

RÉPUBLIQUE ISLAMIQUE DE MAURITANIE

Honneur - Fraternité - Justice



Ministère de l'Éducation et de la Réforme du Système d'Enseignement

INSTITUT PEDAGOGIQUE NATIONAL

Mathématiques

6^{ème} LM

Réalisé par :

Mohamed El Hacem Bellal
Inspecteur de l'enseignement
secondaire

Mohamed Fadel Ahmed Brey
Professeur de l'enseignement
secondaire

Révisé par :

Daouda Abdoul Diop
Inspecteur de l'enseignement
secondaire

Ely Abdella
Professeur de l'enseignement
secondaire

Maquettiste :

Aichetou Brahim Boubacar

Maquettiste / IPN

2026

IPN



PRÉFACE

Dans le cadre de la mise en œuvre des orientations nationales visant l'amélioration de la qualité de l'enseignement et l'adaptation des apprentissages aux exigences du développement, l'Institut Pédagogique National a le plaisir de mettre à la disposition des enseignants et des élèves cette nouvelle collection de manuels scolaires scientifiques destinés au second cycle de l'enseignement secondaire.

Ces ouvrages couvrent l'ensemble des filières du lycée, aussi bien scientifiques que littéraires, dans les disciplines des Mathématiques, des Sciences de la Nature, de la Physique et de la Chimie. Ils ont été élaborés conformément aux programmes officiellement en vigueur et traduisent la volonté des autorités éducatives de garantir à tous les apprenants des ressources pédagogiques de qualité, adaptées aux objectifs de formation et aux réalités de notre système éducatif.

Depuis la réécriture des programmes en 1999 jusqu'à la validation des programmes actuellement en vigueur en 2022, notre système éducatif a connu plusieurs étapes de réforme et de modernisation curriculaires. Toutefois, cette collection marque une avancée historique, puisqu'il s'agit de la première fois que les filières littéraires, notamment les Lettres Modernes (LM) et les Lettres Originelles (LO), bénéficient de manuels scolaires dans les disciplines scientifiques pour tous les niveaux du second cycle, de la 5^e à la 7^e année. Les filières LO ont, en outre, bénéficié de manuels rédigés en langue arabe afin de répondre aux spécificités linguistiques et pédagogiques de ces séries et de garantir une meilleure accessibilité des contenus scientifiques aux apprenants concernés.

Le travail réalisé dans le cadre de ce projet a consisté, d'une part, à la révision de douze titres correspondant aux manuels des disciplines de base dans les différents niveaux du lycée et, d'autre part, à la conception de vingt-deux nouveaux titres couvrant les autres. Cette entreprise éditoriale d'envergure témoigne de l'engagement des autorités éducatives à renforcer les ressources pédagogiques nationales et à accompagner efficacement la mise en œuvre des nouveaux programmes.

Conscient de l'importance stratégique du manuel scolaire dans le processus d'enseignement-apprentissage, l'Institut Pédagogique National a mobilisé les meilleures compétences nationales pour la réalisation de cette tâche. Des inspecteurs, des conseillers pédagogiques et des professeurs expérimentés, reconnus pour leur expertise scientifique et pédagogique, ont ainsi été sélectionnés afin de concevoir et de réviser des ouvrages répondant aux exigences de qualité académique, pédagogique et didactique.

Les équipes de conception se sont attachées à produire des manuels clairs, structurés et accessibles, favorisant le développement des connaissances, des compétences et de l'esprit scientifique chez les apprenants. Une attention particulière a été accordée à la cohérence des contenus, à la progressivité des apprentissages, à l'intégration des activités pratiques ainsi qu'à l'exploitation d'illustrations et de situations d'apprentissage adaptées au contexte national.

L'Institut Pédagogique National tient à exprimer sa profonde gratitude à la Banque Islamique de Développement pour l'appui précieux qu'elle a apporté à ce projet. Grâce à son financement, toutes les étapes de cette importante œuvre éducative ont pu être réalisées, depuis la rédaction et la révision des manuscrits jusqu'à leur édition, leur correction et leur impression. Cet accompagnement constitue une contribution majeure au développement de l'éducation et au renforcement de la qualité des apprentissages dans notre pays.

L'Institut Pédagogique National adresse également ses sincères remerciements à tous ceux qui ont contribué à l'aboutissement de cette œuvre : auteurs, relecteurs, inspecteurs, équipes techniques et partenaires ayant accompagné les différentes phases de conception et de production.

Nous espérons que ces manuels constitueront des outils pédagogiques efficaces au service des enseignants et des élèves et qu'ils contribueront au renforcement de l'enseignement des sciences, à l'amélioration des performances scolaires et à la formation d'une génération capable de participer activement au développement national.

Le Directeur Général de l'Institut Pédagogique National
Dr. Cheikh Mouadh Sidi Abdalla

IPN

Avant-Propos

Chers collègues professeurs, Chers élèves,

L'institut Pédagogique National a le plaisir de présenter à la famille scolaire un projet de manuel de l'élève pour la 6^{ème} année, série Lettres Modernes du secondaire conformément aux nouveaux programmes réécrits selon la vision holistique.

la méthodologie adoptée dans ce document met l'accent sur les points essentiels dans le programme suivant une approche pragmatique qui privilégie les aspects pratiques et les savoir-faire.

Ce choix est traduit par la segmentation du programme en terme de chapitres et la mise en œuvre d'une structure de chapitre permettant aux différents utilisateurs d'en tirer profit.

Cette structure est ainsi conçue:

- “ **Faire- savoir** ” : permet de déterminer **l'essentiel du chapitre** sous forme de résumé des points essentiels.
- “ **Savoir – faire** ” : permet à l'élève de mettre ses capacités à l'exercice, dans un premier temps, en traitant des **applications** directes du cours et dans un deuxième temps en passant aux **Exercices** de niveau avancé.

L'IPN souhaite que les utilisateurs de ce projet de manuel lui fassent parvenir leurs remarques et suggestions constructives pour qu'il puisse en tenir compte dans la prochaine édition.

Les auteurs

Mohamed El Hacen Bellal

Inspecteur de l'Enseignement Secondaire

Mohamed Fadel Ahmed Brey

Professeur de l'Enseignement Secondaire

Révisé par

Daouda Abdoul Diop

Inspecteur de l'Enseignement Secondaire

Ely Abdella

Professeur de l'Enseignement Secondaire

IPN

Table des Matières

Chapitre 1 :

Equations, Inéquations et systèmes..... 11

Chapitre 2 :

Fonctions Numériques..... 28

Chapitre 3 :

Suites Numériques..... 47

Chapitre 4 :

Dénombrement et Probabilités 67

IPN

Chapitre 1 :

IPN

Chapitre 1 : Equations, inéquations et systèmes

1. Equations :

a) Equations du premier degré à une inconnue :

Définition :

- Une équation du premier degré est une équation où l'inconnue x n'apparaît qu'à la puissance 1
- On appelle équation à une inconnue, une égalité qui n'est vérifiée que pour certaine(s) valeur(s) d'une quantité x appelée inconnue.

Exemple : $2x + 3 = 7x + 5$ est une équation du premier degré à une inconnue.

$2x^2 + 5x - 7 = 0$ est une équation du second degré à une inconnue.

Résolution d'une équation du premier degré à une inconnue

1. **Règle :** On ne change pas une équation si l'on ajoute ou retranche un même nombre de chaque côté de l'égalité.
2. On ne change pas une équation si l'on multiplie ou divise par un même nombre non nul chaque terme de l'égalité.

Exemple Soit l'équation : $2x + 3 = 5$

Ajoutons (-3) de chaque côté de l'égalité, on a donc : $2x + 3 - 3 = 5 - 3$ équivaut à $2x = 2$

On divise les deux membres par 2, on obtient $x = 1$

Applications :

Exercice 1 : Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation : $5x + 7 = -3 + 2x$

Solution : $5x + 7 = -3 + 2x$

On isole l'inconnue en déplaçant le 7 et le $2x$, on obtient : $5x - 2x = -7 - 3$

Remarque :

Pour faire passer un terme de l'autre côté de l'égalité on change son signe.

On regroupe les termes : $3x = -10$

On divise par 3 $\frac{3x}{3} = \frac{-10}{3}$ on obtient : $x = \frac{-10}{3}$ donc : $S = \left\{ \frac{-10}{3} \right\}$.

Exercice 2 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\frac{x-3}{5} = \frac{4+5x}{3}$

Solution : $\frac{x-3}{5} = \frac{4+5x}{3}$

On effectue un produit en croix, on a donc : $3(x-3) = 5(4+5x)$

On enlève les parenthèses et on isole l'inconnue : $3x - 9 = 20 + 25x$

$$3x - 25x = 9 + 20$$

On regroupe les termes et on divise par (-22) : $-22x = 29$ donc $x = -\frac{29}{22}$

On conclut, l'ensemble de solutions : $S = \left\{ \frac{-29}{22} \right\}$

Exercice 3 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $(x + 2)(2x - 9) = 0$

Règle : Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un au moins des facteurs est nul.

Solution : $(x + 2)(2x - 9) = 0$

On a un produit de facteurs nul, donc d'après notre règle :

$$x + 2 = 0 \quad \text{ou} \quad 2x - 9 = 0$$

$$x = -2 \quad \text{ou} \quad x = \frac{9}{2}$$

On conclut par l'ensemble solution : $S = \left\{-2; \frac{9}{2}\right\}$

Problèmes se ramenant à une équation du premier degré :

Exemple :

Une entreprise emploie 320 personnes. Sachant qu'il y a trois fois plus d'hommes que de femmes, calculer le nombre d'hommes et le nombre de femmes employés dans cette entreprise.

Choix de l'inconnu : soit x le nombre de femmes
Le nombre d'hommes $= 3x$

Mise en équation : nombre de femmes + nombre d'hommes $= 320$

$$x + 3x = 320$$

Résolution d'équation : $x + 3x = 320$

$$4x = 320$$

$$x = \frac{320}{4} = 80$$

Conclusion : le nombre de femmes $= x = 80$

Le nombre d'hommes $= 3x = 3 \times 80 = 240$

b) Equations du second degré

Définition : Une équation du second degré est une équation de la forme

$ax^2 + bx + c = 0$ où a, b et c sont des réels et $a \neq 0$. Une solution de cette équation s'appelle une racine du trinôme $ax^2 + bx + c$.

Exemple : L'équation $3x^2 - 6x - 2 = 0$ est une équation du second degré

Résolution d'une équation du second degré

Définition : On appelle discriminant du trinôme $ax^2 + bx + c$, le nombre réel, noté Δ , égal à $b^2 - 4ac$.

Propriété : Soit Δ le discriminant du trinôme $ax^2 + bx + c$.

- Si $\Delta < 0$: L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'a pas de solution réelle (dans $\mathbb{R}$).

- Si $\Delta = 0$: L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a une unique solution : $x_0 = \frac{-b}{2a}$.

- Si $\Delta > 0$: L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a deux solutions distinctes : $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.

Exemple : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $2x^2 - x - 6 = 0$ b) $2x^2 + 3x + \frac{9}{8} = 0$ c) $x^2 + 3x + 10 = 0$

Solution :

a) Calculons le discriminant de l'équation $2x^2 - x - 6 = 0$:

$$a = 2, b = -1 \text{ et } c = -6 \text{ donc } \Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times (2) \times (-6) = 49.$$

Comme $\Delta > 0$, l'équation possède deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1) - \sqrt{49}}{2 \times 2} = \frac{-6}{4} = \frac{-3}{2} : \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1) + \sqrt{49}}{2 \times 2} = \frac{8}{4} = 2$$

$$S = \left\{ 2; \frac{-3}{2} \right\}$$

b) Calculons le discriminant de l'équation $x^2 + 6x + 9 = 0$: $a = 1, b = 6$ et $c = 9$ donc $\Delta = b^2 - 4ac = (6)^2 - 4 \times (1) \times (9) = 0$. Comme $\Delta = 0$, l'équation possède une racine double : $x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-(6)}{2 \times 1} = \frac{-6}{2} = -3$.

$$S = \{-3\}$$

c) Calculons le discriminant de l'équation $x^2 + 3x + 10 = 0$: $a = 1, b = 3$ et $c = 10$ donc $\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \times 1 \times 10 = -31$. Comme $\Delta < 0$, l'équation ne possède pas de solution dans $\mathbb{R}$ équivaut que $S = \emptyset$.

Propriété : soit l'équation : $ax^2 + bx + c = 0$ / $a \neq 0$

On vérifie :

Si $a + b + c = 0$ alors 1 est une solution évidente donc les solutions sont 1 et $\frac{c}{a}$

Si $a - b + c = 0$ alors -1 est une solution évidente donc les solutions sont -1 et $-\frac{c}{a}$

Exemple : résoudre dans $\mathbb{R}$: $-3x^2 - 2x + 5 = 0$ et $x^2 - 4x - 5 = 0$

Solution : $-3x^2 - 2x + 5 = 0$

$$a = -3; b = -2 \text{ et } c = 5$$

$$a + b + c = -3 - 2 + 5 = 0 \text{ donc les racines sont } 1 \text{ et } \frac{c}{a} = \frac{5}{-3} = \frac{-5}{3}$$

$$S = \left\{ -\frac{5}{3}; 1 \right\}$$

$$x^2 - 4x - 5 = 0$$

$$a = 1; b = -4 \text{ et } c = -5$$

$$a - b + c = 1 + 4 - 5 = 0 \text{ donc les racines sont } -1 \text{ et } \frac{-c}{a} = \frac{-(-5)}{1} = 5$$

$$S = \{-1; 5\}$$

Propriété :

• Si $ax^2 + bx + c = 0$ admet deux solutions x_1 et x_2 alors

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \text{ et } P = x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

• Si on a $S = x_1 + x_2$ et $P = x_1 x_2$ alors x_1 et x_2 vérifient l'équation $x^2 - Sx + P = 0$.

Exemple :

Trouver deux nombres dont la somme est égale à 3 et le produit est égal à -10 .

Soient x et y les deux nombres x et y sont les solutions de l'équation $X^2 - SX + P = 0$

$$S = x + y \quad \text{et} \quad P = xy$$

$$\text{D'où } X^2 - 3X - 10 = 0$$

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times -10 = 49 > 0$$

$$x_1 = \frac{3 - \sqrt{49}}{2} = -2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{3 + \sqrt{49}}{2} = 5$$

$$\text{Donc } x = -2 \quad \text{et} \quad y = 5$$

Problèmes se ramenant à une équation du second degré:

Exemple : La longueur d'un rectangle est 7 cm de plus que les quatre cinquièmes de sa largeur.

Si l'aire du rectangle est de 785 cm^2 , trouve les dimensions de celui-ci.

Solution

Soit x , la largeur du rectangle. Alors, la longueur du rectangle est $\frac{4}{5}x + 7$

$$\text{Donc } x \left(\frac{4}{5}x + 7 \right) = 785$$

$$\frac{4}{5}x^2 + 7x = 785$$

$$\frac{4}{5}x^2 + 7x - 785 = 0$$

$$4x^2 + 35x - 3925 = 0$$

$$\Delta = 35^2 - 4 \times 4 \times (-3925) = 64025$$

$$x_1 = \frac{-35 + \sqrt{64025}}{2 \times 4} = \frac{218,03}{8} = 27,25$$

$$x_2 = \frac{-35 - \sqrt{64025}}{2 \times 4} = \frac{-288,03}{8} = -36$$

Les deux racines sont -36 et $27,25$. La valeur négative ne peut être retenue puisque la largeur du rectangle ne peut pas être négative. La largeur est donc $27,25 \text{ cm}$ alors que la longueur est $\frac{4}{5} \times 27,5 + 7 = 28,8 \text{ cm}$.

2. Inéquations :

a) Inéquations du premier degré à une inconnue

Définition :

On appelle inéquation du premier degré à une inconnue toute inéquation de la forme $ax + b \leq 0$ ou $ax + b \geq 0$ ou $ax + b < 0$ ou $ax + b > 0$ Ou $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$, x est l'inconnue

Remarque :

Résoudre l'inéquation c'est trouver toutes les valeurs possibles de l'inconnue qui rendent l'inégalité vraie.

Règles de bases pour manipuler des inégalités :

Les méthodes qu'on va employer pour résoudre les inégalités ressemblent beaucoup à celles utilisées pour les équations.

- Une inégalité reste vérifiée lorsqu'on ajoute ou on retranche le même nombre aux deux membres.
- Une inégalité reste vérifiée quand on multiplie ou on divise les 2 membres par un même nombre strictement positif.
- Si on multiplie ou on divise les 2 membres d'une inégalité par un nombre strictement négatif, alors il faut changer le sens de l'inégalité.

Propriété :

- Si $a \leq x \leq b$ alors $x \in [a; b]$
- Si $a < x \leq b$ alors $x \in]a; b]$
- Si $a \leq x < b$ alors $x \in [a; b[$
- Si $a < x < b$ alors $x \in]a; b[$

Exemples :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes:

1) $2x + 3 < 4 - 5x$ 2) $2(x - 4) \leq 4x - 5$

Solution :

1) $2x + 3 < 4 - 5x$
 $2x + 5x < 4 - 3$
 $7x < 1$
 $x < \frac{1}{7}$

Les solutions sont tous les nombres strictement inférieurs à $\frac{1}{7}$, $S =]-\infty; \frac{1}{7}[$.

2) $2(x - 4) \leq 4x - 5$
 $2x - 8 \leq 4x - 5$
 $2x - 4x \leq 8 - 5$
 $-2x \leq 3$
 $x \geq \frac{-3}{2}$

On divise par un nombre négatif donc on change le sens de l'inégalité.

