الجمهورية الإسلامية الموريتانية

شرف - إخاء - عدل

وزارة التربية وإصلاح النظام التعليمي

المعهد التربوي الوطني

كتاب الرياضيات

للسنة السادسة آداب أصلية

تأليف:

محمد حو — مفتش تعليم ثانوي.

أحمد محمود محمد يعقوب — أستاذ تعليم ثانوي.

مراجعة:

محمد البشير سيداتي الركاد — مفتش تعليم ثانوي.

طارق أحمد سالم — أستاذ تعليم ثانوي.

تدقيق:

محمد المختار اندكسعد — أستاذ بالمعهد التربوي الوطني.

تصميم:

شيخ أمي سيد أحمد الجيد — مصممة بالمعهد التربوي الوطني.

IPN

تقديم

في إطار تنفيذ التوجهات الوطنية الرامية إلى تحسين جودة التعليم ومواءمة التعلمات مع متطلبات التنمية ،يسر المعهد التربوي الوطني أن يضع بين أيدي المدرسين والتلاميذ هذه السلسلة الجديدة من الكتب المدرسية العلمية المخصصة للسلك الثانوي.

تغطي هذه المؤلفات جميع شعب التعليم الثانوي ،سواء العلمية منها أو الأدبية ،في مواد الرياضيات وعلوم الطبيعة والفيزياء والكيمياء .وقد أعدت هذه الكتب وفق البرامج الرسمية المعمول بها ،وتعكس إرادة السلطات التربوية في توفير موارد تعليمية ذات جودة لجميع المتعلمين ،بما يتلاءم مع أهداف التكوين وخصوصيات نظامنا التربوي.

ومنذ إعادة كتابة البرامج سنة 1999 إلى غاية اعتماد البرامج الحالية سنة ،2022 عرف نظامنا التربوي مراحل متعددة من الإصلاح والتحديث .غير أن هذه السلسلة تمثل نقلة نوعية وتاريخية ،إذ إنها المرة الأولى التي تستفيد فيها الشعب الأدبية ،وخاصة شعب الآداب العصرية والآداب الأصلية ، من كتب مدرسية في المواد العلمية تشمل جميع مستويات التعليم الثانوي من السنة الخامسة إلى السنة السابعة .كما استفادت شعب الآداب الأصلية من كتب مؤلفة باللغة العربية ،مراعاة لخصوصياتها اللغوية والتربوية ،وضمانا لتيسير استيعاب المضامين العلمية من طرف المتعلمين المعنيين.

وقد تمثلت هذه المهمة ،من جهة ،في مراجعة اثني عشر(12) عنوانا تمثل الكتب الأساسية لمختلف مستويات التعليم الثانوي ،ومن جهة أخرى ،في إعداد اثنين و عشرين (22) عنوانا جديدا تغطي باقي المواد العلمية .ويجسد هذا العمل التربوي الكبير مدى التزام السلطات التربوية بتعزيز الموارد التعليمية الوطنية ومواكبة تنفيذ البرامج الجديدة بصورة فعالة.

وانطلاقا من الأهمية الاستراتيجية للكتاب المدرسي في عملية التعليم والتعلم ،عمل المعهد التربوي الوطني على تعبئة أفضل الكفاءات الوطنية لإنجاز هذه المهمة ،حيث تم اختيار نخبة من المفتشين والمستشارين التربويين والأساتذة ذوي الخبرة والكفاءة العلمية والبيداغوجية، قصد إعداد ومراجعة كتب تستجيب لمعايير الجودة العلمية والتربوية والديداكتيكية.

وقد حرصت فرق التأليف على إنتاج كتب واضحة ومنظمة وسهلة الاستعمال ،تسهم في تنمية المعارف والكفايات وترسيخ الفكر العلمي لدى المتعلمين .كما أولي اهتمام خاص بانسجام المضامين ،وتدرج التعلمات ،وإدماج الأنشطة التطبيقية ،واستعمال الرسوم التوضيحية والوضعيات التعليمية الملائمة للسياق الوطني.

ويتقدم المعهد التربوي الوطني بخالص الشكر والتقدير إلى البنك الإسلامي للتنمية على دعمه القيم لهذا المشروع .فبفضل تمويله ،أمكن إنجاز جميع مراحل هذا العمل التربوي المهم ،ابتداء من التأليف والمراجعة ،مرورا بالتحرير والتصحيح ،وصولا إلى طباعة هذه الكتب المدرسية. ويشكل هذا الدعم مساهمة كبيرة في تطوير التعليم وتعزيز جودة التعلمات في بلادنا.

كما يتوجه المعهد التربوي الوطني بجزيل الشكر إلى جميع الذين ساهموا في إنجاز هذا العمل، من مؤلفين ومراجعين ومفتشين وفرق تقنية وشركاء رافقوا مختلف مراحل التأليف والإنتاج.

وإننا لنعرب عن أملنا في أن تشكل هذه الكتب أدوات تربوية فعالة في خدمة المدرسين والتلاميذ، وأن تسهم في تعزيز تدريس العلوم ،وتحسين المردودية الدراسية ،وتكوين جيل قادر على الإسهام الفاعل في تنمية الوطن.

المدير العام للمعهد التربوي الوطني
د. الشيخ معاذ سيدى عبد الله

IPN

مقدمة

الحمد لله القائل فى محكم كتابه : ﴿ هُوَ ٱلَّذِى جَعَلَ ٱلشَّمۡسَ ضِيَآءً وَٱلۡقَمَرَ نُورٗا وَقَدَّرَهُۥ مَنَازِلَ لِتَعۡلَمُواْ عَدَدَ ٱلسِّنِينَ وَٱلۡحِسَابَۚ مَا خَلَقَ ٱللَّهُ ذَٰلِكَ إِلَّا بِٱلۡحَقِّۚ نُفَصِّلُ ٱلۡأٓيَٰتِ لِقَوۡمٖ يَعۡلَمُونَ ٥ ﴾ سورة يونس

والصلاة والسلام على النبي العدناني وعلى آله وصحبه الأخيار الأعيان.

السادة الأساتذة، أبنائنا التلاميذ نقدم إليكم كتاب الرياضيات للسنة السادسة آداب أصلية حسب برنامج 2020 ورؤيته الشمولية.

وقد حرصنا على المخطط التالي لكل فصل:

- **نشاطات تمهيدية لتقديم المفهوم.**
- **محتوى شامل للدرس يحوي أهم المعارف المقررة.**
- **تمارين تطبيقية محلولة.**
- **وضعيات لتجسيد المفاهيم من الحياة اليومية.**
- **تمارين متنوعة.**

وفى انتظار ملاحظاتكم ومقترحاتكم بعد تجريب الكتاب نسأل الله التوفيق والنجاح لمنظومتنا التربوية.

المؤلفان

IPN

IPN

الفهرس

الفصل	رقم الدرس	عنوان الدرس	رقم الصفحة
الأول المقاييس الإسلامية والنظم	الدرس الأول	المقاييس الإسلامية	6
	الدرس الثاني	معادلات و متراجحات الدرجة الأولى بمجهول واحد أو بمجهولين	8
	الدرس الثالث	نظام معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين	13
		تمارين متنوعة	18
الثاني معادلات و متراجحات الدرجة الثانية	الدرس الأول	حدوديات الدرجة الثانية	21
	الدرس الثاني	معادلات الدرجة الثانية	21
	الدرس الثالث	تفكيك ثلاثي حدود الشكل القانوني	22
	الدرس الرابع	متراجحات الدرجة الثانية	23
		تمارين متنوعة	25
الثالث الدوال العددية	الدرس الأول	عموميات على الدوال	25
	الدرس الثاني	النهايات و الاتصال	27
	الدرس الثالث	الاشتقاق	31
	الدرس الرابع	المقاربات و الفروع اللانهائية	36
	الدرس الخامس	أمثلة على دراسة ورسم الدوال	37
		تمارين متنوعة	39
الرابع الهندسة في المستوي	الدرس الأول	إحداثيات نقطة ومركبات متجه	39
	الدرس الثاني	معادلة مستقيم	41
	الدرس الثالث	الأوضاع النسبية لمستقيمين في المستوي	43
		تمارين متنوعة	45
الخامس الإحصاء	الدرس الأول	ميزات التموضع :الحصيص المتراكم . التردد المتراكم . تمثيل سلسلة إحصائية	46
	الدرس الثاني	الوسط الحسابي . الانحراف المتوسط	52
	الدرس الثالث	التغاير . الانحراف المعياري	58
		تمارين متنوعة	61

الفصل الأول : المقاييس الإسلامية والنظم

أولا : المقايس الإسلامية

هي جزء من النظام التقليدي للقياسات الذى استعمله العلماء والتجار في الحضارة الإسلامية وقد تختلف أسماؤها وقيمها قليلا حسب المكان والزمان.

وضعية استكشافية : ما زال أغلب سكان الريف يستخدم في معاملاتهم اليومية مقاييس الطول والوزن أو الكيل والسعة والزمن وكذلك المقاييس النقدية القديمة , ويجدون صعوبة في قضاء حوائجهم, وهو ماحصل لأحمد عند قدومه إلى المدينة فطلب من صديقه أن يقدم له شرحا مفصلا يبين المقياس التقليدي وما يقابله حديثا فحضر له الجداول التالية :

I - مقاييس الطول الإسلامية من الأصغر إلى الأكبر

اسم المقياس التقليدي	ما يقابله بالمقياس الحديث
1- الأنملة :	1,5 – 2 ≈ سم
2 - الإصبع :	2,5 –2 ≈ سم
3- الأرملة :	8 – 10 ≈ سم
4 – الشبر	22 – 25 ≈ سم
5 – الفَتْر	بُعد ما بين الإبهام والسبابة عند المد
6 – الذراع	49,5 ≈ سم
7 – القامة	198 ≈ سم
8 – الباع	184 – 198 سم
9 – الفرسخ	5,5 ≈ كم
10 – الميل	1,6 – 2 ≈ كم
11 – البريد	21,6 كم
12 – المرحلة	43 ,2 كم
13 - مسافة قصر	80 ,64 كم إلى 84كم

II - مقاييس الوزن والكيل الإسلامية من الأصغر إلى الأكبر

أولًا : مقاييس الوزن الصغرى

مقاييس الوزن والكيل الإسلامية	المقاييس الحديثة و الملاحظات
1) الدانق	0,5 غ
2) النواة	14,875 غ
3) الرطل	≈ 312,5 جرامًا على الأصح

ثانيًا :مقاييس الكيل الكبرى

مقاييس الوزن والكيل الإسلامية	المقاييس الحديثة
1) الحَفنة أو المد	≈ 0,625 كغ
2) القِسْط : نصف صاع	≈ 1,25 كغ
3) الصاع	≈ 2,5 كغ
4) المكوك	≈ 3,75 كغ
5) الفَرْق	≈ 6,5 كغ
6) الوسق	≈ 150 كغ
7) القفيز	≈ 30 كغ
8) العِرْق	≈ 37,5 كغ
9) الأردب	≈ 60 كغ
10) القلة	≈9,4 كغ
11) القنطار	100 كغ

المقياس	يعادل باللتر تقريبًا	ملاحظات
المدّ	≈ 0,625 لترًا	ربع صاع
الصاع	2,5 لترًا	يُستخدم في زكاة الفطر وغيرها
القُفِيز	13لترًا	يُستخدم في الكيل أحيانًا
الكيلجة	20لترًا	مكيال تقريبي في بعض المناطق
الفرق	7.5لترًا	مكيال أقل من الصاع
الإردب	60لترًا	يُستخدم في بعض البلدان الإسلامية
الوسق	150 لترًا	يساوي 60 صاعًا

IV - مقاييس الزمن في الإسلام

استخدم المسلمون عبر التاريخ مقاييس زمنية مستمدة من القرآن الكريم والسنة النبوية، وكانت هذه المقاييس تعتمد بشكل أساسي على حركة القمر والشمس، وفيما يلي عرض لأهم مقاييس الزمن في الإسلام:

المقياس	الشرح
اليوم	من غروب الشمس إلى غروب اليوم التالي، ويبدأ اليوم في الإسلام من المغرب.
الليلة	الجزء الليلي من اليوم، ويبدأ من غروب الشمس إلى الفجر.
الأسبوع	يتكون من 7 أيام، وأول يوم فيه هو يوم السبت، ويوم الجمعة هو خير الأيام.
الشهر القمري	مدة دوران القمر حول الأرض، ويتكون من 29 أو 30 يوماً .تُستخدم الأشهر القمرية في التقويم الهجري. و يعتمد على رؤية الهلال
السنة الهجرية	12شهراً قمرياً، تبدأ بشهر المحرم وتنتهي بشهر ذي الحجة.
الساعة	لم تكن الساعة كوحدة دقيقة مستخدمة بنفس الشكل الحديث، بل كانت تقسم الأوقات بحسب موقع الشمس.
الوقت	ويقسم اليوم إلى خمسة أوقات أساسية للصلاة :الفجر، الظهر، العصر، المغرب، العشاء.

الوحدات الزمنية الصغرى

الوحدة	الشرح	ما يعادلها
الساعة	الساعة تختلف طولها حسب الفصول	1/12من النهار أو الليل
الدقيقة	لم تكن شائعة بنفس الدقة الحديثة	1/60من الساعة
الثانية	لم تكن مستخدمة فعليًا في العصور الأولى	1/60من الدقيقة

تقسيم اليوم في الإسلام حسب الصلوات

الوقت	الحدث المرتبط
الفجر	بداية اليوم الإسلامي، بعد ظهور الفجر الصادق
الظهر	زوال الشمس
العصر	عندما يصبح ظل كل شيء مثله
المغرب	غروب الشمس
العشاء	بعد مغيب الشفق الأحمر

V - مقاييس النقد الإسلامية

اسم المقياس التقليدي	ما يقابله في الوحدات الحديثة
الحبة :جزء صغير من المثقال	(0,04 غرام من الذهب)
القراط	0,2 غ
الدرهم :	2.975 غرام من الفضة. ويعادل سبعة أعشار الدينار
المثقال	4.25 غرام ذهب
الدينار	4.25 غرام ذهب

تطبيقات فقهية

1) زكاة الفطر :تُقدَّر بِصاع من الطعام 2.5 كجم أرز أو قمح مثلا
تطبيق الصاع :املأ وعاءً بسعة 2.5 كغ من الأرز لتصور مقدار زكاة الفطر .
2)زكاة الذهب :النصاب 85 جرامًا من الذهب يخرج منه 2,5 % كزكاة للمحتاجين
3) زكاة الفضة: النصاب 595 غرام فضة يخرج منه 2,5 % كزكاة للمحتاجين
4) الطهارة :الماء القليل أقل من 204 ≈ لتر ينجس بملاقاة النجاسة .

تمارين تطبيقية مع الحلول

السؤال	الحل
1 دينار = ... درهم	1 دينار = 20 درهما
1قنطار =... دينار = ... درهم	1قنطار = 8400 دينار = 168000 درهم
1 أوقية =... مثقال = ... غرام فضة	1 أوقية =7 مثقال = 119 غرام فضة
1رطل= ... أوقية = ... جرامًا	1رطل =12 أوقية =450 جرامًا
-كم أنملة في ذراع واحد؟	-الذراع ≈24 إصبعًا والإصبع ≈2 أنملة إذن 1ذراع = 2 × 24 = 48أنملة .
-إذا كان نصاب زكاة الحبوب 5 أوسق، فكم كلغ من القمح يجب أن تمتلكه لتجب الزكاة؟	1 وَسْق =60 صاعًا ≈150 كلغ -إذن 5أوسق =150 × 5 =750 كلغ
-كم صاعًا من التمر يحتاج لتوزيع فطرة عائلة مكونة من 5 أفراد؟	-فطرة الفرد 1 = صاع العائلة تحتاج = 2.5 × 5 كغ =12.5كغ تمر

تمارين تطبيقية على مقاييس الزمن الإسلامية

سؤال	الحل
السؤال : إذا كانت الشمس تشرق الساعة 6:00 صباحًا وتغرب الساعة 6:00 مساءً، فكم تساوي "ساعة النهار "في هذا اليوم؟	مدة النهار 12 = ساعة عدد الساعات الإسلامية 12 ساعة النهار 12 ÷ 12 = 1أي 60 دقيقة
السؤال : في يوم شتوي، طلع الفجر الساعة 6:30 صباحًا وغربت الشمس الساعة 5:00 مساءً .ما طول ساعة النهار الإسلامية؟	الحل :مدة النهار =10 ساعات و 30 دقيقة =630 دقيقة ساعة النهار : 630 ÷ 12 = 52,5 دقيقة
متى يحين وقت صلاة العصر إذا علمت أن: - شروق الشمس6:00 : - الظهر12:00 : - المغرب 6:00 : وعلمًا أن العصر يحين عند انتهاء الثلث الثاني من وقت الزوال إلى المغرب؟	وقت العصر يبدأ بعد مرور ثلثي المدة بين الظهر والمغرب المدة = 12:00 – 6:00 = ست ساعات =360 دقيقة ثلثا المدة = 2/3 × 360 =240دقيقة وقت العصر = 240 + 12:00 = الساعة 4:00 مساءً

ثانيا:المعادلات و المتراجحات من الدرجة الأولى بمجهول واحد أو بمجهولين :

1- معادلات الدرجة الأولى ذات المجهول الواحد:

