puis celui présenté par le dé jaune. Schématiser l'ensemble des résultats possibles.

Quel est le nombre de résultats possibles ?

9.| Combien de façons différentes 3 personnes peuvent se placer sur 5 chaises ?

10.| Combien de groupes de 7 élèves peut-on former dans une classe de 12 élèves ?

11.| De combien de manières différentes peut-on distribuer 5 stylos à 5 élèves ?

12.| Trois personnes occupent au hasard des places dans une voiture à 5 places. Quel est le nombre de façons différentes possibles ?

13.| Le chauffeur et 3 personnes occupent des places dans une voiture à 5 places, le chauffeur occupe la place de commande. Quel est le nombre de façons différentes possibles ?

14.| Une caisse contient 8 boîtes dont 3 noires, 3 jaunes et 2 blanches.

On tire au hasard 3 boules simultanément

a) quel est le nombre de tirage possible ?

b) quel est le nombre de tirage contenant 1 seule boule noire ?

c) quel est le nombre de tirage contenant au moins une boule noire ?

2) On tire maintenant au hasard 2 boules simultanément.

a) quel est le nombre de tirages possibles ?

b) quel est le nombre de tirages contenant deux boules de mêmes couleurs ?

c) quel est le nombre de tirages contenant deux boules de couleurs différentes ?

15.| Avant la covid-19 ; Deux équipes de football de 11 joueurs échangent une poignée de main au début d'un match : chaque joueur d'une équipe serre la main de chaque joueur de l'autre équipe. Combien de poignées de main ont été échangées ?

16.| Un questionnaire à choix multiples, autorisant une seule réponse par question, comprend 15 questions.

Pour chaque question, on propose 4 réponses possibles.

De combien de façons peut-on répondre à ce questionnaire ?

17.| En informatique, on utilise le système binaire pour coder les caractères.

Un bit (binary -digit : chiffre binaire) est un élément qui prend la valeur 0 ou la valeur 1. Avec 8 chiffres binaires (un Octet), combien de caractères peut-on coder ?

18.| A l'occasion d'une compétition sportive regroupant 18 athlètes, on attribue une médaille d'or, une médaille d'argent, une médaille de bronze.

Combien y-a-t-il de distributions possibles

19.| Dans une classe de 32 élèves, on compte 19 garçons et 13 filles. On doit élire deux chefs de classe

1) Quel est le nombre de choix possibles ?

2) Quel est le nombre de choix si l'on impose un garçon et fille ?

3) Quel est le nombre de choix si l'on impose 2 garçons ?

20.| Une caisse contient cinq boules numérotées 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5.

On tire successivement deux boules sans remise.

1) quel est le nombre de tirages possibles ?

Schématiser le nombre de tirages possibles.

2) Quel, est le nombre de tirages donnant $a+b > 7$.

(a et b les numéros des boules tirées).

21.| 1) Montrer que ;

$$\forall n \in \mathbb{N} ; \sum_{k=1}^n (-1)^k C_n^k = 0$$

2) Montrer que ;

$$\forall n \in \mathbb{N}^* ; \sum_{k=1}^n k C_n^k = n 2^{n-1}$$

CHAPITRE VIX: PROBABILITÉS

1. Langage des événements :

1. Exemple introductif

Lors d'un oral de mathématiques, quatre questions sont posées : une question de probabilité (P) ; une question de statistiques (S) ; une question de géométrie (G) et une question d'algèbre (A). Chacune de ces questions est écrite sur une feuille pliée et le candidat choisit une des quatre feuilles.

L'ensemble des résultats possibles (éventualités) peut être noté $\Omega = \{P; S; G; A\}$

$\{P\}$: « choisir la question de probabilité »

$\{S\}$; « obtenir une question des statistiques »

$\{G\}$: « obtenir une question de géométrie »

Définition 1

Soit Ω l'ensemble des éventualités (résultats possibles) d'une expérience aléatoire (Ω est appelé univers). On appelle événement, toute partie de Ω .

Φ est une partie de Ω , c'est un événement, appelé événement impossible.

Ω est une partie de Ω , c'est un événement, appelé événement certain.

Exemple 1

Une urne contient trois boules : une bleue, une rouge, une verte.

On tire une boule de l'urne et on note sa couleur.

