RÉPUBLIQUE ISLAMIQUE DE MAURITANIE

Honneur - Fraternité - Justice

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE
ET DE LA REFORME DU SYSTEME EDUCATIF
INSTITUT PEDAGOGIQUE NATIONAL

# Mathématique

## 6ème AS


Mohameden / El hadi

**Inspecteur de l'enseignement secondaire**

Mohameden / Bah

**Inspecteur de l'enseignement secondaire**

Yesleck / Bamba / Tiyib

**Professeur de l'enseignement secondaire**

Réviser par

Ely Mohamed / abdella

Professeur de l'enseignement secondaire

Yesleck / Bamba / Tiyib

**Professeur de l'enseignement secondaire**

**Conception et mise en page**

Heibetna yahya Brey

**Chers collègues professeurs, Chers élèves,**

L'institut Pédagogique National a le plaisir de présenter à la famille scolaire un projet de manuel de l'élève pour la 6ème année secondaire ; -séries C et D - conformément aux nouveaux programmes réécrits selon la vision holistique.

Ce document a été réalisé dans des conditions marquées par l'urgence afin qu'il soit disponible dès la rentrée 2021 – 2022. Il sera ensuite amélioré, corrigé et mis à niveau dans sa prochaine version en tenant compte de vos remarques et suggestions.

Il a été procédé à l'adoption d'une méthodologie particulière mettant l'accent sur les points essentiels dans le programme suivant une approche pragmatique qui privilégie les aspects pratiques et les savoir-faire.

Ce choix est traduit par la segmentation du programme en terme de chapitres (13) et la mise en œuvre d'une structure de chapitre permettant aux différents utilisateurs d'en tirer profit.

Cette structure est ainsi conçue:

- " **Faire- savoir**" : permet de déterminer **l'essentiel du chapitre** sous forme de résumé des points essentiels et incontournables.
- " **Savoir – faire** ": permet à l'élève de mettre ses capacités à l'exercice, dans un premier temps, en traitant des **applications** directes du cours et dans un deuxième temps en passant aux **Exercices** de niveau avancé.

L'IPN souhaite que les utilisateurs de ce projet de manuel leur fassent parvenir leurs remarques et suggestions constructives pour qu'il puisse en tenir compte dans la prochaine édition.


**Les auteurs :**

Mohameden / El hadi
Inspecteur de l'enseignement secondaire

Mohameden / Bah
Inspecteur de l'enseignement secondaire

Yesleck / Bamba / Tiyib
Professeur de l'enseignement secondaire


Une revision de ce manuel a été réalisée en 2023, deux ans après sa parution elle a été assurée par messieurs :


Mohameden O/ El hadi
Inspecteur de l'Enseignement Secondaire

Yesleck / Bamba / Tiyib
Professeur de l'enseignement secondaire

## CHAPITRE 01 Polynômes et fractions rationnelles

### I. Polynômes et fonction polynômes :

#### 1. Notion de polynôme :

**Définition :**

On appelle fonction polynôme toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ ; pour laquelle il existe un entier naturel n et des nombres réels $a_0, a_1, ..., a_n$ ; avec $a_n \neq 0$ tels que :
$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$.
Le nombre entier naturel n s'appelle le degré de f.
Les nombres réels $a_0, a_1, ..., a_n$ s'appellent les coefficients de f.
Le polynôme est dit unitaire si $a_n = 1$.

**Exemple 1 :**

La fonction f définie par $f(x) = 2x - 7$ est une fonction polynôme de degré 1.
Les fonctions affines sont des **fonctions polynômes** de degré 1.

**Exemple 2 :**

La fonction g définie par : $g(x) = 5x^8 - 2x^6 + x^5 - x^4 + \frac{1}{2}x^2 + x - 4$ est un polynôme de degré 8

**Exemple 3 :**

La fonction h définie par $h(x) = -3$ est une fonction constante.
Une fonction constante est un **polynôme** de degré 0 car $x^0 = 1$ donc $-3 = -3x^0$.

**Remarque 1 :**

- Une fonction $x \longmapsto ax^k$ ; où a un nombre réel et k est un nombre entier naturel s'appelle une fonction monôme.
- Une **fonction polynôme** est la somme de plusieurs **fonctions monômes.**
- Par abus de langage, on parle souvent de polynôme au lieu de **fonction polynôme.**
- Un polynôme de degré deux est aussi appelé trinôme du second degré. Elle est de la forme $ax^2 + bx + c$ est un trinôme du second degré.

#### 2. Fonctions polynômes et opérations :

**Propriété :**

La somme, la différence et le produit et la composée de deux fonctions polynômes est une **fonction polynôme**.
Le degré du produit de deux polynômes est la somme des degrés de ces deux polynômes.

**Exemple 4 :**

Soient f et g les deux **fonctions polynômes** définies par :
$f(x) = 4x^3 - x^2 + 7x + 1$ et $g(x) = x^2 + 3x - 2$.

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= (4x^3 - x^2 + 7x + 1)(x^2 + 3x - 2) \\ &= 4x^5 - x^4 + 7x^3 + x^2 + 12x^4 - 3x^3 + 21x^2 + 3x - 8x^3 + 2x^2 - 14x - 2 \\ &= 4x^5 - 11x^4 - 4x^3 + 24x^2 + 17x - 2. \end{aligned}$$

Le produit fg est une fonction polynôme de degré 5.
Si on note deg(f) le degré de f et deg(g) le degré de g, on a : deg(f) = 3, deg(g) = 2, deg(fg) = 5. On a bien 3 + 2 = 5 c'est-à-dire deg(fg) = deg(f) + deg(g).
Soient P et Q les deux **fonctions polynômes** définies par : $P(x) = x^3 + x - 1$ et $Q(x) = x^2 + 1$.
On définit la composée $P \circ Q$ de ces deux fonctions polynômes comme suit :

$$\begin{aligned} (P \circ Q)(x) = P(Q(x)) &= (Q(x))^3 + Q(x) - 1 \\ &= (x^2 + 1)^3 + (x^2 + 1) - 1 \\ &= (x^6 + 3x^4 + 3x^2 + 1) + (x^2 + 1) - 1 \\ &= x^6 + 3x^4 + 3x^2 + 1 + x^2 + 1 - 1 \\ &= x^6 + 3x^4 + 4x^2 + 1. \end{aligned}$$

Notons deg(P) le degré de P et deg(Q)celui de Q, on a : deg(P) = 3, deg(Q) = 2, deg($P \circ Q$) = 6.
On a bien $3 \times 2 = 6$ c'est-à-dire :
deg($P \circ Q$) = deg(P) $\times$ deg(Q).

#### 3. Égalité de deux polynômes :

**Propriété 1 :**

Deux **fonctions polynômes** non nulles sont égales si et seulement si elles ont le même degré et les coefficients de leurs monômes de même degré sont égaux.
Démontrons cette propriété dans le cas d'une fonction de degré inférieur ou égal à 2.

Soient f et g deux fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à 2.On peut écrire :
$f(x) = ax^2 + bx + c$ et $g(x) = a'x^2 + b'x + c'$ ; où a, b, c, a', b' et c' sont des nombres réels.
Commençons par vérifier que si les deux fonctions f et g ont le même degré et les mêmes coefficients, alors elles sont égales.
Si $a = a'$, $b = b'$, $c = c'$, alors, pour tout nombre réel x, on a : $f(x) = ax^2 + bx + c = a'x^2 + b'x + c' = g(x)$, donc f = g .
Réciproquement supposons que f et g sont égales, c'est-à-dire que pourtout nombre réel x, on a :
$f(x) = g(x)$. Alors en particulier $f(0) = g(0)$, donc $c = c'$ ;
$f(1) = g(1)$,donc $a + b + c = a' + b' + c'$
et $f(-1) = g(-1)$, donc $a - b + c = a' - b' + c'$
Comme $\mathbf{c = c'}$, on a : $\mathbf{a + b + c = a' + b' + c'}$ donc $\mathbf{a + b = a' + b'}$ et $\mathbf{a - b + c = a' - b' + c'}$ donc $\mathbf{a - b = a' - b'}$
En additionnant membre à membre les deux égalités $\mathbf{a + b = a' + b'}$ et $\mathbf{a - b = a' - b'}$ on obtient $\mathbf{2a = 2a'}$ donc $\mathbf{a = a'}$. Et puisque $\mathbf{a = a'}$ et en remplaçant $\mathbf{a'}$ par **a** dans l'égalité $\mathbf{a + b = a' + b'}$ on obtient $\mathbf{b = b'}$.

On a donc montré que $\mathbf{a} = \mathbf{a'}$ ; $\mathbf{b} = \mathbf{b'}$ et $\mathbf{c} = \mathbf{c'}$, ce qui prouve que les fonctions ont les mêmes coefficients et donc le même degré (puisque le degré correspond au plus haut degré pour lequel le coefficient est non nul)

**Remarque 2 :**

Cette propriété est importante car elle nous donne un critère pratique pour comparer des fonctions polynômes.

En effet, vérifier si deux fonctions polynômes sont égales sans utiliser ce critère peut être long.

**Exemple 6 :**

Soient P et Q les deux fonctions définies par :

$P(x) = x^4 + 1,\ Q(x) = (x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1)$.

Essayons de comparer ces deux fonctions en prenant leurs valeurs en quelques points.

On a : $P(0) = Q(0) = 1$ ; $P(-1) = Q(-1) = 2$ ;

$P(1) = Q(1) = 2$ et $P(2) = Q(2) = 17$ .