الشكل العام :

$$x + a = b \Leftrightarrow x = b - a$$
$$x - a = b \Leftrightarrow x = b + a$$
$$a \neq 0 \; ; \; ax = b \Leftrightarrow x = \frac{b}{a}$$
$$ax + b = c \Leftrightarrow x = \frac{c - b}{a}$$

$$ax - b = c \iff x = \frac{c+b}{a}$$

حل في R المعادلات التالية :

$$x + 3 = 10$$
$$x - 2 = 9$$
$$3x = 18$$
$$2x - 1 = 5$$
$$4x + 1 = 13$$
$$2x + 7 = 0 \iff x = \frac{-7}{2}$$

تمارين– $4x + 9 = 0 \iff x = \frac{9}{4}$

حل في R المعادلات التالية:

$$4x + 3 = 7 \iff x = \frac{7-3}{4} = \frac{4}{4} = 1$$
$$2x = 5 \iff x = \frac{5}{2} = \cdots.$$
$$2x - 5 = 0 \iff x = \frac{5}{2}$$
$$-3x + 3 = 4 \iff -3x = 4 - 3 \iff x = \frac{-1}{3}$$
$$4x + 2 = 2x + 6$$
$$4(x + 1) = 3x + 1$$
$$-4x = -8$$
$$3(x - 5) = 5(x + 1)$$
$$\frac{2}{3}x + 4 = 0$$

وضعيات تؤول إلى حل معادلات من الدرجة الأولى:

التمرين :1 شراء فواكه

اشترى أحمد كيلوغرامً من التفاح وكيلوغرامين من الموز بـ 900 أوقية .إذا كان ثمن كيلوغرام الموز 300 أوقية، فما هو ثمن كيلوغرام التفاح؟

المعادلة :نسمي ثمن التفاح x

$X + 2\times300 = 900$

$X + 2\times300 =900$ اذا **x=900-600=300**

التمرين 2 عمر شخصان :

يبلغ عمر الأب الآن ثلاثة أضعاف عمر ابنه .بعد 4 سنوات، سيكون عمر الأب ضعف عمر ابنه .كم عمر كل منهما الآن؟

المعادلة :نسمي عمر الابن الآن =x عمر الأب الآن =3x بعد 4 سنوات سيكون : إذن $3x+4=2(x+4)$

x=4 عمر الابن 4 سنوات، الأب 12 سنة

التمرين 3 ثمن دفتر :

اشترى محمد 3 دفاتر وقلما بـ 1800 أوقية. إذا كان ثمن القلم 300 أوقية، فما هو ثمن الدفتر الواحد؟

المعادلة :نسمي ثمن الدفتر x إذن لدينا 3x+300=1800 وبالتالي $x = \frac{1800-300}{3}$ **=500**

التمرين 4 طول حبلين :

إذا كان طول الحبل الأول يزيد بـ 5 أمتار عن الحبل الثاني، وكان مجموع طولهما 35 مترًا، فما طول كل حبل؟

المعادلة :نسمي طول الحبل الثاني x إذن طول الأول هو x+5 وبالتالي x+5=35 إذن x+ 2x+5=35

$x = \frac{35-5}{2} = \frac{30}{2} = 15$ وعليه فإن طول الحبل الثاني هو 15 مترا وطول الحبل الأول هو 20 مترا.

التمرين 5 توفير المال:

ادخرأحمد مبلغًا معينًا شهريًا .بعد 6 أشهر، أصبح مجموع ما ادخره 4800 أوقية كم يوفر أحمد شهريًا؟

المعادلة :نسمي المبلغ الشهري = x اذا 6x=4800 وبالتالي $x = \frac{4800}{6}$ =800

2-متراجحات الدرجة الأولى ذات المجهول الواحد:

الشكل العام $ax + b \geq 0$

إشارة المقدار $ax + b$ ، $a \neq 0$

$$ax + b = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-b}{a}$$

x	$-\infty$	$\frac{-b}{a}$	$+\infty$
ax+b	عكس إشارة a		إشارة a

مثال حل المتراجحة

مثال : حل المتراجحة

$$2x + 7 \geq 0$$
$$2x + 7 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-7}{2}$$

x	$-\infty$	$\frac{-7}{2}$	$+\infty$
2x+7	-		+

$$2x + 7 \geq 0 \Rightarrow S = \left[\frac{-7}{2}\ ;\ +\infty\right[$$

تمارين

حل في R المتراجحات التالية:

$$2x + 6 \geq 0$$
$$2x + 5 \leq 0$$
$$3x - 7 > 0$$

IPN

$$-4x - 2 < 0$$
$$\frac{x+3}{x-3} \geq 0$$

c) $3x - 7$

x	$-\infty$	$\frac{7}{3}$	$+\infty$
$3X - 7$	−	+	

الحل

$$3x - 7 \geq 0 \Longrightarrow \quad S = \left[\frac{7}{3} \; ; \; +\infty\right[$$

e) $\frac{x+3}{x-3} \geq 0$

$$x + 3 = 0 \Longrightarrow x = -3$$
$$x - 3 = 0 \Longrightarrow x = 3$$

x	$-\infty$	-3	3	$+\infty$
$x + 3$	−	+	|	+
$x - 3$	−	−	|	+
$\frac{x+3}{x-3}$	+	−	|	+

$$S = \;]-\infty \; ; \; -3] \cup]3 \; ; \; +\infty[$$

وضعيات تؤول إلى حل متراجحات من الدرجة الأولى:

1)محمد يملك حقلا على شكل مربع يتراوح محيطه ما بين 28مترا و 36 مترا ساعد محمد في معرفة طول ضلع حقله الممكنة علما أنه عدد طبيعي

2)يملك محمد لشهر ما مبلغ 22500 أوقية علما أن مصروفه اليومي900أوقية حدد عدد الأيام التي يمكنه فيها الصرف.

حل الوضعية ا

ليكن x طول ضلع المربع إذن محيطه هو 4x اذا سنحل المتراجحة التالية $28 \leq 4x \leq 36$ إذن

$7 \leq x \leq 9$ وعليه فإن الأبعاد الممكنة هي7 أو 8 أو9 متر

3 - المعادلات من الدرجة الأولى بمجهولين :

1 - تعريف المعادلة من الدرجة الأولى بمجهولين

المعادلة من الدرجة الأولى بمجهولين هي معادلة تأخذ الشكل العام:

$ax + by + c = 0$

حيث:

x و y هما المجهولان.

a,b, c أعدادا حقيقية a وb غير معدومين معًا

2 - حل المعادلة من الدرجة الأولى بمجهولين

حل هذه المعادلة هو كل زوج من الأعداد (x, y) الذي يحقق المعادلة .لهذا النوع من المعادلات عدد لا نهائي من الحلول.

a و b عددان حقيقيان غير معدومين.

حل المعادلة من الدرجة الأولى بمجهولين

هو كل زوج من الأعداد (x, y) الذي يحقق المعادلة ;ولهذا النوع من المعادلات عدد لا نهائي من الحلول.مثال:

حل المعادلة : $2x + 3y - 6 = 0$

الحل :

نعبر عن y بدلالة x

$3y = -2x + 6$

$y = \frac{-2X+6}{3}$

كل زوج ($y = \frac{-2X+6}{3}$; x) هو حل للمعادلة .

مثلاً : -إذا كانت ←($y = 2$) ; ($x = 0$) الحل (0, 2)

-إذا كانت←($y = 0$) ; ($x = 3$) الحل (3, 0)

3 - تمارين تطبيقية

التمرين 1:

حل المعادلة $5x - y = 10$ وأوجد ثلاثة حلول مختلفة.

الحل :

نعبر عن y بدلالة x

$y = 5x - 10$

حلول ممكنة:

1) $x = 2$; $y = 0$ → (2, 0).

2) $x = 0$; $y = -10$ → (0, -10).

3) $x = 1$; $y = -5$ → (1, -5)

التمرين 2:

هل الزوج (-2, 1) حل للمعادلة $3x + 4y = -5$ ؟

الحل :

نعوض $x = 1$ و $y = -2$ في المعادلة:

$3(1) + 4(-2) = 3 - 8 = -5$

الناتج يساوي-5 ، إذن ((-2, 1) هو حل للمعادلة.

التمرين 3 :وضعية إدماجية :

اشترت فاطمة كتابًا ودفترًا بمبلغ 50 أوقية .إذا كان سعر الدفتر نصف سعر الكتاب، فما سعر كل منهما؟

الحل :

-لنفرض أن سعر الكتاب هو x أوقية، وسعر الدفتر هو y أوقية.

-لدينا المعادلتان:

1. $x + y = 50$

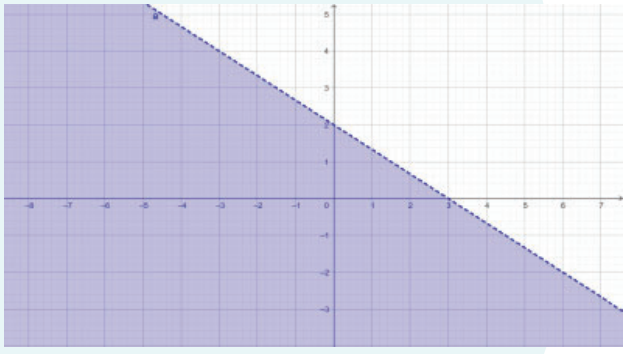
2. $y = \frac{1}{2}x$

نعوض المعادلة الثانية في الأولى:

$x + \frac{1}{2}x = 50$

$\frac{3}{2}x = 50 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{100}{3}$

x=33 ,33... أوقية y= 16,67 أوقية



4 - المتراجحات من الدرجة الأولى بمجهولين :

المتراجحة من الدرجة الأولى بمجهولين هي تعبير رياضي يأخذ الشكل العام :

$ax + by + c \leq 0$

IPN

أو $ax + by + c < 0$ أو $ax + by + c > 0$

$ax + by + c \geq 0$

حيث a, b, c أعداد حقيقية، و a و b غير صفرين معاً .

مثال : $2x + 3y < 6$ نحولها

إلى معادلة $2x + 3y = 6$

خطوات حل المتراجحة بيانياً

1 - تحويل المتراجحة إلى معادلة مستقيم

وذلك لرسم المستقيم .

2 - رسم المستقيم :

- نجد نقطتين على المستقيم غالباً نقاط التقاطع مع المحورين (x) و (y)
- إذا كانت المتراجحة تحتوي على ≤ أو ≥ نرسم المستقيم متصلاً لأنه جزء من الحل .
- إذا كانت تحتوي على < أو > نرسم المستقيم متقطعًا لأنه غير مشمول في الحل .

3 تحديد منطقة الحل :

- نختبر نقطة غير واقعة على الخط) عادةً (0,0) في المتراجحة الأصلية .
- إذا تحققت المتراجحة، نُظلل المنطقة المحتوية على هذه النقطة، وإلا نُظلل المنطقة المقابلة .

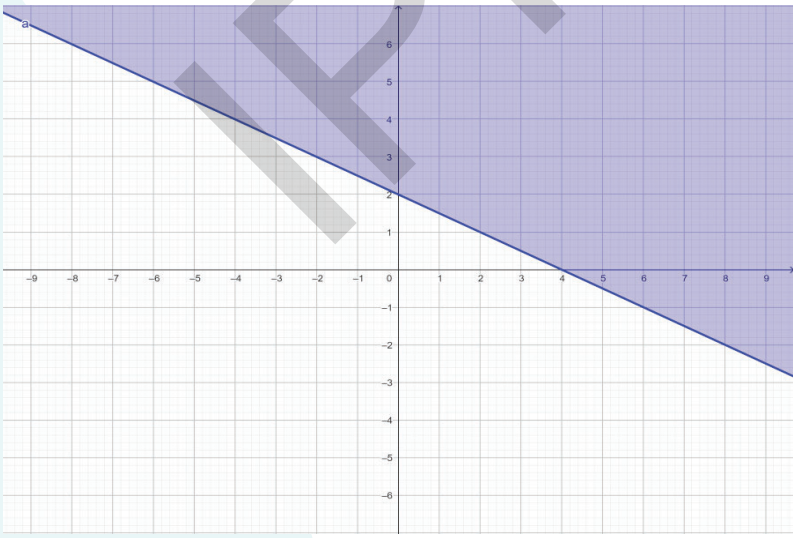
2 - أمثلة توضيحية

المثال :1 حل المتراجحة: $x + 2y \geq 4$ معادلة:

المستقيم : $x + 2y = 4$

- عندما ← (y = 2): (x = 0) النقطة (0,2).
- عندما← (x = 4): (y = 0) النقطة (4,0).

$0+2\times 0 < 4$ إذن نقطة الاصل ليست فى منطقة الحل



نظام معادلتين من الدرجة الأولى ذات مجهولين :

هو مجموعة من معادلتين خطيتين تحتويان على نفس المجهولين عادةً x و y الهدف هو إيجاد قيم xو y التي تحقق كلا المعادلتين في آنٍ واحد .

طرق حل نظام المعادلات :

1 - طريقة التعويض

2 - طريقة الحذف (الجمع أو الطرح)

3 - طريقة الرسم البياني

1 - طريقة التعويض

خطوات الحل :
- نُخرج أحد المجهولين من إحدى المعادلتين بدلالة الآخر .
- نعوض به في المعادلة الثانية لحساب المجهول الأول .
- نعوض الناتج في إحدى المعادلتين لإيجاد المجهول الثاني .

مثال :

حل النظام :

$$\begin{cases} 2x + y = 5 & 1 \\ x - y = 1 & 2 \end{cases}$$

الحل :

من المعادلة :(2)

$x = y + 1$

نعوض x في المعادلة :(1)

$2(y + 1) + y = 5$

$2y + 2 + y = 5$

$3y = 3$

$y = 1$

ثم نعوض $y = 1$ في $x = y + 1$

$x = 1 + 1 = 2$

الحل هو (2, 1)

2 طريقة الحذف (الجمع أوالطرح)

خطوات الحل :
-نجعل معاملات أحد المجهولين متساوية في المعادلتين بضرب إحداهما أو كليهما في عدد مناسب.
-نجمع المعادلتين أو نطرحهما لحذف أحد المجهولين .
-نحل المعادلة الناتجة لإيجاد المجهول الأول، ثم نعوضه لإيجاد الثاني .

مثال :

حل النظام $\begin{cases} 3x + 2y = 8 & \dots 1 \\ 2x - y = 3 & \dots\dots\dots 2 \end{cases}$.

الحل :

نضرب المعادلة (2) في 2 لتصبح المعادلة 3 : $4x - 2y = 6$

نجمع (1) و (3) نحصل على :

$3x + 2y + 4x - 2y = 8 + 6$

$7x = 14$

إذن : $x = \frac{14}{7} = 2$

نعوض $x = 2$ في المعادلة :(2)

$2(2) - y = 3$

$4 - y = 3$

$y = 1$

الحل هو (1 ; 2)

3 - طريقة الرسم البياني :

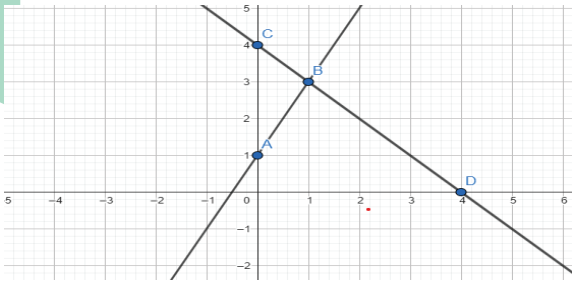
-نرسم المستقيمين الممثلين للمعادلتين على نفس المستوى الإحداثي .
-نقطة تقاطع المستقيمين هي حل النظام .

IPN

مثال :

حل النظام بيانيًا:

$$\begin{cases} Y = 2X + 1 & 1 \\ Y = -X + 4 & 2 \end{cases}$$



الحل : نرسم المستقيم ذا المعادلة 1 ثم المستقيم ذا المعادلة 2

-نجد أن المستقيمين يتقاطعان عند النقطة (1, 3)

-إذن الحل هو x = 1 و y = 3

تمارين تطبيقية :

التمرين 1 :

حل النظام بطريقة التعويض : $\begin{cases} X + Y = 7 & 1 \\ 2X - Y = 5 & 2 \end{cases}$

الحل :

من المعادلة الأولى $y = 7 - x$

نعوض في الثانية :

$2x - (7 - x) = 5$

$2x - 7 + x = 5$

$3x = 12$

$x = 4$ ثم نعوض

$y = 7 - 4 = 3$

الحل (4; 3)

التمرين 2 :

حل النظام بطريقة الحذف : $\begin{cases} 5X + 3Y = 11 & (1 \\ 2X + Y = 4 & (2 \end{cases}$

نضرب المعادلة الثانية في-3

$-6x - 3y = -12$

نجمعها مع الأولى :

$5x + 3y - 6x - 3y = 11 - 12$

$-x = -1$

$x = 1$

نعوض x = 1 في الثانية :

$2(1) + y = 4$

$y = 2$

الحل (1; 2)

وضعية تطبيقية

اشترى أحمد 3 أقلام و 4 دفاتر بـ 50 أوقية ، واشترت سلمى 5 أقلام ودفترين بـ 40 أوقية ما هو سعر القلم والدفتر؟

الحل :

نفرض أن :

-سعر القلم = x

-سعر الدفتر = y

نكون النظام : $\begin{cases} 3X + 4Y = 50 & 1 \\ 5X + 2Y = 40 & 2 \end{cases}$

نضرب المعادلة (2) في 2

$10x + 4y = 80$ (3)

نطرح (1) من (3):

IPN

$7x = 30$

$x = \frac{30}{7}$

نعوض x في المعادلة (2):

$5\times \frac{30}{7} + +2Y = 40$

$2Y=40-\frac{150}{7}$ الجواب

$=\frac{130}{7}$

-سعر القلم≈ 4.29أوقية.