Les solutions sont tous les nombres supérieurs à $\frac{-3}{2}$, $S = \left[\frac{-3}{2}; +\infty\right[$

Le signe du binôme : $ax + b$ ou a et b sont des réels ($a \neq 0$)

Exemples :

1. Étudions le signe de $2x + 6$ (coefficient de x positif)
 $2x + 6 = 0$ équivaut à $x = -3$
 $2x + 6 > 0$ équivaut à $x > -3$
 $2x + 6 < 0$ équivaut à $x < -3$

On résume ces résultats dans le tableau

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
$2x + 6$	$-$	0	$+$

2. Étudions le signe de $-2x + 10$ (coefficient de x négatif)

$$-2x + 10 = 0 \text{ équivaut à } x = 5$$

$$-2x + 10 > 0 \text{ équivaut à } x < 5$$

$$-2x + 10 < 0 \text{ équivaut à } x > 5$$

On résume ces résultats dans le tableau

x	$-\infty$	5	$+\infty$
$-2x + 10$	$+$	0	$-$

Résumé : $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$

x	$-\infty$	$\frac{-b}{a}$	$+\infty$
$ax + b$	<i>signe contraire de a</i>	0	<i>signe de a</i>

Applications :

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations : a) $-2x + 12 > 0$ b) $5x - 15 \leq 0$

2. Étudier le signe de : a) $3x + 6$ et b) $-2x + 2$

Solution

1)

a) $-2x + 12 > 0$

$$-2x + 12 = 0 \text{ Équivaut à } x = 6$$

x	$-\infty$	6	$+\infty$
$-2x + 12$	$+$	0	$-$

$$\text{Donc } S =]-\infty; 6[$$

b) $5x - 15 \leq 0$

$$5x - 15 = 0 \text{ Équivaut à } x = 3$$

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$5x - 15$	$-$	0	$+$

$$\text{Donc } S =]-\infty; 3]$$

2) a) $3x + 6$

$$3x + 6 = 0 \text{ Équivaut à } x = -2$$

$$3x + 6 < 0 \text{ Équivaut à } x < -2$$

$$3x + 6 > 0 \text{ Équivaut à } x > -2$$

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$3x + 6$	$-$	0	$+$

b) $-2x + 2$

$$-2x + 2 = 0 \text{ Équivaut à } x = 1$$

$$-2x + 2 < 0 \text{ Équivaut à } x > 1$$

$$-2x + 2 > 0 \text{ Équivaut à } x < 1$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$-2x + 2$	+	0	-

Inéquation du second degré à une inconnue

1) Définition : on pose : $P(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$

Une inéquation du second degré à une inconnue est une inéquation de la forme

$$P(x) \geq 0 \text{ ou } P(x) > 0 \text{ ou } P(x) \leq 0 \text{ ou } P(x) < 0$$

2) Signes du trinôme : $ax^2 + bx + c$ telle que $a \neq 0$

Le signe du trinôme dépend par le signe de Δ

- Si $\Delta > 0$ le trinôme $ax^2 + bx + c$ est du signe de a à l'extérieur des racines et le signe contraire de a entre les racines

x	$-\infty$	x_1	x_2	$-\infty$	
$ax^2 + bx + c$	<i>signe de a</i>	0	<i>signe contraire de a</i>	0	<i>signe de a</i>

- Si $\Delta = 0$: le trinôme $ax^2 + bx + c$ est du signe de a

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	signe de a	0	signe de a

- Si $\Delta < 0$: le trinôme $ax^2 + bx + c$ est du signe de a

x	$-\infty$	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	signe de a	

Exemple :

Résoudre les inéquations suivantes :

a) $x^2 + 3x - 5 < -x + 2$ b) $3x^2 + 6x + 5 > 0$ c) $3x^2 + 6x - 9 > 0$

On commence par rassembler tous les termes dans le membre de gauche afin de pouvoir étudier les signes des trinômes.

a) $x^2 + 3x - 5 < -x + 2$ équivaut à $x^2 + 4x - 7 < 0$

Le discriminant de $x^2 + 4x - 7$ est $\Delta = 4^2 - 4 \times 1 \times (-7) = 44$ et ses racines sont :

$$x_1 = \frac{-4 - \sqrt{44}}{2 \times 1} = -2 - \sqrt{11} \text{ et } x_2 = \frac{-4 + \sqrt{44}}{2 \times 1} = -2 + \sqrt{11}$$

On obtient le tableau de signes :

x	$-\infty$	$-2-\sqrt{11}$	$-2+\sqrt{11}$	$+\infty$	
x^2+4x-7	+	0	-	0	+

L'ensemble des solutions de l'inéquation $x^2 + 3x - 5 < -x + 2$ est donc :

$$S =]-2 - \sqrt{11}; -2 + \sqrt{11}[$$

b) $3x^2 + 6x + 5 > 0$

Étudions le signe du trinôme $P(x) = 3x^2 + 6x + 5$

$$\Delta = 6^2 - 4 \times 3 \times 5 = 36 - 60 = -24 < 0$$

x	$-\infty$	$+\infty$
$3x^2 + 6x + 5$	+	

Donc $S = \mathbb{R}$

c) $3x^2 + 6x - 9 > 0$

On commence par la résolution d'équation $3x^2 + 6x - 9 = 0$

Le discriminant de $3x^2 + 6x - 9$ est $\Delta = 6^2 - 4 \times 3 \times -9 = 36 + 108 = 144$

Les solutions d'équation $3x^2 + 6x - 9 = 0$ sont :

$$x_1 = \frac{-6 + \sqrt{144}}{2 \times 3} = \frac{-6 + 12}{6} = 1$$

$$x_2 = \frac{-6 - \sqrt{144}}{2 \times 3} = \frac{-6 - 12}{6} = -3$$

x	$-\infty$	-3	1	$+\infty$
$3x^2 + 6x - 9$		$+$	0	$+$

$$S =]-\infty; -3[\cup]1; +\infty[$$

Systèmes :

I- Système de deux équations du premier degré à deux inconnues :

Définition :

Un système de deux équations du premier degré à deux inconnues x et y est de la forme

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases} \text{ où } a, b, c, a', b' \text{ et } c' \text{ désignent des nombres donnés.}$$

Un couple (x, y) est solution d'un système s'il vérifie simultanément les deux égalités.

Exemple : $\begin{cases} 4x + 3y = 0 \\ x - 2y = 3 \end{cases}$ est un système de deux équations à deux inconnues.

Méthodes de résolution :

a/Résolution par substitution :

Cette méthode consiste à exprimer l'une des inconnues en fonction de l'autre dans l'une des équations et le substituer dans l'autre équation pour trouver une équation de premier degré d'une inconnue.

Exemple : Résous dans $\mathbb{R}^2$ le système $\begin{cases} -3x + y = 9 \\ 4x - 3y = -17 \end{cases}$ par substitution.

On a : $\begin{cases} -3x + y = 9 & (1) \\ 4x - 3y = -17 & (2) \end{cases}$ alors : $\begin{cases} y = 9 + 3x \\ 4x - 3y = -17 \end{cases}$ On remplace y par sa valeur dans

l'équation (2) : $\begin{cases} y = 9 + 3x \\ 4x - 3 \times (9 + 3x) = -17 \end{cases}$, donc : $\begin{cases} y = 9 + 3x \\ 4x - 27 - 9x = -17 \end{cases}$ d'où :

$$\begin{cases} y = 9 + 3x \\ 4x - 9x = -17 + 27 \end{cases} \text{ , donc : } \begin{cases} y = 9 + 3x \\ -5x = 10 \end{cases} \text{ , Alors : } \begin{cases} y = 9 + 3x \\ x = \frac{10}{-5} = -2 \end{cases}$$

Enfin : $\begin{cases} y = 9 + 3 \times (-2) = 9 - 6 = 3 \\ x = -2 \end{cases}$ Donc le couple $(-2; 3)$ est la solution de ce système.

b/ Résolution par combinaison :

Cette méthode consiste à multiplier les membres de chaque équation pour obtenir des coefficients opposés à l'une des inconnues, puis on ajoute membre à membre les deux équations du système pour le ramener à une équation du premier degré à une inconnue.

Exemple : Résous dans $\mathbb{R}^2$ le système $\begin{cases} 5x - 4y = 8 \\ 2x + 5y = 1 \end{cases}$ par la méthode de combinaison .

On cherche à éliminer l'inconnue x pour se ramener à une équation du premier degré à une inconnue.

On multiplie les deux membres de la première équation par 2 et ceux de la deuxième par (-5).

$$\begin{cases} 2 \times (5x - 4y) = 2 \times 8 \\ -5 \times (2x + 5y) = -5 \times 1 \end{cases} \text{ on obtient : } \begin{cases} 10x - 8y = 16 \\ -10x - 25y = -5 \end{cases}$$

On ajoute membre à membre les deux équations du système ainsi obtenu pour éliminer x .

$$10x + (-10x) - 8y + (-25y) = 16 + (-5)$$

On résoud cette équation à une inconnue pour trouver la valeur de y .

$10x - 10x - 8y - 25y = 16 - 5$ c'est-à-dire : $-33y = 11$ donc : $y = \frac{11}{-33}$ signifie que : $y = \frac{-1}{3}$. On remplace y par $\frac{-1}{3}$ dans l'une des deux équations pour trouver x .

Ici on choisit la 2ème équation et on trouve : $2x + 5 \times (\frac{-1}{3}) = 1$ c'est-à-dire : $2x - \frac{5}{3} = 1$

$$2x = 1 + \frac{5}{3} \Rightarrow 2x = \frac{3}{3} + \frac{5}{3} \Rightarrow 2x = \frac{8}{3} \Rightarrow x = \frac{8}{3} \div 2 \Rightarrow x = \frac{8}{3} \times \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{8}{6}$$

Donc : $x = \frac{4}{3}$. Alors le couple $(\frac{4}{3}; \frac{-1}{3})$ est la solution de ce système $S\{(\frac{4}{3}; \frac{-1}{3})\}$.

c/ Résolution par la méthode de Cramer :

Résous dans $\mathbb{R}^2$ le système $\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ 7x - 4y = -1 \end{cases}$ par la méthode de Cramer

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 7 & -4 \end{vmatrix} = 2 \times (-4) - 7 \times 3 = -8 - 21 = -29$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 8 & 3 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} = 8 \times (-4) - (-1) \times 3 = -32 + 3 = -29$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} = 2 \times (-1) - 7 \times 8 = -2 - 56 = -58$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-29}{-29} = 1$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-58}{-29} = 2$$

$$S = \{(1; 2)\}$$

d/Résoudre graphiquement un système :

Cette méthode consiste à relier chaque équation à une droite, puis à représenter chacune des droites dans un même repère orthonormé. La solution, si elle existe, est donnée par les coordonnées du point d'intersection des deux droites.

Exemple : Résous graphiquement le système $\begin{cases} 4x - y = 2 \\ 2x - y = -2 \end{cases}$

Pour chaque équation on exprime y en fonction de x , et on obtient : $\begin{cases} -y = -4x + 2 \\ -y = -2x - 2 \end{cases}$

c'est-à-dire : $\begin{cases} y = 4x - 2 \\ y = 2x + 2 \end{cases}$

Dans un repère on trace les deux droites

(D1) d'équation : $y = 4x - 2$, et

(D2) d'équation : $y = 2x + 2$.

Pour (D1) :

	A	B
x	0	1
y	-2	2

Pour (D2) :

	E	F
x	0	1
y	2	4

Dans un repère orthonormé, on trace les deux droites (D1) et (D2).

Les deux droites (D1) et (D2) se coupent en un point : $M(2;6)$.

Alors le couple $(2;6)$ est la solution de ce système.

Systèmes de deux inéquations à deux inconnus :

Exemple :

Résoudre graphiquement le système d'inéquation suivant :

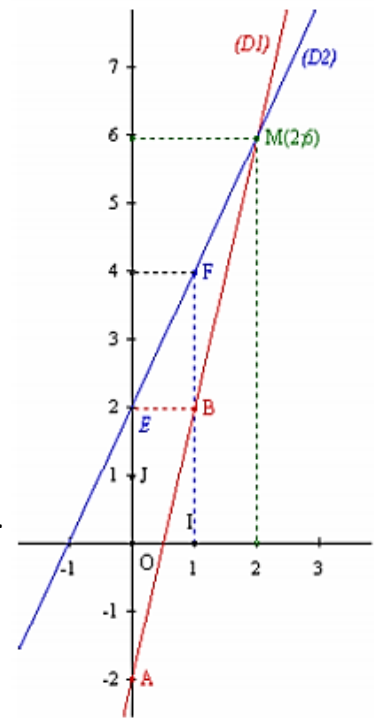
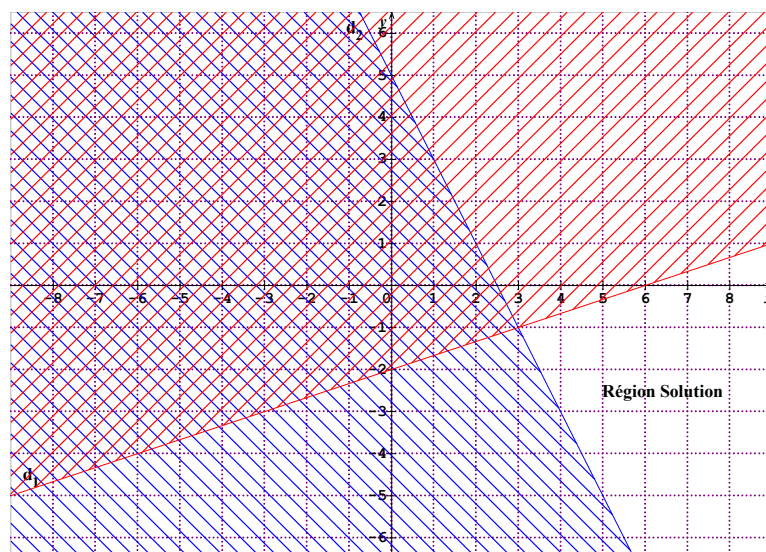
$$\begin{cases} 2x + y > 5 \\ x - 3y > 6 \end{cases}$$

Solution

- L'inéquation $2x + y > 5$ est équivalente à $y > -2x + 5$
- Hachurons les points au-dessous de la droite d_1 d'équation $y = -2x + 5$
- L'inéquation $x - 3y > 6$ est équivalente à $-3y > -x + 6$ c'est-à-dire $y < \frac{1}{3}x - 2$
- Hachurons les points au-dessus de la droite d_2 d'équation $y = \frac{1}{3}x - 2$

Pour tracer d_1 placer les points : $A(0; 5)$ et $B(4; -3)$

Pour tracer d_2 placer les points : $C(0; -2)$ et $D(6; 0)$



Exercices corrigés

Exercice 1 :

Le périmètre d'un rectangle est inférieur ou égal à 37 cm.

Sachant que sa largeur est égale à 5,3 cm, déterminer les valeurs possibles pour la longueur de ce rectangle. (La longueur doit être supérieure à la largeur)

Corrigé :

Soit L la longueur de ce rectangle.

$$L > 5,3 \text{ cm}$$

Le périmètre P de ce rectangle est égal à : $P = 2L + 2 \times 5,3 = 2L + 10,6$

Mais

$$P \leq 37$$

$$2L + 10,6 \leq 37$$

$$2L + 10,6 - 10,6 \leq 37 - 10,6$$

$$2L \leq 26,4$$

$$\frac{2L}{2} \leq \frac{26,4}{2}$$

$$L \leq 13,2$$

Conclusion : la longueur de ce rectangle est comprise entre 5,3 cm et 13,2 cm

$$L \in [5,3; 13,2]$$

Exercice 2 :

Un éleveur possédait un certain nombre de chèvres.

Son enfant qui fait le lycée remarque que le carré du nombre de têtes est égal au triple du nombre de pattes plus le nombre de têtes . quel est le nombre de chèvres ?

Corrigé :

Soit x le nombre de têtes des chèvres

On sait qu'une chèvre a 4 pattes ($4x$)

$$x^2 = 3 \times 4x + x$$

$$x^2 = 13x$$

$$x^2 - 13x = 0$$

$$x(x - 13) = 0$$

Soit $x = 0$ (rejeté) ou $x - 13 = 0 \Rightarrow x = 13$ donc le nombre de chèvres est 13

Exercice 3 :

On considère un trapèze isocèle ABCD de bases $[AB]$ et $[CD]$ tels que : $AB=3\text{cm}$, $CD=5\text{cm}$ et de hauteur $AH=4\text{cm}$.

Si on augmente les trois longueurs AB, CD et AH de $x \text{ cm}$, l'aire du trapèze augmente de 20cm^2

Déterminer x

Corrigé :

$$\text{L'aire du trapèze} = \frac{(3+5) \times 4}{2} = 16 \text{ cm}^2$$

L'aire du trapèze après l'augmentation =

$$\frac{((3+x)+(5+x)) \times (4+x)}{2} = \frac{(8+2x)(4+x)}{2} = \frac{2x^2 + 16x + 32}{2} = x^2 + 8x + 16$$

$$\text{Donc } x^2 + 8x + 16 = 16 + 20$$

$$x^2 + 8x + 16 = 36$$

$$x^2 + 8x - 20 = 0$$

$$\Delta = 8^2 - 4 \times 1 \times -20$$

$$\Delta = 64 + 80 = 144$$

$$\Delta > 0$$

$$x_1 = \frac{-8 + \sqrt{144}}{2 \times 1} = \frac{-8 + 12}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$x_2 = \frac{-8 - \sqrt{144}}{2 \times 1} = \frac{-8 - 12}{2} = \frac{-20}{2} = -10 \text{ (rejeté)}$$

$$\text{Donc } x = 2$$

Exercice 4 :

Trois personnes se partagent une somme de 1 900 UM. La seconde reçoit 70 UM de plus que la première.

La part de la troisième est égal au double de la part de la première moins 150 UM.

Calculer la part de chaque personne.

Corrigé :

Soit x la part de la première personne

la part de la seconde personne $x + 70$

la part de la troisième personne $2x - 150$

$$x + (x + 70) + (2x - 150) = 1900$$

$$4x - 80 = 1900$$

$$4x = 1900 + 80$$

$$4x = 1980$$

$$x = \frac{1980}{4} = 495$$

Donc :

la part de la première personne $x = 495 \text{ UM}$

la part de la seconde personne $x + 70 = 495 + 70 = 565 \text{ UM}$

la part de la troisième personne $2x - 150 = 2 \times 495 - 150 = 840 \text{ UM}$

Exercice 5 :

Chez un marchand de fruits :

* Fatima a payé 1060 UM pour l'achat de 3Kg de bananes et 2Kg de pommes.

* Sidi a payé 980 UM pour l'achat de 4Kg de bananes et 1Kg de pommes. Détermine le prix d'un kilogramme de bananes et d'un kilogramme de pommes.

Corrigé :

Posons x le prix du kilogramme de bananes

y celui du pomme

Fatma : 3kg de bananes + 2kg de pomme = 1060UM

$$3x + 2y = 1060$$

Sidi : 4kg de bananes + 1kg de pomme = 980UM

$$4x + y = 910$$

D'où on obtient le système :

$$\begin{cases} 3x + 2y = 1060 \\ 4x + y = 910 \end{cases}$$

On résout le système

$$\begin{cases} 3x + 2y = 1060 & (1) \\ 4x + y = 910 & (2) \end{cases}$$

On multiplie l'équation (2) par -2 , on obtient

$$\begin{cases} 3x + 2y = 1060 \\ -8x - 2y = -1820 \end{cases}$$

En additionnant les deux équations :

$$\begin{array}{r} 3x + 2y = 1060 \\ -8x - 2y = -1820 \\ \hline = -5x + 0 = -760 \end{array}$$

$$x = \frac{-760}{-5} = 152$$

En remplaçant x par 152 dans l'équation (1)

$$3 \times 152 + 2y = 1060$$

$$456 + 2y = 1060$$

$$2y = 1060 - 456$$

$$2y = 604$$

$$y = \frac{604}{2} = 302$$

$$S = \{(152; 302)\}$$

Le prix du kilogramme de bananes = 152UM

Le prix du kilogramme de pommes = 302UM.