L'ensemble des éventualités (univers) est $\Omega = \{B; R; V\}$

Il y a trois événements ; $\{B\}$; $\{V\}$; $\{R\}$;

La réunion de deux événements A et B est un événement $A \cup B$, appelé aussi événement A ou B

L'intersection de deux événements A et B est un événement $A \cap B$, appelé aussi événement A et B

Lorsque deux événements A et B ont une intersection vide ($A \cap B = \Phi$), on dit que ces deux événements sont **incompatibles**.

On appelle événements contraires d'un événement A et on note $\bar{A}$ l'ensemble de toutes les éventualités qui ne sont pas dans A . ($\bar{A}$ est la partie complémentaire de A dans Ω).

Remarque 1.

Un événement et son contraire sont incompatibles.

Exemple 2

On jette un dé dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on s'intéresse au numéro apparaissant sur la face supérieure.

1) Définir l'ensemble des éventualités Ω

2) Ecrire sous forme de parties de Ω les événements :

A : « Obtenir un numéro inférieur ou égal à 2 »

B : « Obtenir numéro impair »

C : « Obtenir un numéro strictement supérieur à 4 »

3) Ecrire sous forme de parties de Ω les événements :

4) $A \cup B$; $A \cap B$; $\bar{A}$. Donner pour chacun d'eux une phrase qui le caractérise.

5) Parmi les événements utilisés précédemment, citer deux événements incompatibles qui ne sont pas contraires l'un de l'autre.

Réponse :

- 1) $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$
- 2) $A = \{1; 2\}$; $B = \{1; 3; 5\}$, $C = \{5; 6\}$
- 3) $A \cup B = \{1; 3; 5\}$, $A \cap B = \{1\}$, $\bar{A} = \{3; 4; 5; 6\}$

II. Loi de probabilité :

Exemple 3

On dispose de deux dés dont les faces sont numérotées de 1 à 6 l'un est rouge, l'autre bleu. On s'intéresse au numéro apparaissant sur la face supérieure lorsqu'on jette un de ces dés. En faisant un grand nombre de tirages, on a obtenu les résultats suivants :

Pour le dé rouge:

Numéro x_i	1	2	3	4	5	6
Fréquence f_i	0,1633	0,1663	0,1668	0,1678	0,1686	0,1672

Pour le dé bleu:

Numéro x_i	1	2	3	4	5	6
Fréquence f_i	0,0706	0,1522	0,1496	0,1685	0,1450	0,3141

La donnée des fréquences constitue ce que l'on appelle une distribution de fréquences. Une distribution de fréquences a les propriétés suivantes (valables quelle que soit l'expérience envisagée).

- (1) Pour tout i on a : $f_i \geq 0$; (2) La somme des f_i est 1 (et par conséquent, pour tout i ; $f_i \leq 1$).

Remarque 2.

- En observant chacune des distributions de fréquences de l'exemple précédent, on peut supposer que le dé bleu pour lequel de fortes variations existent entre les différentes faces n'est pas équilibré, alors que le dé rouge pour lequel la fluctuation est faible est un dé équilibré.
- Il est bien évident que la répartition des fréquences n'est pas stable (c'est ce que l'on appelle la fluctuation d'échantillonnage). Si l'on fait deux séries de 1.000 lancers avec le même dé, on n'obtiendra pas exactement les mêmes résultats. Pour modéliser une expérience aléatoire, on n'a pas une distribution de fréquences qui est expérimentale, mais une distribution théorique que l'on appellera loi de probabilité. Le choix de ce modèle théorique est évidemment très important pour la validité des résultats.

Définition 2

On considère $\Omega = \{\omega_1; \omega_2; \dots; \omega_n\}$.

On définit une loi de probabilité p sur Ω en associant à chaque éventualité ω_i un nombre réel $p(\omega_i) = P_i$, tel que :

- Pour tout $i \in \{1; 2; \dots; n\}$, $0 \leq P_i \leq 1$.
- $P_1 + P_2 + \dots + P_n = 1$.

On dit que P_i est la probabilité de l'événement ω_i .

Pour tout événement A , on appelle probabilité de A la somme des probabilités des éventualités de A

Si $A = \{a_1; a_2; \dots; a_k\}$ on a ; $p(A) = p(a_1) + p(a_2) + \dots + p(a_k)$

On a alors $p(\Omega) = 1$ et on pose d'autre part $p(\Phi) = 0$.