-سعر الدفتر 9.28

نظام المتراجحات من الدرجة الأولى بمجهولين

يتكون من متراجحتين أو أكثر تحتويان على نفس المجهولين x و y الهدف هو إيجاد منطقة الحل المشتركة التي تحقق جميع المتراجحات في النظام.

خطوات حل نظام المتراجحات :

1 حل كل متراجحة على حدة إيجاد منطقة الحل لكل واحدة .

2 تمثيل الحلول بيانياً تحديد المنطقة المشبعة لكل متراجحة .

3 إيجاد التقاطع بين المناطق.

المنطقة التي تحقق جميع المتراجحات هى الحل

طريقة التمثيل البياني

المتراجحة الخطية بمجهولين :

-المتراجحة العامة $ax + by < c$ أو $ax + by > c$

-نرسم الخط المستقيم $ax + by = c$.

-نختبر نقطة مثل (0,0) لمعرفة منطقة الحل .

-إذا كانت النقطة تحقق المتراجحة، نُظلّل المنطقة المحتوية عليها، وإلا نُظلّل الجهة الأخرى .

-نكرر الخطوات لكل متراجحة .

-منطقة الحل هي تقاطع جميع مناطق الحلول .

أمثلة وتطبيقات

المثال 1: حل نظام متراجحتين.

حل النظام بيانياً $\begin{cases} X + Y < 4 \\ 2X - Y > 1 \end{cases}$:

الحل :

1 حل المتراجحة الأولى: $x + y < 4$

- نرسم المستقيم $x + y = 4$ يمر بالنقطتين (4,0) و (0,4)

نختبر : (0,0) $0 + 0 < 4$: صحيح

إذن نُظلل المنطقة تحت الخط .

2 حل المتراجحة الثانية: $2x - y > 1$

- نرسم المستقيم $2x - y = 1$ يمر بالنقطتين (0.5,0) و (0,-1)

إذن نُظلل المنطقة فوق الخط .

نختبر :(0,0) $0 - 0 > 1$ خطأ

3 منطقة الحل المشتركة :هي التقاطع بين المنطقتين المنطقة المظللة.

وضعيات تطبيقية :

الوضعية 1: تخطيط الإنتاج

ينتج مصنع منتجين :

-المنتج A يتطلب 2 ساعة عمل و 1 كغ مواد خام، وربحه 4 أوقية .

-المنتج B يتطلب 1 ساعة عمل و 3 كغ مواد خام، وربحه 5 أوقية .

إذا كان المتاح هو 40 ساعة عمل و60 كغ مواد خام، فما عدد كل منتج لتعظيم (تجويد) الربح؟

الحل :

نفرض :

x عدد المنتجات A

y عدد المنتجات B

نكون نظام المتراجحات : $\begin{cases} 2X + Y < 40 \\ X + 3Y < 60 \end{cases}$

الربح P = 4x + 5y نريد تعظيم:

1 نرسم المستقيمين :

2x + y = 40 يمر بـ (20;0) و (0;40)

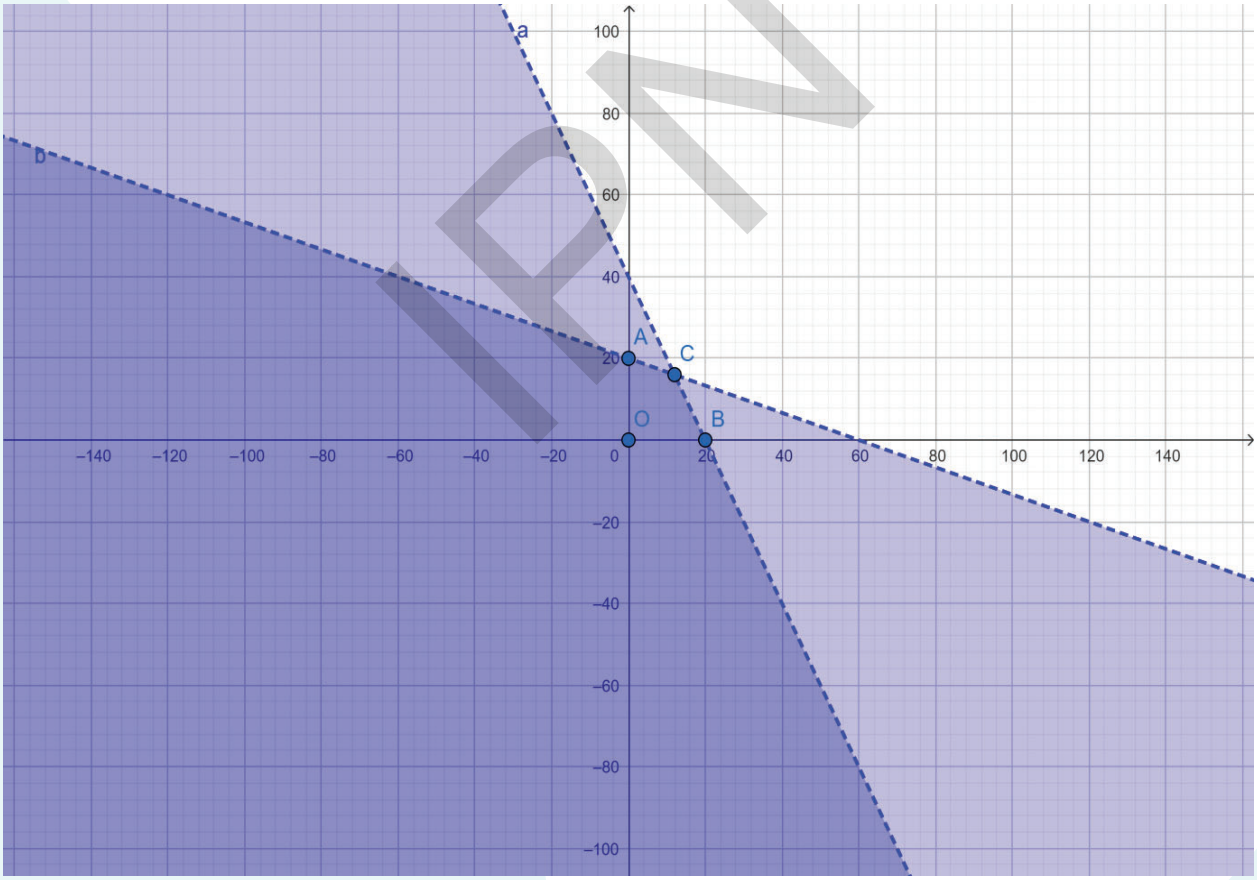
x + 3y = 60 يمر بـ (60;0) و (0;20)

2 منطقة الحل هي المضلع المحدد بالنقاط (0;20), (12;16), (20;0), (0;0)

3 نحسب الربح عند كل رأس - عند: (12;16) : P = 4(12) + 5(16) = 128

وهو أكبرربح

التمثيل البياني :



تمارين متنوعة

I-تمارين على مقاييس إسلامية

أولا تمارين على مقاييس الطول

1 اختر لكل سؤال الجواب الصحيح

السؤال	المقدار	الجواب A	الجواب B	الجواب C
1	5 أذرع	300 سم	260 سم	247,5 سم
2	2 فرسخ	11 كم	15 كم	10 كم
3	3 ميل	5 كم	4,8 كم	6,5 كم
4	مسافة قصر	80 ,64 كم	90 كم	50 كم

2 بلغ طول الثوب 3 أذرع ونصف .كم طوله بالأصابع؟ 1 ذراع =24 إصبعًا

ثانيا تمارين على مقاييس السعة الإسلامية:

1 اشترى تاجر 5 أوسق من التمر، فإذا علمت أن الوسق 60 = صاعا، فكم صاعًا من التمر اشتراه التاجر؟
2 أعطى أحد الفلاحين زكاته بمقدار 3 أوسق من الحنطة، فكم صاعًا دفعها زكاة؟
3 اشترى رجل 20 صاعًا من القمح، فإذا علمت أن كل صاع 4 = أمداد، فكم مدًا من القمح اشتراه؟:
4 إذا علمت أن المد = 0.6875 لتر، فكم لترًا يساوي 10 أمداد؟

ثالثاً :تمارين تطبيقية على مقاييس النقد الإسلامية:

1. إذا كان نصاب الزكاة 85 غرام من الذهب، فكم ديناراً يجب أن يملك الشخص لتجب عليه الزكاة؟
2. احسب قيمة 10 مثاقيل ذهب إذا كان المثقال يزن 4.25 اغرامات.
3. إذا امتلك شخص 600 غرام من الفضة، فهل وجبت عليه الزكاة؟ علل.
4. ما عدد الدراهم في أوقية واحدة؟
5. كم تساوي 5 أواقٍ من الفضة بالدرهم؟
6. إذا كان سعر الغرام الواحد من الذهب 10 دولارات، فكم تساوي قيمة نصاب الزكاة بالدولار؟
7. كم يزن 12 دينارًا من الذهب؟
8. ما الفرق بين المثقال والدينار؟
9. كم عدد الحبات في مثقال واحد إذا علمت أن المثقال 72 = حبة؟
10. الوزن الإجمالي ل 100 درهم بالغرام من الفضة؟

رابعا : تمارين على مقاييس الزمن الإسلامية:

1 كم عدد الأيام في أربعة أشهر هجرية؟ علماً أن الشهر الهجري إما 29 أو 30 يومًا.
2 استمرت غزوة بدر من 12 رمضان حتى 17 رمضان، فكم عدد أيامها؟

II- تمارين على المعادلات والمتراجحات من الدرجة الأولى

أولًا :تمارين على المعادلات من الدرجة الأولى

تمرين:1

حل المعادلة التالية:

$$3x + 5 = 2x + 11$$

تمرين:2

حل المعادلة:

$$4(x - 2) = 2x + 6$$

تمرين:3

إذا كان عمر أحمد بعد 3 سنوات سيكون 25 سنة، فما عمره الآن؟

صيغ المعادلة: $x + 3 = 25$

تمرين:4

حل المعادلة التالية:

$$5 - 2x = 3x + 10$$

ثانيًا: تمارين على المتراجحات من الدرجة الأولى

تمرين:5

حل المتراجحة التالية:

$$2x - 3 < 5$$

تمرين:6

حل المتراجحة التالية:

$$3(x + 1) \geq 2x + 4$$

تمرين:7

يحتاج عامل إلى أكثر من 1500 وحدة أسبوعيًا .إذا كان يصنع 120 وحدة يوميًا، فكم يومًا يجب أن يعمل على الأقل؟

صيغ المتراجحة $120x \geq 1500$:

تمرين:8

حل المتراجحة التالية:

$$-x + 4 > 2x - 5$$

III-معادلات و متراجحات من الدرجة الأولى بمجهولين

أولاً :معادلات من الدرجة الأولى بمجهولين

- ❶ **حل المعادلة التالية:**

  $3x + 2y = 12$

  و $2x - y = 1$

- ❷ **أوجد قيم x و y التي تحقق:**

  $x + y = 10$

  و $2x - 3y = -5$

- ❸ **حل المعادلتين:**

  $4x - y = 7$

  و $x + 2y = 3$

ثانيا: متراجحات من الدرجة الأولى بمجهولين

- ❶ **حل المتراجحتين معاً:**

  $x + 2y \leq 8$

  و $x - y > 1$

- ❷ **حدد منطقة الحل في المستوى الإحداثي:**

  $2x + y \geq 6$

  و $x \leq 4$

- ❸ إذا كانت المتراجحات:
  $x + y \geq 5$
  و $3x - 2y < 4$
  فما مجموعة الحل المشتركة؟

ثالثاً :تمارين حياتية تطبيقية

- ❶ اشترى شخص قلمين وساعة بمبلغ 40 دينارًا، فإذا كان سعر الساعة يزيد بـ 10 دنانير عن سعر القلم، فما سعر كل منهما؟
- ❷ مصنع ينتج نوعين من المنتجات:
  -كل وحدة من المنتج A تحتاج إلى 2 ساعة عمل و 3وحدات خام.
  -كل وحدة من المنتج B تحتاج إلى 3 ساعات عمل و 2وحدة خام.
  إذا توفرت 18 ساعة عمل و 18وحدة خام، فكم يمكنه إنتاج من كل نوع؟

IV-تمارين على نظام معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين

التمرين الأول :حل بالتعويض

حل النظم التالية بالتعويض:

$\begin{cases} x + y = 10 \\ x - y = 2 \end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases} x + 2y = 11 \\ x - y = 2 \end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x - 3y = -1 \end{cases}$

التمرين الثاني الحذف بالتجميع أو الطرح

حل النظم التالية بالتجميع أو الطرح:

$\begin{cases} x + 2y = 10 \\ x - y = -2 \end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases} x + 3y = 10 \\ 3x - 2y = -3 \end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases} 2x + y = 9 \\ x - 3y = -20 \end{cases}$

التمرين الثالث الحل البياني

حل النظم التالية بيانيا:

$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ x - y = -1 \end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases} x + 3y = 11 \\ 3x - 2y = 0 \end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases} 2x + y = 10 \\ x - 3y = -9 \end{cases}$

V-نظام متراجحتين من الدرجة الأولى بمجهولين

التمرين1

أوجد مجموعة الحل لنظام المتراجحتين التاليتين:

$\begin{cases} x + 2y \geq 5 \\ x - y < -1 \end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases} x + 3y \leq 11 \\ 3x - 2y \geq 0 \end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases} 2x + y \geq 10 \\ x - 3y \leq -9 \end{cases}$

التمرين2

حل النظام التالي ومثل مجموعة الحل بيانياً:

$\begin{cases} x + y \geq 5 \\ x + y < -1 \end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases} x - 3y \leq -2 \\ x + 2y \geq 3 \end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases} x + y \geq 1 \\ x - 3y \leq -2 \end{cases}$

التمرين3

أوجد مجموعة الحلول للمتراجحتين التاليين:

$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \leq 3x + 2 \end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases} -2x + y \leq 4 \\ x + y \geq -1 \end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases} x \leq 4 \\ y \geq -x + 1 \end{cases}$

IPN

الفصل الثاني :معادلات و متراجحات الدرجة الثانية

1)حدوديات الدرجة الثانية

ا)تعريف:

هي مقادير من الشكل :

ax^2+bx+c حيث a لاصفري و a,b,c أعداد حقيقية

ب)أمثلة:

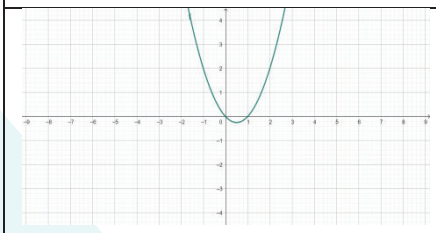
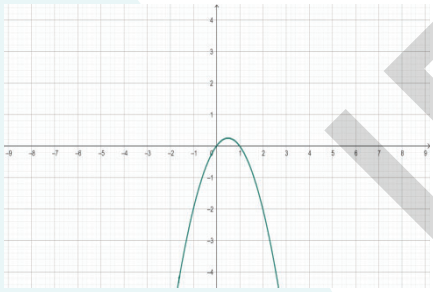
x^2+3x+2

$-4x^2-3x+5$

x^2+7x

ج) تمثيل حدودية الدرجة الثانية بيانيا

الرسم البياني لها يكون على شكل قطع مكافيء

شكل القطع المكافئ	وضعه	رسم بياني
إذاكان $a>0$ مثال x^2-x	اتجاهه للأعلى	
إذا كان $a<0$ مثال $-x^2+x$	اتجاهه للأسفل	

2- معادلات الدرجة الثانية ذات المجهول الواحد:

الشكل العام هو: $ax^2+bx+c=0\ ;\ a\neq 0$

المميز $\Delta = b^2-4ac$

حالات Δ :

1. $\Delta<0$ لا حل لها في $\mathbb{R}$
2. $\Delta=0$ لها حل وحيد مضاعف $X_2 = X_1=\frac{-b}{2a}$
3. $\Delta>0$ لها حلان في $\mathbb{R}$

$X_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $X_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

مثال $x^2-3x-4=0$

$$\Delta = b^2-4ac \begin{cases} a=1 \\ b=-3 \\ c=-4 \end{cases}$$

$$\Delta = (-3)^2-4\times 1\times(-4) = 9+16$$

IPN

$\Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{25} = 5$

بما أن $\Delta > 0$ فإن المعادلة لها حلان هما :

$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_1 = \frac{3+5}{2} = \frac{8}{2} = 4$

ومنه: $x_1 = 4$

$x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_2 = \frac{3-5}{2} = \frac{-2}{2} = -1$

ومنه: $x_2 = -1$

إشارة مقدار ثلاثي: $P(x) = ax^2 + bx + c$

$\Delta < 0$ إشارة المقدار نفس إشارة a

X	$-\infty$ $+\infty$
$P(x) = ax^2 + bx + c$	نفس إشارة a

$\Delta = 0$ إشارة المقدار نفس إشارة a

x	$-\infty$	-2 $+\infty$
$P(x) = x^2 + 4x + 4$	+ a نفس إشارة	+ a نفس إشارة

$\Delta > 0$ لدينا الجدول التالي:

x	$-\infty$	X_1		X_2	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	a إشارة		a عكس إشارة		a إشارة

في المثال السابق إشارة $P(x) = x^2 - 3x - 4 = 0$

x	$-\infty$	-1		4	$+\infty$
$x^2 - 3x - 4$	+		−		+

تمارين

ادرس إشارة المقادير التالية:

$P(x) = -3x^2 + x - 4$; $D(x) = 2x^2 - 4x - 1$;

$G(x) = x^2 - 4x + 4$

3 -تفكيك مقدار ثلاثي (كتابته على شكل جداء عوامل)

$\Delta > 0$ يكتب على شكل $P(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$

$\Delta = 0$ يكتب على شكل $P(x) = a(x-x_0)(x-x_0)$

$\Delta < 0$ لا يمكن كتابتها على شكل جداء عوامل حقيقية

مثال : اكتب المقدار التالي على شكل جداء عوامل: $P(x) = x^2 - 7x + 12$

$x^2 - 7x + 12 = 0$

$\Delta = (-7)^2 - 4 \times 1 \times (12) = 49 - 48 = 1 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{1} = 1$

بما أن $\Delta > 0$ فإن المعادلة تقبل حلان هما :

$X_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ $X_1 = \frac{7-1}{2} = \frac{6}{2} = 3$

$X_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ $X_2 = \frac{7+1}{2} = \frac{8}{2} = 4$

ومنه $P(x) = a(x-x_1)(x-x_2) = 1(x-3)(x-4)$

تمرين

اكتب على شكل جداء عوامل المقادير التالية

$Q(x) = x^2 + 7x + 12$;

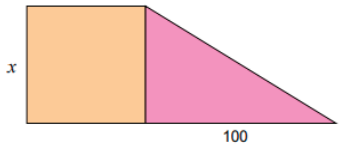
$P(x) = 2x^2 + x - 10$;

$N(x) = 3x^2 - 2x + 12$;

$P(x) = x^2 - 5x + 4$

وضعيات تؤول الى حل معادلات من الدرجة الثانية:

1) مزارعان لديهما حقلان لهما جانب مشترك غير معروف الطول. أحدهما مربع الشكل ، والآخر على شكل مثلث قائم الزاوية بقاعدة 100 متر كما في الشكل. مع العلم أن الحقلين متساويان في المساحة ، احسب طول ضلع المربع.