Exercice 1 :

Résoudre les équations suivantes :

a) $3x + 5 = 7$; b) $-2x - 3 = 1$;

c) $5x - 8 = -7$; d) $2 + 3x = 14$

e) $2x + 7 = 4$; f) $3 - 7x = 3$

g) $-\frac{6}{8}x + 6 = 1$; h) $9 - 4x = 5$

i) $-8x + 3 = 11$; j) $\frac{7}{3}x + 6 = -1$

Exercice 2 :

Résoudre les équations suivantes :

a) $3x + 4 = 5x + 9$; b) $-7x + 4 = 5x - 9$

c) $6x - 8 = -3x - 1$; d) $5x + 7 = -x + 4$

e) $4(x - 1) - 3(2 - x) = x - 2$; f) $\frac{3}{8}(\frac{4}{3}x - 8) + \frac{1}{4}x = x + 1$

g) $3 - (6x - 1) = -2(-x + 3)$; h) $\frac{x-2}{2x+3} = \frac{2}{3}$

i) $\frac{5}{4-x} = \frac{-1}{-3+2x}$; j) $\frac{5x+3}{7} = \frac{3-2x}{3}$

Exercice 3 :

Trouver trois nombres entiers consécutifs dont la somme est 2006.

Exercice 4 :

La somme de quatre nombres pairs consécutifs est 196. Quels sont ces quatre nombres ?

Exercice 5 :

Une bouteille et son bouchon pèsent 110 g. La bouteille pèse 100 g de plus que le bouchon.

Quel est le poids de la bouteille ? Quel est le poids du bouchon ?

Exercice 6 :

Trois personnes se partagent une somme de 1 900 UM. La seconde reçoit 70 UM de plus que la première. La part de la troisième est égale au double de la part de la première moins 150 UM. Calculer la part de chaque personne.

Exercice 7 : Si 2 est une des racines de , $2x^2 - 5x + 2 = 0$ quelle est l'autre racine ?

Exercice 8 : Trouve l'équation du second degré dont les racines sont : $\frac{3 \pm \sqrt{41}}{4}$.

Exercice 9 : Résoudre :

$-x^2 + x + 3 = 0$; $2x - x^2 - 2 = 0$;

$(x + 2)^2 - 5 = 2x(x + 1)$

Exercice 10 :

Le coût de fabrication de x objets est donné, en UM , par $C(x) = 0,5x^2 + 5x + 1048$, avec $x \geq 0$. Déterminer x pour que les coûts de fabrication s'élèvent à 3700 UM.

Exercice 11 :

Résoudre les systèmes suivants :

$$a) \begin{cases} x + y = 18 \\ xy = 65 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x + y = -1 \\ xy = -42 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x + y = 4 \\ xy = 5 \end{cases}$$

Exercice 12 :

Résous par la méthode de la combinaison linéaire les systèmes suivants :

$$1) \begin{cases} 2x - y = 3 \\ -6x + 3y = 3 \end{cases} ; \quad 2) \begin{cases} 12x + 14y = 2 \\ 2x + 4y = 2 \end{cases} ; \quad 3) \begin{cases} 9x - 7y = 8 \\ -2x + 7y = 2 \end{cases}$$

Exercice 13 :

Résous par la méthode de substitution les systèmes suivants :

$$1) \begin{cases} x - 2y = 0 \\ 2x - 7y = 12 \end{cases} ; \quad 2) \begin{cases} 2x - y = 2 \\ x + y = 1 \end{cases} ; \quad 3) \begin{cases} x - 3y = 2 \\ 2x - 6y = 4 \end{cases}$$

Exercice 14 :

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ en utilisant la méthode de Cramer.

$$a) \begin{cases} 2x + 2y = 1 \\ 3x + 4y = 6 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} -x - 9y = 0 \\ 3x + y = 8 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 2x - y = 7 \\ 3x + 4y = 5 \end{cases}$$

Exercice 15 :

Résous graphiquement les systèmes suivants :

$$1) \begin{cases} -x + y + 3 = 0 \\ 2x - y - 4 = 0 \end{cases} ; \quad 2) \begin{cases} 3x + y - 1 = 0 \\ 6x + 2y - 2 = 0 \end{cases} ; \quad 3) \begin{cases} -3x - 2y = -3 \\ 6x + 4y + 1 = 0 \end{cases}$$

Exercice 16 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$, les inéquations suivantes :

$$a) -x^2 - 4x + 5 \geq 0 ; \quad b) x^2 + x - 3 \geq 0 ; \quad c) 5x^2 - 4x + 12 < 0 ;$$

$$d) -3x^2 + 4x - 2 < 0 ;$$

Exercice 17 :

Soit ABC un triangle tel que $AB = x + 3$, $AC = 3x + 4$ et $BC = 2x + 5$, où x est un réel positif. Déterminer x pour que ce triangle soit rectangle en A .

Exercice 18 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des inéquations suivantes et donner les solutions sous forme d'intervalles.

$$a) -3x + 1 \leq 0 ; \quad b) \frac{-x}{4} \leq \frac{1}{5} - \frac{x}{3} ; \quad c) x(x + 1) > x^2 + 3 ; \quad d) 5(2 - x) - 3(5x - 1) \geq \frac{3x}{4}$$

Exercice 19 :

Résoudre graphiquement :

$$1) \begin{cases} 2x - y < 3 \\ x + y > 3 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x - 2y \geq -8 \\ 3x + 2y \leq 0 \end{cases} \quad 3) \begin{cases} 3x - y \leq 5 \\ x - y \geq -3 \end{cases}$$

Chapitre 2 :

IPN

Chapitre 2 : Fonctions numériques

1. Définition :

Une fonction f d'un ensemble E vers un ensemble F est un procédé qui à un élément de E associe au plus un élément de F .

C'est-à-dire : $f: E \rightarrow F$

Application : soient les fonctions suivantes :

$$f(x) = 3x - 1, g(x) = 6x^2 - 4x + 1, h(x) = \frac{x-3}{2-x}, k(x) = \frac{2x^2 - 3x + 1}{x-1}$$

Calculer les images des nombres suivants par f, g, h et k :

0; 8; 4; -2; 1; 2

Solution :

$$\begin{aligned} f(0) &= 3 \times 0 - 1 = -1 \\ g(0) &= 6 \times 0^2 - 4 \times 0 + 1 = 1 \\ h(0) &= \frac{0-3}{2-0} = \frac{-3}{2} \\ k(0) &= \frac{2 \times 0^2 - 3 \times 0 + 1}{0-1} = \frac{1}{-1} = -1 \end{aligned}$$

2. Domaine de définition :

On appelle domaine de définition de f l'ensemble noté :

$$D_f = \{x \in \mathbb{R}, \text{Tel que : } f(x) \text{ existe}\}$$

- L'ensemble de définition d'une fonction polynôme est $\mathbb{R}$.
- L'ensemble de définition d'une fonction rationnelle (c'est-à-dire quotient de deux polynômes) est $\mathbb{R}$ sauf les valeurs qui annulent le dénominateur.
- L'ensemble de définition de la racine carrée d'une fonction polynôme est l'ensemble de réelles pour lesquels cette fonction est positive.

Exemple : déterminer le domaine de définition de :

▪ $f(x) = 3x^2 - 4x + 5$

$f(x)$ est un polynôme donc $D_f = \mathbb{R}$

▪ $g(x) = \frac{2x^2 - 3x + 1}{x-2}$, $g(x)$ existe si et seulement si $x - 2 \neq 0$,

$$\text{si } x - 2 = 0 \text{ alors } x = 2$$

$$\text{donc } D_g = \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

▪ $h(x) = \sqrt{x+5}$, h existe si et seulement si $x + 5 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -5$

$$\text{donc } D_h = [-5; +\infty[$$

3. Limites des fonctions de référence :

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow +\infty} x &= +\infty & \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 &= +\infty & \lim_{x \rightarrow -\infty} x &= -\infty \\
 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} &= 0 & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} &= 0 & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^3} &= 0 & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} &= 0 \\
 \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} &= 0 & \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} &= 0 & \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^3} &= 0 \\
 \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 &= (-\infty)^2 = +\infty & \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (ax^2 + bx + c) &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} ax^2 \\
 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^2 + bx + c}{dx + e} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^2}{dx} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax}{d} \\
 & \text{(telque } a, b \text{ et } c \text{ sont des réels et } dx + e \neq 0)
 \end{aligned}$$

Exemple :

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 5x - 3) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \\
 \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 + 5x - 3 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = (-\infty)^2 = +\infty
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 6x + 9}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \\
 \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + 1}{x^2 - x + 1} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x} = \frac{2}{-\infty} = 0
 \end{aligned}$$

A retenir :

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{0^+} &= +\infty \\
 \frac{-1}{0^-} &= +\infty \\
 \frac{l}{0^+} &= \begin{cases} +\infty & \text{si } l > 0 \\ -\infty & \text{si } l < 0 \end{cases} \\
 \frac{l}{0^-} &= \begin{cases} -\infty & \text{si } l > 0 \\ +\infty & \text{si } l < 0 \end{cases} \\
 \frac{l}{\infty} &= 0, l \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

Application :

soit $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{x - 2}$

- Déterminer Df
- Calcule : $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$

Réponse :

- $Df = \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } x - 2 \neq 0\}$
 $Df = \mathbb{R} - \{2\} =]-\infty; 2[\cup]2; +\infty[$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 3x + 1}{x - 2} = \frac{-1}{0^+} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 3x + 1}{x - 2} = \frac{-1}{0^-} = +\infty\end{aligned}$$

Les formes indéterminées :

Les quatre formes indéterminées sont:

" $+\infty - \infty$ ou $-\infty + \infty$ ", " $0 \times \infty$ ", " $\frac{\infty}{\infty}$ " et " $\frac{0}{0}$ "

Exemple :

Déterminer les limites suivantes :

$$\forall x \in Df \quad \lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 6x + 8} \right) = \frac{4^2 - 7 \times 4 + 12}{4^2 - 6 \times 4 + 8} = \frac{0}{0} \text{ (F.I.) } \text{ Levons l'indétermination}$$

On a : $x^2 - 7x + 12 = (x - 4)(x - 3)$

$$x^2 - 6x + 8 = (x - 4)(x - 2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 6x + 8} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x - 4)(x - 3)}{(x - 4)(x - 2)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 3}{x - 2} = \frac{4 - 3}{4 - 2} = \frac{1}{2}, \forall x \in Df$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x - 3\sqrt{x} = +\infty - \infty \text{ (F.I.) } \text{ Levons l'indétermination}$$

$$\forall x \in [0; +\infty[\quad x - 3\sqrt{x}$$

$$= x \left(1 - \frac{3\sqrt{x}}{x} \right), \forall x \neq 0$$

$$= x \left(1 - \frac{3}{\sqrt{x}} \right)$$

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{\sqrt{x}} = 0 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{3}{\sqrt{x}} = 1 \end{cases}$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{3}{\sqrt{x}} \right) = +\infty \times 1 = +\infty$$

$$\text{D'où } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 3\sqrt{x}) = +\infty$$

Les asymptotes :

soit f une fonction et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$

- Si $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a \in \mathbb{R}$ alors $y = a$ est une AH (asymptote horizontale) pour C_f
- Si $\lim_{x \rightarrow a^\pm} f(x) = \infty$ alors $x = a$ est une AV (asymptote verticale) pour C_f
- Si $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$ alors $y = ax + b$ est une AO (asymptote oblique)

Soit $f(x) = \frac{3x^2+x+1}{x^2-3x+2}$

- 1) Déterminer Df et préciser ses bornes
- 2) Calculer les limites aux bornes de Df et en déduire les asymptotes à Cf

Solution :

La fonction f existe si $x^2 - 3x + 2 \neq 0$

si $x^2 - 3x + 2 = 0$ on a : $1 + (-3) + 2 = 0$

$x_1 = 1$ et $x_2 = 2$

Donc $Df = \mathbb{R} \setminus \{1; 2\} =]-\infty; 1[\cup]1; 2[\cup]2; +\infty[$

Les bornes sont $-\infty; 1; 2$ et $+\infty$

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$x^2 - 3x + 2$	+	0	- 0	+

Les limites :

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x^2+x+1}{x^2-3x+2} = \frac{5}{0^+} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3x^2+x+1}{x^2-3x+2} = \frac{5}{0^-} = -\infty \end{cases} \Rightarrow x = 1 \text{ est une A.V pour } Cf$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3x^2+x+1}{x^2-3x+2} = \frac{15}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3x^2+x+1}{x^2-3x+2} = \frac{15}{0^+} = +\infty \end{cases} \Rightarrow x = 2 \text{ est une A.V pour } Cf$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2+x+1}{x^2-3x+2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2}{x^2} = 3 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2+x+1}{x^2-3x+2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{x^2} = 3 \end{cases} \Rightarrow y = 3 \text{ est une A.H pour } Cf$$

Les branches infinies :

Lorsque :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$$

il y a 4 possibilités :

1^{ère} possibilité : Asymptote oblique :

Si

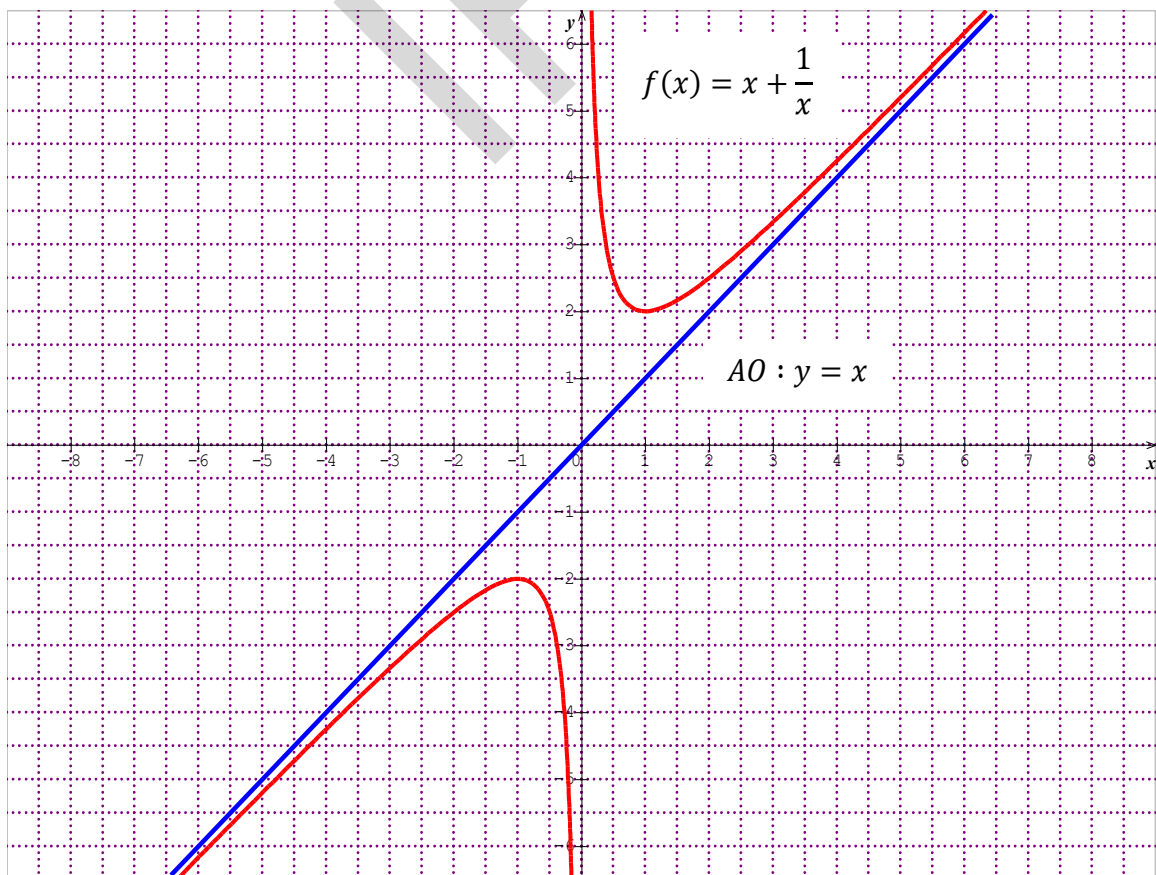
$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a \neq 0$ et $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - ax) = b \in \mathbb{R}$ alors Cf admet une AO d'équation $y = ax + b$

Exemple : $f(x) = x + \frac{1}{x}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x + \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^2 + 1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x + \frac{1}{x} - x = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ alors la droite d'équation } y = x \text{ est une AO pour Cf}$$



2^{eme} possibilité : Branche parabolique de direction (Ox) :

Si :

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ et $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ alors Cf admet une BP de direction (Ox)

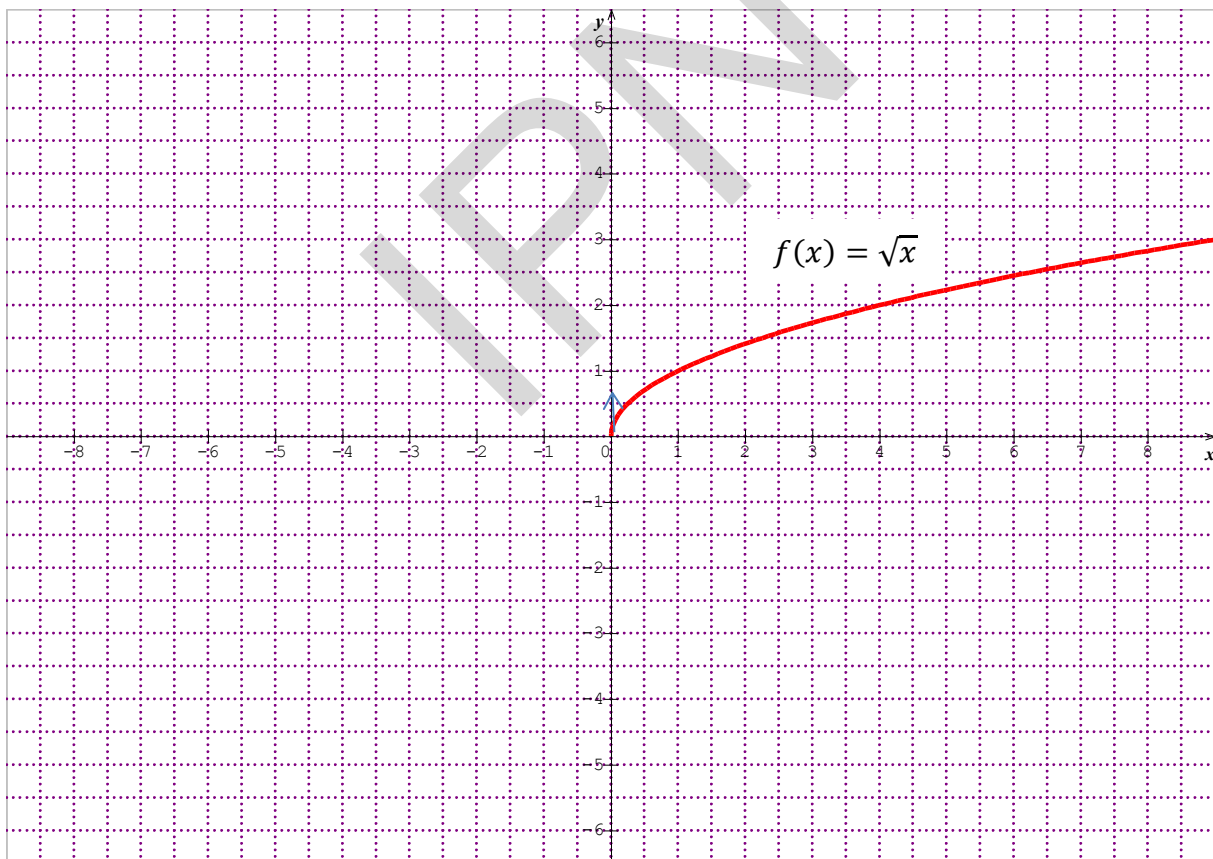
Exemple :

$$f(x) = \sqrt{x}$$

$$Df = [0; +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0 \text{ alors Cf admet une BP de direction } (Ox)$$