Ces fonctions semblent égales, mais il faut le vérifier pour toute valeur de $x \in \mathbb{R}$. pour cela développons Q(x) :

$$Q(x) = (x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1)$$
$$= x^4 - \sqrt{2}\,x^3 + x^2 + \sqrt{2}x^3 - 2x^2 + \sqrt{2}x + x^2 - \sqrt{2}x + 1 = x^4 + 1$$

Ces deux fonctions sont bien égales.

**Exemple 7 :**

Soient R et S les deux polynômes définies par :

$R(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x$ et $S(x) = \mathbf{x^3 - x}$.

Comparons quelques valeurs prises par ces deux fonctions. On a :

$R(0) = S(0) = 0$ ; $R(1) = S(1) = 0$ ;

$R(-1) = S(-1) = 0$ et $R(3) = S(3) = 24$.

Ces deux fonctions semblent égales alors qu'elles ne le sont pas d'après le critère puisqu'elles n'ont pas le même degré.

## 4. Division euclidienne :

**Définition :**

Soient P et Q deux polynômes, on dit que Q divise P s'il existe un polynôme S tel que : $\mathbf{P = Q \times S}$.

On note alors Q/P.

**Remarque 3 :**

- Si Q divise P, on dit aussi que P est multiple de Q,
- Soit P un polynôme non nul, on a : P/P, I/P et P/0

**Conséquences :**

Soient P et Q deux polynômes non nuls.

1. Si P/Q et Q/P, alors il existe $k \in \mathbb{R}^*$ tel que : $P = k \times Q$.
2. Si P/Q et Q/S, alors P/S.

**Théorème 1 : (Division euclidienne des polynômes)**

Soient P et Q deux polynômes, où Q non nul ($\mathbf{Q \neq O}$), alors ils existent un polynôme S et un polynôme R tels que : $\mathbf{P = Q \times S + R}$ et deg R< deg Q.

Q est appelé le quotient et R le reste et cette écriture est la Division euclidienne de P par Q.

**Remarque 4:**

La condition degR< degQ, signifie R est nul(R=0) ou bien 0≤ **degR < degQ.**

En fin si R= **0** alors Q divise P.

**Exemple 8 :**

$$\begin{array}{rl|l}
 & 4x^3 - x^2 + 7x + 1 & x^2 + x + 1 \\ \cline{3-3}
- & 4x^3 + 4x^2 + 4x & 4x - 5 \\
 & -5x^2 + 3x + 1 & \\
- & -5x^2 - 5x - 5 & \\
 & 8x - 6 &
\end{array}$$

**Définition :**

Soit **P** un polynôme de degré $\geq \mathbf{1}$, on dit que **P** est irréductible pour tout **Q** polynôme divisant **P**, alors, soit **Q** est un polynôme constant, soit il existe $\boldsymbol{\lambda}$ un réel non nul tel que $\mathbf{Q = \lambda P}$.

**Remarque 5 :**

- Un polynôme irréductible P est donc un polynôme non constant dont les seuls diviseurs de P sont les constantes et $\boldsymbol{\lambda}$**P.**(où $\boldsymbol{\lambda}$ une constante multiplicative près).
- Dans le cas contraire, on dit que P est **réductible** ; il existe alors des polynômes A, B à coefficients réels tels que P = AB, avec degA ≥1 et degB ≥ 1.

**Exemple 9 :**

- Tous les polynômes de degré 1 sont irréductibles. Par conséquent il y a une infinité de polynômes irréductibles.
- $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$est réductible.
- $x^2 + 1$est irréductible.
- $x^2 - 2 = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$ est réductible.
- Tout trinôme $ax^2 + bx + c$est irréductible si et seulement si $\Delta < 0$ ; où $\Delta = b^2 - 4bc$.

**Remarque 6 :**

- On rappelle les identités remarquables
  1) $(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + 2ab + b^2$
  2) $(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - 2ab + b^2$
  3) $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$;
  4) $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
  5) $(a + b)^2 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
  6) $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$;
  7) $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$.

- **Forme canonique d'un trinôme du second degré :**

$$\begin{aligned}
ax^2+bx+c &= a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)\\
&= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right]\\
&= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right]\\
&= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]
\end{aligned}$$

*(Forme canonique)*

## 5. Racines d'un polynôme :

**Définition :**

On appelle racine réelle d'une fonction polynôme P tout nombre réel $x_0$ tel que $P(x_0)=0$.

**Exemple 10 :**

Reprenons la fonction polynôme :

$R(x)=x^4+2x^3-x^2-2x$.

Nous avons vu que : $R(0)=R(1)=R(-1)=0$ donc 0, 1 et $-1$ sont racines réelles du polynôme R.

**Théorème 2 :**

Si une fonction polynôme P a une racine réelle $x_0$, alors on peut factoriser P(x) par $x-x_0$.

On peut écrire : $P(x)=(x-x_0)Q(x)$ ; où Q est un polynôme de degré $n-1$ si n est le degré de P.

**Définition :**

Soit $k\in\mathbb{N}$. On dit que α est une **racine de multiplicité k** de P si $(x-\alpha)^k$ divise P alors que $(x-\alpha)^{k+1}$ ne divise pas P.

Lorsque k= 1 on parle d'une **racine simple**, lorsque k = 2 d'une **racine double**, etc.

On dit aussi que α est une **racine d'ordre** k.

**Proposition 1 :**

Il y a équivalence entre :

- α est une racine de multiplicité k de P.
- Il existe Q tel que $P=(x-\alpha)^k Q$, avec $Q(\alpha)\neq 0$.

**Exemple 10 :**

Reprenons la fonction polynôme définie par :

$R(x)=x^4-2x^3+x^2-2x$.

Nous avons vu que 0, 1 et $-1$ sont des racines réelles de ce polynôme.

Le polynôme R se factorise par x, $x-1$ et $x+1$. On a donc $R(x)=x(x-1)(x+1)Q(x)$ ; où Q est un polynôme de degré 1 puisque R est de degré 4 et $x\mapsto x(x-1)(x+1)$ est un polynôme de degré 3.

On a donc : $R(x)=x(x-1)(x+1)(ax+b)=x^4-2x^3+x^2-2x$.

On développe le produit $x(x-1)(x+1)(ax+b)$ et en le comparant $x^4-2x^3+x^2-2x$, on obtient :

$$\begin{aligned}
x(x-1)(x+1)(ax+b) &= x(x^2-1)(ax+b)\\
&= x(ax^3+bx^2-ax-b)\\
&= ax^4+bx^3-ax^2-bx\\
&= x^4-2x^3+x^2-2x.
\end{aligned}$$

Or d'après le résultat vu précédemment sur l'égalité de polynômes ; on a :

$$ax^4+bx^3-ax^2-bx=x^4-2x^3+x^2-2x$$
$$\Leftrightarrow (a=1 \text{ et } b=-2).$$

D'où : $R(x)=x(x-1)(x+1)(x-2)$.

A titre de vérification, on peut calculer R(2) et vérifier que $R(2)=0$

$R(2)=2^4-2\times 2^3+2^2-2\times 2$

$=2^4-2^4+2^2-4=0$

**Exemple 11 :**

Soit le polynôme

$P(x)=3x^5-3x^4-5x^3+5x^2+2x-2$, vérifions que 1 est une racine double. Pour cela calculons P(1) :

$P(1)=3\times 1^5-3\times 1^4-5\times 1^3+5\times 1^2+2\times 1-2$

$=3-3-5+5+2-2=0$ ; donc :

$P(x)=(x-1)Q(x)$ ; où $Q(x)=3x^4-5x^2+2$.

D'autre part : $Q(1)=3\times 1^4-5\times 1^2+2=3-5+2=0$ ; donc : $Q(x)=(x-1)R(x)$ ;

avec $R(x)=3x^3+3x^2-2x-2$. On en déduis que : $P(x)=(x-1)^2R(x)$en remplaçant Q(x) par $(x-1)R(x)$ dans l'égalité $P(x)=(x-1)Q(x)$.

Puisque $R(1)=3\times 1^3+3\times 1^2-2\times 1-2=3+3-2-2=2$ et $R(1)\neq 0$, alors on conclut que le nombre 1 est une racine double de P(x).

## 6. Factorisation d'un polynôme :

**Exemple 12 :**

Soit le polynôme ; $P(x)=x^3-4x^2+x+6$

1. Montrer que $x=2$ est une racine de P ;
2. Déterminer les réels a et b tels que ; $P(x)=(x-2)(x^2+ax+b)$
3. En utilisant le discriminant Δ, factoriser si possible le trinôme du second degré obtenu, et en déduire une factorisation maximale du polynôme P.