حل الوضعية

X هو طول الجانب المشترك. البيانات موضحة في الشكل المعاكس: مساحة الحقل المربع تساوي x^2. مساحة الحقل المثلث تساوي $\frac{100x}{2} = 50x$ نظرا لأن الحقلين متساويان في المساحة ، يمكن تحويل المشكلة إلى حل المعادلة: $x^2 = 50x$ أي $x^2 - 50x = 0$

إذن $x(x - 50) = 0$ إذا كان حاصل ضرب العوامل يساوي صفرا ، فإن أحد العوامل على الأقل هو صفرا.

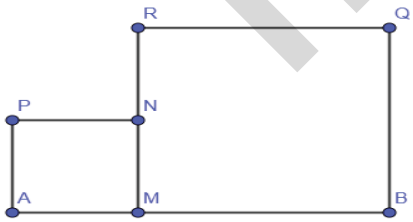
أما $x = 0$ أو $x - 50 = 0$ ، إذا $x = 0$ أو $x = 50$ الحل الأول لا يناسب حالة المشكلة ، نستنتج أن الحقل الأول مربع طول ضلعه 50 مترا والثاني مثلث قائم الزاوية طول قاعدته 100 م وارتفاعه 50

2) في الشكل أدناه [AB] طوله 4. M هي نقطة متحركة على المقطع [AB].

AMNP و MBQR مربعان.

نشير إلى x المسافة AM.

نبحث عن مواضع M بحيث تكون المساحة المكونة من المربعين أكبر من 10.



1. لأي مجال ينتمي x؟

2. أظهر أن المشكلة تكمن في حل عدم المساواة أو المتراجحة

$2x^2 - 8x + 6 \geq 0$.

3. قم بتوسيع التعبير $(x-1)(x-3)$ واستنتج.

4 متراجحات الدرجة الثانية :

المتراجحة: $x^2 - 3x - 4 \geq 0$

حلها هو :

$S =]-\infty ; -1] \cup [4 ; +\infty[$

تمارين

a) $x^2 - 3x - 1 \geq 0$

b) $x^2 - 1 \leq 0$

c) $x^2 + x + 1 > 0$

d) $\frac{x-2}{x-3} > 0$

وضعيات تؤول إلى حل متراجحات من الدرجة الثانية :

1) يتراوح السعر x للبضاعة بين 20 أوقية و 50 أوقية.

العرض هو عدد البضائع التي تقرر الشركة تقديمها للمستهلكين بسعر xأوقية.

الطلب هو العدد المحتمل للبضائع التي يشتريها المستهلكون عندما يتم عرض البضاعة بنفس سعرالأوقية.

يتم حساب الطلب ، معبرا عنه بمئات البضائع ، ب $d(x) = -750x + 45{,}000$.

يتم حساب عرض السعر، المعبر عنه بمئات البضائع، بسعر $f(x)=\frac{-500}{x} + 35000$.

الهدف من هذا التمرين هو معرفة الأسعار التي يكون فيها العرض أعلى من الطلب.

اكتب عدم المساواة الذي يعكس المشكلة المطروحة.

أثبت أن عدم المساواة $f(x) > d(x)$ أيضا $-750x^2 + 10000x < 500{,}000$-.

أ. قم بنشر العبارة $(3x-100)(x + 20)$.

ب. من هذا استنتج حلول $f(x) > d(x)$.

2)كلف محمد فال بحفر بئر في واحة قديمة فاتصل بمؤسسة للحفر أعطته الكشف التالي

5000 أوقية للوازم

1000 أوقية لحفر المترالأول

2000 أوقية لحفر المتر الثاني

3000 أوقية لحفر المتر الثالث

وهذا يعني أنه من أجل حفر ثلاثة أمتار يجب دفع

5000 + 1000 + 2000 +3000 ليكون الجميع

11000 وهكذا لكل متر زيادة يكلف 1000 أوقية زيادة على الذي سبق (كلما كان العمق أكثر كلما كان صعود التراب أصعب)

يمتلك محمد فال ميزانية قدرها 330000 أوقية هل يمكنكم مساعدته من أجل تحديد إلى أي عمق يمكنه أن يحفر؟

حل الوضعية:

ليكن n عمق البئر سعر تكلفة حفر هذا البئر هو

$5000 + 1000 + 30 + 1000 \times 12 \times 00 + \ldots\ldots \times 1000\, n$

ليكن $5000 + 1000 \times (1+2+3+\ldots\ldots+n)$

نعلم أن $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

من حلال هذه الصيغة وجد محمد فال أن قيمة n

يجب أن تكون حلا للمتراجحة $5000 + 1000 \times \frac{n(n+1)}{2} \leq 330000$

وهذا يؤول إلى حل المتراجحة $1000 \times \frac{n(n+1)}{2} \leq 325000$ أي $\frac{n(n+1)}{2} \leq 325$ أو أيضا $n^2 + n - 650 \leq 0$ ولكن $n^2 + n - 650$ =0 حلها هو n=25 وعليه

n	0	25	$+\infty$
$n^2 + n - 650$	−		+

إذن حل المتراجحة هي القيم $n \leq 25$ وعليه فيمكنه حفر 25 مترا على الأكثر.

تمارين متنوعة على المعادلات والمتراجحات من الدرجة الثانية

أولا :حل المعادلات

1-حل المعادلة

$x^2 - 7x + 10 = 0$

2-حل المعادلة

$3x^2 - 2x - 1 = 0$

3حل المعادلة

$x^2 - 9 = 0$

4حل المعادلة

$x^2 + x - 12 = 0$

5حل المعادلة

$5x^2 + 6x + 1 = 0$

ثانيا :حل المتراجحات التالية

a) $x^2 - 3x + 2 \geq 0$

b) $x^2 - 4 \leq 0$

c) $x^2 + x + 1 > 0$

d) $\frac{x+2}{x+3} > 0$

e) $x^2 \geq 4x - 3$

b) $x^2 + 4 \leq 0$

f) $x^2 + x > 0$

g) $\frac{-x-3}{x+3} > x$

ثالثا وضعيات تؤول إلى حل معادلات أو متراجحات من الدرجة الثانية

1-إذا قُذفت كرة عموديًا نحو الأعلى من ارتفاع 2 متر، فإن ارتفاعها بعد t ثانية يعطي بالعلاقة $h(t) = -5t^2 + 20t + 2$:
بعد كم من الوقت تصل الكرة إلى أقصى ارتفاع لها؟

2-شركة تصنع منتجًا وتبيع x وحدة منه يوميًا .الربح اليومي بالأوقية يُعطي بالعلاقة $R(x) = -2x^2 + 40x - 120$.كم:
عدد الوحدات التي يجب بيعها لتحقيق أقصى ربح؟

3 مستطيل محيطه 20 سم، طوله يزيد بـ 2 سم عن عرضه .أوجد أبعاده.

4-جسم يتحرك وفق المعادلة $x(t) = -3t^2 + 12t$:، حيث x هو المسافة بالأمتار و t الزمن بالثواني .متى تكون السرعة معدومة؟

5-في تجربة فيزيائية، يتم حساب طاقة جسم حسب العلاقة $E(v) = -v^2 + 10v$:، حيث v هو السرعة .ما السرعة التي تحقق أقصى طاقة؟

6-أرض مستطيلة الشكل مساحتها 60 مترًا مربعًا، وطولها يزيد بـ 4 متر عن عرضها .أوجد أبعادهذه الأرض.

7-إذا كان حاصل ضرب عددين متتاليين هو56 ، فأوجد هذين العددين.

8-يريد فلاح إقامة سياج مستطيل حول حقل مستطيل الشكل مساحته 48 مترًا مربعًا، بحيث يكون طوله أكثر من عرضه بـ 4أمتار .ما أبعاده؟

9-يريد شخص بناء حديقة مربعة الشكل، وإذا زاد طول ضلعها بـ 2متر، زادت المساحة بـ 36مترًا مربعًا .ما طول ضلع الحديقة الأصلي؟

10عدد طبيعي مجموع مربعه ومربع عدده التالي هو .85 ما هذا العدد؟

IPN

الفصل الثالث: الدوال العددية

I- عموميات على الدوال

تعريف الدالة

الدالة هي علاقة تربط كل عنصر x من مجموعة منطلق بعنصر على الأكثر من مجموعة وصول نرمز له ب $f(x)$: يسمى صورة x

نرمز له غالبا بالرمز

$$f \; ; \; D \to R \qquad ; x \to f(x)$$

انواع الدوال العددية :

1-دالة ثابتة : $f(x) = c$

مثال $f(x) = -7$

$$f(x) = 5$$

2 - دالة خطية : $f(x) = ax$ $a \neq 0$

مثال : $f(x) = 3x$

$$f(x) = _8x$$

3- دالة ارتباطية : $f(x) = ax + b$ /مثال / $f(x) = -2x - 9$; $f(x) = 4 + 3x$

4- دالة تربيعية: $f(x) = ax^2 + bx + c$

5 - دالة نسبية $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ حيث $cx + d \neq 0$

ميدان تعريف الدالة D_f

هو مجموعة القيم x التى من أجلها يكون العدد $f(x)$ موجودا

ملاحظة : 1) جميع الدوال الارتباطية وكثيرات الحدود هي معرفة على $\mathbb{R}$

2) الدوال من النوع $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ تكون معرفة حيث تكون h معرفة ولاصفرية

أمثلة: حدد ميدان تعريف الدوال التالية:

$$f(x) = 4x - 8 \; , \; g(x) = 3x^2 + 5x - 3 \; , \; h(x) = \frac{x+4}{x-2} \; , \; T(x) = \frac{x-8}{x^2+3x+2} \; ,$$

$$P(x) = \frac{1}{x^2 + x + 1}$$

IPN

الحل :

$D_f = D_g = \mathbb{R}$ لأنهما كثيرتا حدود , بالنسبة ل h نحل المعادلة $x-2=0$ اذا $x=2$ وبالتالي يكون ميدان تعريفها هو $D_h = \mathbb{R}-\{2\}$, بالنسبة ل T نحل المعادلة $x^2+3x+2=0$ اذا $\Delta = 1$ وبالتالي فإن $x=-2$ او $x=-1$ وعليه $D_T = \mathbb{R}-\{-2,-1\}$ وأخيرا بالنسبة ل P نحل المعادلة $x^2+x+1=0$ اذا $\Delta = -3 < 0$ وبالتالي فإن المعادلة لا حل لها وعليه $D_P = \mathbb{R}$

خصائص الدوال:

التعريف	الخاصية
1- الزوجية :إذا كانت f(−x)=f(x) فالدالة زوجية (متماثلة حول محور (OY)	الزوجية
2- الفردية :إذا كانت f(-x) = -f(x) فالدالة فردية (متماثلة حول الأصل.	الفردية

صورة وسابق عدد

صورة العدد x بالدالة f هو العدد $y=f(x)$ بينما العدد x هو سابق العدد $y=f(x)$

أمثلة: $f(x)=4x-8$ $f(2)=0$ 0 هو صورة 2 بينما 2 هو سابق 0

II- النهايات والاتصال

أولا : النهايات

تعريف النهاية:ما معنى نهاية دالة

نقول إن: للدالة fنهاية عندما يقترب المتغير x من قيمة معينة وتقترب القيمة المقابلة من عدد ثابت.

مثال بسيط إذا كانت $f(x)=2x+1$

فنحسب النهاية عند ما يقترب x من 3

$$\lim_{x\to 3} f(x) = 2\times 3+1 = 7$$

2- أنواع النهايات:

1) نهاية عند نقطة محددة مثلا $\lim_{x\to 2} f(x)$
2) نهاية من اليمين ونهاية من اليسار:

نهاية من اليسار(يعني أن x تاخذ قيم قريبة من a لكن أصغر منها)عند ما يقترب x من a من اليسار $\lim_{x\to a^-} f(x)$

نهاية من اليمين (يعني أن x تاخذ قيم قريبة من a اكبر منها) عند ما يقترب x من a من اليمين $\lim_{x\to a^+} f(x)$

تكون النهاية موجودة فقط إذا كانت نهاية اليمين تساوي نهاية اليسار

3- نهايات لا نهائية (∞)

عند ما تقترب القيم نحو ما لا نهاية مثلا $\frac{1}{x}$

$$\lim_{X\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

العمليات على النهايات

1 - نهاية مجموع دالتين

إذا كانت :

$\lim_{x\to a} f(x) = L \in \mathbb{R}$ و $\lim_{x\to a} g(x) = M \in \mathbb{R}$

فإن $\lim_{x\to a}[f((x) + g(x))] = L + M$

2 - نهاية الفرق

$$\lim_{x\to a}[f(x) - g(x)] = L - M$$

3 - نهاية حاصل الضرب

$$\lim_{x\to a}[f(x) \times g(x)] = L \times M$$

4 نهاية حاصل القسم

إذا كان $M \neq 0$ فإن: $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$

5 نهاية دالة مضروبة في عدد ثابت

$\lim_{x\to a} c \times f(x) = c \times L$ حيث c عدد ثابت

6 نهاية القوة

إذا كان $n \in \mathbb{N}$ $\lim_{x\to a}[f(x)]^n = L^n$

مثال تطبيقي

احسب:

$\lim_{x\to 2}(3x^2 + 5x - 1)$

نحسب مباشرة بالتعويض:

$= 3(2)^2 + 5(2) - 1$

$= 3(4) + 10 - 1$

$= 12 + 10 - 1 = 21$

IPN

ثانيا- الاتصال او الاستمرار

1 - تعريف : ما معنى أن تكون الدالة متصلة

نقول إن الدالة $f(x)$ متصلة عند a إذا تحققت الشروط التالية:

1- $f(a)$ معرفة

2- $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ موجودة

3- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$

الاتصال في نقطة وعلى مجال

الاتصال في نقطة

لكي نقول إن الدالةf متصلة عند نقطةa = x ، يجب تحقق ثلاث شروط أساسية معًا:

1 وجود النهاية عند:a
$\lim\limits_{x\to a}$f(x) موجودة

2 وجود قيمة الدالة عند:a
f(a) موجودة

3 تساوي النهاية مع قيمة الدالة:
$\lim\limits_{x\to a}$f(x) = f(a)

إذا لم يتحقق أي من الشروط الثلاثة، فإن الدالة غير متصلة عند تلك النقطة.

مثال

لتكن:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \neq 1 \text{ إذاكان} \\ 3 & x = 1 \text{ إذاكان} \end{cases}$$

نحسب $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} x^2 = 1$
لكن f(1) = 3 :

بما أن النهاية لا تساوي قيمة الدالة f عند x = 1

إذن الدالة غير متصلة

الاتصال على مجال
الدالة f(x) متصلة على المجال D إذا كانت متصلة عند كل عدد a ∈ D
للتحقق من الاتصال على مجال، نطبق شروط الاتصال الثلاثة عند كل نقطة في المجال.

IPN

ملاحظات:

- الدوال الجبرية مثل كثيرات الحدود متصلة على مجال تعريفها.
- يجب فحص نقاط التغيير في الدوال المقطعية.

أمثلة

مثال:1

$f(x) = x^2 + 1$

مجالها $\mathbb{R}$:

دالة كثيرة حدود $\Leftarrow$ متصلة على $\mathbb{R}$

مثال:2

$f(x) = \frac{1}{x-2}$

مجالها $\mathbb{R} \setminus \{2\}$:

الدالة متصلة على مجالها أي على كل $x \neq 2$

2- أنواع عدم الاتصال :

1 – انفصال قابل للإزالة : إذاكانت النهاية موجودة لكن $f(a)$ غير معرفة أو لا تساوى النهاية.