3^{ème} possibilité : Branche parabolique de direction (Oy) :

Si

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$$

et $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$ alors Cf admet une BP de direction (Oy)

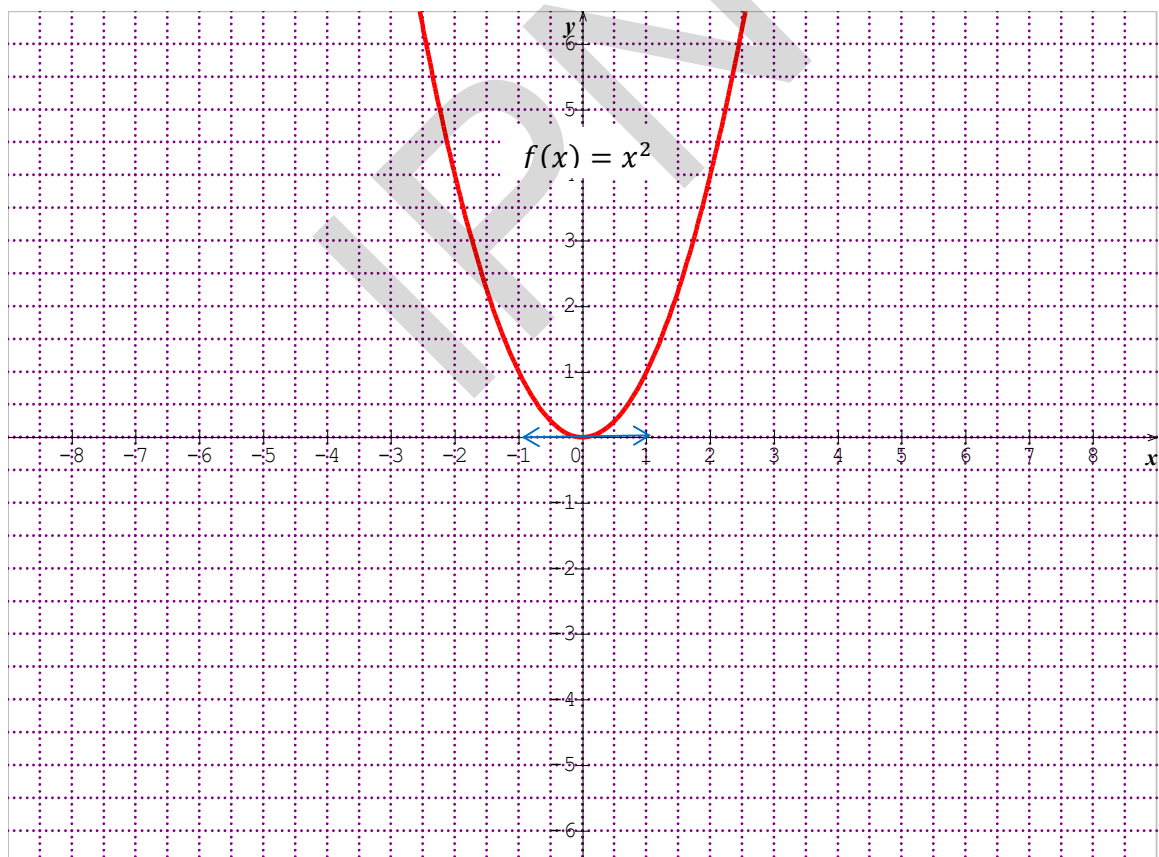
Exemple :

$$f(x) = x^2$$

$$Df =]-\infty; +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x} \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ alors Cf admet une BP de direction (Oy)



4^{ème} possibilité : Branche parabolique de direction la droite d'équation $y = ax$:

Si

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \pm\infty$$

$$\text{et } \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a \neq 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax) = \pm\infty \right)$$

alors Cf admet une BP de direction la droite d'équation
 $y = ax$

Exemple :

$$f(x) = x + \sqrt{x}$$

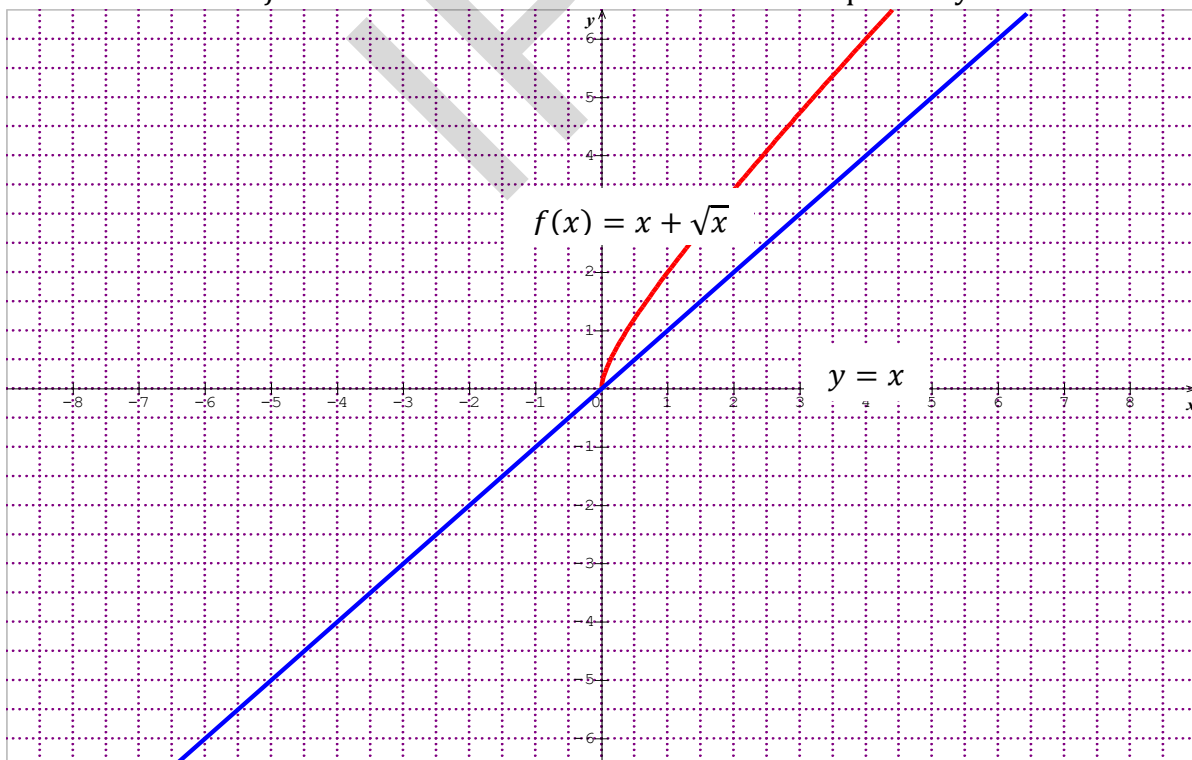
$$Df = [0; +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \sqrt{x}) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x + \sqrt{x}}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x} + \frac{\sqrt{x}}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \sqrt{x} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

alors Cf admet une BP de direction la droite d'équation $y = x$



4. Dérivabilité :

Formules de dérivation :

Fonction	Df	Dérivée
$f(x) = k$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 1$
$f(x) = ax$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = a$
$f(x) = ax + b$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = a$
$f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
$f(x) = \frac{1}{x^n}, n \in \mathbb{N}$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+ =]0; +\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \forall x \in]0; +\infty[$

Dérivées et opérations sur les fonctions :

Fonction	Dérivée
$u + v$	$u' + v'$
$ku, k \in \mathbb{R}$	ku'
uv	$u'v + uv'$
$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$

■ Application :

- $f(x) = 3x - 1, f'(x) = 3, \forall x \in \mathbb{R}$
- $g(x) = \frac{x^2 - 2x + 3}{x - 2}, g'(x) = \frac{(2x - 2)(x - 2) - 1(x^2 - 2x + 3)}{(x - 2)^2} = \frac{2x^2 - 4x - 2x + 4 - x^2 + 2x - 3}{(x - 2)^2} = \frac{x^2 - 4x + 1}{(x - 2)^2}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$
- $h(x) = \sqrt{2x + 1}, h'(x) = \frac{2}{2\sqrt{2x + 1}}, \forall x \in \left] \frac{-1}{2}; +\infty \right[$

Sens de variation :

Pour étudier le sens de variation d'une fonction f on calcule $f'(x)$ puis on étudie son signe .

Soit f une fonction définie sur un intervalle I

Si $f'(x) > 0$ alors f est $\nearrow$ (croissante) sur I

Si $f'(x) < 0$ alors f est $\searrow$ (décroissante) sur I

Si $f'(x) = 0$ alors f est constante sur I

Propriété :

L'équation de la tangente à une courbe représentative d'une fonction f en $x_0 \in Df$ telle que f est dérivable en x_0 est : $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

Exemple :

Soit la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 4$$

Déterminer l'équation de la tangente à Cf au point d'abscisse 2.

Solution :

L'équation de la tangente à Cf au point d'abscisse 2 est :

$$y = f'(2)(x - 2) + f(2)$$

On détermine l'expression de la dérivée : $f'(x) = 3x^2 - 6x + 3$

On calcule ensuite :
$$\begin{cases} f'(2) = 3 \times 2^2 - 6 \times 2 + 3 = 12 - 12 + 3 = 3 \\ f(2) = 2^3 - 3 \times 2^2 + 3 \times 2 + 4 = 8 - 12 + 6 + 4 = 6 \end{cases}$$

On obtient donc l'équation de la tangente suivante :

$$y = 3(x - 2) + 6$$

$$y = 3x - 6 + 6$$

$$y = 3x$$

Etude de variations d'une fonction homographique :

Definition :

- On appelle fonction homographique toute fonction f qui peut s'écrire sous la forme $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ où $a, b, c \neq 0$ et d sont des réels tels que $ad - bc \neq 0$.
- Une fonction homographique est définie pour tout réel x tel que le dénominateur $cx + d$ ne s'annule pas. La fonction $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ est définie sur $Df = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{-d}{c} \right\} =]-\infty; \frac{-d}{c}[\cup]\frac{-d}{c}; +\infty[$
- Toute fonction homographique peut se mettre sous la forme réduite

$$f(x) = A + \frac{B}{x - \alpha} \text{ avec } B \neq 0.$$

$$A = \frac{a}{c}, B = \frac{bc - ad}{c^2} \text{ et } \alpha = \frac{-d}{c}$$

- La courbe représentative d'une fonction homographique est une **hyperbole**.
- Elle admet deux asymptotes, l'une horizontale d'équation $y = A$, l'autre verticale d'équation $x = \alpha = \frac{-d}{c}$
- Le point d'intersection de ces deux asymptotes $\Omega(\alpha; A)$ est le **centre de symétrie** de l'hyperbole (Cf).

$B < 0$

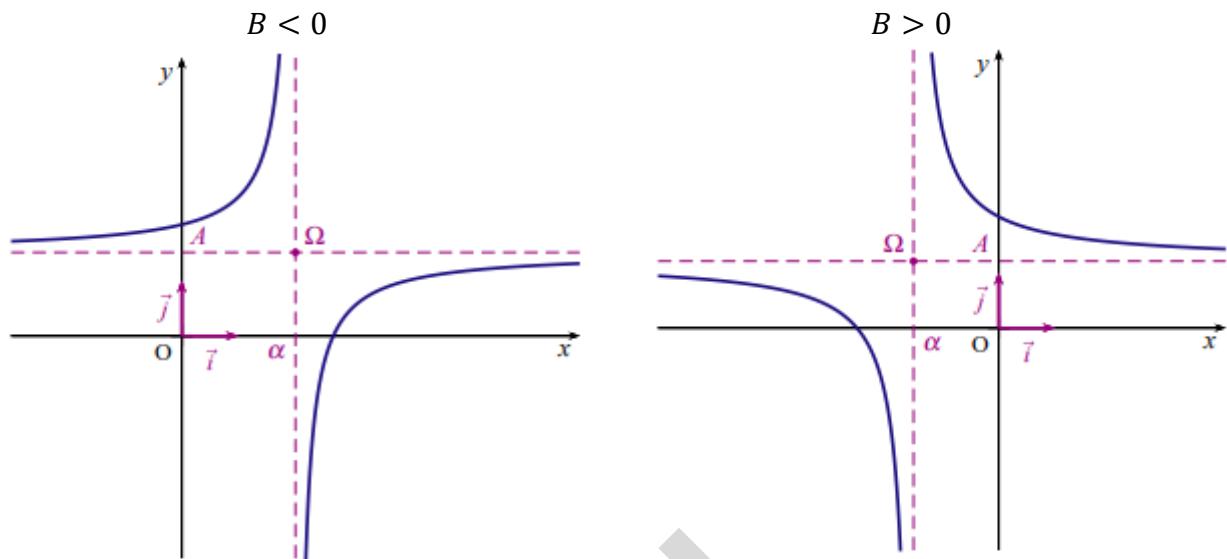
x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$			

$B > 0$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$			

Représentation graphique d'une fonction homographique

- La courbe représentative d'une fonction homographique est une hyperbole.
- La forme réduite $f(x) = A + \frac{B}{x-\alpha}$ avec $B \neq 0$ d'une fonction homographique fait apparaître le centre de symétrie $\Omega(\alpha; A)$ ainsi que les deux asymptotes d'équation $x = \alpha$ et $y = A$ de l'hyperbole.



Exercices corrigés :

Exercice1 :

Quelle est la valeur minimale du produit de deux nombres si leur différence est égal à 12 ?

Corrigé

Soient x et y ces deux nombres

Posons $f(x) = xy$ mais $x - y = 12$

Equivaut que $y = x - 12$

D'où $f(x) = x(x - 12)$

$$f(x) = x^2 - 12x$$

La valeur minimale du produit est égale à la valeur minimale de la fonction $f(x)$

$$f'(x) = 2x - 12$$

$$f'(x) = 0$$

$$2x - 12 = 0$$

$$2x = 12$$

$$x = \frac{12}{2} = 6$$

Donc la valeur minimale du produit est

$$f(6) = 6^2 - 12 \times 6 = 36 - 72 = -36$$

Exercice 2 :

Une entreprise fabrique un produit .

Le coût total en fonction du nombre d'unités produites x (en dizaines d'articles)

Et donné par le trinôme $C(x) = x^2 - 6x + 20$

Quel est le nombre d'unités à fabriquer pour rendre le coût minimal ?

Corrigé :

$$C(x) = x^2 - 6x + 20$$

$$C'(x) = 2x - 6$$

le coût est minimale minimal si $C'(x) = 0$

$$2x - 6 = 0$$

$$2x = 6 \Rightarrow x = \frac{6}{2}$$

$$x = 3$$

Donc le nombre d'unités à fabriquer pour rendre le coût minimal est 3

Exercice 3 :

Le propriétaire d'un champ estime que s'il plante 60 poiriers, le rendement moyen de 480 poires par arbre et que ce rendement diminuera de 5 poires par arbre pour chaque poirier additionnel planté dans le champ. Combien le propriétaire devrait il planter de poiriers pour que le rendement du verger soit maximal ?

Corrigé :

Soit x le nombre d'arbres (poirier)

Le rendement :

$$\begin{aligned}R(x) &= (60 + x)(480 - 5x) \\R(x) &= 40800 - 300x + 480x - 5x^2 \\R(x) &= -5x^2 + 180x + 40800 \\R'(x) &= -10x + 180\end{aligned}$$

Le rendement est maximal :

$$\begin{aligned}R'(x) &= 0 \\-10x + 180 &= 0 \\-10x &= -180 \\x &= \frac{-180}{-10} = 18\end{aligned}$$

Exercice 4 :

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{2x-3}{x+1}$ et Cf sa courbe représentative.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f
2. Montrer que pour tout x de Df , $f(x) = 2 - \frac{5}{x+1}$
3. En déduire les variations de f sur Df puis Dresser le tableau de variation de f .
4. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la courbe Cf avec chacun des axes du repère.
5. Tracer la courbe représentative Cf de f .

Corrigé :

1. f existe si $x + 1 \neq 0$
 $x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$
Donc $Df = \mathbb{R} \setminus \{-1\} =]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[$
2. $f(x) = 2 - \frac{5}{x+1} = \frac{2(x+1)-5}{x+1} = \frac{2x+2-5}{x+1} = \frac{2x-3}{x+1}$

Donc pour tout x de Df , $f(x) = 2 - \frac{5}{x+1}$.