**Réponse :**

**1.** $P(2)=2^3-4(2)^2+2+6=8-4\times 4+8=8-16+8=0$. Donc ; 2 est une racine de P.

**2.** Détermination des réels a et b ;

**1) *Méthode 1* (*La division euclidienne*)**

$$\begin{array}{r|l}
x^3-4x^2+x+6 & x-2\\
\cline{2-2}
\mp x^3\pm 2x^2 \qquad & x^2-2x-3\\
\hline
0-\ 2x^2+x \qquad & \\
\pm 2x^2\mp 4x \qquad & \\
\hline
0-3x+6 & \\
\pm 3x\mp 6 & \\
\hline
00 &
\end{array}$$

Donc ; $P(x)=(x-2)(x^2-2x-3)$

2) ***Méthode 2 (Identification)***

$P(x) = (x-2)(x^2+ax+b)$

$\quad = x^3+ax^2+bx-2x^2-2ax-2b$

$\quad = x^3+(a-2)x^2+(b-2a)x-2b$

$\quad = x^3-4x^2+x+6$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1=1 \\ a-2=-4 \Rightarrow a=-2 \\ b-2a=1 \\ -2b=6 \Rightarrow b=-3 \end{cases}$$

$\Rightarrow P(x) = (x-2)(x^2-2x-3)$

**3°) Méthode 3 (*Coefficient de Hörner*)**

***a) La méthode de Hörner***

$P(x) = x^3-4x^2+x+6$

$$\Rightarrow \frac{P(x)}{x-2} = \frac{x^3-4x^2+x+6}{x-2}$$

$$= \frac{x^3-2x^2-2x^2+4x-3x+6}{x-2}$$

$$= \frac{x^2(x-2)-2x(x-2)-3(x-2)}{x-2}$$

$$= \frac{(x-2)(x^2-2x-3)}{x-2} = x^2-2x-3$$

**b)Tableau de Hörner**

Cette méthode appelée méthode de Hörner, est résumée par le tableau suivant :

| | **1** | **−4** | **1** | **6** |
|---|---|---|---|---|
| **2** | | **+2** | **+(−4)** | **+(−6)** |
| × | **1** | **= −2** | **= −3** | **= 0** |
| | | $\boxed{a=-2}$ | $\boxed{b=-3}$ | |

On trouve donc le même résultat que précédemment, à savoir :$P(x) = (x-2)(x^2-2x-3)$

c) On a ; $\Delta = (-2)^2 - 4\times 1 \times -3 = 4+12 = 16$

$\Rightarrow \sqrt{\Delta} = 4$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{-(-2)-4}{2\times 1} = -1 \\ x_2 = \dfrac{-(-2)+4}{2\times 1} = 3 \end{cases}$$

$\Rightarrow P(x) = (x-3)(x-2)(x+1)$

**Théorème 2 :**

Tout polynôme non constant P à coefficients dans $\mathbb{R}$ s'écrit comme un produit de polynômes irréductibles unitaires :

$P = P_1^{n_1} \times P_2^{n_2} \times P_3^{n_3} \ldots \times P_k^{n_k}$ ; où $\lambda \in \mathbb{R}^*$, $k \in \mathbb{N}^*$, les $n_i \in \mathbb{N}^*$ et les $P_i$ sont des polynômes irréductibles distincts. De plus cette décomposition est unique à l'ordre près des facteurs.

Il s'agit bien sûr de l'analogue de la décomposition d'un nombre en facteurs premiers.

**Exemple 13 :**

Soit le polynôme ; $P(x) = 3x^5-3x^4-5x^3+5x^2+2x-2$, décomposons ce polynôme en facteurs irréductibles. Pour cela écrivons d'abord

$P(x) = (3x^5-5x^3+2) - (3x^4-5x^2+2)$

$\quad = x(3x^4-5x^2+2) - (3x^4-5x^2+2)$ )

$\quad = (x-1)(3x^4-5x^2+2)$.

Ensuite cherchons à décomposer le polynôme ; $Q(x) = 3x^4-5x^2+2$ en un produit de polynômes irréductibles unitaires. On pose $X = x^2$ ; ce polynôme s'écrit alors $Q(x) = 3X^2-5X+2$ c'est un polynôme du second degré en X. Calculons $\Delta = 25-24 = 1$,

donc : $Q(x) = 3(X-1)\left(X-\frac{2}{3}\right) = 3(x^2-1)\left(x^2-\frac{2}{3}\right)$

Qu'on peut écrire également : $3x^4-5x^2+2 = 3(x-1)(x+1)\left(x-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)\left(x+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)$.

D'où : $P(x) = 3(x-1)^2(x+1)\left(x-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)\left(x+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)$.

## II. Fractions rationnelles :

### 1. Notion de fraction rationnelle :

**Définition:**

- Une **fraction rationnelle** à coefficients dans $\mathbb{R}$est une expression de la forme$F = \frac{P}{Q}$ où P, Q sont deux polynômes à coefficients réels et $Q \neq 0$.
- On définit l'addition et la multiplication de fractions rationnelles de façon naturelle : $\frac{P}{Q} + \frac{R}{S} = \frac{PS+QR}{QS}$ et $\frac{P}{Q} \times \frac{R}{S} = \frac{PR}{QS}$

### 2. Fraction irréductible, zéros, pôles :

- Une fraction rationnelle F sur $\mathbb{R}$ est dite irréductible si elle s'écrit $\frac{P}{Q}$ ; où P, Q sont des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$ n'ayant pas de diviseur de degré supérieur ou égal à 1.
- Si une fraction rationnelle F est écrite sous forme irréductible $\frac{P}{Q}$; alors les **zéros** de F sont les zéros de P, les **pôles** de F sont les zéros de Q.
- La multiplicité d'un zéro ou d'un pôle de F est par définition sa multiplicité en tant que zéro de P ou de Q.

**Remarque 7 :**

Toute fraction rationnelle se décompose comme une somme de fractions rationnelles élémentaires que l'on appelle des « éléments simples ».

### 3. Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$ :

**Théorème :** ***Décomposition en éléments simples sur*** $\mathbb{R}$

*Soit* $\frac{P(x)}{Q(x)}$ une fraction rationnelle avec P, Q deux polynômes à coefficients réels n'ayant pas de diviseurs de degré supérieur ou égal à 1. Alors $\frac{P(x)}{Q(x)}$ s'écrit de manière unique comme somme :

- d'une partie polynomiale E(x) ;
- d'éléments simples du type $\frac{a}{(x-\alpha)^i}$ ;

- d'éléments simples du type $\frac{ax+b}{(x^2+\alpha x+\beta)^j}$.

Où les $(x-\alpha)$ et $(x^2+\alpha x+\beta)$sont les facteurs irréductibles de $Q(X)$ et les exposants i et j sont inférieurs ou égaux à la puissance correspondante dans cette factorisation.

**Exemple 14 :**

On vérifie facilement que : $\frac{1}{x^2-1}=\frac{\frac{1}{2}}{x-1}+\frac{-\frac{1}{2}}{x+1}$

On vérifie également que :

$$\frac{x^4-8x^2+9x-7}{(x-2)^2(x+3)}=x+1+\frac{-1}{(x-2)^2}+\frac{2}{x-2}+\frac{-1}{x+3}.$$

**Remarque 8 :**

Dans la pratique, on commence par déterminer la partie polynômiale.

Tout d'abord si $\deg(P)<\deg(Q)$, alors $E(x)=0$.

Si $\deg(P)\geq\deg(Q)$, alors on effectue la division euclidienne de P par Q : $P=QE+R$, donc :

$\frac{P}{Q}=E+\frac{R}{Q}$, avec $\deg(R)<\deg(Q)$.

La partie polynômiale est donc le quotient de cette division. Et on se ramène au cas d'une fraction $\frac{R}{Q}$, avec $\deg(R)<\deg(Q)$.

Voyons en détails comment continuer sur un exemple

## A. Applications :

**Exercice résolu :**

Soit l'équation ; E : $x^3-6x^2+11x-6=0$.

**1°)** En admettant que cette équation admet trois solutions distinctes p, q et r. Sans résoudre l'équation E, calculer : $p+q+r$ ; $p\times q\times r$ et $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}$.

**2°)**Résoudre l'équation E et vérifier vos résultats obtenus.

**Solution :**

**1°)** $x^3-6x^2+11x-6=(x-p)(x-q)(x-r)$

$=(x-p)(x^2-(q+r)x+qr)$

$=x^3-(q+r)x^2+qrx-px^2-p(q+r)x-pqr$

$=x^3-\underbrace{(p+q+r)}_{S}x^2-(pq+pr+qr)x-\underbrace{pqr}_{P}\Rightarrow$

$$\begin{cases}p+q+r=6\\ pqr=6\\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}=\frac{11}{6}\end{cases}$$

**2°)** Résolution de E : $x^3-6x^2+11x-6=0$

$x_0=1$ est une solution évidente, en effet : $(1)^3-6(1)^2+11(1)-6=12-12=0$, donc

$$\frac{x^3-6x^2+11x-6}{x-1}=\frac{x^3-x^2-5x^2+5x+6x-6}{x-1}=\frac{x^2(x-1)-5x(x-1)+6(x-1)}{x-1}=\frac{(x-1)(x^2-5x+6)}{x-1}$$

$\Rightarrow x^3-6x^2+11x-6=(x-1)(x^2-5x+6)$

$x^3-6x^2+11x-6=0\Rightarrow(x-1)(x^2-5x+6)=0\Rightarrow\begin{cases}x-1=0\Rightarrow x=1\\ ou\\ x^2-5x+6=0\end{cases}$

$x^2-5x+6=0\Rightarrow\Delta=25-24=1$

$$\Rightarrow\begin{cases}x_1=\frac{5-1}{2}=\frac{4}{2}=2\\ x_2=\frac{5+1}{2}=\frac{6}{2}=3\end{cases}\Rightarrow\mathcal{S}=\{1;2;3\}$$

**Vérification :** $1+2+3=6$, $1\times2\times3=6$, $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{11}{6}$

## 1. Changement d'écriture d'une fonction rationnelle :

**Exemple 1 :**

Soit les quotients de polynômes à coefficients réels ;

$Q(x)=\frac{3x+7}{x+2}$, $M(x)=\frac{3x^3-2x^2+x-6}{x(x+2)(x-3)}$,

$R(x)=\frac{5x^2-7x+4}{x-1}$, $K(x)=\frac{-4x^2+3x-12}{(x+1)(x-2)}$.