2 - انفصال غير قابل للإزالة : عندما لا تكون نهاية اليمين تساوى نهاية اليسار.

3 - انفصال لا نهائي : إذا كانت النهاية غير منتهية $(+\infty$ او $-\infty)$

دوال متصلة دائمًا:

- **الدوال كثيرات الحدود :متصلة على $\mathbb{R}$.**
- **الدوال الجذرية :متصلة حيث تكون معرفة.**
- **الدوال الكسرية :متصلة حيث يكون المقام $\neq 0$.**

أمثلة تطبيقية

مثال 1

$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ **عند** $x = 1$

نلاحظ أن البسط يمكن تفكيكه إلى $(x-1)(x+1)$

$f(x) = \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = x + 1$ **عند** $x \neq 1$

إذن $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 2$

لكن $f(1)$ **غير معرفة** $\rightarrow$ **انفصال قابل للإزالة**

الاشتقاق

التعريف :

أولًا :لماذا ندرس الاشتقاق؟

الاشتقاق أداة رياضية مهمة تساعدنا على:

- دراسة تغير الدوال.

-حساب سرعة التغير أو ما يسمى المعدل اللحظي للتغير.

- رسم مماس منحنى عند نقطة معينة.

-دراسة النمو أو النقصان في الظواهر الطبيعية.

تعريف الاشتقاق في نقطة

➢التعريف الرياضي:

إذا كانت f دالة معرفة على مجال يحتوي العدد a ، فإن مشتقة f عند a إن وجدت هي:

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{[f(a+h)-f(a)]}{h}$$

وهذا الحد إن وجد يُسمى المشتقة أو معدل التغير اللحظي.

التفسير الهندسي

f'(a) -تمثل ميل⇐ المماس لمنحنى الدالة f عند النقطة.(a, f(a))

-إذا كان f'(a) > 0 ⇐ المماس يصعد.

-إذا كان f'(a) < 0 ⇐ المماس ينحدر.

-إذا كان f'(a) = 0 ⇐ المماس أفقي ربما قمة أو قاع.

الشروط

لكي تكون الدالة قابلة للاشتقاق عند نقطة a ، يجب أن:

1 تكون معرفة عند a.

2 تكون متصلة عند a.

3 توجد نهاية للحد $\lim_{h\to 0} \frac{[f(a+h)-f(a)]}{h}$

أمثلة تطبيقية

مثال:1

لتكن $f(x) = x^2$ ، نريد حساب مشتقتها عند: $x = 2$

$$f'(2) = \lim_{h\to 0} \frac{[(2+h)^2-4]}{h}$$

IPN

$$= \lim_{h\to 0} \frac{[h^2+4h+4-4]}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{[h^2+4h]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} h + 4 = 4$$

إذن مشتقة الدالة $f(x) = x^2$ عند $x = 2$ هي 4.

ملاحظات هامة

-المشتقة تعني السرعة اللحظية للتغير.

-المشتقة الأولى تُستعمل في دراسة التزايد والتناقص.

-التمثيل البياني للدالة والمشتقة يساعد في الفهم البصري لسلوك مقدار ما.

تطبيقات في الحياة

-في الفيزياء :سرعة الجسم لحظيًا.

-في الاقتصاد :معدل تغير التكاليف أو الأرباح.

-في الهندسة :ميل المنحنيات وحساب الزوايا.

قواعد الاشتقاق :

قاعدة اشتقاق الثوابت

إذا كانت $f(x) = c$ حيث c عدد ثابت، فإن:

$$f'(x) = 0$$

قاعدة القوة

إذا كانت $f(x) = x^n$ حيث n عدد حقيقي، فإن:

$$f'(x) = n \cdot x^{n-1}$$

قاعدة الجذر

إذا كانت $f(x) = \sqrt{x}$ فإن:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

قاعدة المقلوب

إذا كانت $f(x) = \frac{1}{x}$ فإن:

$$f'(x) = \frac{-1}{x^2}$$

قواعد العمليات على الدوال

- $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
- $(f - g)'(x) = f'(x) - g'(x)$
- $(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
- $(\frac{f}{g})'(x) = \frac{[f'(x)g(x) - f(x)g'(x)]}{[g(x)]^2}$

IPN

أمثلة تطبيقية

مثال:1

إذا كانت $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$
فإن:

$$f'(x) = 6x + 2$$

مثال:2

إذا كانت $f(x) = (x^2 + 1)(x - 2)$

نستخدم قاعدة الجداء:

$$f'(x) = (2x)(x - 2) + (x^2 + 1)(1) = 2x(x - 2) + x^2 + 1$$

ملاحظات مهمة

-يجب الانتباه عند تطبيق القواعد المركبة.

-يفضل تبسيط الدالة أولًا إن أمكن لتسهيل الاشتقاق.

-النتائج تساعد لاحقًا في بناء جدول التغيرات ورسم الدالة.

العدد المشتق

تعريف العدد المشتق

العدد المشتق لدالة f عند نقطة a هو عدد حقيقي يرمز له بـ $f'(a)$ ويمثل ميل المماس لمنحنى الدالة عند النقطة ذات الفاصلة a.

ويُحسب بواسطة الصيغة التالية:

$$f'(a) = lim_{h\to 0} \frac{[f(a+h) - f(a)]}{h}$$

إذا وجد هذا الحد، فإن الدالة f قابلة للاشتقاق عند a.

التفسير الهندسي

-العدد المشتق $f'(a)$ هو ميل المماس لمنحنى الدالة عند النقطة $(a, f(a))$.

-إذا كان $f'(a) > 0$ فإن المماس يصعد نحو الأعلى الدالة متزايدة.

-إذا كان $f'(a) < 0$ فإن المماس ينحدر الدالة متناقصة.

-إذا كان $f'(a) = 0$ فإن المماس أفقي نقطة حرجة.

أمثلة لحساب العدد المشتق

مثال:1

لتكن $f(x) = x^2$ ، نريد حساب العدد المشتق عند: $x = 1$

$$f'(1) = lim_{h\to 0} \frac{[(1+h)^2 - 1^2]}{h} = lim_{h\to 0} \frac{[h^2+2h+1-1]}{h}$$

$$= lim_{h\to 0} \frac{[h^2+2h]}{h} = lim_{h\to 0} h + 2 = 2$$

إذن العدد المشتق لـ f عند x = 1 هو2

شروط وجود العدد المشتق

لكي يوجد العدد المشتق f'(a) ، يجب أن:

-تكون الدالة معرفة عند a.

-تكون متصلة عند a.

-توجد نهاية لنسبة تزايد الدالة $\lim_{h\to 0} \frac{[f(a+h)-f(a)]}{h}$

استعمالات العدد المشتق

-معرفة ميل المماس.

-تحليل التغير المحلي للدالة.

-إيجاد السرعة اللحظية في تطبيقات فيزيائية.

-استكشاف القيم القصوى الصغرى أو الكبرى المحلية.

مشتقات الدوال الشهيرة

أولًا :مشتقات الدوال الشهيرة مع أمثلة

مثال تطبيقي	المشتقة f'(x)	الدالة f(x)
$f(x) = 5 \Longrightarrow f'(x) = 0$	$f'(x) = 0$	$f(x) = c$
$f(x) = x \Longrightarrow f'(x) = 1$	$f'(x) = 1$	$f(x) = x$
$f(x) = x^3 \Longrightarrow f'(x) = 3x^2$	$f'(x) = n\,x^{n-1}$	$f(x) = x^n$
$f(x) = \frac{1}{x} \Longrightarrow f'(x) = \frac{-1}{x^2}$	$f'(x) = \frac{-1}{x^2}$	$f(x) = \frac{1}{x}$
$f(x) = \sqrt{x} \Longrightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$f(x) = \sqrt{x}$

ثانيا :أمثلة متنوعة محلولة

مثال:1

$f(x) = x^3 + 2x^2 - x + 5$

$\Longrightarrow f'(x) = 3x^2 + 4x - 1$

مثال:2

$f(x) = \frac{x}{x+1}$

$\Longrightarrow f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$

اتجاه تغيرات الدالة

تعريف:

اتجاه تغيرات الدالة يُعبر عن سلوكها في مجال معين: هل هي متزايدة، متناقصة، أم ثابتة.

1 دالة متزايدة

- نقول إن الدالة f متزايدة على مجال إذا:

$x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

أي كلما زاد x ، زادت أو لم تنقص $f(x)$.

مثال:
$f(x)=2x+1$ متزايدة على $\mathbb{R}$ لأن معامل x موجب.

2 دالة متناقصة

- نقول إن الدالة f متناقصة على مجال إذا:

$x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

أي كلما زاد x ، نقصت أو لم تزد $f(x)$.

مثال:
$f(x)=-3x+2$ متناقصة على $\mathbb{R}$ لأن معامل x سالب.

3. دالة ثابتة

إذا كانت : c عدد ثابت

$f(x)=c$)

فالدالة ثابتة على كل المجال لأن الصورة لا تتغير.

مثال:
$f(x)=5$ دالة ثابتة على $\mathbb{R}$.

4. ✓ جدول تغيرات دالة

يُستخدم لعرض تغيرات الدالة على فترات مختلفة. مثال:

جدول تغيرات الدالة

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	↘	

$f(x)=-2x+3$

✓ الدالة متناقصة لأن معامل

$-2 < 0$.

5. ✓ قراءة تغيرات من تمثيل بياني

- إذا كان المنحنى يصعد من اليسار إلى اليمين ⇐ الدالة متزايدة.
- إذا كان ينزل من اليسار إلى اليمين ⇐ الدالة متناقصة.

6. ✓ تمارين تطبيقية

1. هل الدالة $f(x)=4x-7$ متزايدة أم متناقصة؟ علل.
2. مثل الدالة $f(x)=-x+2$ وحدد اتجاه تغيرها.
3. أنشئ جدول تغيرات للدالة. $f(x)=-5x+1$

IPN

4. هل الدالة $f(x)=0$ متزايدة؟ متناقصة؟ ثابتة
5.

المقاربات والفروع اللانهائية.

أولاً: ما المقصود بالمقارب؟

المقارب هو خط يقترب منه منحنى الدالة دون أن يقطعه عندما تقترب x أو f(x) من ما لا نهاية.

أنواع المقاربات

الشكل	التعريف	النوع
y = L	حينما تؤول f(x) إلى عدد حقيقي عندما تؤول x إلى $\pm\infty$ أو بعبارة أخرى: $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = L$	مقارب أفقي
x = a	حينما تؤول f(x) إلى $\pm\infty$ عندما تؤول x إلى عدد معين a أو بعبارة أخرى: $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$	مقارب عمودي
y = ax + b	حينما تؤول f(x) إلى معادلة مستقيم y = ax + b عندما تؤول x إلى $\pm\infty$ أو بعبارة أخرى: $f(x) = ax + b + \varphi(x)$ $ou \lim_{x\to\pm\infty} \varphi(x) = 0$	مقارب مائل

1- المقارب الأفقي

يحدث إذا كان : $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = L$ إذن y = L :هو مقارب أفقي

مثال. إذا كانت $f(x) = \frac{2x+1}{x+2}$ فإن $\lim_{x\to\infty} f(x) = 2$ المقارب الأفقي هو y = 2

إذا كانت $f(x) = \frac{3x+1}{x+2}$ فإن $\lim_{x\to\infty} f(x) = 3$ ⇒ المقارب الأفقي هو y = 3

2 -المقارب الرأسي

يحدث عندما:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$$

إذن x = a :هو مقارب رأسي.

مثال: إذا كانت $f(x) = \frac{1}{x-1}$ ⇒ $\lim_{x\to 1} f(x) = \pm\infty$

x = 1 هو مقارب رأسي

3 - المقارب المائل

إذا لم يكن هناك مقارب أفقي ولكن:

$$\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$$

فإن المستقيم $y = ax + b$ هو مقارب مائل.

طريقة إيجاده:

1 - نحسب :

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$$

2 .ثم :

$$b=\lim_{x\to\infty}[f(x)-ax]$$

مثال شامل: لدينا $f(x)=\frac{x^2+1}{x}$

$f(x) = x + \frac{1}{x} \Rightarrow \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$

لا يوجد مقارب أفقي

لكن $y = x \Rightarrow \lim_{x\to\infty}[f(x) - x] = 0$: $f(x) - x = 1/x \Rightarrow$

هو مقارب مائل

الفروع اللانهائية

الفرع اللانهائي هو جزء من التمثيل البياني يقترب من مستقيم مقارب عندما:

-تؤول x إلى عدد معين فرع عمودي

-أو تؤول x إلى $\pm\infty$ فرع أفقي أو مائل

امثلة على دراسة دالة

1:جدول تغيرات الدالة $f(x) = x^2 + 4x + 3$

نقوم بدراسة تغيرات الدالة $f(x) = x^2 + 4x + 3$.

الدالة تربيعية من الشكل $f(x) = ax^2 + bx + c$ حيث:

$a = 1, b = 4, c = 3$

بما أن $a > 0$ ، فإن الدالة تقعرها إلى الأعلى.

حساب المميز والجذور:

$\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 12 = 4 > 0 \Rightarrow$ للدالة جذران حقيقيان:

$x_1 = -3$ و $x_2 = -1$

نقطة الرأس قيمة صغرى عند $x_s = -b / 2a = -2$ $f(-2) = -1$

جدول التغيرات:

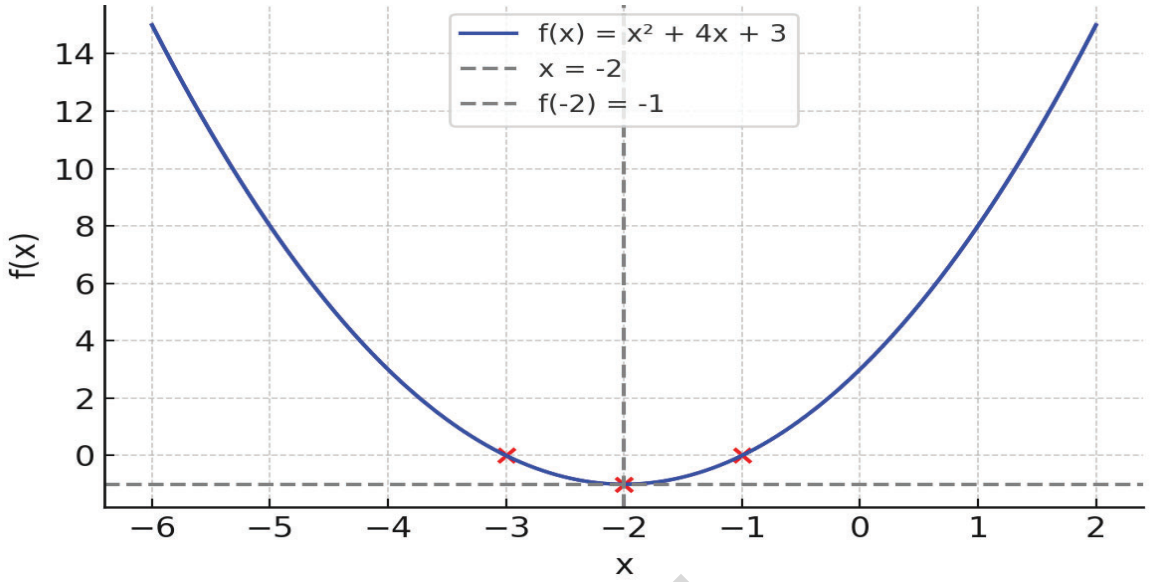
الدالة تقبل قيمة صغرى عند $x = -2$ حيث $f(-2) = -1$

-الدالة تتناقص على المجال $]-\infty , -2]$

-الدالة تتزايد على المجال $[-2 , +\infty[$

x	$-\infty$ $\quad -2$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	$+\infty$ ↘ -1	↗ $+\infty$

الرسم البياني للدالة:



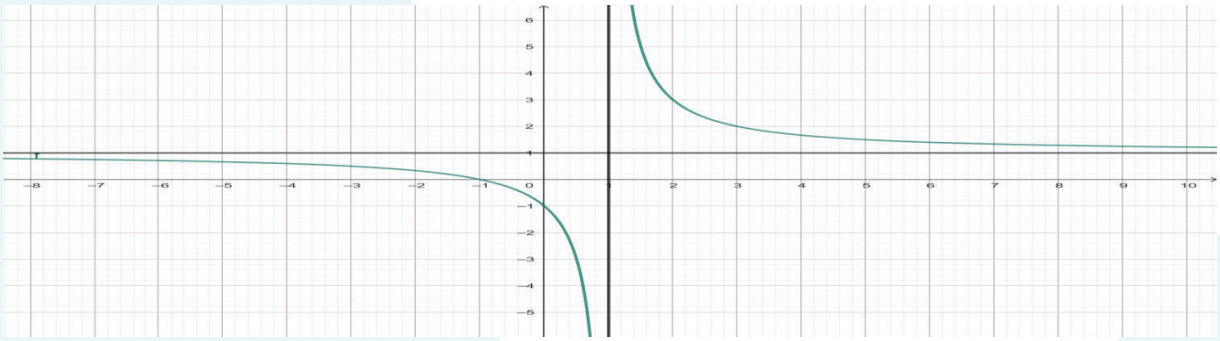
2: الدالة النسبية $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$ هذه الدالة معرفة على كل القيم الحقيقية عدى 1

الفروع اللانهائية: $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=1$ إذا y=1 هو مقارب أفقي للمنحني البياني للدالة , بينما $\lim_{x\to 1} f(x)=\pm\infty$ اذا x=1 هو مقارب راسي للمنحني البياني للدالة

المشتقة هي $f'(x)=\frac{-2}{(x-1)^2}<0$ اذا هي متناقصة تماما علي ميدان تعريفها وجدول تغيراتها كالتالي:

x	$-\infty$ 1	1 $+\infty$
$f'(x)$	−	−
$f(x)$	1 ↘ $-\infty$	$+\infty$ ↘ 1

الرسم البياني:



IPN

تمارين على الدوال العددية درجة ثانية وثالثة ونسبية

الجزء الأول :الدوال من الدرجة الثانية

1.ادرس تغيرات الدالة التالية، ثم أنشئ جدول تغيراتها، ومثّلها بيانيًا:

$f(x) = x^2 - 4x + 3$

2.حل المعادلة $f(x) = 0$ ومثل جذورها على محور الفواصل.