3. f est écrit sous la forme $f(x) = A + \frac{B}{x-\alpha}$, $A = 2$, $B = -5$ et $\alpha = -1$

$B < 0$ donc f est croissante sur Df

Tableau de variations :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)$			

4. Intersection avec l'axe des ordonnées :

$$f(0) = 2 - \frac{5}{0+1} = 2 - 5 = -3$$

d'où le point $A(0; -3)$ est le point d'intersection de Cf avec l'axe des ordonnées (Oy)

Intersection avec l'axe des abscisses :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x-3}{x+1} = 0 \Leftrightarrow 2x-3 = 0 \Leftrightarrow 2x = 3 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} = 1,5$$

d'où le point $B(1,5; 0)$ est le point d'intersection de Cf avec l'axe des abscisses (ox)

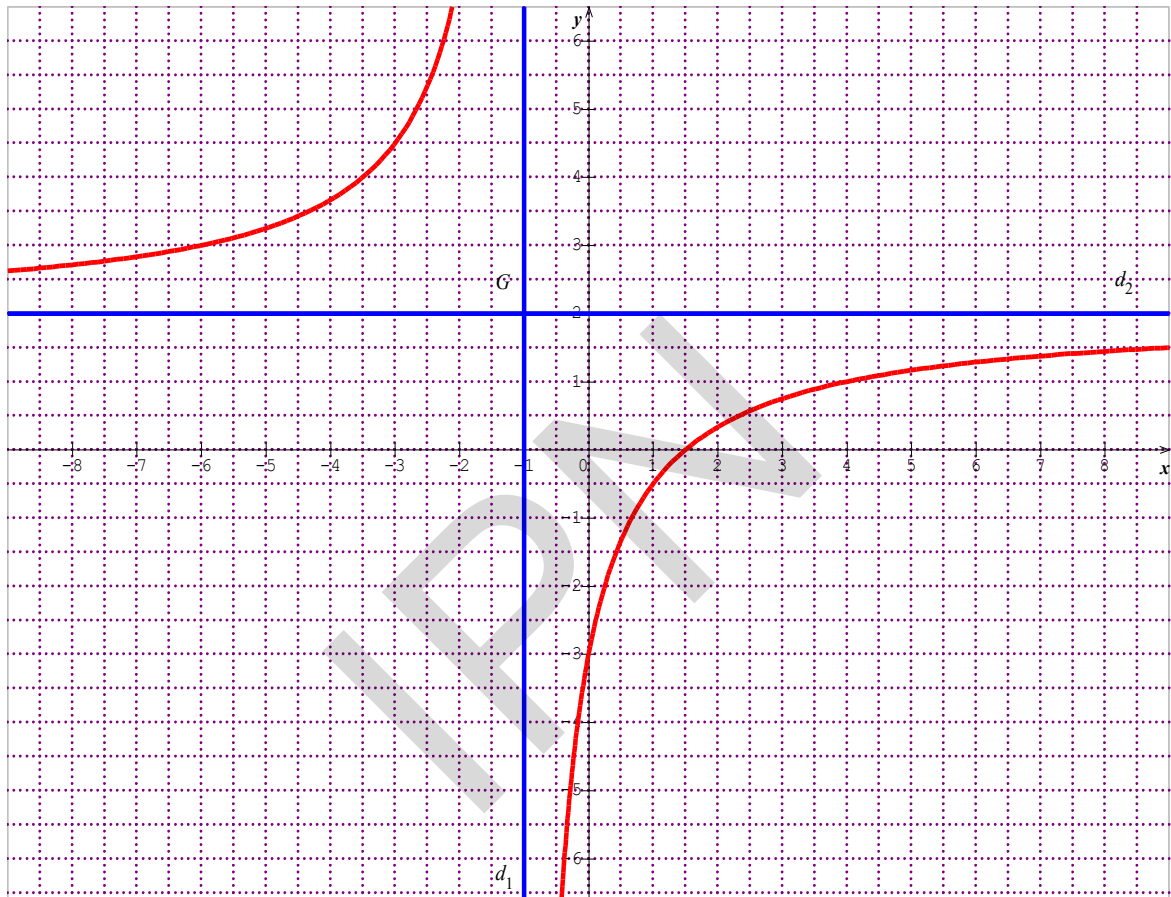
5. Représentation graphique de f

Cf est une hyperbole.

On a la droite d_1 d'équation $x = \alpha$, $x = -1$ est asymptote verticale AV

et la droite d_2 d'équation $y = A$, $y = 2$ est asymptote horizontale AH

Le point $G(\alpha; A)$, $G(-1; 2)$ est le centre de symétrie de Cf



Exercice5 :

On considère la fonction f définie par : $f(x) = x^2 - 7x + 5$

- 1) Déterminer le domaine de définition de f
- 2) Déterminer la fonction dérivée.
- 3) Etudier le signe de la dérivée
- 4) Etablir le tableau de variations.
- 5) Quelle est l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 2.

Corrigé :

- 1) Le domaine de définition de f :

$$f(x) = x^2 - 7x + 5$$

$Df = \mathbb{R}$ car f est un polynôme

- 2) La fonction dérivée :

$$f'(x) = 2x - 7$$

3) Le signe de la dérivée :

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 7 = 0 \Leftrightarrow 2x = 7 \Leftrightarrow x = \frac{7}{2}$$

$$\text{Donc : } f'(x) < 0 \text{ si } x < \frac{7}{2}$$

$$f'(x) > 0 \text{ si } x > \frac{7}{2}$$

4) Le tableau de variations :

x	$-\infty$	$7/2$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$-7,25$	$+\infty$

5) L'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 2 :

$$y = f'(x)(x - x_0) + f(x)$$

$$y = f'(2)(x - 2) + f(2)$$

$$f(2) = 2^2 - 7 \times 2 + 5 = -5$$

$$f'(2) = 2 \times 2 - 7 = -3$$

$$y = f'(2)(x - 2) + f(2)$$

$$y = -3(x - 2) - 5 = -3x + 6 - 5 = -3x + 1$$

$$\text{Donc : } y = -3x + 1$$

Exercices généraux

Exercice 1 :

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes définies par

$$\begin{array}{lll} 1) f(x) = 3x - 2x + 1 & 2) f(x) = \frac{x}{2x-4} & 3) f(x) = \sqrt{-3x+6} \\ 4) f(x) = 2 - \frac{1}{x} & 5) f(x) = \frac{8}{x-3} & 6) f(x) = \frac{x+3}{2x+1} \end{array}$$

Exercice 2 :

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{2x-3}{5-4x}$$

- 1) Déterminer le domaine de définition de f
- 2) Déterminer la fonction dérivée.
- 3) Étudier le signe de la dérivée
- 4) Établir le tableau de variations.
- 5) Quelle est l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 3.

Exercice 3 :

Préciser le domaine de définition de chacune des fonctions

$$a) f(x) = x^3 - 4x + 4. \quad b) f(x) = \frac{x^2}{x+4}; \quad c) f(x) = \sqrt{4-8x}; \quad d) f(x) = \frac{x^2-x+3}{x^2+3}$$

Exercice 4: Fonction polynôme : Image et antécédent

On donne la fonction polynôme f définie par : $f(x) = -x^2 + 2x + 3$.

1. Calculer l'image par f de chacun des nombres : -2 ; 1 et $\frac{1}{2}$
2. Calculer les antécédents des nombres par f de chacun des nombres : 0 ; -1 et 2 .

Exercice 5: Limite en x_0 d'une fonction définie en 0 .

Calcule la limite en x_0 de chacune des fonctions :

$$\begin{array}{lll} 1) f(x) = x^2 - 5x + 6 & x_0 = -3 & 2) f(x) = 2x^2 - 4x^2 + 7x + 1 \quad x_0 = 0 \\ 3) f(x) = \frac{-2x+1}{-x+3} & x_0 = 2 & 4) f(x) = \frac{5x^2-3}{x^2+4} \quad x_0 = -2 \\ 5) g(x) = \sqrt{x-5} & x_0 = 5 & 6) f(x) = \sqrt{5x+4} \quad x_0 = \frac{-4}{5} \end{array}$$

Exercice 6: Limite à l'infini d'une fonction définie à l'infini.

a) Calcule :

$$1) \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 - 5x + 6 \quad 2) \lim_{x \rightarrow +\infty} -3x^3 + 5x^4 - 7 \quad 3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-8}{-2x+4}$$

Exercice 7: Calcul de la dérivée d'une fonction

Déterminer la fonction dérivée f' de f .

$$\begin{array}{lll} 1) f(x) = x^2 + x - 1 & 2) f(x) = -2x^3 - x + 6 & 3) f(x) = x^7 \\ 4) f(x) = 5x^2 + 3x - 5 & 5) f(x) = \frac{2x+1}{x-2} & 6) f(x) = \frac{2x^2+1}{x^3-2} \end{array}$$

Exercice 8 : L'équation de la tangente

Déterminez l'équation de la tangente à la courbe (C) représentant la fonction f au point A d'abscisse x_A dans les cas suivants :

$$\begin{array}{ll} 1) f(x) = x^2 + 3x - 12 & x_A = 5 \\ 2) f(x) = x^3 - 3x + 6 & x_A = 1 \\ 3) f(x) = x^2 + 2x + 3 & x_A = 5 \\ 4) f(x) = \frac{2x+1}{x-2} & x_A = 3 \end{array}$$

Exercice 9 : Approfondissement

On considère la fonction suivante : $g(x) = \frac{x^2+4x+5}{x+2}$

1. Détermine le domaine de définition de g .
2. Calcule les limites aux bornes de Dg . En déduire les asymptotes
3. Détermine les réels a, b et c tels que : $g(x) = ax + b + \frac{c}{x+2}$
4. Montre que la droite d'équation $y = x + 2$ est une asymptote oblique à Cg .

Exercice 10 : Fonction polynôme

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = x^3 - 3x + 2$.

1. Déterminer le domaine de définition Df de f .
2. Calculer les limites aux bornes de Df .
3. Calculer f' la fonction dérivée de f .
4. Dresser le tableau de variation de f .
5. Montrer que $A(0 ; 2)$ est centre de symétrie de la courbe Cf représentation graphique de f dans le repère $(O ; I ; J)$.
6. Donner une équation de la droite (d) tangente à Cf .

Exercice 11 : Fonction rationnelle

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = \frac{2x-3}{x+1}$.

On appelle Cf la courbe représentation graphique de f dans un repère orthonormé $(O ; I ; J)$, unité 1cm.

1. Déterminer le domaine de définition Df de f .
2. Calculer les limites aux bornes de Cf .
3. En déduire l'existence des deux asymptotes.
4. Montrer que le point $M(-1 ; 2)$ est un centre de symétrie de Cf .
5. Calculer f' la fonction dérivée de f . puis dresser le tableau de variation de f .
6. Tracer Cf et ses asymptotes.

Chapitre 3 :

IPN

Chapitre 3 : Suites numériques

1. Définition : La suite numérique est une application de $\mathbb{N}$ ou d'une partie de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$

Une suite numérique peut être définie de deux manières différentes :

I. Suite définie par : **une expression explicite** : permettant de calculer u_n en fonction de n

Exemple : soit u_n la suite définie par : $u_n = 2n + 3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1) Calculer : les quatre 1^{ers} termes de la suite u_n

2) Calculer : $u_{n+1} - u_n$

Solution :

$$1) u_0 = 2 \times 0 + 3 = 3$$

$$u_1 = 2 \times 1 + 3 = 5$$

$$u_2 = 2 \times 2 + 3 = 7$$

$$u_3 = 2 \times 3 + 3 = 9$$

$$2) u_{n+1} - u_n = (2(n+1) + 3) - (2n + 3) \\ = 2n + 2 + 3 - 2n - 3 = 2$$

II. Une suite définie par **une relation de récurrence**

Ces suites s'appellent des **suites récurrentes**, elles sont définies par le (ou les) premier (s) terme (s) et une relation entre deux ou plusieurs termes consécutifs

Exemple1 :

Soit u_n la suite récurrente définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 5u_n - 7 \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Calculer : u_1, u_2 et u_3

$$u_1 = 5u_0 - 7 = 5 \times 2 - 7 = 3$$

$$u_2 = 5u_1 - 7 = 5 \times 3 - 7 = 8$$

$$u_3 = 5u_2 - 7 = 5 \times 8 - 7 = 33$$

Exemple2 :

Soit V_n la suite récurrente définie par : $\begin{cases} V_0 = 1, V_1 = -1 \\ V_{n+2} = 2V_{n+1} - 3V_n \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Calculer : V_2, V_3 et V_4

Solution :

$$V_2 = 2V_1 - 3V_0 = 2 \times (-1) - 3 \times 1 = -5$$

$$V_3 = 2V_2 - 3V_1 = 2 \times (-5) - 3 \times (-1) = -7$$

$$V_4 = 2V_3 - 3V_2 = 2 \times (-7) - 3 \times (-5) = 1$$

2. Suites majorées, suites minorées, suites bornées :

Soit U_n une suite numérique

- On dit que la suite U_n est majorée s'il existe un réel M tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \leq M$. On dit alors que U_n est majorée par M
- On dit que la suite U_n est minorée s'il existe un réel m tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \geq m$. On dit alors que U_n est minorée par m
- On dit que la suite U_n est bornée si elle est à la fois majorée et minorée.

Exemple :

soit U_n la suite définie par : $U_n = \frac{n+1}{2n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$

Montrer que : $\frac{1}{2} < U_n \leq 1$

Solution :

1) Montrons que : $U_n \leq 1$

$$1 - U_n = 1 - \frac{n+1}{2n+1} = \frac{(2n+1) - (n+1)}{2n+1} = \frac{n}{2n+1} \geq 0$$

donc $1 - U_n \geq 0$
 $1 \geq U_n$
 $U_n \leq 1$

2) Montrons que : $\frac{1}{2} < U_n$

$$U_n - \frac{1}{2} = \frac{n+1}{2n+1} - \frac{1}{2} = \frac{2(n+1) - (2n+1)}{2(2n+1)} = \frac{1}{2(2n+1)} > 0$$

$$\text{Donc } U_n - \frac{1}{2} > 0$$

$$U_n > \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} < U_n$$

$$\text{Par suite } \frac{1}{2} < U_n \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$$

On dit que la suite U_n est majorée par 1 car $U_n \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$

On dit que la suite U_n est minorée par $\frac{1}{2}$ car $\frac{1}{2} < U_n, \forall n \in \mathbb{N}$

On dit que la suite U_n est bornée car $\frac{1}{2} < U_n \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$

Sens de variation d'une suite :

- On dit qu'une suite est croissante si : $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} \geq U_n$
- On dit qu'une suite est décroissante si : $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} \leq U_n$
- On dit qu'une suite est constante si : $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = U_n$
- Si une suite est croissante, décroissante la suite est dite monotone.

Dans la pratique pour déterminer la variation d'une suite, on déterminera le signe de $U_{n+1} - U_n$.

Si cette différence est positive, pour tout n , la suite sera croissante.

Si la différence est négative pour tout n , la suite sera décroissante.

Lorsque tous les termes de la suite sont positifs, on peut aussi calculer le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$. et on le compare à 1.

Si ce rapport est supérieur ou égal à 1 pour tout n , la suite sera croissante. Si le rapport est inférieur à 1 pour tout n , la suite sera décroissante. Si le rapport est égal à 1 pour tout n , la suite sera constante.

Exemples :

⇒ Montrer que la suite définie par : $u_n = \frac{3n-2}{n+1}$ est croissante.

$$\text{Calculons alors : } u_{n+1} - u_n = \frac{3(n+1)-2}{(n+1)+1} - \frac{3n-2}{n+1} = \frac{3n+1}{n+2} - \frac{3n-2}{n+1} = \frac{(3n+1)(n+1) - (3n-2)(n+2)}{(n+2)(n+1)} = \frac{3n^2 + 3n + n + 1 - 3n^2 - 6n + 2n + 4}{(n+2)(n+1)} = \frac{5}{(n+2)(n+1)}$$

Comme $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{5}{(n+2)(n+1)} > 0$, la suite u_n est croissante.

⇒ Montrer que la suite définie par : $v_n = \frac{2^{3n}}{3^{2n}}$ est décroissante. Tous les termes de la

$$\text{suite sont positifs, calculons alors : } \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\frac{2^{3(n+1)}}{3^{2(n+1)}}}{\frac{2^{3n}}{3^{2n}}} = \frac{2^{3n+3}}{3^{2n+2}} \times \frac{3^{2n}}{2^{3n}} = \frac{2^3 \times 2^3 \times 2^3}{3^2 \times 3^2 \times 2^3} = \frac{2^3}{3^2} = \frac{8}{9}$$

Comme $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{8}{9} < 1$, la suite v_n est décroissante.

4. Suites arithmétiques et suites géométriques

4-1- Suites arithmétiques :

Définition

- Une suite u définie sur $\mathbb{N}$ est dite arithmétique s'il existe un réel r tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $u_{n+1} = u_n + r$

r est la raison de la suite et u_0 est son premier terme

- Soit u_n une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r on a

$$u_n = u_0 + nr$$

- Si u_n est une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r et si n et p sont deux entiers naturels alors on a :

$$u_n = u_p + (n-p)r$$

Exemple1 :

Soit la suite (un) définie par $u_0 = 2$ et $r = 5$.

Déterminer u_1, u_2, u_3, u_4 .

$$u_1 = u_0 + r = 2 + 5 = 7$$

$$u_2 = u_1 + r = 7 + 5 = 12$$

$$u_3 = u_2 + r = 12 + 5 = 17$$

$$u_4 = u_3 + r = 17 + 5 = 22$$

Exemple2 :

Montrer que la suite définie par : $u_n = 2n + 3$ est arithmétique.

On calcule la différence entre deux termes consécutifs quelconques :

$$u_{n+1} - u_n = 2(n+1) + 3 - (2n + 3)$$

$$= 2n + 2 + 3 - 2n - 3$$

$$= 2$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{U}_{n+1} - \mathcal{U}_n = 2$.

La suite $\mathcal{U}_n$ est une suite arithmétique de raison 2 et de premier terme $\mathcal{U}_0 = 3$.

Exemple3 :

Soit une suite $\mathcal{U}_n$ arithmétique de raison r . On donne : $\mathcal{U}_{17} = 24$ et $\mathcal{U}_{40} = 70$. Trouver la raison r et le premier terme $\mathcal{U}_0$.

1) On exprime $\mathcal{U}_{40}$ en fonction de $\mathcal{U}_{17}$, on a alors :

$$\mathcal{U}_{40} = \mathcal{U}_{17} + (40 - 17)r$$

$$\mathcal{U}_{40} = \mathcal{U}_{17} + 23r$$

$$23r = \mathcal{U}_{40} - \mathcal{U}_{17}$$

$$23r = 46$$

$$r = 2$$

2) On peut alors trouver $\mathcal{U}_0$:

$$\mathcal{U}_{17} = \mathcal{U}_0 + 17r$$

$$\mathcal{U}_0 = \mathcal{U}_{17} - 17 \times 2$$

$$\mathcal{U}_0 = 24 - 34 = -10$$

Variations d'une suite arithmétique:

Soit $(\mathcal{U}_n)$ une suite arithmétique de raison r

- si $r > 0$ alors $(\mathcal{U}_n)$ est croissante

- si $r < 0$ alors $(\mathcal{U}_n)$ est décroissante

- si $r = 0$ alors $(\mathcal{U}_n)$ est constante

La somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique :

- La somme des n premiers naturels vérifie :

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

- La Somme des $n + 1$ premiers termes d'une suite arithmétique $\mathcal{U}_n$ de raison r et de premier terme $\mathcal{U}_0$ vérifie : $\mathcal{U}_0 + \mathcal{U}_1 + \dots + \mathcal{U}_n = (n + 1) \left(\frac{\mathcal{U}_0 + \mathcal{U}_n}{2} \right)$
- La Somme des $n - p + 1$ d'une suite arithmétique (un) de raison r et de premier terme $\mathcal{U}_p$ vérifie: $\mathcal{U}_p + \mathcal{U}_{p+1} + \dots + \mathcal{U}_n = (n - p + 1) \left(\frac{\mathcal{U}_p + \mathcal{U}_n}{2} \right)$
- D'une façon générale, la Somme S_n des premiers termes d'une suite arithmétique vérifie:

$$S_n = \text{Nb de termes} \times \left(\frac{\text{Somme des termes extrêmes}}{2} \right)$$

Application :

Calculer la somme des nombres impairs inférieurs à 100.

Généraliser ce résultat avec la somme des nombres impairs inférieurs à $2n$.