Exemple 4:

1) Pour le dé rouge de l'exemple précédent, qui semble équilibré, on supposera que les différentes faces ont la même probabilité d'apparition (on dit que les différentes faces sont équiprobables). On utilisera alors la loi de probabilité définie par :

Numéro x_i	1	2	3	4	5	6
Probabilité P_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

La probabilité de l'événement A : « obtenir un numéro pair » est alors ;

$$p(A) = p(2) + p(4) + p(6) = P_2 + P_4 + P_6 = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0,5$$

2) Pour le dé bleu qui ne semble pas équilibré, on peut utiliser la loi de probabilité définie par :

Numéro x_i	1	2	3	4	5	6
Probabilité P_i	0,07	0,15	0,15	0,17	0,15	0,31

La probabilité de l'événement A : « obtenir un numéro pair » est alors ;

$$p(A) = p(2) + p(4) + p(6) = P_2 + P_4 + P_6 = 0,15 + 0,17 + 0,31 = 0,63$$

Remarque 3.:

Un important théorème de mathématiques, appelé loi de grands nombres peut s'exprimer ainsi : dans le monde théorique défini par une loi de probabilité P sur un ensemble fini, les fréquences des éléments de cet ensemble dans une suite de n expériences identiques et indépendantes tendent vers leur probabilité quand n augmente indéfiniment.

Par exemple si on jette un très grand nombre de fois un dé parfaitement équilibré, la fréquence de chacune des faces tend vers sa probabilité, c'est-à-dire vers $\frac{1}{6}$.

Si on jette un très grand nombre de fois une pièce parfaitement équilibrée, la fréquence de chacune des faces tend vers sa probabilité, c'est-à-dire vers $\frac{1}{2}$.

Cas particulier :

Lorsque les éventualités ont toute la même probabilité, on dit qu'elles sont équiprobables ou que la loi de probabilité est uniforme.

$\Omega = \{\omega_1; \omega_2; \dots; \omega_n\}$, la probabilité de chaque éventualité est $P_0 = \frac{1}{\text{card}(\Omega)} = \frac{1}{n}$

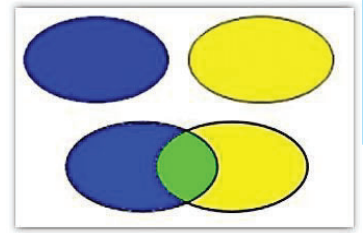
Dans ce cas, la probabilité d'un événement A est le nombre d'éléments de A divisé par le nombre d'éléments de Ω , c'est-à-dire : $p(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$. (On dit aussi :

$$p(A) = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

Remarque 4.

On sait déjà (cours dénombrement) que le cardinal d'un ensemble fini est le nombre d'éléments de cet ensemble

- Si A et B sont deux ensembles finis disjoints ($A \cap B = \Phi$) ;
 $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B)$
- Si A et B sont deux ensembles finis quelconques
 $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$



Propriété 1.

- Pour tout événement A , on a ; $p(A) \in [0;1]$
- $\bar{A}$ étant le contraire de A , on a ; $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$.
- Si A et B sont deux événements quelconques, on a ; $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$.

Remarque 5 :

Si A et B sont deux événements incompatibles, on a $A \cap B = \Phi$, donc $p(A \cap B) = 0$. alors on peut écrire ; $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.

A. Applications

Exercice 1.

Un modèle de voiture est décliné en différentes versions.

Sur le site du constructeur un client pour avoir des informations, clique sur les cases à cocher. Il a :

- Trois choix de moteurs ; Essence, Diesel, GPL
- Deux choix de carrosseries ; 3 portes, 5 portes
- Deux choix de finitions ; Access, initiale

1°) a) Reproduire, terminer et compléter l'arbre ci-contre représentant les différents choix.

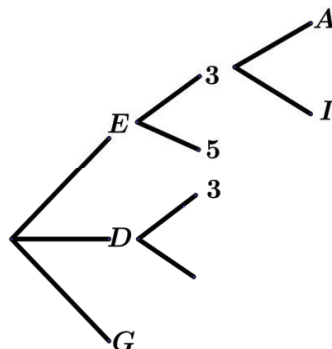
b) En déduire le nombre de versions possibles pour ce modèle.