En utilisant la méthode de l'identification, la division euclidienne ou la méthode de Hörner déterminer ;

- Les réels a et b tels que, $Q(x)=a+\frac{b}{x+2}$
- Les réels a, b et c tels que, $R(x)=ax+b+\frac{c}{x-1}$
- Les réels a, b et c tels que ; $K(x)=ax+b+\frac{c}{x-1}$
- Les réels a, b , c et d tels que ;

$$M(x)=a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x+2}+\frac{d}{x-3}$$

***Réponse :***

✸ $Q(x)=\frac{3x+7}{x+2}$. On utilise la méthode de l'identification ;

✸ $Q(x)=\frac{3x+7}{x+2}=a+\frac{b}{x+2}=\frac{ax+2a+b}{x+2}$

$\Rightarrow 3x+7=ax+2a+b\Rightarrow\begin{cases}3x=ax\\ 7=2a+b\end{cases}\Rightarrow a=3$

$\Rightarrow b=7-3\times2\Rightarrow\boldsymbol{b=1}\Rightarrow\boldsymbol{Q(x)=3+\frac{1}{x+2}}$

✸ $R(x)=\frac{5x^2-7x+4}{x-1}=ax+b+\frac{c}{x-1}$

$=\frac{ax^2-ax+bx-b+c}{x-1}$

$=\frac{ax^2+(-a+b)x-b+c}{x-1}$

$$\Rightarrow \begin{cases} ax^2 = 5x^2 \Rightarrow \boldsymbol{a = 5} \\ (-a+b)x = -7x \Rightarrow -a+b = -7 \Rightarrow b = -2 \\ -b+c = 4 \Rightarrow c = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow R(x) = 5x - 2 + \frac{2}{x-1}$$

✸ $K(x) = \dfrac{-4x^2+3x-12}{(x+1)(x-2)}$

$$= a + \frac{b}{(x+1)} + \frac{c}{(x-2)}$$

$$= \frac{a(x+1)(x-2) + b(x-2) + c(x+1)}{(x+1)(x-2)}$$

$$= \frac{ax^2 - ax - 2a + bx - 2b + cx + c}{(x+1)(x-2)}$$

$$= \frac{ax^2 + (-a+b+c)x - 2a - 2b + c}{(x+1)(x-2)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ax^2 = -4x^2 \Rightarrow a = -4 \\ (-a+b+c)x = 3x \Rightarrow -a+b+c = 3 \\ -2a-2b+c = -12 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = -4 \\ 4+b+c = 3 \\ 8-2b+c = -12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -4 & \boxed{1} \\ b+c = -1 & \boxed{2} \\ -2b+c = -20 & \boxed{3} \end{cases}$$

$$2 \times \boxed{2} + \boxed{3} \Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{a = -4} & \boxed{1} \\ 2b+2c = -2 & \boxed{2} \\ -2b+c = -20 & \boxed{3} \end{cases} \Rightarrow$$

$$3c = -22 \Rightarrow \boldsymbol{c} = \frac{-22}{3} \Rightarrow \boldsymbol{b = -1} + \frac{22}{3} = \frac{19}{3}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{K(x) = -4 - \frac{\frac{-22}{3}}{(x+1)} + \frac{\frac{19}{3}}{(x-2)}}$$

$$= \boldsymbol{-4 - \frac{22}{3(x+1)} + \frac{19}{3(x-2)}}$$

✸ $M(x) = \dfrac{3x^3 - 2x^2 + x - 6}{x(x+2)(x-3)}$

$$= a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x+2} + \frac{d}{x-3}$$

$$= \frac{ax(x+2)(x-3) + b(x+2)(x-3) + cx(x-3) + dx(x+2)}{x(x+2)(x-3)}$$

$$= \frac{ax^3 - 3ax^2 + 2ax^2 - 6ax + bx^2 - 3bx + 2bx - 6b + cx^2 - 3cx + dx^2 + 2dx}{x(x+2)(x-3)}$$

$$= \frac{ax^3 + (-a+b+c+d)x^2 + (-6a-b-3c+2d)x - 6b}{x(x+2)(x-3)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ax^3 = 3x^3 \\ (-a+b+c+d)x^2 = -2x^2 \\ (-6a-b-3c+2d)x = x \\ -6b = -6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{a = 3} \\ -a+b+c+d = -2 \Rightarrow c+d = 0 \\ -6a-b-3c+2d = 1 \Rightarrow -3c+2d = 20 \\ -6b = -6 \Rightarrow \boldsymbol{b = 1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 3 & \boxed{1} \\ c+d = 0 & \boxed{2} \\ -3c+2d = 20 & \boxed{3} \\ b = 1 & \boxed{4} \end{cases} \Rightarrow 3 \times \boxed{2} + \boxed{3}$$

$$\Rightarrow 5d = 20 \Rightarrow \boldsymbol{d = 4} \Rightarrow \boldsymbol{c = -4}.$$

D'où : $M(x) = 3 + \dfrac{1}{x} - \dfrac{4}{x+2} + \dfrac{4}{x-3}$

## 2. Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$ :

**Exemple 1 :**

Décomposons la fraction $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{x^5 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 11}{x^3 - 3x + 2}$

• **Etape 1 :** ***partie polynomiale.***

On effectue la division euclidienne de P par Q :

$P(x) = (x^2+1)Q(x)$. Donc la partie polynomiale est $E(x) = x^2 + 1$ et la fraction s'écrit :

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = x^2 + 1 + \frac{2x^2 - 5x + 9}{x^3 - 3x + 2}$$

Le degré du numérateur de la nouvelle fraction est strictement inférieur au degré de son dénominateur.

• **Etape 2 : Factorisation du dénominateur.**

Q a pour racine évidente 1 (racine double) et $-2$ (racine simple) et se factorise donc ainsi :

$Q(x) = (x-1)^2(x+2)$.

• **Etape 3 :** ***Décomposition en éléments simples.***

Le théorème de décomposition en éléments simples nous dit qu'il existe une unique décomposition :

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = E(x) + \frac{a}{(x-1)^2} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+2}$$

Nous savons déjà que $E(x) = x^2 + 1$, il reste à trouver les nombres a, b, c.

• **Etape 4 : Détermination des coefficients.**

Voici une façon de déterminer a, b, c. On récrit la fraction $\frac{a}{(x-1)^2}+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{x+2}$ au même dénominateur et on l'identifie avec $\frac{2x^2-5x+9}{x^3-3x+2}$

$$\frac{a}{(x-1)^2}+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{x+2}=\frac{(b+c)x^2(a+b-2c)x+(2a-2b+c)}{x^3-3x+2}$$

qui doit être égale à $\frac{2x^2-5x+9}{x^3-3x+2}$

On en déduit $b+c=2, a+b-2c=-5$ et $2a-2b+c=9$. Cela conduit à l'unique solution $a=2$, $b=-1$, $c=3$.

Donc $\frac{P(x)}{Q(x)}=E(x)+\frac{2}{(x-1)^2}+\frac{-1}{x-1}+\frac{3}{x+2}$.

**Remarque 9 :**

Une autre façon efficace consiste à multiplier par $(x-1)^2$ l'égalité $\frac{a}{(x-1)^2}+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{x+2}=\frac{2x^2-5x+9}{x^3-3x+2}$ puis la simplifier et remplacer x par 1 pourdéterminer le nombre a, on fait de même pour déterminer le nombre c et enfin on remplace x par 0 pour calculer la valeur du nombre b.

**Exercice résolu :**

Décomposer la fraction suivante en éléments simples

$$F(X)=\frac{X^4-X+2}{(X-1)(X^2-1)}.$$

**Solution :**

Le degré du numérateur est supérieur au degré du dénominateur, il faut diviser $X^4-X+2$ *par* $(X-1)(X^2-1)$.

Or $(X-1)(X^2-1)=X^3-X^2-X+1$.

$$\begin{array}{rl|l} & X^4 \qquad\qquad -X+2 & X^3-X^2-X+1 \\ \cline{3-3} - & X^4-X^3-X^2+X & X+1 \\ & X^3+X^2-2X+2 & \\ - & X^3-X^2-X+1 & \\ & 2X^2-X+1 & \end{array}$$

$F(X)=X+1+Q(X)$ ; *où* $Q(X)=\frac{2X^2-X+1}{(X-1)(X^2-1)}$.

On fera attention au fait que la bonne factorisation de $(X-1)(X^2-1)$ est :

$(X-1)(X^2-1)=(X-1)^2(X+1)\,G(X)$

$$=\frac{2X^2-X+1}{(X-1)(X^2-1)}=\frac{2X^2-X+1}{(X-1)^2(X+1)}.$$

D'après le théorème précédent, il existe alors trois réels $a$, $b$ et $c$ tels que :

$G(X)=\frac{a}{(X-1)^2}+\frac{b}{(X-1)}+\frac{c}{(X+1)}$. (1) On multiplie l'égalité (1) par $(X-1)^2$, on obtient :

$(X-1)^2(X)=\frac{a(X-1)^2}{(X-1)^2}+\frac{b(X-1)^2}{(X-1)}+\frac{c(X-1)^2}{(X+1)}$ soit

$\frac{(X-1)^2(2X^2-X+1)}{(X-1)^2(X+1)}=\frac{a(X-1)^2}{(X-1)^2}+\frac{b(X-1)^2}{(X-1)}+\frac{c(X-1)^2}{(X+1)}$ ;

on simplifie ensuite l'écriture de cette égalité ceci donne : $\frac{(2X^2-X+1)}{(X+1)}=a+b(X-1)+\frac{c(X-1)^2}{(X+1)}$, puis on fait $X=1$ : $\left[\frac{(2X^2-X+1)}{(X+1)}\right]_{X=1}=\left[a+b(X-1)+\frac{c(X-1)^2}{(X+1)}\right]_{X=1}$ ; on obtient $\frac{2}{2}=a$ ; d'où : $a=1$.