3.احسب القيمة الدنيا أو العليا للدالة وفسّرها بيانياً.

الجزء الثاني :الدوال من الدرجة الثالثة

1- حلل الدالة التالية إلى جداء عوامل:

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

2- أنشئ جدول تغيرات الدالة.

3- حدد النقاط الحرجة وارسم تمثيلًا بيانيًا تقريبيًا.

الجزء الثالث :الدوال النسبية من الدرجة الثانية

تمرين 1

1.ادرس مجموعة تعريف الدالة:

$$f(x) = \frac{(x^2 - 1)}{(x^2 - 4)}$$

2.حدد الفروع اللانهائية ومناطق الرتابة.

3.مثل الدالة بيانيًا مبينًا الوضع النسبي مع المستقيمات المقاربة.

احسب القيمة الدنيا أو العليا للدالة وفسّرها بيانياً.

تمرين 2

1- عين مجموعة تعريف الدالة $f(x) = \frac{(x^2+3x+2)}{(x-1)}$

2- حلل الدالة $f(x) = x^2 - 4x + 3$ إلى جداء عوامل.

3- ارسم بيان الدالة $f(x) = x^2 + 2x - 3$.

4- حدد نوع الدالة $f(x) = -x^2 + 5x - 6$ واذكر مميزاتها.

5- أوجد معادلة المماس للدالة $f(x) = x^2$ عند $x = 2$.

6- حل المعادلة $f(x) = 0$ للدالة $f(x) = x^3 - x$.

7- حدد نهاية الدالة $f(x) = f(x) = \frac{(x^2-1)}{(x-1)}$ عندما x تقترب من 1.

8- حدد مجال الدالة $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$

9- أوجد القيمة القصوى أو الدنيا للدالة $f(x) = x^2 - 6x + 8$.

10- إذا كانت $f(x) = 2x + 1$ و $g(x) = x^2$، فأوجد $f(g(x))$ و $g(f(x))$.

الفصل الرابع :الهندسة في المستوى

1- المرجع القائم وإحداثيات نقطة

المرجع القائم

المرجع القائم هو نظام إحداثي يُستخدم لتحديد موقع النقاط في المستوى، ويتكوّن من:

-محور أفقي (Ox) محورالفواصل

-محور عمودي (Oy) محورالتراتيب

IPN

-نقطة الأصل O(0, 0)
المحوران متعامدان، ويُستخدمان لتحديد إحداثيات أي نقطة في المستوى

إحداثيات نقطة

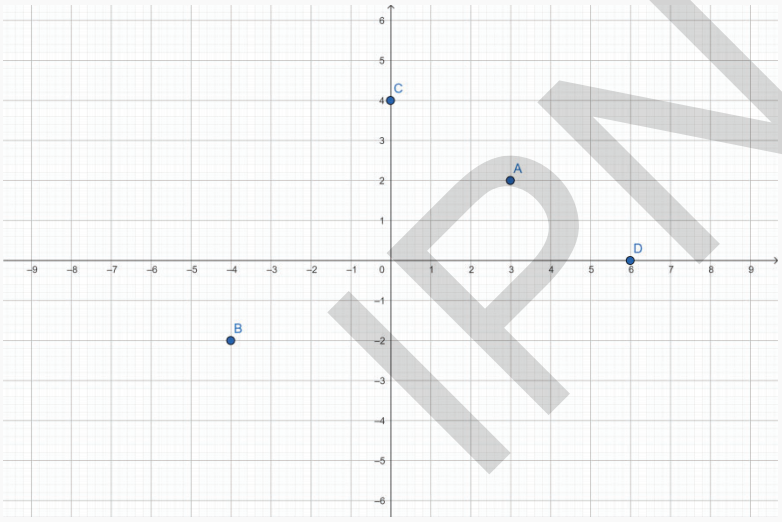
كل نقطة M(x, y) تحدد موقعًا في المستوى.
x: -الفاصلة بعد M عن أصل المعلم على المحور الأفقي
y: -الترتيبة بعد M عن أصل المعلم على المحور العمودي

مثال A(3, 2) :تعني 3 وحدات إلى اليمين و 2وحدات إلى الأعلى انطلاقًا من الأصل.

التمثيل البياني:

الرسم التالي يُوضح المرجع القائم وتموضع النقاط A, B, C, D وفق إحداثياتها:

B(−4 − 2) C(0, 4) D(6, 0) A(3, 2)



IPN

مركبات المتجه

تعريف المتجه:

المتجه :هو مفهوم يحدد : الاتجاه، المنحى، والطول.
نرمز للمتجه الذي ينطلق من النقطة A وينتهي في النقطة B بالرمز $\overrightarrow{AB}$

مركبات المتجه:

إذا كانت $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ فإن مركبات المتجه $\overrightarrow{AB}$ هي $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$

مثال:

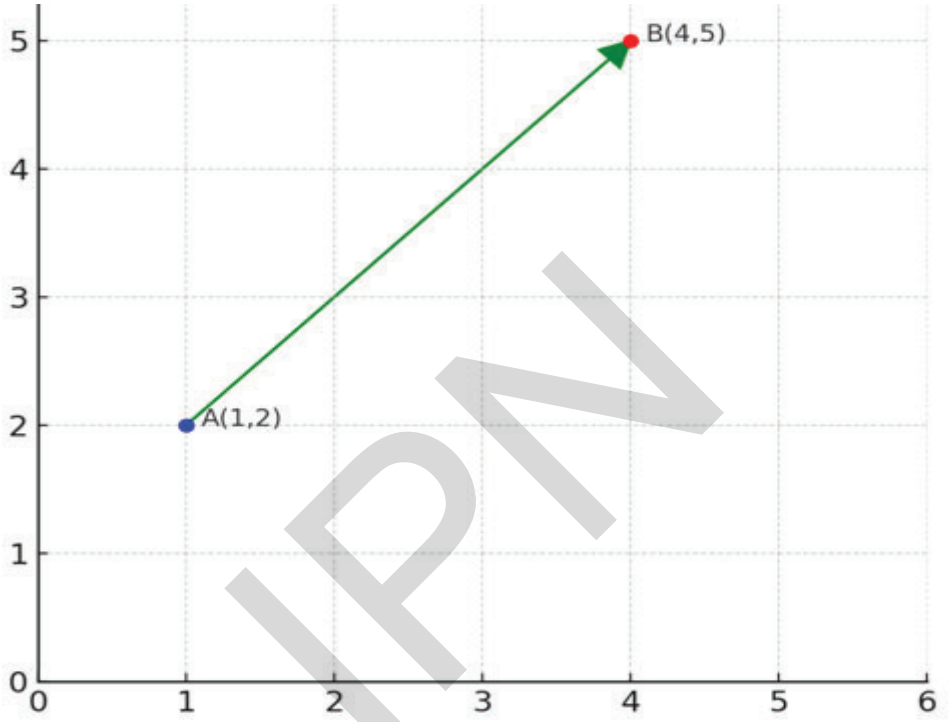
لتكن:

A(1, 2)وB(4, 5)

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 4-1 \\ 5-2 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

أي أن المتجه يتحرك 3 وحدات أفقيًا و 3وحدات عموديًا.

تمثيل بياني للمتجه $\overrightarrow{AB}$:



IPN

معادلة المستقيم

1 الصيغة المختصرة:

$y = mx + b$

حيث m :ميل المستقيم أو معامل التوجيه

b:ترتيب الأصل

مثال:

إذا كان الميل $m = 2$ و ترتيب الأصل $b = 3$ ، فإن المعادلة $y = 2x + 3$:

2 الصيغة العامة:

$ax + by + c = 0$

حيث a و b و c أعداد حقيقية ولا تكون a و b معًا مساويتين للصفر.

مثال:

$3x - 2y + 6 = 0$

3 معادلة مستقيم يمر بنقطة ويملك ميلًا:

$y - y_1 = m(x - x_1)$

حيث (x_1, y_1) نقطة و m هو الميل.

مثال:

يمر المستقيم بالنقطة (1, 2) وميله:3

$y - 2 = 3(x - 1)$

$\Rightarrow y = 3x - 1$

4 معادلة مستقيم يمر بنقطتين:

لحساب الميل:

$m = = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

ثم نستخدم:

$y - y_1 = m(x - x_1)$

تمارين على معادلة المستقيم

تمرين 1 : إيجاد معادلة مستقيم

أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة A(2, 3) ويوازي المستقيم ذا المعادلة:

$y = 4x - 1$

تمرين 2 :إيجاد معادلة مستقيم يمر بنقطتين

أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطتين A(1, 2) :وB(3, 6)

تمرين 3 :معادلة مستقيم عمودي

أوجد معادلة المستقيم العمودي على المستقيم $y = -1/2\ x + 5$:والذي يمر بالنقطةC(2, 1)

تمرين 4 :التحقق من انتماء نقطة

هل تنتمي النقطة P(4, 7) إلى المستقيم الذي معادلته $y = 2x - 1$:

تمرين 5 :تحويل بين الصيغ

حول معادلة المستقيم التالية من الصيغة العامة إلى الصيغة االمختصرة:

$2x - 3y + 6 = 0$

تمرين 6 :مستقيم يقطع المحورين

أوجد معادلة المستقيم الذي يقطع محور السينات عند $x = 4$ ومحور الصادات عند$y = -2$

تمرين 7 :معادلة مستقيم بمعلومية الميل

اكتب معادلة المستقيم الذي ميله $m = -3$ ويقطع محور الصادات عند النقطة(0, 2)

الأوضاع النسبية لمستقيمين في المستوى

ندرس الأوضاع النسبية المختلفة التي يمكن أن توجد بين مستقيمين في المستوى الإحداثي، وهي :التوازي، التطابق، التقاطع، والتعامد .يتم التمييز بينها باستخدام ميل المستقيمين ومعادلاتهما.

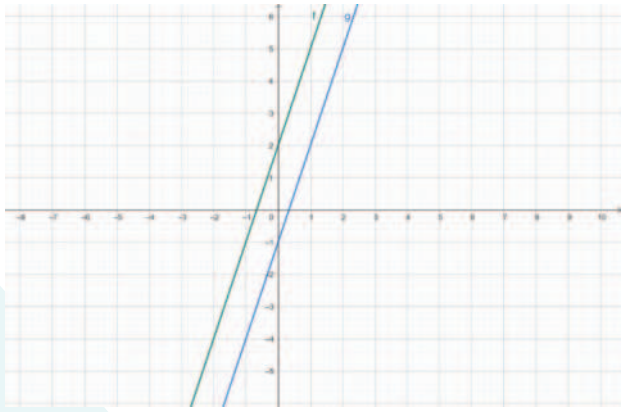
1 - أنواع الأوضاع النسبية:

1 - مستقيمان متوازيان:
- الشرط :نفس الميل ($m_1 = m_2$) لكن الثوابت مختلفة.($b_1 \neq b_2$)
- لا يتقاطعان أبداً.

2 - مستقيمان متطابقان:
- الشرط :نفس الميل ونفس الثوابت($m_1 = m_2$) .و($b_1 = b_2$)
- كل نقطة على أحدهما موجودة على الآخر.

3-مستقيمان متقاطعان:
- الشرط :ميل مختلف($m_1 \neq m_2$)
- يتقاطعان في نقطة واحدة.

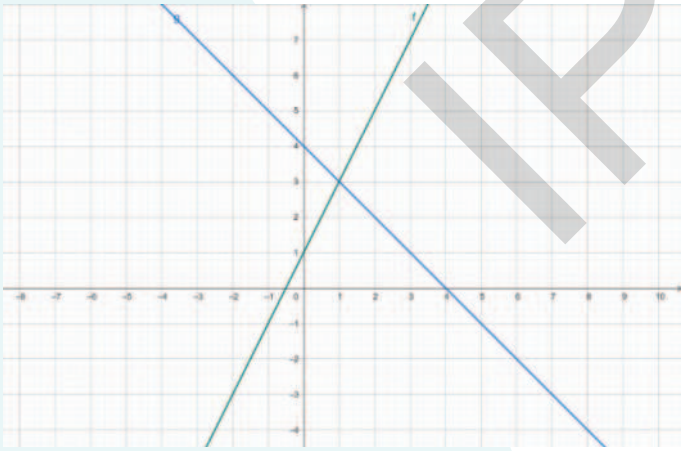
4 . مستقيمان متعامدان:
- الشرط :حاصل ضرب الميلين يساوي($m_1 \times m_2 = -1$)
- يشكلان زاوية قائمة.



2 - مثال على مستقيمان متوازيان:

المستقيم الأول ($y = 3x + 2$)
المستقيم الثاني ($y = 3x - 1$)
ميل المستقيمين متساوٍ ($m_1 = m_2 = 3$)
لكن الثوابت مختلفة، إذن المستقيمان متوازيان ولا يتقاطعان.

3 - مثال على مستقيمين متقاطعين:



المستقيم الأول ($y = 2x + 1$)
المستقيم الثاني ($y = -x + 4$)
ميل المستقيم الأول 2 :
ميل المستقيم الثاني1- :
الميول مختلفة، إذن يتقاطعان.
لحساب نقطة التقاطع:
نجعل المعادلتين متساويتين :

$$2x + 1 = -x + 4$$
$$3x = 3$$
$$x = 1$$

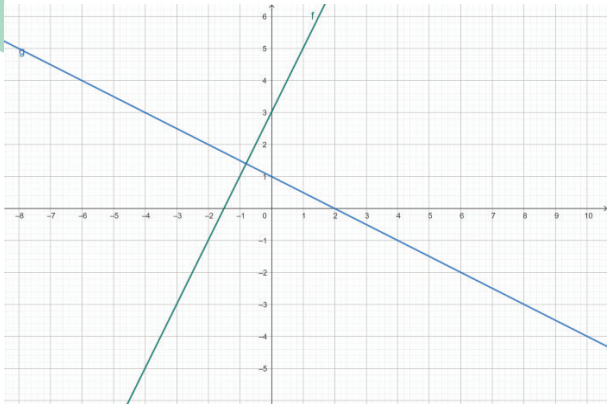
وبتعويض في أحد المعادلات:

$$y = 2(1) + 1 = 3$$

نقطة التقاطع هي.(1, 3)

IPN

4 - مثال على مستقيمين متعامدين:



المستقيم الأول ($y = 2x + 3$)

المستقيم الثاني($y = -\frac{1}{2}x + 1$)

حاصل ضرب الميلين:

$2 \times \frac{-1}{2} = -1$

إذن المستقيمان متعامدان ويقطعان بعضهما بزاوية قائمة .

5 - خلاصة:

لمعرفة الوضع النسبي لمستقيمين:

-احسب الميلين.

-إذا كانا متساويين، قارن الثوابت لتحديد التوازي أو التطابق.

-إذا كانا مختلفين، المستقيمان يتقاطعان.

-إذا كان حاصل ضرب الميلين1- = ، المستقيمان متعامدان

إيجاد معادلة المستقيم بعدة طرق

1- أوجد معادلة المستقيم المار من النقطتين A(1, 2) و.B(3, 6)

2- أوجد معادلة المستقيم المار من النقطة C(0, -1) ويوازي المستقيم.$y = 2x + 3$

3- أوجد معادلة المستقيم المار من النقطة D(4, 5) ويعامد المستقيم.$y = -1/2x + 7$

4- أوجد معادلة المستقيم الذي ميله 3 ويمر من النقطة.E(-2, 1)

الأوضاع النسبية لمستقيمين في المستوى

1- تحقق من الوضع النسبي للمستقيمين:

- d1: $y = 2x + 1$
- d2: $y = 2x - 3$

2- تحقق من الوضع النسبي للمستقيمين:

- d1: $y = -x + 4$
- d2: $y = (1/2)x + 2$

3- تحقق مما إذا كانت المستقيمات التالية متقاطعة أم متعامدة أم متوازية:

- d1: $y = 3x + 2$
- d2: $y = -1/3x + 5$

تمارين في الهندسة

1-تمثيل نقاط في مرجع قائم وحساب مركبات متجه

1.مثل النقاط A(2, 3), B(5, -1), C(-2, 4) في مرجع قائم.

2.احسب مركبات المتجه $\overrightarrow{AB}$.

3.احسب مركبات المتجه $\overrightarrow{BC}$.

4.إذا كان المتجه $\vec{u}$(4, -2) = ، فاحسب مركبات المتجه $-\vec{u}$ و $2\vec{u}$.

2-إيجاد معادلة المستقيم بعدة طرق

1.أوجد معادلة المستقيم المار من النقطتين A(1, 2) و B(3, 6).

2.أوجد معادلة المستقيم المار من النقطة C(0, -1) ويوازي المستقيم y = 2x + 3.

3.أوجد معادلة المستقيم المار من النقطة D(4, 5) ويعامد المستقيم y = -1/2x + 7.

4.أوجد معادلة المستقيم الذي ميله 3 ويمر من النقطة E(-2, 1).