2°) Un couple qui se renseigne laisse son enfant cliquer et on considère que l'enfant, qui ne sait pas lire fait un choix au hasard.

a) Quelle est la probabilité p_1 que l'enfant ait choisi le modèle 5 portes Essence en finition Access ?

b) Quelle est la probabilité p_2 que l'enfant ait choisi un modèle GPL en finition Initiale ?

c) Quelle est la probabilité p_3 que l'enfant ait choisi un modèle 3 portes?



Exercice 2.

Un jeu de 32 cartes peut être représenté par les 32 cases du tableau suivant :

(Cœur et Carreau sont des cartes de couleur rouge, Pique et Trèfle sont des cartes de couleur noire).

	As	Roi	Dame	Valet	10	9	8	7
Cœur								
Carreau								
Pique								
Trèfle								

On tire au hasard une carte dans ce jeu.

1°) Quelle est la probabilité de chacune des éventualités ?

2°) Quelle est la probabilité des événements suivants ?

a) A : « La carte est le roi de Cœur ».

b) B : « La carte tirée est rouge ».

c) C : « La carte tirée est un As ».

d) D : « La carte tirée est un As ou une carte rouge ».

Exercice 3.

Une urne contient 20 boules indiscernables au toucher.

On considère l'épreuve qui consiste à tirer au hasard une boule de l'urne.

1°) Définir l'ensemble Ω des éventualités (univers) et la probabilité de chacune de ces éventualités.

2°) Les 20 boules sont de différentes couleurs : 8 jaunes, 6 rouges, 4 vertes et 2 bleues.

Quelle est la probabilité de chacun des événements suivants :

- A : « La boule tirée est jaune.
- B : « La boule tirée est rouge ou verte.
- C : « La boule tirée n'est pas noire.

Exercice 4.

On lance deux dés cubiques dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

L'un est rouge l'autre est blanc.

Faire un tableau double entrée pour représenter toutes les éventualités.

Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

A : « Obtenir exactement une face numéro 1 ».

B : « Obtenir au plus une face numéro 1 ».

C : « Obtenir au moins une face numéro 1 ».

D : « Le plus petit des deux numéros est 4 ».

E : « La somme des deux numéros est égale à 7 ».

F : « La somme des deux numéros est strictement supérieure à 10 ».

Exercice 5.

Une urne contient 49 boules indiscernables au toucher, numérotées de 1 à 49. On tire une boule au hasard.

A est l'événement : « On tire une boule de numéro multiple de 2 ».

B est l'événement : « On tire une boule de numéro multiple de 5 ».

Calculer $p(A)$, $p(B)$, $p(A \cap B)$, $p(A \cup B)$.

B. Exercices divers

1. Dans un jeu de 52 cartes, on tire successivement sans remise 4 cartes.

1) Calculer le nombre de cas possibles.

2) Calculer le nombre de cas donnant :

- a) Les cartes de la même couleur,
 - b) Les cartes contiennent un roi,
 - c) Les cartes de même niveau,
 - d) Les cartes contiennent au moins une dame,
 - e) Les cartes contiennent au plus un valet.
- 3) Calculer les probabilités des événements a), b), c), d), e).

2. On lance deux dés équilibrés à six faces numérotées de 1 à 6.

Quelle est la probabilité d'un double.

3. Dans une classe de 20 élèves (8 filles et 12 garçons), le professeur veut former une équipe de 5 personnes.

1°/ Donner le nombre de cas possible.

2°/ Déterminer le nombre de cas donnant :

- a) Le groupe est du même sexe.
 - b) Le groupe contient un garçon.
 - c) Le groupe contient exactement deux filles.
 - d) Le groupe contient au moins un garçon.
 - e) Le groupe contient Ahmed et Fatma.
- 3°/ Calculer les probabilités des événements a), b), c), d), e).

Quelle est la probabilité d'obtenir un double ?

4. Une urne contient 7 jetons numérotés de 1 à 7. On tire successivement et sans remise 3 jetons de cette urne.

Calculer le nombre de tirages possibles.

Quelle est la probabilité des événements suivants :

- a) Les jetons tirés sont pairs ?
- a) Les jetons tirés sont impairs ?

5. Dans une salle il y a 10 chaises, 10 personnes entrent dans cette salle pour s'y installer. Calculer le nombre de dispositions possibles.