Il y a 50 nombres impairs inférieurs à 100. Le premier terme est 1 et le dernier 99, donc :

$$1 + 3 + 5 + \dots + 99 = 50 \times \left(\frac{1+99}{2} \right) = 50^2 = 2500$$

Généralisons ce résultat. Il y a n nombres impairs inférieurs à $2n$. Le premier terme est 1 et le dernier $2n - 1$

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n \times \left(\frac{1 + (2n - 1)}{2} \right) = n \times \frac{2n}{2} = n^2$$

La somme des n premiers nombres impairs est égal à n^2 .

4-2-Suites géométriques

Définition :

U_n est une suite géométrique si il existe un réel q tel que pour tout entier n :

$$U_{n+1} = U_n \times q$$

q est la raison de la suite

Si U_n est une suite géométrique de raison q alors :

$$U_n = U_0 \times q^n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Si le premier terme est u_p , alors : $U_n = U_p \times q^{n-p}$

Exemple1 : Soit la suite U_n définie par $U_0 = 3$ et $q = 2$.

Déterminer U_1, U_2, U_3, U_4 .

$$U_1 = q \times U_0 = 2 \times 3 = 6$$

$$U_2 = q \times U_1 = 2 \times 6 = 12$$

$$U_3 = q \times U_2 = 2 \times 12 = 24$$

$$U_4 = q \times U_3 = 2 \times 24 = 48$$

Exemple2 : Montrer que la suite définie par : $U_n = 5^{n+3}$ est géométrique.

On calcule le rapport entre deux termes consécutifs quelconques :

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{5^{n+1+3}}{5^{n+3}} = 5^{n+1+3-n-3} = 5$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{U_{n+1}}{U_n} = 5$. La suite U_n est une suite géométrique de raison 5 et de premier terme $U_0 = 5^3 = 125$.

Exemple3 :

Soit une suite V_n géométrique de raison q . On donne : $V_7 = 4\,374$ et $V_5 = 486$. Trouver la raison q et le premier terme V_0 et V_{10} sachant que la raison est positive.

Solution

1) On exprime V_7 en fonction de V_5 , on a alors :

$$V_7 = q^{7-5} V_5$$

$$q^2 = \frac{V_7}{V_5} = \frac{4374}{486} = 9$$

On obtient les deux solutions : $q = 3$ ou $q = -3$. Comme la raison est positive, $q = 3$.

2) On peut alors trouver V_0 .

$$V_5 = q^5 \times V_0$$

$$V_0 = \frac{V_5}{q^5} = \frac{V_5}{3^5} = \frac{486}{243}$$

3) On peut trouver aussi V_{10}

$$V_{10} = q^{10-7} V_7$$

$$V_{10} = 3^3 \times 4\,374$$

$$V_{10} = 27 \times 4\,374 = 118\,098$$

Sens de Variations d'une Suite géométrique :

Soit $(\mathcal{U}_n)$ une suite géométrique de raison q

- Pour $\mathcal{U}_0 > 0$:
 - si $q > 1$ alors $(\mathcal{U}_n)$ est croissante
 - si $0 < q < 1$ alors $(\mathcal{U}_n)$ est décroissante
- Pour $\mathcal{U}_0 < 0$:
 - si $q > 1$ alors $(\mathcal{U}_n)$ est décroissante
 - si $0 < q < 1$ alors $(\mathcal{U}_n)$ est croissante

La somme des termes consécutifs d'une suite géométrique

- La somme des $n + 1$ premières puissances de q vérifie :

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}, q \neq 1$$

- La somme des $n + 1$ premiers termes d'une suite géométrique $\mathcal{U}_n$ de raison q et de premier terme $\mathcal{U}_0$ vérifie : $\mathcal{U}_0 + \mathcal{U}_1 + \dots + \mathcal{U}_n = \mathcal{U}_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}, q \neq 1$
- La somme des $n - p + 1$ premiers termes d'une suite géométrique $\mathcal{U}_n$ de raison q et de premiers termes $\mathcal{U}_p$ vérifie : $\mathcal{U}_p + \mathcal{U}_{p+1} + \dots + \mathcal{U}_n = \mathcal{U}_p \times \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q}, q \neq 1$
- D'une façon générale, la somme S_n des premiers termes d'une suite géométrique vérifie :

$$S_n = \text{premier terme} \times \frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1 - q}, q \neq 1$$

Exemple1 :

calculer $A = 3 + 9 + 27 + \dots + 3^{20}$

Solution :

$$A = 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{20}$$

on pose $\mathcal{U}_n = 3^n$ le terme général d'une suite géométrique de raison $q = 3$ et $\mathcal{U}_0 = 1$

$$\text{donc } A = \mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2 + \dots + \mathcal{U}_{20} = \mathcal{U}_1 \frac{1 - q^{20}}{1 - q}$$

$$A = 3 \times \frac{1 - 3^{20}}{1 - 3} = \frac{3}{2} (3^{20} - 1)$$

Exemple2 :

1. Soit la suite $\mathcal{U}_n$ défini par $\begin{cases} \mathcal{U}_0 = 6 \\ \mathcal{U}_{n+1} = \frac{1}{2}\mathcal{U}_n + 5 \end{cases}, n \in \mathbb{N}$

Calculer les quatre premiers termes de la suite.

2. Soit $V_n = \mathcal{U}_n - 10, n \in \mathbb{N}$
- a) Démontrer que V_n est une suite géométrique, donner son premier terme et sa raison.
- b) Exprimer V_n puis $\mathcal{U}_n$ en fonction de n .
3. Calculer $S_{10} = V_0 + V_1 + \dots + V_{10}$
Et $S'_{10} = \mathcal{U}_0 + \mathcal{U}_1 + \dots + \mathcal{U}_{10}$.

Solution :

$$\begin{aligned} 1. \quad \mathcal{U}_0 &= 6 & \mathcal{U}_1 &= \frac{1}{2}\mathcal{U}_0 + 5 = 8 \\ \mathcal{U}_2 &= \frac{1}{2}\mathcal{U}_1 + 5 = 9 & \mathcal{U}_3 &= \frac{1}{2}\mathcal{U}_2 + 5 = \frac{9}{2} + 5 = \frac{19}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad V_{n+1} &= \mathcal{U}_{n+1} - 10 = \frac{1}{2}\mathcal{U}_n + 5 - 10 = \frac{1}{2}\mathcal{U}_n - 5 \\ V_{n+1} &= \frac{1}{2}(\mathcal{U}_n - 10) = \frac{1}{2}V_n \end{aligned}$$

Donc V_n est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ de premier terme $V_0 = \mathcal{U}_0 - 10 = -4$

$$V_n = q^n V_0 = -4\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$V_n = \mathcal{U}_n - 10 \text{ donc } \mathcal{U}_n = V_n + 10 = 10 - 4\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\begin{aligned} 3. \quad S_{10} &= V_0 + V_1 + \dots + V_{10} \\ &= V_0 \frac{1-q^{11}}{1-q} = -4 \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{11}}{1-\frac{1}{2}} = 8\left(\frac{1}{2^{11}} - 1\right) = -7,996 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S'_{10} &= \mathcal{U}_0 + \mathcal{U}_1 + \dots + \mathcal{U}_{10} \\ &= (V_0 + 10) + (V_1 + 10) + \dots + (V_{10} + 10) \\ &= (10 + 10 + \dots + 10) + S \\ &= 11 \times 10 + S = 110 - 7,996 = 102,004 \end{aligned}$$

5.Limite d'une suite :

Définition : On dit que la suite $\mathcal{U}_n$ admet pour limite $+\infty$, si $\mathcal{U}_n$ est aussi grand que l'on veut à partir d'un certain rang et on note

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{U}_n = +\infty.$$

Exemple :

La suite $\mathcal{U}_n$ définie pour tout n par $\mathcal{U}_n = n^2$ a pour limite $+\infty$.

On a par exemple : $\mathcal{U}_{100} = 100^2 = 10000$ $\mathcal{U}_{1000} = 1000^2 = 1000000$ Les termes de la suite deviennent aussi grands que l'on veut à partir d'un certain rang.

Limites des suites de référence :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} n &= +\infty, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 = +\infty, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty, \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} &= 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^3} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0, \end{aligned}$$

Exemple :

Calculer les limites : a) $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 + n$ b) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{\sqrt{n}} + 1)(n^2 + 3)$ c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{-n^2 - 3}$

Correction :

a)

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 + n \\ & \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = +\infty \\ \lim_{n \rightarrow \infty} n = +\infty \end{cases} \\ & \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 + n = +\infty + \infty = +\infty \end{aligned}$$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{\sqrt{n}} + 1)(n^2 + 3)$

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} (\frac{1}{\sqrt{n}} + 1) = 1 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2 + 3) = +\infty \end{cases} \\ & \lim_{n \rightarrow +\infty} (\frac{1}{\sqrt{n}} + 1)(n^2 + 3) = 1 \times +\infty = +\infty \end{aligned}$$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{-n^2 - 3}$

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} 2 = 2 \text{ dans le pratique, on ne l'écrit pas} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} -n^2 = -\infty \text{ et donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} -n^2 - 3 = -\infty \end{cases} \\ & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{-n^2 - 3} = \frac{2}{-\infty} = 0 \end{aligned}$$

Les formes indéterminées :

Les quatre formes indéterminées sont:

" $+\infty - \infty$ ou $-\infty + \infty$ ", " $0 \times \infty$ ", " $\frac{\infty}{\infty}$ " et " $\frac{0}{0}$ "

Déterminer les limites suivantes : a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} n - 3\sqrt{n}$ b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 - 5n + 1$

Correction a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} n - 3\sqrt{n}$

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} -3\sqrt{n} = -\infty \end{cases}$$

Il s'agit d'une forme indéterminée du type " $+\infty - \infty$ ".

• Levons l'indétermination : $n(1 - \frac{3\sqrt{n}}{n}) = n(1 - \frac{3}{\sqrt{n}})$

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{\sqrt{n}} = 0 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{3}{\sqrt{n}} = 1 \end{cases}$$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} n(1 - \frac{3}{\sqrt{n}}) = +\infty \times 1 = +\infty$

Soit $\lim_{n \rightarrow +\infty} n - 3\sqrt{n} = +\infty$

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 - 5n + 1$

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} -5n + 1 = -\infty \end{cases}$$

Il s'agit d'une forme indéterminée du type " $+\infty - \infty$ ".

- Levons l'indétermination en factorisant par le monôme de plus haut degré :

$$n^2 - 5n + 1 = n^2 \left(1 - \frac{5}{n} + \frac{1}{n^2} \right)$$

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5}{n} = 0 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0 \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{5}{n} + \frac{1}{n^2} = 1 \end{cases} \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \left(1 - \frac{5}{n} + \frac{1}{n^2} \right) = +\infty$$

$$\text{D'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2 - 5n + 1) = +\infty$$

6-Suites convergentes et suites divergentes :

- La suite $\mathcal{U}_n$ est convergente vers $l \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{U}_n = l \in \mathbb{R}$
- La suite $\mathcal{U}_n$ est divergente (non convergente) $\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{U}_n = \infty$ ou $\mathcal{U}_n$ n'a pas de limite

Exemple :

Etudions la convergence des suites suivantes :

$$\mathcal{U}_n = \frac{1}{n} + 2, V_n = 1 - n, W_n = (-1)^n$$

Solution :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{U}_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} + 2 \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} + \lim_{n \rightarrow +\infty} 2 = 0 + 2 = 2 \in \mathbb{R}$$

d'où $\mathcal{U}_n$ est convergente vers 2.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \lim_{n \rightarrow +\infty} n = 1 - \infty = -\infty$$

D'où V_n est divergente.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} W_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n, \text{ cette suite est alternative donc elle n'a pas de limite}$$

D'où W_n est divergente.

Théorème des gendarmes : Soit trois suites $\mathcal{U}_n, V_n$ et W_n .

$$\text{Si, à partir d'un certain rang, on a : } \begin{cases} V_n \leq \mathcal{U}_n \leq W_n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = l \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} W_n = l \end{cases} \text{ . Alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{U}_n = l$$

Exemple : Soit la suite $(\mathcal{U}_n)$ définie par : $\mathcal{U}_n = \frac{1}{n+1}$ $n \in \mathbb{N}$.

On remarque que : $\forall n \in \mathbb{N}, n+1 > n$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \text{ de plus } \frac{-1}{n} < \frac{1}{n+1}$$

$$\text{Donc } \frac{-1}{n} < \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$$

Et comme $(\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-1}{n} = 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0)$ et d'après le Théorème des gendarmes

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

Exercices Corrigés

Exercice 1:

Le directeur d'une entreprise décide d'allouer à ses employés une prime annuelle d'un montant de 4000 UM ,

cette prime étant revalorisée chaque année de 600 UM.

On note p_0 la prime initiale, et p_n la prime au bout de n années ($n \geq 1$).

1. Calculer p_1 et p_2 . Exprimer p_{n+1} en fonction de p_n .
2. Quelle est la nature de la suite (p_n) ?
3. En déduire l'expression de p_n en fonction de n .
4. Quel est le montant de la prime au bout de 10 ans.
5. Quel est le montant total de toutes les primes versées à une personne jusqu'à cette 10^e année incluse?

Corrigé :

1. Calculer p_1 et p_2 . Exprimer p_{n+1} en fonction de p_n

$$p_1 = 4000 + 600 = 4600$$

$$p_2 = 4600 + 600 = 5200$$

$$p_{n+1} = p_n + 600$$

2. Quelle est la nature de la suite (p_n) ?

La suite (p_n) est la suite arithmétique de premier terme $p_0 = 4000$ et de raison 600.

3. En déduire l'expression de p_n en fonction de n

Pour tout entier naturel n ,

$$p_n = p_0 + nr$$

$$p_n = 4000 + 600n$$

4. Quel est le montant de la prime au bout de 10 ans.

$$p_{10} = 4000 + 600 \times 10 = 10000UM$$

5. Quel est le montant total de toutes les primes versées à une personne jusqu'à cette 10^e année incluse?

$$S = p_0 + p_1 + \dots + p_{10}$$
$$S = 11 \times \frac{p_0 + p_{10}}{2} = 11 \times \frac{4000 + 10000}{2} = 53900UM$$

Exercice 2 :

Les ongles d'un homme adulte poussent d'environ 0,1mm par jour. Suite à un accident ,un homme a perdu son ongle .il laisse repousser.

- a. Modéliser la situation avec une suite.
- b. Quelle sera la taille de son ongle 15 jours après l'accident.
- c. Au bout de combien de jours son ongle mesurera-t-il à nouveau sa taille normale de 1,4cm ?

Corrigé :

a. Modélisation avec une suite

La croissance de l'ongle est constante : 0,1mm par jour .

On note U_n la longueur de l'ongle (en mm) n jours après l'accident .

Au début ($n = 0$) , l'ongle est perdu donc $U_0 = 0$

Chaque jour il pousse de 0,1mm donc la suite est **arithmétique** de raison $r = 0,1$

$$U_n = U_0 + n \times r = 0 + n \times 0,1 = 0,1n$$

$$U_n = 0,1n$$

b. Taille de l'ongle après 15 jours :

On cherche $U_{15} = 0,1 \times 15 = 1,5$

Après 15 jours l'ongle mesure 1,5mm

c. Nombre de jours pour atteindre 1,4cm

La taille normale est de 1,4cm

Convertissons en mm

On cherche n tel que $U_n = 14$

$$0,1n = 14$$

$$n = \frac{14}{0,1} = 140$$

L'ongle atteindra sa taille normale au bout de 140 jours.

Exercice3 :

La population d'une ville fictive l'année n est donnée par U_n on sait que $U_{2010} = 160000$ et que la population augmente de 6% par an .

1. Exprimer U_{n+1} en fonction de U_n
2. Déduire la forme explicite de la suite U_n
3. Combien y aura-t-il d'habitants dans cette ville en 2022 ? (arrondi à l'unité)

Corrigé :

1. Expression U_{n+1} en fonction de U_n

$$U_{n+1} = U_n + 0,06U_n$$

$$U_{n+1} = 1,06U_n$$

2. Comme $U_{n+1} = 1,06U_n$

$$U_n = U_0 \times q^n$$

$$U_n = 160000 \times 1,06^n$$

3. $U_{22} = 160000 \times 1,06^{22} = 341268,521623$

Il y aura 341269 habitants dans cette ville en 2022

Exercice4 :

Une commune dispose de 380 voiture et propose un système de location de ces voitures selon les modalités suivantes :

- Chaque voiture est louée pour une durée d'un mois
- La location commence le 1^{er} jour du mois et se termine le dernier jour du même mois
- Le nombre de voitures louées est comptabilisé à la fin de chaque mois.

A la fin du mois de janvier 2019, 280 voitures ont été louées avec ce système de location .
Le responsable de ce système souhaite étudier l'évolution du nombre de location de voiture.

Pour cela il modélise le nombre de voitures louées chaque mois par une suite U_n , ou pour tout naturel n , U_n représente le nombre de voitures louées le $n^{\text{ème}}$ mois après le mois de janvier 2019. Ainsi $U_0 = 280$. On admet que cette modélisation conduit à l'égalité :

$$U_{n+1} = 0,9U_n + 42$$

1. Combien de voitures ont-elles été louées avec ce système au mois de février 2019 ?
2. On pose $V_n = U_n - 420$
 - a) Montrer que la suite V_n est géométrique on précisera le premier terme et la raison
 - b) Donner l'expression de V_n en fonction de n

Corrigé :

$$\begin{cases} U_0 = 280 \\ U_{n+1} = 0,9U_n + 42 \end{cases}$$

1. Le nombre de voitures le 1^{er} mois janvier 2019 $U_0 = 280$

Donc le nombre de voitures en février 2019

$$U_1 = 0,9 \times U_0 + 42$$

$$U_2 = 0,9 \times 280 + 42 = 252 + 42 = 294$$

2. a)

$$V_n = U_n - 420$$

$$V_{n+1} = U_{n+1} - 420$$

$$= 0,9U_n + 42 - 420$$

$$= 0,9U_n - 378$$

$$V_{n+1} = 0,9\left(U_n - \frac{378}{0,9}\right)$$

$$V_{n+1} = 0,9(U_n - 420)$$

$$V_{n+1} = 0,9V_n$$

D'où V_n est une suite géométrique de raison $q = 0,9$ et de 1^{er} terme

$$V_0 = U_0 - 420 = 280 - 420 = -140$$

$$b) V_n = V_0 \times q^n = -140 \times (0,9)^n$$

Exercice 5:

Dans chacun des cas suivants calculer les trois premiers termes de la suite U_n

$$a) U_n = 2n + 5 \quad b) U_n = 2^n + 5 \quad c) U_n = \frac{2n-1}{n+1}$$

Corrigé :

a) $U_n = 2n + 5$

$$U_0 = 2 \times 0 + 5 = 5$$

$$U_1 = 2 \times 1 + 5 = 7$$

$$U_2 = 2 \times 2 + 5 = 9$$

b) $U_n = 2^n + 5$

$$U_0 = 2^0 + 5 = 6$$

$$U_1 = 2^1 + 5 = 7$$

$$U_2 = 2^2 + 5 = 9$$

c) $U_n = \frac{2n-1}{n+1}$

$$U_0 = \frac{2 \times 0 - 1}{0 + 1} = \frac{-1}{1} = -1$$

$$U_1 = \frac{2 \times 1 - 1}{1 + 1} = \frac{1}{2}$$

$$U_2 = \frac{2 \times 2 - 1}{2 + 1} = \frac{3}{3} = 1$$

Exercice 6 :

Soit la suite U_n définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_0 = 3$ et $U_{n+1} = 2U_n, n \in \mathbb{N}$.