On multiplie par $X+1$ l'égalité (1) :

$(X+1)G(X)=\frac{a(X+1)}{(X-1)^2}+\frac{b(X+1)}{(X-1)}+\frac{c(X+1)}{(X+1)}$, on simplifie alors l'écriture de cette égalité ceci donne : $\frac{(2X^2-X+1)}{(X-1)^2}=\frac{a(X+1)}{(X-1)^2}+\frac{b(X+1)}{(X-1)}+c$, puis on fait $X-1$

$\left[\frac{(2X^2-X+1)}{(X-1)^2}\right]_{X=-1}=\left[\frac{a(X+1)}{(X-1)^2}+\frac{b(X+1)}{(X-1)}+c\right]_{X=-1}$ ; obtient $\frac{4}{4}=c$ ; d'où : $c=1$.

En fin pour déterminer bon fait, par exemple, $X=0$ dans l'égalité (1) soit :

$\left[\frac{(2X^2-X+1)}{(X-1)^2(X+1)}\right]_{X=0}=\left[\frac{a}{(X-1)^2}+\frac{b}{(X-1)}+\frac{c}{(X+1)}\right]_{X=0}$ ;

on trouve $1=a-b+c$, donc $b=a+c-1=1$.

Donc $F(X)=\frac{1}{(X-1)^2}+\frac{1}{(X-1)}+\frac{1}{(X+1)}$ ; d'où :

$$\frac{X^4-X+2}{(X-1)\left(X^2-1\right)}=X+1+\frac{1}{(X-1)^2}+\frac{1}{(X-1)}+\frac{1}{(X+1)}$$





Math 6AS.indd 13 26/07/2024 10:40:30

## B. Exercices divers

**1.** Pour les 5 affirmations suivantes, dire si elles sont vraies ou fausses. Si elles sont vraies, les démontrer, si elles sont fausses, donner un contre-exemple.
1) Si une fonction polynôme est de degré 3, alors son carré est de degré 9.
2) Une fonction polynôme admet toujours une racine réelle.
3) La fonction polynôme P définie par :
$P(x) = x^5 + x^4 + 7x + 1$ n'a pas de racines positives.
4) Deux fonctions polynômes qui ont les mêmes racines sont égales.
5) Si $\alpha$ est une racine de deux fonctions polynômes R et S, alors, $R(x) - S(x)$ est factorisable par $x - \alpha$.

**2.** Soit le polynôme ; $Px) = 2x^3 - 14x - 12$
1°) Calculer $P(-1)$ ;
2°) Résoudre l'équation $P(x) = 0$
a. En factorisant $P(x)$ ;
b. *Par la méthode euclidienne.*

**3.** Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de P(x) par le binôme $x - a$ dans les cas suivants
1. $P(x) = x^3 + 5x^2 - x + 1$ *et* $x + 1$ ;
2. $P(x) = 4x^3 - 5x^2 - 2x + 3$ *et* $x - 2$ ;
3. $P(x) = x^4 + 5x^3 - x + 1$ *et* $x - 1$ ;

**4.** On considère le polynôme,
$P(x) = x^5 - 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 - 5x - 15$
1. Montrer que le nombre 3 est une racine de P(x)
2. Déterminer le polynôme Q(x) tel que :
$$P(x) = (x - 3)Q(x).$$

**5.** Soit le polynôme $P(x) = 2x^3 + 7x^2 + 2x - 3$.
1. Calculer $P(-3)$ puis déterminer le polynôme Q(x) tel que : $P(x) = (x - 3)Q(x)$.
2. On suppose que $|x| \leq 1$, montrer que : $|2x^2 + x - 1| \leq 2$ et que $|x + 3| \leq 4$, en déduire que $|P(x)| \leq 8$.

**6.** On considère le polynôme $P(x) = 2x^4 - ax + b$, avec a et b deux nombres réels.
1. Montrer que $P(x)$ est divisible par $(x - 2)$ si et seulement si $2a - b = 2^5$.
2. On suppose que $2a - b = 2^5$.
a. Déterminer le polynôme $Q(x)$ tel que :
$$P(x) = (x - 2)Q(x).$$
b. Déterminer le réel $a$ tel que le polynôme $Q(x)$ soit divisible par $(x + 1)$.
c. Sachant que $a = 10$, déterminer le polynôme $R(x)$ tel que $Q(x) = (x + 1)R(x)$.
En déduire $P(x)$ sous forme d'un produit de trois polynômes de degré $\geq 1$.

**7.** On considère le polynôme :
$P(x) = x^4 - (a+b)x^2 + ab$, avec a et b deux nombres réels.
1. Trouver une condition sur a et b pour que $P(x)$ ne possède aucune racine réelle.
En déduire une factorisation en facteurs irréductibles sur $\mathbb{R}$.
2. Trouver une condition sur a et b pour que $P(x)$ possède exactement deux racines réelles.
En déduire une factorisation en facteurs irréductibles sur $\mathbb{R}$.
3. Trouver une condition sur a et b pour que $P(x)$ possède exactement une racine réelles double.
4. Application : déterminer les racines et la factorisation en facteurs irréductibles sur $\mathbb{R}$ de : $Q(x) = x^4 - (\sqrt{2}+\sqrt{3})x^2 + \sqrt{6}$ et $R(x) = x^4 - (\sqrt{2}-\sqrt{3})x^2 - \sqrt{6}$ .

**8.** On donne un polynôme P et un nombre réel a. Dans chacun des cas suivants :
Vérifier que P(x) est factorisable par x – a.
Déterminer le quotient de P(x) par x – a.
Factoriser, si possible, ce quotient.
Etudier le signe de P(x).
1) $P(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$ et $a = 2$
2) $P(x) = -2x^3 + 7x^2 - 12x + 9$ et $a = \frac{3}{2}$.
3) $P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 9$ et $a = -3$
4) $P(x) = -3x^3 + 2x^2 + 9x - 6$ et $a = \sqrt{3}$.

**9.** Dans chacun des cas suivants, où P est un polynôme de degré 2. Mettre P(x) sous la forme canonique. Déterminer les racines éventuelles de P
Etudier le signe de P(x).
1) $P(x) = x^2 + 2x - 1$
2) $P(x) = -x^2 + x - 1$
5) $P(x) = x^2 + 2x + 2$
6) $P(x) = \frac{1}{2}x^2 + 5x - 1$

**10.** On considère le polynôme : $x^3+4x^2-5x+8$ qui a trois racines : a, b et c. Sans calculer les racines, déterminer : a+b+c ; abc ; $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$

**11.** Soit $P$ un polynôme non nul à coefficients réels, et $d$ un entier. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi ?

a. Si le degré de $P$ est $d$, alors le degré de $P'$ est $d-1$.

b. Si le degré de $P$ est $d$, alors celui de $P(X^2)$ est 2d.

c. Si le degré de $P$ est $d$, alors celui de $X^2\mathrm{P}(\mathrm{X}+2)$ est $d+2$.

d. Si le degré de $P$ est 2, alors celui de $X^2+\mathrm{P}$ est 2.

e. Si le degré de $P$ est 4, alors celui de $X^2+\mathrm{P}$ est 4.

**12.** Soient P, Q deux polynômes non nuls à coefficients réels. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi ?

a. Le degré de P + Q est toujours la somme des degrés de P et de Q

b. Le degré de P + Q est toujours égal soit au degré de $P$ soit au degré de $Q$

c. Le degré de $PQ$ est la somme des degrés de $P$ et de $Q$.

d. Le degré de $PQ$ est toujours égal au degré de $QP$

e. Le degré de $P(X^2)Q(X^2)$est le double de la somme des degrés de $P$ et de $Q$.

**13.** Soit $P$ un polynôme à coefficients réels. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi ?

a. Si $P$ est divisible par $X^2-X$ alors $P(1)=0$.

b. Si $P$ est divisible par $X^2-X$ alors $P(0)=0$.

c. Si $P$ est divisible par $(X-1)^2$ alors $P(1)=0$.

d. Si $P(1)=0$ alors $P$ est divisible par $(X-1)$.

e. Si $P$ est irréductible alors $P$ ne s'annule pas sur$\mathbb{R}$.

**14.** Soit $P$ un polynôme à coefficients réels. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi ?

a. Le reste de la division euclidiene de $P$ par $X-1$est $P(1)$.

b. Le reste de la division euclidienne de $P$ par $(X-1)^2$est $P(1)$.

c. Si les restes des divisions euclidiennes de $P$ par $X$ et $X-1$ sont nuls, alors $P$ est divisible par $X^2-X$.

d. Si les restes des divisions euclidiennes de $P$ par $X^2$ et $(X-1)^2$sont égaux, alors $P$ est divisible par $X^2-X$.

e. Si les restes des divisions euclidiennes de $P$ par $X^2$ et $(X-1)^2$sont égaux à $R$, alors $P-R$ est divisible par $(X^2-X)^2$.

**15.** Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi?

a. $X^2+4$ est irréductible sur $\mathbb{R}$

b. $X^2-4$ est irréductible sur ⍰

c. $X^2-2$ est irréductible sur ⍰

d. $X^2-2$est irréductible sur $\mathbb{R}$

e. $X^2+1$est irréductible sur $\mathbb{R}$

**16.** 1. On considère l'ensemble des polynômes $P(x)$ à Coefficients réels, tels que :

$$P(x+1)P(x)=-P(x^2)(1)$$

a. Déterminer l'ensemble des polynômes $P(x)$ de degrés au plus 2, vérifiant l'égalité (1)

b. Peut-on trouver des polynômes $P(x)$ de degrés 3 ou au 4, vérifiant l'égalité (1) ?