3-الأوضاع النسبية لمستقيمين في المستوى

1.تحقق من الوضع النسبي للمستقيمين:

- d1: y = 2x + 1
- d2: y = 2x - 3

2.تحقق من الوضع النسبي للمستقيمين:

- d1: y = -x + 4
- d2: y = (1/2)x + 2

3.تحقق مما إذا كانت المستقيمات التالية متقاطعة أم متعامدة أم متوازية:

- d1: y = 3x + 2
- d2: y = -1/3x + 5

IPN

الفصل الخامس : الإحصاء.

الإحصاء

مقدمة

يهدف الإحصاء إلى الحصول على معلومات متعلقة بمجموعة ما تسمى هذه المجموعة الساكنة الإحصائية كما تسمى عناصرها أفرادا (يكون عدد أفراد المجموعة دائما كبيرا نسبيا حتى يمكننا أن نتكلم عن ساكني إحصائية ما)
في بعض الحالات ولأسباب عملية تقوم الدراسة على جزء من الساكنة يسمى العينة.
المعيار الذي على أساسه تقام الدراسة يسمى الميزة وهناك ميزة كمية (عمر، وزن، قياس) وميزة كيفية (لون / مهنة / لون دفتر مهنة الأب ...) ومن بين الميزات الكمية توجد ميزه متقطعة عدد قيمها منته وميزة متصلة عدد قيمها غير منتهي (أو عدد كبير)

تعاريف

السلسلة الإحصائية

على ساكنة إحصائية نقوم بدراسة ميزة كمية لتكن x_1 ، x_2 ، ... ، x_p القيم المختلفة لهذه الميزة ($x_1 < x_2 <$...$< x_p$) نسمي n_i عدد تكرار مجموع القيمة x_i
مجموعة الأزواج $(n_i \text{ ، } x_i)$ تكون ما يسمى بالسلسلة الإحصائية
مثال: الجدول التالي يمثل سلسلة إحصائية

القيمة	x_1	x_2	...	x_n
الحصيص	n_1	n_2	...	n_p

نسمي الحصيص الكلي N مجموع كل الحصائص n_i

$$N = n_1 + \cdots + n_p$$

نسمي الحصيص المتراكم المتزايد $N \nearrow$
الذي يساوي مجموع $N \nearrow = n_1 + \cdots + n_p$
الحصيص المتراكم المتناقص يساوي $N \swarrow$

$$N \swarrow = n_i + \cdots + n_p$$

التردد f_i
هو حاصل قسمة $= \frac{n_i}{N}$
الترد المتراكم المتزايد: $F \nearrow = \frac{N_i}{N}$
$(x_i ، F \nearrow)$ تسمى سلسلة التردادات المتراكمة المتزايدة

الترد المتراكم المتناقص: $F \swarrow = \frac{N_i}{N}$
$(x_i ، F \swarrow)$ تسمى سلسلة التردادات المتراكمة المتناقصة
ملاحظة : التردد يكون دئما محصورا بين 0 و 1 مجموع التردادات يساوي 1

ثانيا وضعيات

وضعية 1

النتائج التالية هي حصيلة أول اختبار في الرياضيات للسنة السادسة آداب:

4 – 6 – 10 - 8 – 10 - 7 – 8 – 11 – 7 – 5 – 7 – 10- 8 – 9 – 5 – 13- 10- 8 – 11 – 15
8 – 10 – 10 – 4 – 4 – 8 – 11 – 6 – 7 – 5 – 9 – 13 – 9 – 9 – 9 – 6 – 4 – 7 – 11 – 7

1. أعط الجدول الإحصائي والحصائص المتراكمة المتزايدة والمتناقصة
2. جدول التردد والترددات المتراكمة المتزايدة والترددات المتراكمة المتناقصة
3. ارسم المخطط العصوي ومضلع الحصائص المتراكمة المتزايدة ومضلع الحصائص المتراكمة المتناقصة
4. ارسم مضلع الترددات والترددات المتراكمة المتزايدة والمتناقصة

IPN

الحلول

الوضعية 1

1. الجدول الإحصائي

قيمة الميزة x_i	الفرز	الحصيص n_i
4		4
5		3
6		3
7		6
8		6
9		5
10		6
11		4
13		2
15		1

الجدول الإحصائي	قيمة الميزة x_i	الحصيص n_i
	4	4
	5	3
	6	3
	7	6
	8	5
	9	5
	10	6
	11	4
	13	2
	15	1

جدول الحصائص المتراكمة المتزايدة والمتناقصة

قيمة الميزة x_i	الحصيص n_i	الحصائص المتراكمة المتزايدة	الحصائص المتراكمة المتناقصة
4	4	4	40

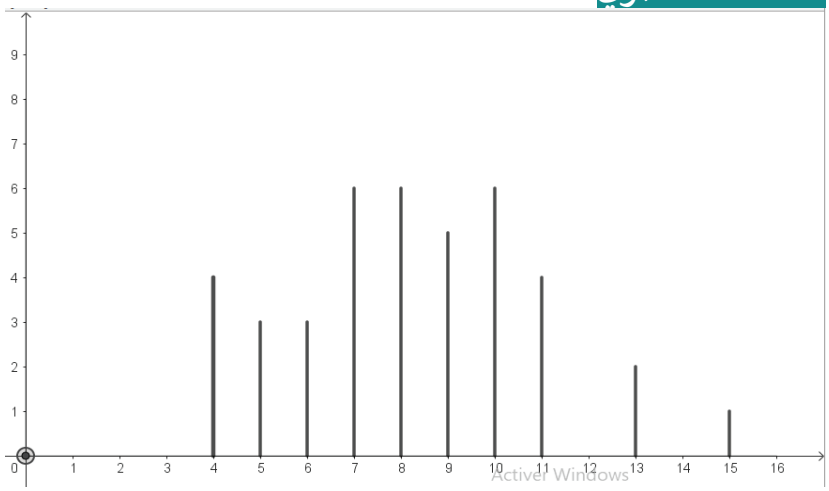
36	7	3	5
33	10	3	6
30	16	6	7
24	22	6	8
18	27	5	9
13	33	6	10
7	37	4	11
3	39	2	13
1	40	1	15

جدول التردادات و التردادات المتراكمة المتزايدة والمتناقصة

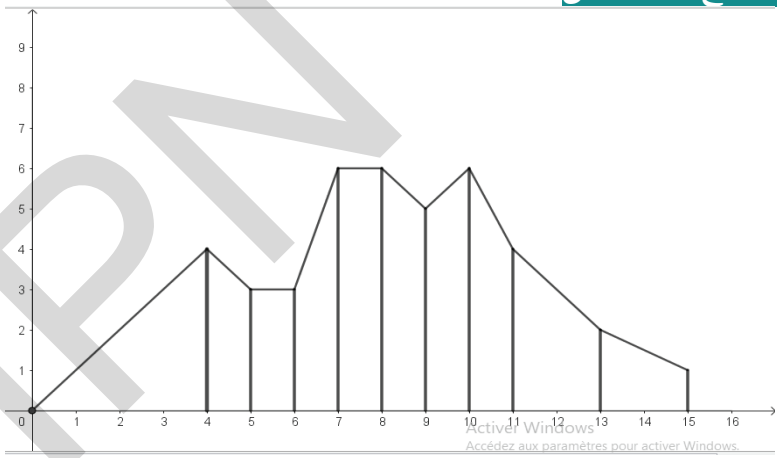
قيمة الميزة x_i	الحصيص n_i	التردادات	التردادات المتراكمة المتزايدة	التردادات المتراكمة المتناقصة
4	4	$0,1 = \frac{4}{40}$	$0,1$	1
5	3	$0,075 = \frac{3}{40}$	$0,175$	$0,9$
6	3	$0,075 = \frac{3}{40}$	$0,25$	$0,825$
7	6	$0,15 = \frac{6}{40}$	$0,4$	$0,75$
8	6	$0,15 = \frac{6}{40}$	$0,55$	$0,6$
9	5	$0,125 = \frac{5}{40}$	$0,675$	$0,45$
10	6	$0,15 = \frac{6}{40}$	$0,825$	$0,325$
11	4	$0,1 = \frac{4}{40}$	$0,925$	$0,175$
13	2	$0,05 = \frac{2}{40}$	$0,975$	$0,075$
15	1	$0,025 = \frac{1}{40}$	1	$0,025$

IPN

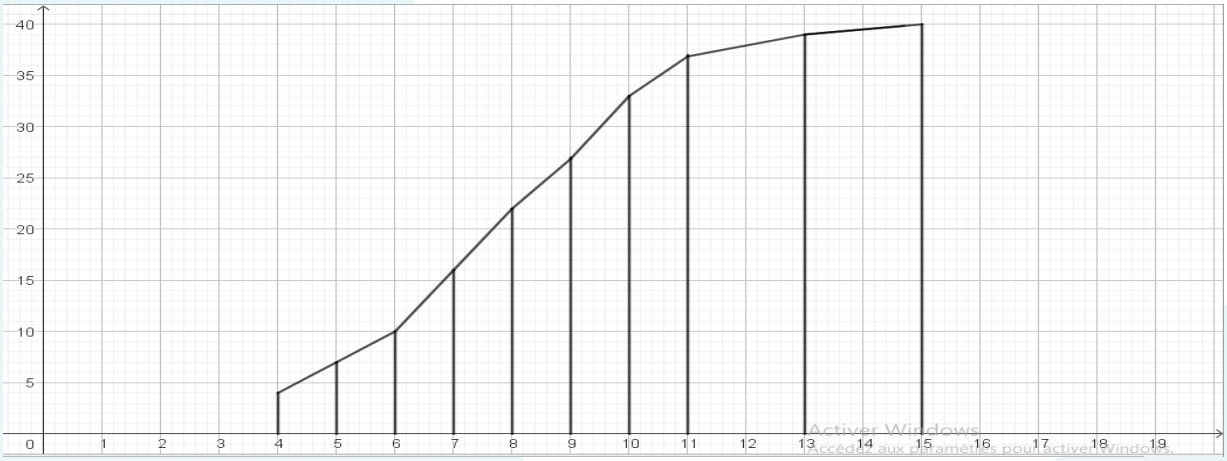
المخطط العصوي



مضلع الحصائص

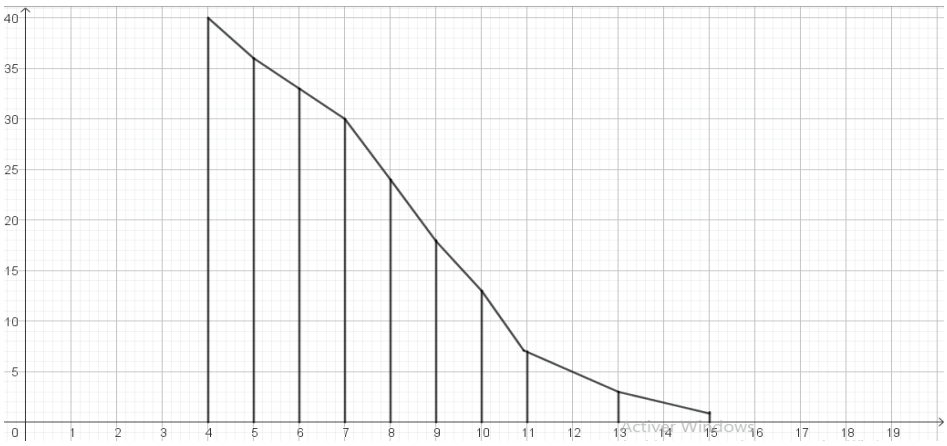


مضلع الحصائص المتراكمة المتزايدة

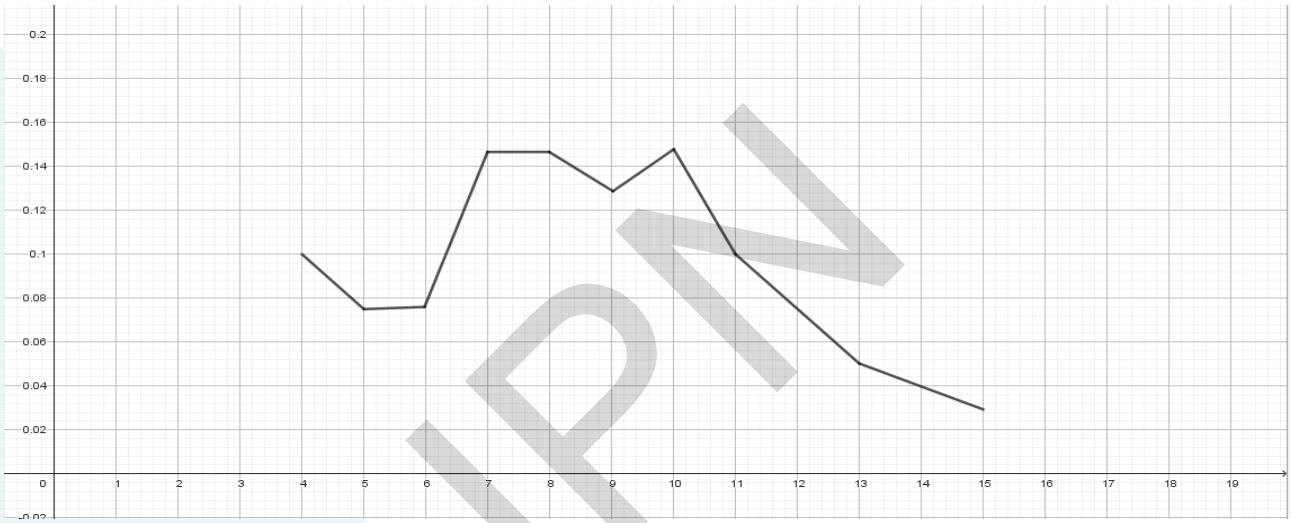


مضلع الحصائص المتراكمة المتناقصة

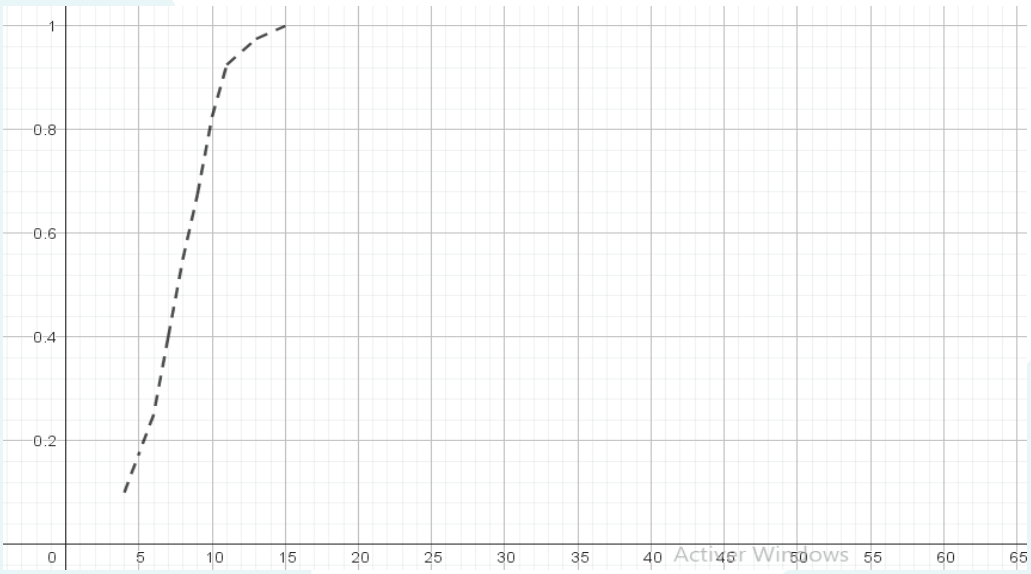
IPN



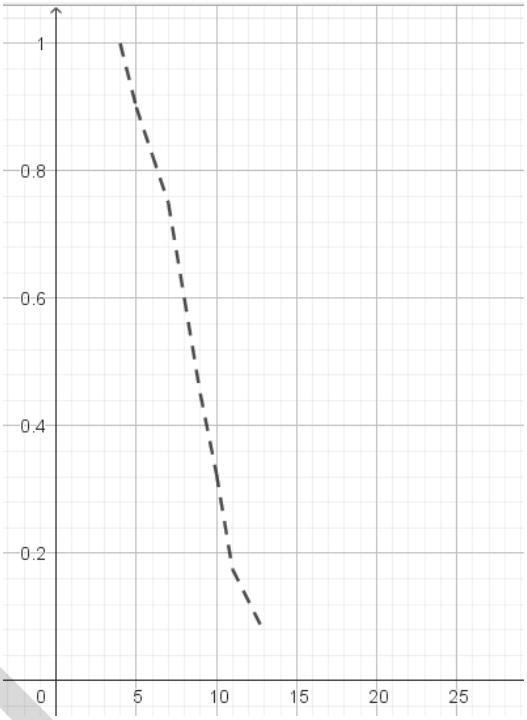
مضلع الترددات



مضلع الترددات المتراكمة المتزايدة



مضلع الترددات المتراكمة المتناقصة



وضعية 2

نعطي قائمة ل 50 تلميذا مقاسة بالسنتمتر

139	171	134	155	144	153	175	139	149	154
137	140	142	168	152	149	148	155	168	144
144	144	137	156	153	149	169	140	147	150
152	140	161	153	177	146	152	158	145	152
151	145	157	158	160	170	165	158	158	161

1. أعط الجدول الإحصائي وذلك بعد تجميع النتائج فى فصول سعتها 4 سم

2. التردد و الحصيص المتراكم المتزايد و التردد المتراكم المتزايد

3 ما عدد التلاميذ الذين قاماتهم أكبر أو تساوي 146 سم

4 ما النسبة المئوية للتلاميذ الذين قاماتهم أكبر أو تساوي 154 سم

IPN

الحل:

1. تجميع النتائج في فصول سعتها 4 سم السؤال 2 انظر الجدول

قيمة الميزة x_i	الفرز	الحصيص n_i	التردد	الحصيص المتراكم $\nearrow N_i$	التردد المتراكم $\nearrow N_i$
$[134-138[$	𝍸	4	$\frac{2}{25}$	4	$\frac{2}{25}$
$[138-142[$	𝍸	5	$\frac{1}{10}$	9	$\frac{9}{50}$
$[142-146[$	𝍸	6	$\frac{3}{25}$	15	$\frac{3}{10}$
$[146-150[$	𝍸	6	$\frac{3}{25}$	21	$\frac{21}{50}$
$[150-154[$	𝍸	9	$\frac{9}{50}$	30	$\frac{3}{5}$
$[154-158[$	𝍸	5	$\frac{1}{10}$	35	$\frac{7}{10}$
$[158-162[$	𝍸	7	$\frac{7}{50}$	42	$\frac{21}{25}$
$[162-166[$	𝍸	1	$\frac{1}{50}$	43	$\frac{43}{50}$
$[166-170[$	𝍸	3	$\frac{3}{50}$	46	$\frac{23}{25}$
$[170-174[$	𝍸	2	$\frac{1}{25}$	48	$\frac{24}{25}$
$[174-178[$	𝍸	2	$\frac{1}{25}$	50	1

3 عدد التلاميذ الذين قاماتهم أكبر أو تساوي 146 هو 35

معايير التشتت

الوسط الحسابي أو المتوسط الحسابي

تعريف:

الوسط الحسابي يُعَد الوسط الحِسابي أو المُتوسِط الحِسابي وهوالمقياس الأكثَر استخدامًا، يُستَخدم الوسط الحسابي مَع مُختَلَف أنواع البيانات ويساوِي مَجموع كافَة القيَم في مَجموعة ما مِن البيانات مَقسومًا عَلى عَددها الكُلي، ويُرمَز لَه بالرَمز إكس بار ($\bar{x}$) أو سين بار (س) وإشارة (-) فوقها أيضًا بالعربية،

أنَواعه هُما: الوَسط الحِسابي البَسيط والوَسط الحِسابي المُرجَح.