1) Montrer que U_n est une suite géométrique, déterminer sa raison et son premier terme.

2) Exprimer U_n en fonction de n .

3) Déterminer n sachant que : $U_n = 48$.

4) Calculer $S = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_6$ puis $S' = U_3 + U_4 + U_n + \dots + U_{10}$

Corrigé :

1) $U_{n+1} = 2U_n$ signifie $\frac{U_{n+1}}{U_n} = 2$ donc la suite est géométrique de raison 2 $U_0 = 3$

2) $U_n = U_0 \times q^n = 3 \times 2^n$

3) $3 \times 2^n = 48$ signifie $2^n = \frac{48}{3} = 16$ donc $n = 4$

4) $S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_6 = U_0 \times \frac{1-q^7}{1-q} = 3 \times \frac{1-2^7}{1-2} = 3 \times \frac{1-128}{-1} = 381$

$S'_n = U_3 + U_4 + U_n + \dots + U_{10} = U_3 \frac{1-q^{10-3+1}}{1-q} = 3 \times 2^3 \frac{1-2^8}{1-2} = 24 \frac{1-256}{-1} = 6120$

Exercice 7 :

$$U_n = \frac{1}{\sqrt{n}} + 2$$

La suite U_n est-elle bornée ?

Corrigé :

$U_n = \frac{1}{\sqrt{n}} + 2$ est définie sur $\mathbb{N}^*$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $n \geq 1$,

$$\frac{1}{n} \leq 1,$$
$$\frac{1}{\sqrt{n}} \leq 1,$$

$$0 \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \leq 1$$

$$0 + 2 \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \leq 1 + 2$$

c'est-à-dire $2 \leq \mathcal{U}_n \leq 3$ donc $\mathcal{U}_n$ est borné par 2 et 3

Exercice 8 :

Montrer que les suites suivantes sont convergentes :

$$\mathcal{U}_n = \frac{n^2 - 3n + 2}{n^2 - 3} ; \quad V_n = \frac{7n - 2}{3n + 1}$$

Corrigé :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 - 3n + 2}{n^2 - 3} = \frac{n^2 \left(1 - \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}\right)}{n^2 \left(1 - \frac{3}{n^2}\right)} = 1,$$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 - 3n + 2}{n^2 - 3}$, donc $\mathcal{U}_n$ est convergente.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{7n - 2}{3n + 1} = \frac{n \left(7 - \frac{2}{n}\right)}{n \left(3 + \frac{1}{n}\right)} = \frac{7}{3}$$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{7n - 2}{3n + 1} = \frac{7}{3}$, donc V_n est convergente.

Exercice 9 :

On considère la suite $(\mathcal{U}_n)$ définie pour tout entier naturel n par $\mathcal{U}_n = 3 \times 2^n$.

- Calculer $\mathcal{U}_1$; $\mathcal{U}_2$ et $\mathcal{U}_3$.
- Exprimer $\mathcal{U}_{n+1}$ en fonction de n .
- Démontrer que $(\mathcal{U}_n)$ est une suite géométrique dont on précisera le premier terme $\mathcal{U}_0$ et la raison.

Corrigé :

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \mathcal{U}_n = 3 \times 2^n \\ & \mathcal{U}_1 = 3 \times 2^1 = 3 \times 2 = 6 \\ & \mathcal{U}_2 = 3 \times 2^2 = 3 \times 4 = 12 \\ & \mathcal{U}_3 = 3 \times 2^3 = 3 \times 8 = 24 \end{aligned}$$

$$\text{b)} \quad \mathcal{U}_{n+1} = 3 \times 2^{n+1}$$

$$\text{c)} \quad \frac{\mathcal{U}_{n+1}}{\mathcal{U}_n} = \frac{3 \times 2^{n+1}}{3 \times 2^n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2$$

donc $(\mathcal{U}_n)$ est une suite géométrique de premier terme

$$\mathcal{U}_0 = 3 \times 2^0 = 3 \times 1 = 3$$

et de raison $q = 2$.

Exercice 10:

Soit $\mathcal{U}_n$ la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $\mathcal{U}_n = n^2 - 6n + 1$.

- Calculer les cinq premiers termes de la suite $\mathcal{U}_n$.

2. Etudier le sens de variation de la suite $\mathcal{U}_n$

Corrigé :

1. Calculer les cinq premiers termes de la suite $\mathcal{U}_n$:

$$\mathcal{U}_0 = 1 \qquad \mathcal{U}_1 = -4 \qquad \mathcal{U}_2 = 4 - 12 + 1 = -7$$

$$\mathcal{U}_3 = 9 - 18 + 1 = 10 - 18 = -8 \qquad \mathcal{U}_4 = 16 - 24 + 1 = 17 - 24 = -7$$

2. Etudier le sens de variation de la suite $\mathcal{U}_n$

$$\mathcal{U}_{n+1} - \mathcal{U}_n = (n+1)^2 - 6(n+1) + 1 - n^2 + 6n + 1 =$$

$$\mathcal{U}_{n+1} - \mathcal{U}_n = n^2 + 2n + 1 - 6n - 6 + 1 - n^2 + 6n - 1$$

$$\mathcal{U}_{n+1} - \mathcal{U}_n = 2n - 5 > 0 \Leftrightarrow n > \frac{5}{2}$$

Donc, $\mathcal{U}_n$ est croissante à partir du rang 3.

IPN

Exercices généraux

Exercice 1 :

Soit $(\mathcal{U}_n)$ la suite définie par $\mathcal{U}_n = n^2 - n + 1$

- a) Calculer $\mathcal{U}_0$ et $\mathcal{U}_{10}$.
- b) Exprimer, en fonction de n , $\mathcal{U}_n + 1$ et $\mathcal{U}_{n+1}$.

Exercice 2 :

Soit $(\mathcal{U}_n)$ la suite définie par $\mathcal{U}_n = \frac{1}{n+1}$

- a) Exprimer $\mathcal{U}_{n+1} - \mathcal{U}_n$ en fonction de n .
- b) En déduire le sens de variation de la suite $(\mathcal{U}_n)$.

Exercice 3 :

Soit $\mathcal{U}_n$ la suite arithmétique de premier terme $\mathcal{U}_0 = 4$ et de raison $r = \frac{1}{2}$

- a) Exprimer $\mathcal{U}_n$ en fonction de n .
- b) Calculer $\mathcal{U}_{10}$.

Exercice 4 :

Soit $\mathcal{U}_n$ la suite arithmétique telle que $\mathcal{U}_4 = 5$ et $\mathcal{U}_{11} = 19$.

Calculer la raison r et $\mathcal{U}_0$.

Exercice 5 :

Soit $\mathcal{U}_n$ la suite géométrique de premier terme $\mathcal{U}_0 = 7$ et de raison $q = 3$.

- a) Exprimer $\mathcal{U}_n$ en fonction de n .
- b) Calculer $\mathcal{U}_5$.

Exercice 6 :

On considère la suite $(\mathcal{U}_n)$ définie par : $\mathcal{U}_n = 5 - 2n$.

- 1. Calculer $\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1$ et $\mathcal{U}_2$.
- 2. Démontrer que $(\mathcal{U}_n)$ est une suite arithmétique dont on précisera la raison.
- 3. Que vaut $\mathcal{U}_{100}$? Calculer la somme $S = \mathcal{U}_0 + \mathcal{U}_1 + \dots + \mathcal{U}_{100}$.

Exercice 7 :

On considère la suite $\mathcal{U}_n$ définie par : $\mathcal{U}_n = (n + 1)^2 - n^2$

- 1. Calculer $\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1$ et $\mathcal{U}_2$.
- 2. La suite $\mathcal{U}_n$ est-elle arithmétique ? Si oui, préciser sa raison.
- 3. Que vaut $\mathcal{U}_{99}$? Calculer la somme $S = 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 195 + 197 + 199$.

Exercice 8 :

On considère la suite $(\mathcal{U}_n)$ définie par : $\mathcal{U}_{n+1} = \mathcal{U}_n + \frac{1}{2}$
et $\mathcal{U}_n = 0$.

- 1. Calculer $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$ et $\mathcal{U}_3$.
- 2. Justifier que $(\mathcal{U}_n)$ est une suite arithmétique dont on précisera la raison.
- 3. Que vaut $\mathcal{U}_{100}$?

Exercice 9 :

Calculer les sommes suivantes : $S_1 = 1 + 2 + 3 + \dots + 2017 + 2018$
et $S_2 = 2019 + 2020 + \dots + 9998 + 9999$.

Exercice 10 :

On considère une suite géométrique $\mathcal{U}_n$ de premier terme $\mathcal{U}_1 = 1$ et de raison $q = -2$.

1. Calculer $\mathcal{U}_2, \mathcal{U}_3$ et $\mathcal{U}_4$.
2. Calculer $\mathcal{U}_{20}$.
3. Calculer la somme $S = \mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2 + \dots + \mathcal{U}_{20}$.

Exercice 11 :

Calculer le somme $S = 1 + 3 + 9 + 27 + 81 + \dots + 59049$.

Exercice 12 :

Une suite arithmétique V_n est définie par ses termes $V_5 = 2$ et $V_9 = 14$.

- a) Déterminer sa raison r et son premier terme V_0 .
- b) Exprimer son terme général V_n en fonction de n .

Exercice 13 :

Une suite arithmétique $\mathcal{U}_n$ est définie par son premier terme $\mathcal{U}_n = -2$ et sa raison $r = 3$ a)

Calculer $\mathcal{U}_9$ et $\mathcal{U}_{99}$.

- b) Exprimer son terme général $\mathcal{U}_n$ en fonction de n .

Exercice 14 :

1/ Calculer la somme des 100 premiers nombres entiers pairs non nuls.

2/ Une suite arithmétique $\mathcal{U}_n$ est définie par $\mathcal{U}_3 = +5$ et $\mathcal{U}_{14} = -17$.

- a) Exprimer $\mathcal{U}_n$ en fonction de n .
- b) Calculer $S = \mathcal{U}_3 + \mathcal{U}_4 + \dots + \mathcal{U}_{14}$.

Exercice 15 :

Déterminer un nombre x tel que les trois nombres 25, x et 16 soient trois termes consécutifs d'une suite géométrique de raison négative.

Exercice 16 :

Etudier le sens de variation des suites suivantes :

- a) $\mathcal{U}_n = -\frac{2n}{3} + \frac{1}{2}$ ($n \in \mathbb{N}$)
- b) $V_n = n^2 + 4n$ ($n \in \mathbb{N}$)
- c) $\begin{cases} \mathcal{U}_0 = -2 \\ \mathcal{U}_{n+1} = \mathcal{U}_n - n^2 \end{cases}$ ($n \in \mathbb{N}$)

Exercice 17 :

Soit $\mathcal{U}_n$ la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $\mathcal{U}_n = n(n-1)$.

1. Exprimer $\mathcal{U}_{-1}, \mathcal{U}_{n+1}$ et $\mathcal{U}_{2n}$ en fonction de n .
2. Démontrer que, pour tout entier naturel n , $\mathcal{U}_{n+1} = \mathcal{U}_n + 2n$.

Exercice 18 :

On considère la suite $\mathcal{U}_n$ telle que: $\mathcal{U}_0 = \frac{1}{2}$

et, pour tout entier naturel n , $\mathcal{U}_{n+1} = \mathcal{U}_n(1 - \mathcal{U}_n)$.

1. Calculer $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$ et $\mathcal{U}_3$.
2. Déterminer le sens de variation de la suite $\mathcal{U}_n$.

IPN

Chapitre 4 :

IPN

Chapitre 4 : Dénombrement et probabilités

1. VOCABULAIRE

a. ensemble :

➤ Le cardinal d'un ensemble c'est le nombre des éléments de cet ensemble.

Exemple :

$$\begin{aligned}A &= \{1; 2; 5\} \\ \text{cad}(A) &= 3 \\ B &= \{0\} \\ \text{cad}(B) &= 1 \\ C &= \emptyset \text{ (ensemble vide aucun élément)} \\ \text{cad}(\emptyset) &= 0 \\ A \cap B &= \{x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \text{ et } x \in B\} \\ A \cup B &= \{x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \text{ ou } x \in B\} \\ \bar{A} &= \{x \in \bar{A} \Leftrightarrow x \in \Omega \text{ et } x \notin A \text{ l'ensemble générale}\}\end{aligned}$$

Exemple :

$$\begin{aligned}\Omega &= \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\} \\ A &= \{0; 1; 2; 5\} \\ B &= \{0; 1; 2; 6; 8\} \\ A \cap B &= \{0; 1; 2\} \\ A \cup B &= \{0; 1; 2; 5; 6; 8\} \\ \bar{A} &= \{3; 4; 6; 7; 8; 9\} \\ \bar{B} &= \{3; 4; 5; 7; 9\}\end{aligned}$$

b. Expérience aléatoire

L'expérience aléatoire est une expérience imprévisible c'est à dire dont les résultats sont soumis au hasard.

Exemple :

- Jeter un dé
- Jeter une pièce de monnaie
- Tirer une boule dans une urne contenant des boules de couleurs différentes indiscernables au toucher

Sont des expériences aléatoires.

c. Univers d'une expérience aléatoire

L'univers d'une expérience aléatoire est l'ensemble des résultats possibles d'une expérience aléatoire. On le note Ω (oméga).

Exemple : on lance un dé

$$\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}.$$

d. Issue :

Lorsqu'on fait une expérience aléatoire chaque résultat possible est appelé issue .

e. Événement

C'est une partie de l'univers. (Si cette partie ne contient qu'un seul élément, on parle d'**événement élémentaire**).

Exemple : on lance un dé et on définit les événements :

$A = \text{« J'obtiens un nombre pair »}$

$B = \text{« j'obtiens le nombre 7 »}$

$C = \text{« j'obtiens un nombre inférieur ou égal à 6 »}$

En effet : $A = \{ 2 ; 4 ; 6 \}$.

$B = \emptyset$ événement **impossible**

$C = \{ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 \} = \Omega$ (**événement certain**).

f. Événements incompatibles

Deux événements n'ayant aucun élément en commun sont dits **incompatibles** (ou **disjoints**).

Exemple :

on lance un dé et on définit les événements :

$A = \text{« J'obtiens un nombre pair »}$ et $B = \text{« J'obtiens un nombre impair »}$

$A = \{ 2 ; 4 ; 6 \}$, $B = \{ 1 ; 3 ; 5 \}$. Comme $A \cap B = \emptyset$

Alors A et B sont incompatibles.

g. Événement contraire

Si A est un événement, on note $\overline{A}$ l'événement contraire de A formé de tous les éléments de Ω qui n'appartiennent pas à A.

Exemple : on lance un dé

Si $A = \{ 3 \}$ alors $\overline{A} = \{ 1 ; 2 ; 4 ; 5 ; 6 \}$.

2. Probabilités

Soit Ω l'univers de cas possible d'une expérience aléatoire et soit A événement de Ω la probabilité de A noté **P(A)** c'est l'application définie par :

$$P: \Omega \rightarrow [0; 1]$$

$$A \rightarrow P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{\text{les cas favorables}}{\text{les cas possibles}}$$

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

1) Propriétés :

Soit A et B deux événements de Ω :

$$\bullet P(\emptyset) = \frac{\text{card}(\emptyset)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{0}{\text{card}(\Omega)} = 0$$

$$\bullet P(\Omega) = \frac{\text{card}(\Omega)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\bullet P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$\bullet P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

Remarque : Si A et B sont deux événements incompatibles, alors

$A \cap B = \emptyset$, donc $P(A \cap B) = 0$ et on a $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

2) EQUIPROBABILITE :

On dit qu'il y a équiprobabilité si tous les événements élémentaires qui constituent l'univers ont la même probabilité.

Exemple : on lance un dé

Si $\Omega = \{ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 \}$, alors $P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = P(6) = \frac{1}{\text{card}\Omega} = \frac{1}{6}$

Exercices corrigés

Exercice 1 :

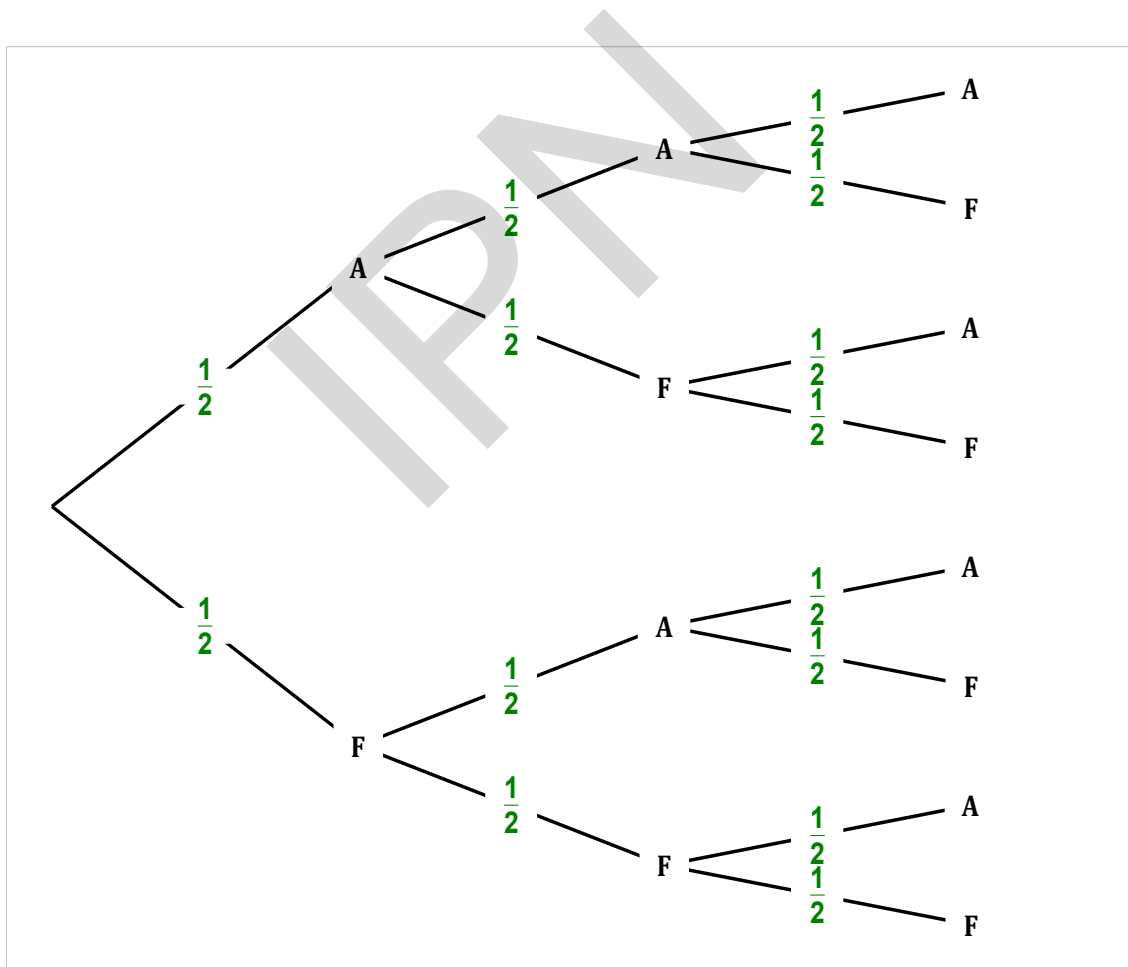
On lance une pièce de monnaie nationale trois fois de suite. Si un lancer donne « **Arabe** », on note **A** le résultat obtenu, et **F** si un lancer donne « **Français** ». Par exemple, **AFA** signifie « **Arabe** » au premier lancer,

« **Français** » au second et « **Arabe** » au troisième.