2. On considère l'ensemble des polynômes $Q(x)$ à coefficients réels, tels que :

$$Q(x^2)=(x^2+1)Q(x)\ (2)$$

Déterminer, s'ils existent, les polynômes de degrés au plus n , vérifiant l'égalité (2)

**17.** Soit $n$ un entier strictement positif. On se place dans l'ensemble des polynômes à coefficients réels.

1. Montrer que $X-1$ divise $X^n-1$.
2. Montrer $X^2+2X$ divise $(X+1)^{2n}-1$.
3. Montrer que $X^2$ divise $(X+1)^n-nX-1$.
4. Montrer que $(X-1)^2$ divise $X^n-nX+n-1$.
5. Montrer que $(X-1)^2$ divise $nX^{n+1}-(n+1)X^n+1$.

**18.** Effectuer la division euclidienne de $P$ par $Q$ pour les couples $(P,Q)$ suivants.

1. $P=X^2-1, Q=X-1$ 2. $P=X^3-1, Q=X^2+1$
3. $P=X^4-1, Q=X^2+1$. 4. $P=X^4-2X^2+1$, $Q=X^2-2X+1$
5. $P=X^4-X^3+X-2, Q=X^2-2X+4$
6. $P=X^4+2X^3-X+6, Q=X^3-6X^2+X+4$
7. $P=3X^5+4X^2+1, Q=X^2+2X+3$
8. $P=3X^5+2X^4-X^2+1, Q=X^3+X+2$
9. $P=X^5-X^4+2X^3+X^2+4, Q=X^2-1$
10. $P=X^6-3X^4+3X^2-1, Q=X^2-X.$

**19.** Soit $P$ un polynôme à coefficients réels,

1. Montrer que si $P$est divisible par $X-a$ et par $X-b$, alors $P$ est divisible par $(X-a)(X-b)$.

2. On suppose que les restes des divisions euclidiennes de $P$ par $X-a$ et par $X$-$b$ sont tous les deux égaux à 1. Montrer que le reste de la division euclidienne de $P$ par $(X-a)(X-b)$ est 1.

3. On suppose que les restes des divisions euclidiennes de $P$ par $X$ -1 et $X$ + 5 sont respectivement 7 et 3. Quel est le reste de la division euclidienne de $P$ par $X^2+4X-5$?

**20.** Ecrire la décomposition en facteurs irréductibles des polynômes suivants :

a) $X^4-1$ b) $X^6+1$ c) $X^8+X^4+1$

d) $(X^2+X+1)^2-1$ e) $X^3-5X^2+3X+9$

f) $6X^5+15X^4+20X^3+15X^2+6X+1$

g) $(X^2-X+2)^2+(X-2)^2$

h) $X^5-7X^3-2X^2+12X+8$

**21.** Soit $P$ un polynôme à coefficients réels, et $d$ un entier naturel non nul.

1 Si le degré de $P$ est $d$, alors le degré de $P-X^d$ est strictement inférieur à $d$.
2. Si le degré de $P$ est $d$, alors le degré de $P(X-1)$ est $d-1$.
3. Si le degré de $P$ est $d$, alors le degré de $P'(X+1)$ est $d-1$.
4. Si le degré de $P$ est $d$, alors le degré de $(X+2)P(X+2)$ est $d+2$.

**22.** Soient $P$ un polynôme non nul à coefficients réels.

a. Le degré de $P((X+2)^2)$ est le double du degré de $P$.
b Le degré de $(X+2)P((X+2))^2$ est toujours supérieur ou égal à 2.
c. Le degré de $P((X+2)^2)$ est soit un entier pair, soit.
d. Le degré de $(X+2)^2P((X+2)^2)$ est toujours supérieur ou égal à 2.
e. Le degré de $(X+2)^2P((X+2)^2)$ est toujours le double du degré de $P$.

**23.** Soient P et Q deux polynômes non nuls, à coefficients réels.

a. Les polynômesP(Q)etQ(P)ont toujours le mêm e degré.
b. Les polynômes PQ et P(Q) ont toujours le même degré.
c. SilepolynômeQestconstant,alorslespolynômesPQ et P(Q)ontlemêmedegré.
d. Si les polynômes P+Q et PQ ont le même degré, alors au moins un des deux polynômes P et Q est constant.
e. Si les polynômes PQ et P(Q) ont le même degré, alors les deux polynômes et Q sont constants.

**24.** Soit $P$ un polynôme non nul à coefficients réels.

a. Si 2 est racine de $P$, alors 0 est racine de $P(X)-2$.
b. Si 2 est racine double de $P$, alors $P$ est divisible par $(X-2)$.
c. Si $P$ est divisible par $(X-2)$ alors 2 est racine double de $P$.
d. Si 2 est racine double de $P$, alors $P$ est divisible par $(X-2)^3$.

**25.** Décomposer les fractions rationnelles suivantes,

$$\frac{1}{X(X-1)};\ \frac{X}{X^2-1};\ \frac{X^3-2X+1}{X^2-1};\ \frac{X(X^2+1)}{X^2-1};\ \frac{X^3+1}{(X-2)^4};$$
$$\frac{X^5+1}{(X^2+1)^3};\ \frac{X^2+1}{(X-1)(X-2)};\ \frac{X^3-2}{X^2-4};\ \frac{X^3-2X+1}{(X^2-1)^3};$$
$$\frac{X^5+1}{X^3(X-2)};\ \frac{X^3+X}{(X-1)(X^6-2)};\ \frac{X^6-X^5+2X^4+X^2+1}{X^3(X^2+1)^2};$$
$$\frac{X^8-X^4+2}{(X^2+X+1)^3};\ \frac{X^6+X^5+6X^4+17X^3+25X^2+X+7}{(X+1)^2(X^2+X+1)^2}.$$

**26.** On considère la fraction rationnelle : $\frac{P}{Q}=\frac{2X^2}{X^4-1}$

a. La décomposition de $\frac{P}{Q}$ dans a un seul élément simple.
b. La décomposition de $\frac{P}{Q}$ admet 2 pour partie entière.
c. La décomposition de $\frac{P}{Q}$ admet un élément simple proportionnel à $\frac{1}{X^2-1}$
d. La décomposition de $\frac{P}{Q}$ contient les deux éléments simples $\frac{1}{X^2-1}$ et $\frac{1}{X^2+1}$.

**27.** Le but de l'exercice est de calculer la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle : $\frac{4X^4}{(X^4-1)^2}$

1. Décomposer en éléments simples, la fraction rationnelle $\frac{2X}{X^2-1}$.

En déduire que : $\frac{4X^4}{(X^4-1)^2}=\frac{1}{(X^2+1)^2}+\frac{1}{(X^2+1)^2}+\frac{1}{X^4-1}$

2. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $\frac{1}{X^2-1}$.

Endéduire la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle $\frac{1}{(X^2-1)^2}$.

3. Utiliser la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle $\frac{1}{(X^2-1)^2}$ pour donner la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle $\frac{1}{X^4-1}$.
4. Déduire des questions précédentes la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle $\frac{4X^4}{(X^4-1)^2}$.
5. Retrouver le résultat de la question précédente en utilisant la méthode présentée dans le cours.

CHAPITRE 02

# Equations -Inéquations -Systèmes- Matrices

## Cours

### 1. Equations :

**a. Equations du premier degré :**

Une équation de la forme $ax+b = 0$ ; où $a$ et $b$ sont deux réels donnés, est appelée équation du premier degré à une inconnue $x$.

| Si | Alors l'ensemble des solutions est |
|---|---|
| $a=0$ et $b=0$ | $\mathbb{R}$ |
| $a=0$ et $b\neq0$ | $\phi$ |
| $a\neq0$ | $\left\{-\frac{b}{a}\right\}$ |

**b. Equations du second degré :**

Une équation de la forme $ax^2+bx+c = 0$ ; où $a$ est un réel non nul donné $b$ et $c$ sont deux réels donnés, est appelée équation du second degré à une inconnue $x$.Le discriminant de cette équation est soit le nombre $\Delta$, soit le nombre $\Delta'$ tel que :$\Delta = b^2-4ac$ *et*

$$\Delta' = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac$$

| **Si** | **Alors l'ensemble des solutions est** |
|---|---|
| $\Delta<0$ $(\Delta'<0)$ | $\phi$ |
| $\Delta=0$ $(\Delta'=0)$ | $\left\{-\frac{b}{2a}\right\}$ |
| $\Delta>0$ $(\Delta'>0)$ | $\{x_1,x_2\}$ avec $x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ <br> $Ou: x_1=\frac{\frac{-b}{2}-\sqrt{\Delta'}}{a}$ et $x_2=\frac{\frac{-b}{2}+\sqrt{\Delta'}}{a}$ |

| **Si** | **Alors** |
|---|---|
| $x_1$ et $x_2$ sont les solutions de l'équation $ax^2+bx+c=0$ | $x_1+x_2=\frac{-b}{a}$ et $x_1.x_2=\frac{c}{a}$ |
| $a+b+c = 0$ | L'ensemble des solutions de l'équation $ax^2+bx+c=0$ *est* $\left\{1,\frac{c}{a}\right\}$ |
| $a-b+c = 0$ | L'ensemble des solutions de l'équation $ax^2+bx+c=0$ *est* $\left\{-1,\frac{-c}{a}\right\}$ |
| $\begin{cases} x+y=s \\ xy=p \end{cases}$ où $s$ et $p$ sont deux réels donnés | Les nombres $x$ et $y$ *(s'ils existent)* sont les solutions de l'équation du second degré d'inconnue$X$ : $X^2-sX+p=0$ |

**L'équation $x^2 = k$ ; où $k$ est un réel donné.**

| Si | alors l'ensemble des solutions est |
|---|---|
| $k<0$ | $\phi$ |
| $K=0$ | $\{0\}$ |
| $k>0$ | $\{-\sqrt{k};\ \sqrt{k}\}$ |

**c. Equation bicarrée :**

La forme générale d'une équation bicarrée est : $ax^4+bx^2+c=0$ ; avec $a$ un réel non nul, $b$ et $c$ deux réels donnés. De plus, si on pose $X=x^2$, l'équation $ax^4+bx^2+c=0$ s'écrit alors : $aX^2+bX+c=0$.