أمثلة على حساب الوسط الحسابي

المثال الأول

ما قِيمة الوَسط الحِسابي للقيم الآتية: (8، 11، 3، 6، 22)؟

الحل:

إيجاد مَجموع القِيم كالآتي: 8+11+3+6+22 = 50.

عَد القيَم ويتبين مِن المِثال أنّ عددها يساوِي 5.

$$\text{الوَسط الحِسابي} = \frac{\text{مجموعة القيم}}{\text{عددها}}$$

الوَسط الحِسابي = $\frac{50}{5}$ ويساوِي 10

المثال الثاني

يُمثل الجَدول الآتي التَوزيع التكراري لطَلبة إحدى المَدارس:

العُمر	13	14	15	16	17
عَدد الطَلبة	2	5	13	7	3

فما قِيمة الوَسط الحِسابي لأعمار الطَلبة؟

الحَل:

إن البيانات المُعطاة في المِثال بيانات مُجَمعة؛ يُمثل عدد الطلاب عَدد التكرارات (ف) أمّا العُمر فيُمثل القيم (س) المَطلوب حِساب المُتوسِط لَها.

تَرتيب البيانات في جَدول لتسهيل إجراء الحسابات عَلى النَحو الآتي

العُمر(س)	عدد الطُلاب (ف)	س × ف
13	2	26
14	5	70
15	13	195
16	7	112
17	3	51
المجموع	30	454

المجموع= (13 ×2 + 13 ×15+ ×5+ 16 ×7 +17 ×3= 454)

المَجموع = 2+5+13+7+3= 30

التَطبيق على القانون: الوَسط الحِسابي$=\overline{X}=\frac{\sum x_i}{N}=\frac{454}{30}$ =15.13 عام.

حساب الوسط الحسابي $\frac{10+12+(23\times3)+(16\times2)+21}{8}=\frac{144}{8}=18$

2 الانحراف المتوسطي

تعريف:

الانحراف المتوسطي هو أحد مقاييس التشتت في الإحصاء، ويستخدم لقياس مدى تباعد القيم عن الوسط الحسابي .

ويُحسب من خلال متوسط القيم المطلقة للفروق بين كل قيمة والوسط الحسابي.

الصيغة الرياضية:

للمجموعة $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

إذا كان:

$\bar{x}$: الوسط الحسابي-

n : عدد القيم-

فإن:

الانحراف المتوسطي$= (1 / n) \times \Sigma |x_i - \bar{x}|$

خطوات حسابه:

1- نحسب الوسط الحسابي للقيم.

2- نحسب الفرق بين كل قيمة والوسط الحسابي) ثم نأخذ القيمة المطلقة.(

3- نحسب متوسط هذه الفروق.

مثال:

لدينا البيانات التالية11 ,9 ,7 ,5 ,3 :

1- نحسب الوسط الحسابي:

$$\bar{x} = (3 + 5 + 7 + 9 + 11) / 5 = 35 / 5 = 7$$

2- نحسب الانحرافات المطلقة عن الوسط:

$$|3 - 7| = 4$$

$$|5 - 7| = 2$$

$$|7 - 7| = 0$$

$$|9 - 7| = 2$$

$$|11 - 7| = 4$$

3. نحسب الانحراف المتوسطي:

$$(4 + 2 + 0 + 2 + 4) / 5 = 12 / 5 = 2.4$$

ملاحظات:

الانحراف المتوسطي أبسط من الانحراف المعياري، لأنه لا يعتمد على التربيع.

يعطي فكرة عن التشتت ولكنه لا يتأثر بالقيم المتطرفة بنفس طريقة التباين أو الانحراف المعياري.

تمارين على الانحراف المتوسط

التمرين:1

أوجد الانحراف المتوسط للقيم التالية:

9، 10، 9، 7،5

خطوات الحل:

1- نحسب الوسط الحسابي:

$$(5 + 7 + 9 + 10 + 9) \div 5 = 8$$

2- نحسب الانحرافات المطلقة:

$$|5 - 8| = 3 \quad ،|7 - 8| = 1 \quad ،|9 - 8| = 1 \quad ،|10 - 8| = 2 \quad ،|9 - 8| = 1$$

3- مجموع الانحرافات المطلقة = 8

4- الانحراف المتوسط = 8 ÷ 5 = 1.6

IPN

التمرين:2

أوجد الانحراف المتوسط للقيم التالية:
12، 15، 18، 20، 25

التمرين (جدول تكراري) 3 :

الجدول التالي يمثل أعمار مجموعة من الطلاب:

العمر بالسنوات	التكرار
2	10
3	11
4	12
1	13

احسب الانحراف المتوسط.

نصيحة للحل:
1- احسب الوسط الحسابي باستخدام التكرارات.
2- احسب الانحرافات المطلقة لكل عمر من الوسط.
3- اضرب كل انحراف مطلق في تكراره.
4- استخدم قانون الانحراف المتوسط:
الانحراف المتوسط = (∑ f × |x - x̄|) ÷ ∑ f

التمرين: 4

الأعداد هي:
x، 8، 10، 12، 14
إذا علمت أن الانحراف المتوسط لهذه البيانات يساوي2 ، فأوجد قيمة x.

التغاير

تعريف التغاير:

التغاير) بالإنجليزية (Covariance :هو مقياس إحصائي يُستخدم لقياس مدى العلاقة الخطية بين متغيرين .أي أنه يُظهر كيف يتغير متغير بالنسبة للآخر.

صيغة حساب التغاير:

إذا كان لدينا متغيران إحصائيان X وY ، فإن التغاير بينهما يُحسب كالتالي:

$$Cov(X, Y) = (1/n) * \Sigma[(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})]$$

x_i -و y_i: القيم الفردية للمتغيرين.
$\bar{x}$ -و $\bar{y}$: الوسط الحسابي للمتغيرين.
n: -عدد القيم.

تفسير التغاير:

-إذا كان التغاير موجبًا :فهذا يعني أن المتغيرين يرتفعان أو ينخفضان معًا علاقة طردية.
-إذا كان التغاير سالبًا :فإن أحد المتغيرين يزداد عندما ينقص الآخرعلاقة عكسية.
-إذا كان التغاير قريبًا من الصفر : لا توجد علاقة خطية واضحة بين المتغيرين.

IPN

مثال بسيط:

لنفترض أن لدينا القيم التالية:

Y	X
2	1
4	2
6	3

$\bar{X} = 2$ ،- $\bar{Y} = 4$

-نحسب التغاير باستخدام القانون:

$$Cov(X, Y) = (1/3) * [(1-2)(2-4) + (2-2)(4-4) + (3-2)(6-4)]$$

$$= (1/3) * [2 + 0 + 2] = 4/3$$

←التغاير موجب :إذن هناك علاقة طردية بين X و.Y

تمارين على التغاير

تمرين :1 حساب التغاير يدويًا

لدينا المتغيرين X و Y بقيمهما التالية:

Y	X
1	2
3	4
5	6
7	8

احسب التغاير بين X و.Y

الحل:

1- نحسب المتوسط الحسابي لكل من X و:Y

$$\bar{X} = (2+4+6+8)/4 = 5$$

$$\bar{Y} = (1+3+5+7)/4 = 4$$

2- نحسب مجموع نواتج الفروقات:

$$\sum(Xi - \bar{X})(Yi - \bar{Y}) = (2-5)(1-4) + (4-5)(3-4) + (6-5)(5-4) + (8-5)(7-4)$$

$$= (-3)(-3) + (-1)(-1) + (1)(1) + (3)(3) = 9 + 1 + 1 + 9 = 20$$

3- نحسب التغاير:

$$Cov(X,Y) = 20 / 4 = 5$$

تمرين :2 تحديد نوع العلاقة

إذا كان التغاير بين متغيرين X و Y هو$Cov(X,Y) = -3.2$ ، فهل العلاقة بينهما طردية أم عكسية؟

الحل:

بما أن التغاير سالب، فإن العلاقة بين X و Y هي علاقة عكسية :كلما زادتX ، قلتY.

تمرين :3 تكميل جدول وحساب التغاير

أكمل الجدول الآتي واحسب التغاير:

Y	X
2	1
3	2
?	3
6	4

IPN

إذا علمت أن التغاير2.5 = ، فما قيمة Y المفقودة؟

الانحراف المعياري

تعريف:

الانحراف المعياري هو أحد مقاييس التشتت في الإحصاء، ويستخدم لقياس مدى تباعد أو تقارب القيم في مجموعة من البيانات حول المتوسط الحسابي .كلما كان الانحراف المعياري صغيرًا، كانت القيم قريبة من المتوسط، وكلما كان كبيرًا كانت القيم متباعدة.

الرموز:

-الرمز (σ) يستخدم للانحراف المعياري في المجتمع.

-الرمز (s) يستخدم للانحراف المعياري في العينة.

الصيغ:

1- للمجتمع الإحصائي: $\sigma = \sqrt{[\sum(xi - \mu)^2 / N]}$

2- للعينة الإحصائية: $s = \sqrt{[\sum(xi - \bar{x})^2 / (n - 1)]}$

خطوات حساب الانحراف المعياري:

1- نحسب المتوسط الحسابي للقيم.

2- نحسب الفروق بين كل قيمة والمتوسط.

3- نربع كل فرق.

4- نجمع هذه المربعات.

5- نقسم المجموع علىN أو على n - 1 للعينة.

6- نأخذ الجذر التربيعي للناتج.

مثال:

لنفترض القيم التالية2 :،4 ،4 ،4 ،5 ،5 ،7 ،9

1- نحسب المتوسط5 = 8/(2+4+4+4+5+5+7+9) = $\bar{x}$:

2- نحسب مربعات الفروق:

$(2-5)^2 = 9$, $(4-5)^2 = 1$, $(4-5)^2 = 1$, $(4-5)^2 = 1$

$(5-5)^2 = 0$, $(5-5)^2 = 0$, $(7-5)^2 = 4$, $(9-5)^2 = 16$

3- مجموع مربعات الفروق32 = 16 + 4 + 0 + 0 + 1 + 1 + 1 + 9 =

4- الانحراف المعياري للمجتمع2 = √4 = √(32/8) =

إليك بعض تمارين حول الانحراف المعياري مع الحلول، لمساعدتك على الفهم والتدريب:

✅التمرين 1:

أوجد الانحراف المعياري لمجموعة القيم التالية:

4، 8، 6، 5، 3

IPN

الخطوات:

1. **إيجاد المتوسط الحسابي:**

$$\text{المتوسط} = \frac{4+8+6+5+3}{5} = \frac{26}{5} = 5,2$$

2. **إيجاد انحراف كل قيمة عن المتوسط وتربيعه:**

$$(4-5.2)^2 = 1.44$$

$$(8-5.2)^2 = 10.24$$

$$(6-5.2)^2 = 1.44$$

$$(5-5.2)^2 = 0.04$$

$$(3-5.2)^2 = 4.84$$

المتوسط لتلك القيم :

$$\frac{1.44+10.24+1.44+0.04+4.84}{5} = \frac{18}{5} = 3.6$$

الانحراف المعياري :هو الجذرالتربيعي لتلك النتيجة

$$\sqrt{3.6} \approx 1,9$$

التمرين 2:

أوجد الانحراف المعياري للقيم:

10، 12، 23، 23، 16، 23، 21، 16

الخطوة1 :

حساب الوسط الحسابي $\frac{10+12+(23\times3)+(16\times2)+21}{8} = \frac{144}{8} = 18$

الخطوة2 : حساب انحراف كل قيمة عن الوسط

10	−	18	=	−8
12	−	18	=	−6
23	−	18	=	5
23	−	18	=	5
16	−	18	=	−2
23	−	18	=	5
16	−	18	=	−2
21	−	18	=	3

IPN

الخطوة 3 :

تربيع كل انحراف : 64-36-25-25-4-25-4-9

الخطوة 4 التباين: حساب متوسط مربعات الانحراف: 24= $\frac{64+36+25+25+4+25+4+9}{8}$

الخطوة 5 حساب الانحراف المعياري هو الجذر التربيعي لمتوسط مربعات الانحراف: $\sqrt{24} \approx 4.9$

خطوات حساب الانحراف المعياري:

1. **نحسب المتوسط الحسابي للقيم.**
2. **نحسب الفروق بين كل قيمة والمتوسط.**
3. **نربع كل فرق.**
4. **نجمع هذه المربعات.**
5. **نقسم المجموع على) N أو على n - 1 للعينة**
6. **نأخذ الجذر التربيعي للناتج.**

تمارين على الانحراف المتوسط

التمرين 1:

احسب الانحراف المتوسط للبيانات التالية:

[5, 8, 10, 12, 15]

التمرين 2:

إذا كانت درجات الطلاب في اختبار ما هي:

[20, 25, 30, 35, 40]

فما هو الانحراف المتوسط لهذه الدرجات؟

التمرين 3:

أوجد الانحراف المتوسط للقيم التالية عن وسطها الحسابي:

[2, 4, 6, 8, 10]

التمرين 4:

إذا كان الوسط الحسابي لمجموعة من القيم هو *50*، وكانت الانحرافات المطلقة لهذه القيم عن الوسط هي:

[3, 5, 7, 9, 11]

فما هو الانحراف المتوسط؟

IPN

التمرين 5:

احسب الانحراف المتوسط للبيانات التالية:

[12, 15, 18, 21, 24]

[3, 5, 7, 9, 11]

فما هو الانحراف المتوسط؟

التمرين 6:

إذا كانت الأوزان (بالكيلوجرام) لعينة من الطلاب كالتالي:

[45, 50, 55, 60, 65]

فما هو الانحراف المتوسط لهذه الأوزان؟

التمرين 7:

أوجد الانحراف المتوسط للبيانات التالية:

[100, 200, 300, 400, 500]

التمرين 8:

إذا كانت القيم التالية تمثل عدد ساعات الدراسة اليومية لـ 5 طلاب:

[2, 3, 4, 5, 6]

فاحسب الانحراف المتوسط.

التمرين 9:

احسب الانحراف المتوسط للبيانات التالية عن وسطها الحسابي:

[10, 20, 30, 40, 50]

التمرين 10:

إذا كانت الانحرافات المطلقة لـ 5 قيم عن وسطها الحسابي هي:

[1.5, 2.5, 3.5, 4.5, 5.5]

فما هو الانحراف المتوسط؟

IPN

تمارين على الانحراف المتوسط والتغاير

1 احسب الانحراف المتوسط للقيم التالية5 :،8 ،10 ،7 ،6.

2 احسب التغاير لمجموعة البيانات التالية2 :،4 ،6 ،8 ،10.

3 احسب الانحراف المتوسط للقيم15 :،18 ،20 ،22 ،25.

4 احسب التغاير للقيم التالية7 :،9 ،13 ،11 ،10.

5 إذا كانت القيم4 :،6 ،8 ،10 ،12 ، احسب الانحراف المتوسط.

6 احسب التغاير لمجموعة القيم التالية3 :،5 ،7 ،6 ،4.

7 احسب الانحراف المتوسط لمجموعة القيم التالية21 :،24 ،27 ،30 ،33.

8 احسب التغاير للقيم التالية : 10 ،12 ،14 ،16 ،18.

IPN

IPN