6. Une classe de 29 élèves procède à un tirage au sort pour désigner une commission de trois membres de cette classe.

1°/ Calculer le nombre de commissions possibles dans chacun des deux cas suivants :

- a) La commission est composée d'un coordinateur, d'un responsable sportif et d'un responsable culturel.
- b) La commission est composée de trois élèves sans tâche particulière.

2°/ Calculer dans le deuxième cas, le nombre de commissions qui comportent exactement deux garçons sachant qu'il y a exactement 7 filles dans cette classe.

7. | On jette simultanément deux dés équilibrés dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

1°) Quelle est la probabilité d'obtenir un double 6 ?

2°) Quelle est la probabilité d'obtenir deux numéros dont la somme est 4 ?

3°) On appelle S la somme des deux numéros obtenus. Donner la loi de probabilité de S . Calculer l'espérance mathématique de S .

4°) En utilisant la calculatrice, déterminer l'écart-type de S .

8. | On jette trois fois de suite une pièce de monnaie et on appelle "tirage" le résultat obtenu.

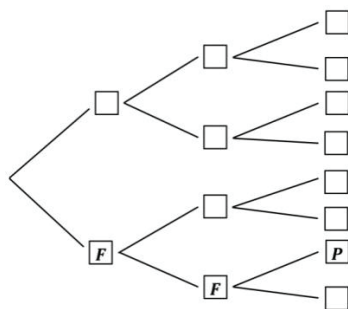
(Face ; Face ; Pile) est ainsi un tirage noté FFP .

Compléter l'arbre ci-contre et donner le nombre de tirages possibles.

En supposant que ces tirages sont équiprobables, déterminer la probabilité pour que le deuxième

jet de la pièce donne "Face".

A chaque tirage on associe 20 points pour "Pile" et 10 points pour "Face" et on note X la somme des points obtenus.



Donner la loi de probabilité de X et calculer son espérance mathématique.

9. | Dans une ville comportant 12.000 ménages, une enquête portant sur les habitudes des ménages en matière d'écologie a donné les résultats suivants :

- 8.400 ménages pratiquent le tri sélectif.
- Parmi les ménages pratiquant le tri sélectif, 40% consomment des produits bio.
- Parmi les ménages ne pratiquant pas le tri sélectif, 360 consomment des produits bio.

On choisit un ménage au hasard (tous les ménages ont la même probabilité d'être choisis) et on note :

T L'événement « Le ménage pratique le tri sélectif », et $\bar{T}$ son événement contraire.

B L'événement « Le ménage consomme des produits bio », et $\bar{B}$ son événement contraire.

1°) Déterminer $p(T)$; $p(\bar{T} \cap B)$; $p(T \cap B)$.

2°) Justifier que $p(B) = 0,31$.

3°) Cette ville décide de favoriser les ménages ayant un comportement éco-citoyen.

Pour cela, elle donne chaque année un chèque de 500 UM aux ménages qui pratiquent le tri sélectif et un chèque de 200 UM aux ménages qui consomment les

produits bio (les deux montants peuvent être cumulés). Soit S la somme d'argent reçue par un ménage choisi au hasard.

a) Donner les différentes valeurs que peut prendre S .

b) Donner la loi de probabilité de S .

c) Calculer l'espérance mathématique de S et interpréter le résultat. Déterminer la variance et l'écart-type de S .

d) Dans l'hypothèse où la ville doublerait le montant des chèques, quels seraient l'espérance mathématique, la variance et l'écart-type de S ?

1. Le principe

On considère l'expérience suivante consistant à lancer plusieurs fois un dé et à noter si la face supérieure affichée est un 4 ou un autre nombre.

La valeur supposée et théorique de la probabilité d'obtenir un 4 est $\frac{1}{6}$.

La mise en défaut ou non de cette expérience, nous permettra d'affirmer s'il est raisonnable de penser que le dé est pipé ou ne l'est pas.

En réalisant l'expérience un certain nombre de fois (échantillon), on mesure la fréquence d'apparition du 4. Si la fréquence et la valeur théorique sont trop "éloignées" (dépassent un seuil fixé) alors on peut rejeter la valeur théorique et considérer que le dé est pipé. Dans le cas inverse, on considère qu'il ne l'est pas.