### 2. Inéquations :

**a. Inéquations du premier degré :**

La forme générale d'un binôme du premier degré est $P(x)=ax+b$ où $a$ est un réel non nul et$b$un réel donnés.

- Signe de $ax+b$ sur $\mathbb{R}$

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{-b}{a}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $ax+b$ | | signe contraire de a | 0 | signe de a | |

Une inéquation de la forme :
$ax+b\leq0$ ou$ax+b<0$ ou $ax+b\geq0$ ou $ax+b>0$ est appelée une inéquation du premier degré.

**b. Inéquations du second degré :**

La forme générale d'un trinôme du second degré est $P(x)=ax^2+bx+c$ ; où $a$ est un réel non nul, $b$ et $c$ deux réels donnés.

**Signe d'un trinôme du second degré :**

| Si | Alors |
|---|---|
| $\Delta<0$ $(\Delta'<0)$ | $x$ : $-\infty$ … $+\infty$ <br> $ax^2+bx+c=0$ : Signe de a |
| $\Delta=0$ $(\Delta'=0)$ | $x$ : $-\infty$, $\frac{-b}{2a}$, $+\infty$ <br> $ax^2+bx+c=0$ : Signe de $a$ , 0 , Signe de $a$ |
| $\Delta>0$ $(\Delta'>0)$ $x_1<x_2$ | $x$ : $-\infty$, $x_1$, $x_2$, $+\infty$ <br> $ax^2+bx+c=0$ : Signe de $a$ , 0 , Signe contraire de $a$ , 0 , Signe de $a$ |

La forme générale d'une inéquation du second degré est : $ax^2+bx+c\leq0$ ou $ax^2+bx+c<0$ ou $ax^2+bx+c\geq0$ ou $ax^2+bx+c> 0$.

### 3. Système d'équations et d'inéquations :

**a. Système linéaire de deux équations à deux inconnues :**

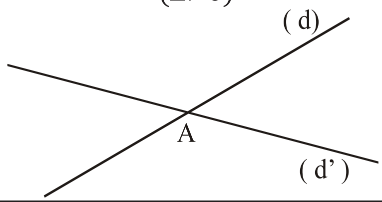
La forme générale d'un système linéaire de deux équations à deux inconnues est :
$\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$, où $a$ ; $b$ ; $c$ ; $a'$; $b'$; $c'$ sont des nombres réels donnés et où $(x,y)$ est le couple de réels inconnus.

Le déterminant du système est le nombre $\Delta$ tel que:$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b$.

| Si | alors l'ensemble des solutions est |
|---|---|
| $\Delta \neq 0$ | Le système a une solution unique.<br>On la détermine par substitution ou par combinaison linéaire. |
| $\Delta = 0$ | Le système peut ne pas avoir de solution ou en avoir une infinité |

**Interprétation graphique**

Soit $(d)$ et $(d')$ les deux droites d'équations cartésiennes $ax + by = c$ et $a'x + b'y = c'$ dans un repère $(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath})$du plan.

| Si | alors l'ensemble des solutions est |
|---|---|
| $(d)$ et $(d')$ sont sécantes ($\Delta \neq 0$)<br><br> | Le système a un couple solution unique qui est le couple des coordonnées du point $A$ commun à $(d)$et $(d')$. |
| $(d)$ et $(d')$ sont strictement parallèles ($\Delta = 0$).<br>( d )<br>( d' )<br>Les droites n'ont pas de points communs | Le système n'a pas de solution. |
| $(d)$ et $(d')$ sont confondues ($\Delta = 0$).<br>( d') = ( d')<br>Les droites ont une infinité de points communs | Le système a une infinité de solutions qui sont tous les couples de coordonnées du point de $(d)$ (ou de $(d')$). |

## b. Système linéaire d'inéquations à deux inconnues :

La forme générale d'une inéquation linéaire à deux inconnues est :

$ax + by + c \geq 0$ ou $ax + by + c \leq 0$ ou $ax + by + c > 0$ ou $ax + by + c < 0$, avec $a$ ; $b$ deux réels non nuls et $c$ un réel donné.

**Soit $(d)$ la droite d'équation $ax + by + c = 0$.**

On considère le nombre $ax + by + c$

- ce nombre est nul pour tous les couples $M(x\,;\ y)$ de $(d)$.
- ce nombre est positif pour tous les points $M(x\,;\ y)$ de l'un des demi-plans de frontière $(d)$.
- ce nombre est négatif pour tous les points $M(x\,;\ y)$ de l'autre demi-plan.
- On déterminer le demi-plan où $ax + by + c \geq 0$ (respectivement$ax + by + c \leq 0$) qui s'obtient en calculant ce nombre pour un point donné que l'on choisit en dehors de $(d)$.
- Un système d'inéquations linéaires à deux inconnues ne peut se résoudre que graphiquement.

## c. Systèmes linéaires d'équations et d'inéquations à trois inconnues :

Système à trois équations à trois inconnues

On considère le système $\sum : \begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \\ a''x + b''y + c''z = d'' \end{cases}$ ;

où x ; y ; z sont les inconnues.

$\sum$ est appelé système de trois équations du premier degré (ou système linéaire) à trois inconnues.

Résoudre$\sum$ c'est déterminer les triplets ( x ; y ; z) de nombres réels qui vérifient les trois équations.

Nous allons étudier deux méthodes de résolution d'un tel système, par substitution et par pivot de Gauss.

**Résolution par substitution :**

**Exemple 1 :**

Résoudre le système $S_1 \begin{cases} x + y - 2z = -7 & (E_1) \\ 2x - y + z = 0 & (E_2) \\ 2x + y + z = 8 & (E_3) \end{cases}$

**Réponse :**

On déduit de l'équation $(E_2)$ que $z = -2x + y$ ; on remplace z par sa valeur dans $(E_1)$ et $(E_3)$. On obtient :

$$S_1 \begin{cases} 5x - y = -7 \\ 2y = 8 \\ z = \frac{6}{5} + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{3}{5} \\ y = 4 \\ z = \frac{6}{5} + 4 = \frac{26}{5} \end{cases}$$

Donc ; le système $S_1$ a un unique triplet solution$\left(-\frac{3}{5}\,;4\,;\frac{26}{5}\right)$

**Exemple 2 :**

Résoudre le système $S_2 \begin{cases} 2x - y - 2z = 6 \\ x + y - z = 1 \\ x - 5y - z = 9 \end{cases}$

**Réponse :**

On déduit de l'équation $E_1$ que : $y = 2x - 2z - 6$; on remplace y par sa valeur dans $E_2$ et $E_3$ :

$$S_2 \begin{cases} y = 2x - 2z - 6 & (E_1) \\ 3x - 3z = 7 & (E_2) \\ -9x + 9z = -21 & (E_3) \end{cases}$$

On obtient : Le système $S_2 \begin{cases} 3x - 3z = 7 \\ -9x + 9z = -21 \end{cases}$

a pour solution tous les couples $(x\,;\ z)$ de nombres réels tels que : $3x - 3z = 7$. On donne à l'une des inconnues une valeur arbitraire $\lambda(\ z = \lambda)$ ; on en déduit $S_2 \begin{cases} x = \frac{7}{3} + \lambda \\ y = -\frac{4}{3} \\ z = \lambda \end{cases}$ ; donc l'ensemble de triplets solutions de $S_2$ est : $\left\{\left(\frac{7}{3} + \lambda, \frac{-4}{3}, \lambda\right)\right\}$; $(\lambda \in \mathbb{R})$

On peut également résoudre un système d'équations par combinaison.
Cette méthode nécessite généralement une vérification

**Exercice 1 :**

Résoudre le système $S_3\begin{cases} x-5y-7z=3 & (E_1)\\ 5x+3y+z=3 & (E_2)\\ 3x+y-2z=-1 & (E_3)\end{cases}$

**Solution :**

On élimine $x$ dans $(E_2)$ et dans $(E_3)$ par combinaison de chacune de ces équations avec $(E_1)$.On obtient :

$$S_3\begin{cases} x-5y-7z=3 & (E_1)\\ 5x+3y+z=3 & 5\,(E_1)-(E_2)\\ 3x+y-2z=-1 & 3\,(E_1)-(E_3)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow S'_3\begin{cases} x-5y-7z=3 & (E'_1)\\ -28y-36z=12 & (E'_2)\\ -16y-19z=10 & (E'_3)\end{cases}.$$

On élimine $y$ dans $(E'_3)$ par combinaison de $(E'_2)$ et $(E'_3)$. On obtient : $S'_3 \Leftrightarrow \begin{cases} x-5y-7z=3\\ -7y-9z=3\\ z=2\end{cases}$.

Il reste à résoudre ce système triangulaire ; on obtient en commençant par la dernière équation puis en remontant : $z=2$ ; $y=-3$et $x=2$. Donc le système $S_3$ a pour solution le triplet $(2\ ;\ -3\ ;\ 2)$.