1. Trace un arbre permettant de visualiser toutes les issues possibles.
2. Combien existe-t-il d'issues possibles?
3. Détermine la probabilité d'obtenir :
 - a) A :trois fois « **Arabe** ».
 - b) B :exactement deux fois « **Arabe** ».
 - c) C :au moins une fois « **Français** ».

Corrigé :

1. Arbre de possibles



2. il y a 8 issues possibles : AAA , AAF , AFA , AFF , FAA , FAF , FFA , FFF
3. $P(A) = \frac{1}{8}$, $P(B) = \frac{3}{8}$, $P(C) = \frac{7}{8}$

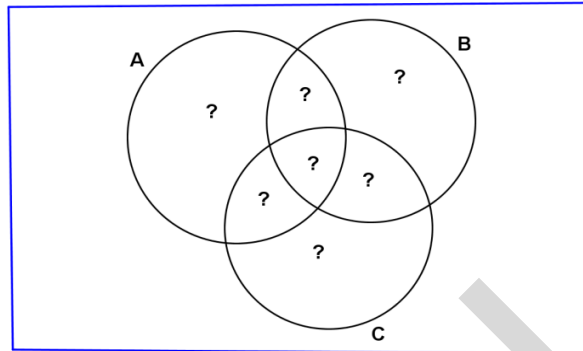
Exercice 2 :

Trois revues scientifiques A,B et C sont mises à la disposition des élèves d'un lycée. On sait que :

- 52% ont lu A, 43% ont lu B et 37% ont lu C.
- 22% ont lu A et B, 15% ont lu A et C et 13% ont lu B et C.
- 8% ont lu les trois revues

On interroge un élève au hasard .

1) Compléter le diagramme suivant (mettre un nombre à la place de ?)

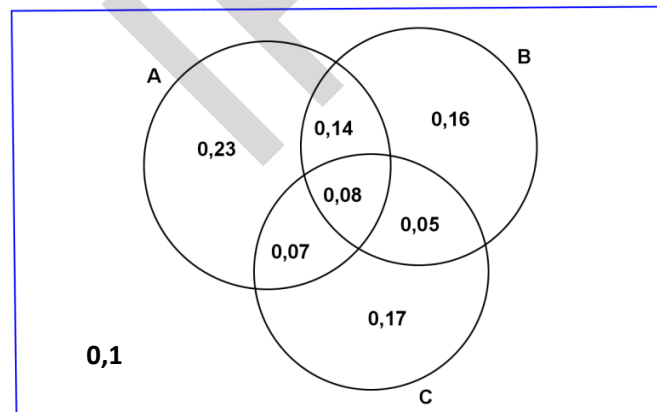


2) Quelle est la probabilité de :

- a) Que l'élève ait lu seulement une revue ?
- b) Que l'élève n'ait lu aucune revue ?

Corrigé :

1)



2) a) la probabilité que l'élève ait lu seulement une revue:

$$0,16 + 0,17 + 0,23 = 0,56$$

b) la probabilité qu'il n'ait lu aucune revue est de :

$$1 - (0,23 + 0,14 + 0,16 + 0,08 + 0,07 + 0,05 + 0,17) = 1 - 0,9 = 0,1$$

Exercice 3 :

Dans son dressing, Ahmed a ;

-Deux pantalons ; un noir et un bleu

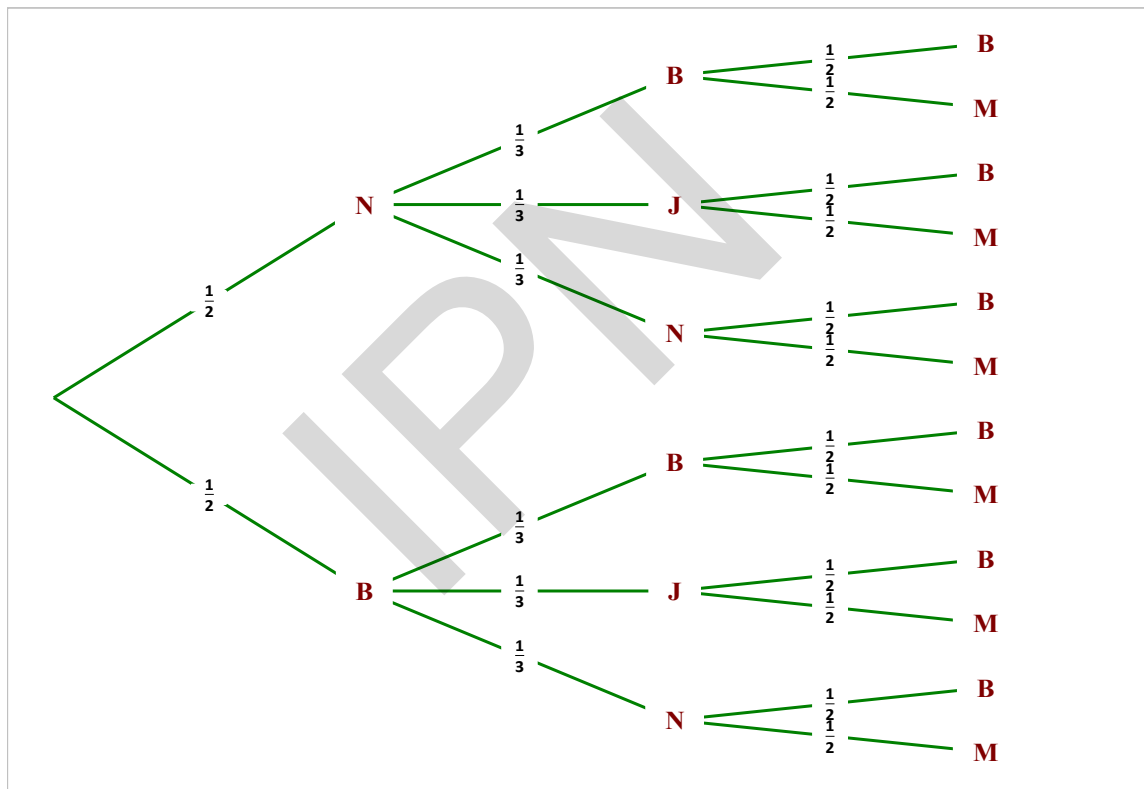
-Trois chemises : une bleue,une jaune et une noire

-Deux vestes :une bleue et une marron

- 1) A l'aide d'un arbre dénombrer l'ensemble de ses tenues possibles (un pantalon,une chemise et une veste).
- 2) On suppose que l'ensemble des tenues est muni d'une loi équirépartie.calculer les probabilités des événements suivants :
 - A :il est habillé tout en bleu.
 - B :il a une chemise et une veste de couleurs différentes.
 - C :il ne porte ni pantalon noir,ni veste bleue.

Corrigé :

1)



2)

$$P(A) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$$

$$P(B) = \frac{10}{12}$$

$$P(c) = \frac{3}{12}$$

Exercice4 :

On dispose d'un sac qui contient 6 boules : 4 boules vertes et 2 boules jaunes.

Les boules vertes sont numérotées 1 ; 2 ; 2 ; 3 et les boules jaunes 1 et 2.

On tire une boule au hasard et on note sa couleur et son numéro.

Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :

A : « Tirer une boule jaune ».

B : « Tirer une boule portant le numéro 2 ».

C : « Tirer une boule verte portant le numéro 2 ».

Corrigé :

$$P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$P(C) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Exercice5 :

Soit A et B deux évènements dans l'univers d'une expérience aléatoire :

1. On donne :

- $p(A) = 0,7$ • $p(B) = 0,5$
- $p(A \cap B) = 0,3$

En s'aidant d'un diagramme de Venn, calculer :

$p(\bar{A})$; $p(A \cup B)$; $p(\bar{A} \cap B)$; $P(\bar{A} \cap \bar{B})$

2. Dans cette question A et B sont deux évènements incompatibles tels que :

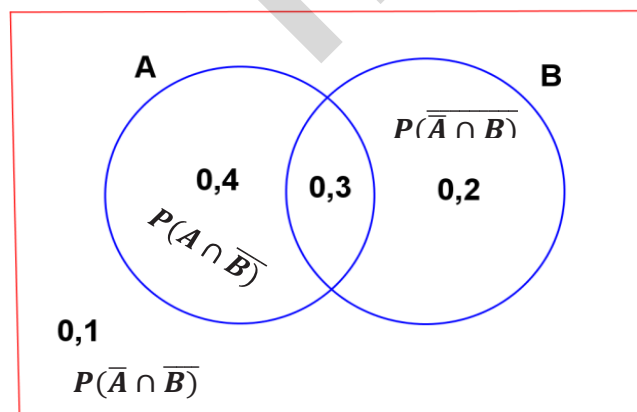
- $p(A) = 0,4$ • $p(B) = 0,22$

calculer :

$$P(A \cup B)$$

Corrigé :

1.



D'après le diagramme de venn précédant on a :

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,7 = 0,3$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = 0,7 + 0,5 - 0,3 = 0,9$$

$$P(\bar{A} \cap B) = 0,2$$

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0,1$$

$$2. P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

mais comme A et B sont incompatibles alors $P(A \cap B) = 0$

$$\text{donc } P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$P(A \cup B) = 0,4 + 0,22 = 0,62$$

Exercice6 :

Dans une classe de collège, après la visite médicale, on a dressé le tableau suivant :

	Porte des lunettes	Ne porte pas de lunettes	Total
Filles	3	15	18
Garçons	7	5	12
Total	10	20	30

Les fiches individuelles de renseignements tombent par terre et s'éparpillent.

1) Si l'infirmière en ramasse une au hasard, quelle est la probabilité que cette fiche soit :

a) celle d'une fille qui porte des lunettes ?

b) celle d'un garçon?

2) Les élèves qui portent des lunettes dans cette classe représentent 12,5% de ceux qui en portent dans tout le collège. Combien y a-t-il d'élèves qui portent des lunettes dans le collège ?

Corrigé :

$$1. a) P_1 = \frac{3}{30} = \frac{1}{10}$$

$$b) P_2 = \frac{12}{30} = \frac{2}{5}$$

$$2. \text{ le nombre des élèves qui portent des lunettes dans le collège} = \frac{10 \times 100}{12,5} = \frac{1000}{12,5} = 80 \text{ élèves}$$

Exercices généraux

Exercice1 :

Une classe de 6^{ème} est composée de 14 filles et de 11 garçons. Un professeur envoie au tableau un élève au hasard (pour passer au calcul mental).

- 1) Quelle est la probabilité que ce soit une fille?
- 2) Quelle est la probabilité que ce soit un garçon ?
- 3) Calculer la somme des deux probabilités obtenues précédemment et interpréter votre résultat.

Exercice2 :

On lance une pièce de monnaie nationale trois fois de suite. On note « A » arabe et « F » français et on note (A,F,A) si sur les 3 lancers, j'ai eu Arabe puis Français puis Arabe.

- 1) a. Tracer un arbre permettant de visualiser toutes les issues possibles.
b. Combien existe-t-il d'issues possibles ?
- 2) Lorsqu'on lance trois fois de suite une pièce de monnaie nationale, quelle est la probabilité d'obtenir :
 - a. Trois fois « français » ?
 - b. Exactement deux fois « Arabe » ?
 - c. Au moins une fois « Français » ?

Exercice3 :

Un sac contient 20 boules numérotées de 1 à 20. On tire une boule au hasard.

- 1/ Quelle est la probabilité de tirer la boule 13 ?
- 2/ Quelle est la probabilité de tirer une boule paire ?
- 3/ Quelle est la probabilité de tirer une boule multiple de 3 ?
- 4/ On effectue deux tirages successifs sans remise. Quelle est la probabilité de tirer la boule 6 et 17 ? (Exprimer le résultat sous forme de fraction irréductible).

Exercice4 :

La répartition des élèves d'un lycée en fonction de leur nombre de frères ou de sœurs est la suivante :

Nombre de frères ou de sœurs	0	1	2	3	4
Nombre d'élèves	48	120	75	42	15

On choisit au hasard un élève de ce lycée.

Calculer la probabilité des événements :

E : « l'élève a un frère ou une sœur »

F : « l'élève a au plus un frère ou au plus une sœur »

G : « l'élève a moins de quatre frères ou sœurs ».

Exercice5 :

Un sachet contient 2 bonbons à la menthe, 3 à l'orange et 5 au citron.

On tire, au hasard, un bonbon du sachet et on définit les événements :

A : « le bonbon est à la menthe »,

B : « le bonbon est à l'orange »,

C : « le bonbon est au citron ».

1 / Quel est le nombre d'issues possibles ?

2 / Déterminer les probabilités $p(A)$ puis $p(B)$ et $p(C)$.

3 / Représenter l'expérience par un arbre pondéré.

Exercice6 :

On tire au hasard une bille dans une urne contenant 25 billes numérotées de 1 à 25.

1 / a / Combien de billes portent un numéro pair ?

b / En déduire la probabilité d'extraire une bille avec un numéro pair.

2 / Quelle est la probabilité d'extraire une bille sur laquelle est inscrit un diviseur de 24 ?

Exercice7 :

Une urne contient 5 boules rouges dont 2 ont une tache noire et 4 boules jaunes dont une a une tache noire.

On extrait une boule au hasard.

Quelle est la probabilité de chacun des événements suivants ?

a / A : « la boule extraite est jaune ».

b / B : « la boule extraite a une tache noire ».

c / C : « la boule extraite n'est pas jaune et n'a pas de tache noire ».

Exercice8 :

Dans un sac, on a placé 3 jetons numérotés 3 ; 4 ; 5.

On tire au hasard, successivement et sans les remettre dans le sac tous les jetons du sac.

On écrit le nombre qui a comme chiffre des centaines le 1^{er} nombre tiré, comme chiffre des dizaines le 2^{ème} nombre tiré et comme chiffre des unités le 3^{ème} nombre tiré.

a / Si on tire le 3 puis le 5 et enfin le 4 quel nombre obtient-on ?

b / A l'aide d'un arbre, établir tous les résultats possibles.

c / Quelle la probabilité de l'événement : « obtenir 453 » ?

d / Quelle est la probabilité de l'événement : « obtenir un nombre inférieur à 453 » ?

e / Quelle est la probabilité de l'événement : « obtenir un nombre multiple de 3 » ? Pouvaient-on prévoir le résultat ?

f / Quelle est la probabilité de l'événement : « obtenir un nombre multiple de 2 » ?

Exercice10 :

Un sac contient 12 jetons numérotés de 1 à 12. On tire un jeton au hasard.

On considère les événements suivants :

• A : « Le numéro du jeton tiré est pair ».

• B : « Le numéro du jeton tiré est un multiple de 3 ».

1) Quels sont les événements élémentaires qui composent A et B ?

Recopier et compléter : $A = \{ \cdot \cdot \cdot \}$ et $B = \{ \cdot \cdot \cdot \}$.

2) Décrire de même les événements :

• $A \cap B$ • $\bar{A}$ • $\overline{A \cap B}$ • $\bar{A} \cap \bar{B}$

• $A \cup B$ • $\overline{A \cup B}$ • $\bar{A} \cap B$ • $\bar{A} \cup \bar{B}$

3) Certains de ces événements sont-ils identiques ?

4) Décrire les événements suivants par une phrase :

- $A \cap B$ • $\bar{A}$ • $\overline{A \cap B}$ • $\bar{A} \cap \bar{B}$
- $A \cup B$ • $\overline{A \cup B}$ • $\bar{A} \cap B$ • $\bar{A} \cup \bar{B}$

Exercice11 :

On lance cinq fois une pièce de monnaie. La sortie de Pile rapporte 1 point. La sortie de Face ne rapporte rien. On s'intéresse à la somme des points obtenus à l'issue des cinq lancers.

1) Décrire l'univers associé à l'expérience aléatoire.

2) Préciser le nombre d'éventualités qui le composent.

Exercice12 :

A et B sont deux événements incompatibles.

1) Calculer $p(A \cap B)$ si :

- $p(A) = 0,3$ • $p(B) = 0,5$

2) Calculer $p(A \cup B)$ si :

- $p(A) = 0,2$ • $p(B) = 0,4$

Exercice13 :

On lance deux dés à trois faces équilibrés et on s'intéresse à la somme des nombres obtenus. On définit les événements suivants :

- E : « le résultat est pair »
- F : « le résultat est au moins égal à 5 »
- G : « le résultat est au moins égal à 6 »

Préciser les événements élémentaires qui composent chacun des événements ci-dessus.

Exercice14:

Un sac contient des boules indiscernables au toucher : 10 rouges, 6 noires et 4 jaunes.

1. On tire une boule au hasard et on note sa couleur

a. Quelle est la probabilité pour que cette boule soit rouge ?

b. Calculer de deux façons différentes la probabilité pour que cette boule soit noire ou rouge

2. En répétant 2500 fois ce tirage, combien de boules jaunes peut-on espérer tirer ?

Exercice15 :

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Aucune justification n'est demandée.

Pour chacune des questions, trois réponses sont proposées. Une seule est exacte.

Énoncé :

Un sac contient six boules : quatre blanches et deux noires. Ces boules sont numérotées :

Les boules blanches portent les numéros 1 ; 1 ;2 et 3 et les noires portent les numéros 1 et 2.

Numéro	Question	Réponse A	Réponse B	Réponse C
1	Quelle est la probabilité de tirer une boule blanche ?	$\frac{2}{3}$	$\frac{6}{4}$	0,4
2	Quelle est la probabilité de tirer une boule portant le numéro 2 ?	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
3	Quelle est la probabilité de tirer une boule blanche numérotée 1 ?	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{6}$



IPN