2. Notion d'échantillon :

Exemple 1

Si sur l'ensemble des cartes à puce produites par une entreprise en une semaine, on en prélève 200, on dit que cet ensemble de 200 cartes à puce constitue un **échantillon de taille 200** de la population de toutes les cartes à puce produites en une semaine.

Définition 1

Un échantillon de taille n est constitué des résultats de n répétitions indépendantes de la même expérience sur l'ensemble des personnes ou objets sur lesquels porte l'étude statistique (la population)..

Un échantillon issu d'une population est donc l'ensemble de quelques éléments de cette population.

3. Intervalle de fluctuation :

Une entreprise affirme que seulement 22% des cartes à puce produites par l'entreprise sont défectueuses. La **proportion théorique** p est donc égale à 22%.

On prélève un échantillon de taille 200 parmi cette production et on compte le nombre de cartes à puce défectueuses parmi cet échantillon. Ce nombre est égal à 41.

Dans ce cas, la **fréquence observée** f est égale à $\frac{41}{200} = 0,205$.

Pour un échantillon de taille 200, l'**intervalle de fluctuation** de la proportion p des cartes à puce défectueuses au seuil de 95 %, est un intervalle de centre 0,22 tel que les fréquences observées se trouvent dans cet intervalle pour 95 % des échantillons de taille 200.

Définition 2

L'intervalle de fluctuation au seuil de 95% de la proportion d'un échantillon de taille n est l'intervalle centré autour de la proportion théorique p tel que la fréquence observée f se trouve dans l'intervalle avec une probabilité égale à 0,95.

Propriété 1 :

Pour $0,2 < p < 0,8$ et $n > 25$, l'intervalle de fluctuation au seuil de 95% de f est l'intervalle $\left[p - \frac{1}{\sqrt{n}} ; p + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$

Cela signifie qu'on a une probabilité de 0,95 pour que la fréquence observée se trouve dans l'intervalle

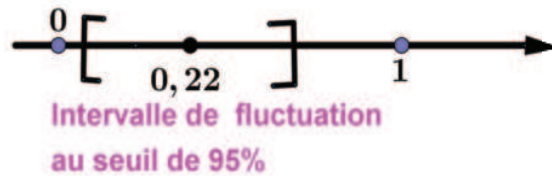
$$\left[p - \frac{1}{\sqrt{n}} ; p + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$$

Remarque 1 :

L'amplitude de cet intervalle est égale à $\frac{2}{\sqrt{n}}$

Dans l'exemple précédent, l'intervalle de fluctuation au seuil de 95% de $p = 0,22$ est

$\left[0,22 - \frac{1}{\sqrt{200}}; 0,22 + \frac{1}{\sqrt{200}}\right]$ soit de façon approchée $[0,15; 0,29]$.



Méthode 1 Prendre une décision à partir d'un échantillon

Deux entreprises A et B recrutent dans un bassin d'emploi où il y a autant de femmes que d'hommes, avec la contrainte du respect de la parité.

Dans l'entreprise A, il y a 100 employés dont 43 femmes (soit 43%).

Dans l'entreprise B, il y a 2500 employés dont 1150 femmes (soit 46%).

Or, 46 % est plus proche de 50 % que 43 % : les chiffres parlent d'eux-mêmes !

Si on admet que la parité, c'est exactement 50 % de femmes, il est vrai que B est plus proche que A.

Peut-on alors affirmer que l'entreprise B respecte mieux la parité que l'entreprise A ?

La proportion théorique p est égale à 0,5 (50% de femmes).

Pour l'entreprise A:

La taille de l'échantillon n est égale à 100. La fréquence observée f est égale à 0,43.

Pour l'entreprise B:

La taille de l'échantillon n est égale à 2500.

La fréquence observée f est égale à 0,46.

Pour chaque entreprise, peut-on affirmer que la fréquence des femmes respecte la parité?

Pour y répondre, on va vérifier dans chaque cas si la fréquence observée f se situe dans l'intervalle de fluctuation au seuil de 95%.

Pour l'entreprise A:

L'intervalle de fluctuation au seuil de 95% de $p = 0,5$ est: $f = \left[0,5 - \frac{1}{\sqrt{100}}; 0,5 + \frac{1}{\sqrt{100}}\right]$ soit $f = [0,4; 0,6]$

Pour l'entreprise B:

L'intervalle de fluctuation au seuil de 95% de $p = 0,5$ est: $f = \left[0,5 - \frac{1}{\sqrt{2500}}; 0,5 + \frac{1}{\sqrt{2500}}\right]$

Soit $f = [0,48; 0,52]$

La valeur 43% est donc dans l'intervalle de fluctuation de l'entreprise A alors que la valeur 46% n'est pas dans l'intervalle de fluctuation de l'entreprise B.

La proportion de 46% s'observe donc dans moins de 5% des échantillons de taille 2500. On peut alors rejeter l'hypothèse que l'entreprise B respecte la parité.

Par contre, pour l'entreprise A, on peut accepter cette hypothèse.

4. Intervalle de confiance :

Exemple 2 :

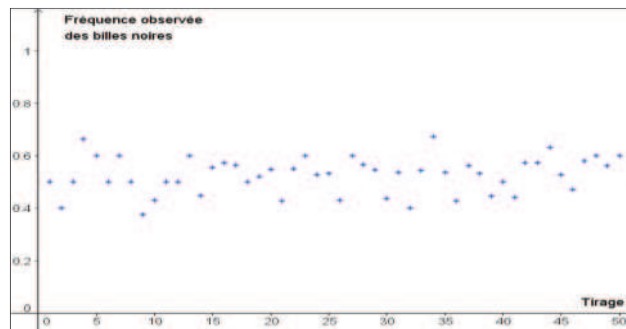
Un jeu consiste à tirer 100 billes d'un sac contenant 300 billes noires et 300 billes blanches.

L'expérience peut être **simulée** avec un tableur afin d'effectuer rapidement un grand nombre de tirage.

Pour cet échantillon de taille 100, on compte le nombre de billes noires et on calcule la fréquence observée f . On pourrait ainsi vérifier que, dans 95 % des cas, la fréquence des billes noires dans

l'échantillon appartient à l'intervalle:

$$I_C = \left[0,5 - \frac{1}{\sqrt{100}} ; 0,5 + \frac{1}{\sqrt{100}} \right] \text{ soit } [0,4; 0,6] \text{ où } p = 0,5 \text{ et } n = 100$$



Nuage de points des fréquences observées des billes noires pour 50 tirages effectués

Définition 3

Soit p la proportion théorique tel que $0,2 < p < 0,8$.

On considère la fréquence observée f pour un échantillon donné de taille $n > 25$.

L'intervalle $I_C = \left[f - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$ est appelé un **intervalle de confiance** (ou fourchette de sondage) de p au

niveau 0,95.

Propriété 1.

95% des intervalles de confiance associés aux échantillons de taille n possibles ayant comme fréquence observée f contiennent la proportion théorique p .

Méthode: Estimer une proportion inconnue

1. Avant les élections, un candidat A commande un sondage effectué sur 250 personnes. 138 personnes interrogées déclarent avoir l'intention de voter pour le candidat A.
Le candidat A peut-il espérer être élu?
2. Le candidat A commande un second sondage effectué sur 1000 personnes pour lequel 538 personnes déclarent avoir l'intention de voter pour lui. Le candidat A peut-il espérer être élu?

Réponse :

1. Soit p la proportion théorique d'électeurs pour le candidat A.

La fréquence observée est égale à $f = \frac{138}{250} = 0,552$

L'intervalle de confiance de p au seuil de 0,95 est:

$$I_C = \left[0,552 - \frac{1}{\sqrt{250}} ; 0,552 + \frac{1}{\sqrt{250}} \right]$$

Soit de façon approchée $[0,49 ; 0,62]$.

On a donc : $0,49 < p < 0,62$. Il est donc possible que le candidat A ne soit pas élu.

La fréquence observée est égale à : $f = \frac{538}{1000} = 0,538$ L'intervalle de confiance de p au seuil de 0,95 est:

$$I_C = \left[0,538 - \frac{1}{\sqrt{1000}} ; 0,538 + \frac{1}{\sqrt{1000}} \right]$$

Soit de façon approchée $[0,51 ; 0,57]$. On a donc: $0,51 < p < 0,57$.

La proportion théorique évaluée est supérieure à 50%.

Le candidat A peut donc espérer être élu puisque 95% des échantillons possibles de taille 1000 seraient compris dans cet intervalle.

IPN