**Exemple 3 :**

*Résoudre le système*$\sum_2$ : $\begin{cases} x+y-2z=1 & ....(E_1)\\ x-2y+z=1 & ....(E_2)\\ -2x+y+z=1 & ....(E_3)\end{cases}$

**Réponse :** *On a* $\sum_2 \Leftrightarrow$

$$\textstyle\sum'_2 : \begin{cases} x+y-2z=1...\ (E_1)\\ 3y-3z=0\ ...\ (E_1)-(E_2)\\ 3y\ -3z=3...\ 2\times(E_1)+(E_3)\end{cases}$$

on obtient le système $\begin{cases} 3y-3z=0\\ 3y\ -3z=3\end{cases}$ n'a pas de solution ; donc le système $\sum_2$ n'a pas de solution.

**Exemple 4 :**

Résoudre le système$\sum_3$: $\begin{cases} x+2y+5z=4 & ....(E_1)\\ x+2y+2z=6 & ....(E_2)\\ 2x+3y+7z=10 & ....(E_3)\end{cases}$

**Réponse :**

On obtient $\sum_3 \Leftrightarrow \sum'_3$: $\begin{cases} x+2y+5z=4 & (E_1)\\ 3z=-2 & (E'_2)=(E_1)-(E_2)\\ y+3z=-2 & (E_3)\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{22}{3}\\ y=0\\ z=-\dfrac{2}{3}\end{cases}$$

Le système a pour solution le triplet $\left(\frac{22}{3};0;-\frac{2}{3}\right)$

### d. Système d'inéquations à trois inconnues :

$ax+by+cz+d=0$ est l'équation d'un plan dans l'espace.

La forme générale d'une inéquation linéaire à trois inconnues est :
$ax+by+cz+d\geq 0$ ou $ax+by+cz+d\leq 0$ ou $ax+by+cz+d>0$ ou $ax+by+cz+d<0$, avec $a,b,c$ des réels non nuls et $d$ un réel donné.
Soit $(P)$ le plan d'équation $ax+by+cz+d=0$.
On considère le nombre $ax+by+cz+d$

- Ce nombre est nul pour tous les couples $M(x\,;y\,;z)$ de $(P)$.
- Ce nombre est positif pour tous les points $M(x\,;y\,;z)$ de l'un des deux demi-espaces de frontière $(P)$.
- Ce nombre est négatif pour tous les points $M(x\,;y\,;z)$ de l'autre demi-espace.
- On détermine le demi-espace où $ax+by+cz+d\geq 0$ (respectivement $ax+by+cz+d\leq 0$) qui s'obtient en calculant ce nombre pour un point donné que l'on choisit en dehors de $(P)$.
- Un système d'inéquations linéaires à trois inconnues ne peut se résoudre que graphiquement.

Soit le système d'inéquations à trois inconnues $\Sigma$ :
$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z+d_1\geq 0\\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2<0\\ a_3x+b_3y+c_3z+d_3>0\end{cases}$ ; où
$a_1,b_1,c_1,d_1,a_2,b_2,c_2,d_2,a_3,b_3,c_3,d_3$ sont des réels donnés, et $x$, $y$ et $z$ sont les inconnues.
La solution de ce système est l'ensemble des points de l'espace qui vérifie les trois inéquations simultanément.

## 4. Matrices, déterminants et systèmes linéaires :

### a. Matrice :

**Définitions :**

Une matrice de format $n\times m$ ou $(n,m)$ est un tableau rectangulaire de nombres, de $nm$ éléments, rangés en $n$ lignes et $m$ colonnes. $n$ et $m$ sont les *dimensions* de la matrice.

**Exemple 5 :** $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 4 & 3 & -1\end{bmatrix}$ avec $n=2, m=3$

Une matrice est symbolisée par une lettre majuscule par exemple, $A$. On note $a_{ij}$ l'élément situé à l'intersection de la ligne $i$ et de la colonne $j$ (la ligne est toujours nommée en premier). On entoure généralement ces tableaux de parenthèses ou de crochets. Pour nommer les matrices, on utilise des lettres majuscules.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm}\end{bmatrix}$$

On note $[a_{ij}]$ la matrice d'élément général $a_{ij}$. On a donc : $A=[a_{ij}]$
Si $m=1$, la matrice est appelée *vecteur* (plus précisément *vecteur-colonne*) : $\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$

**Exemple 6 :**

La matrice $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$ est une matrice $2 \times 2$.

**N.B :** Nous utiliserons des lettres majuscules pour les matrices et des lettres minuscules pour les vecteurs, mais ce n'est pas obligatoire.

Si $n = m$, la matrice est appelée matrice carrée d'ordre $n$.

**Quelques matrices carrées particulières**

**Matrice unité ou identité**

$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ; $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Souvent notée $\boldsymbol{I_n}$ ; où $n$ est la dimension de la matrice ($n = 2$ ou $n = 3$)

**Matrice diagonale**

$D = \begin{bmatrix} D_{11} & 0 \\ 0 & D_{22} \end{bmatrix}$ ; $D = \begin{bmatrix} D_{11} & 0 & 0 \\ 0 & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{33} \end{bmatrix}$

Souvent notée $diag(D_{ii})$

**Matrice triangulaire supérieure**

$$U = \begin{bmatrix} U_{11} & 0 \\ 0 & U_{22} \end{bmatrix};\ U = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ 0 & U_{22} & U_{23} \\ 0 & 0 & U_{33} \end{bmatrix}$$

**Matrice triangulaire inférieure**

$V = \begin{bmatrix} V_{11} & 0 \\ V_{21} & V_{22} \end{bmatrix}$; $U = \begin{bmatrix} V_{11} & 0 & 0 \\ V_{21} & V_{22} & 0 \\ V_{31} & V_{32} & V_{33} \end{bmatrix}$

Une matrice carrée $A$ est dite *symétrique* si : $a_{ij} = a_{ji}$ pour tout $i$ différent de $j$

**Exemple 7 :** $D = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 8 \\ 1 & 8 & 5 \end{bmatrix}$

**Remarque 1 :**

Si tous les coefficients sont nuls, alors la matrice est dite matrice nulle notée 0.

## b. Calcul matriciel :

**Opérations sur les matrices**

On se limitera aux matrices de dimensions $(n, m)$ tels que : $1 \leq n \leq 3$ et $1 \leq m \leq 3$ comme le précisent les nouveaux programmes.

**Addition, soustraction**

L'addition et la soustraction des matrices se font terme à terme. Les matrices doivent avoir les mêmes dimensions :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 3 \\ 5 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

**Propriétés :**

- L'addition des matrices est :
  - *Associative* :
    $A + B + C = (A + B) + C = A + (B + C)$
  - *Commutative* : $A + B = B + A$ .
  - A+O=O+A=A
- Transposée d'une omme : $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})^t = \boldsymbol{A}^t + \boldsymbol{B}^t$ .

**Multiplication par un nombre**

Chaque terme de la matrice est multiplié par le nombre :

$$2 \times \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 8 & 6 & -2 \end{bmatrix}$$
$$-3 \times \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -6 & 0 \\ -12 & -9 & 3 \end{bmatrix}$$

**Transposition**

La transposée $\boldsymbol{A}^t$ (aussi notée$t_A$) d'une matrice $\boldsymbol{A}$ est la matrice obtenue en échangeant les lignes et les colonnes de $\boldsymbol{A}$ :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow A^t = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

La transposée d'un vecteur-colonne est un vecteur-ligne :

La transposée d'un vecteur- ligne est un vecteur-colonne :

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x_1} \\ \cdots \\ \boldsymbol{x_n} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \boldsymbol{X^t} = [\boldsymbol{x_1} \ldots \boldsymbol{x_n}]$$
$$\boldsymbol{Y} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{y_1} \\ \cdots \\ \boldsymbol{y_n} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \boldsymbol{Y^t} = [\boldsymbol{y_1} \ldots \boldsymbol{y_n}]$$

**Multiplication des matrices**

Définissons tout d'abord le produit d'un vecteur-ligne $X^t$ par un vecteur-colonne $Y$ :

$$X^t.Y = [x_1 \ldots x_n] \begin{bmatrix} y_1 \\ \cdots \\ y_n \end{bmatrix} = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$$

Le produit est appelé *produit scalaire* des vecteurs $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$, noté $\boldsymbol{x}.\boldsymbol{y}$. Les vecteurs doivent avoir la même dimension.

Le produit matriciel s'en déduit : le produit de la matrice $\boldsymbol{A}(n \times m)$ par la matrice $\boldsymbol{B}(m \times p)$ est la matrice $\boldsymbol{C}(n \times p)$ telle que l'élément $C_{ij}$ est égal au produit scalaire de la ligne $i$ de la matrice $\boldsymbol{A}$ par la colonne $j$ de la matrice $\boldsymbol{B}$.

$$\boldsymbol{C_{ij}} = \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{A_{ik}B_{kj}}, \quad \boldsymbol{i = 1 \ldots n}, \quad \boldsymbol{j = 1 \ldots p}$$

**Exemple 8 :**

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 26 & 13 \end{bmatrix}$$

On a en effet, en effectuant les produits ligne par colonne :

$$[1 \quad 2 \quad -1] \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 1 \times 5 + 2 \times 2 + (-1) \times 3 = 6,$$

$$[1 \quad 2 \quad -1] \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = 1 \times 1 + 2 \times 3 + 0 \times 4 = 7,$$

$$[4 \quad 3 \quad 0]\begin{bmatrix}5\\2\\3\end{bmatrix} = 4\times 5+3\times 2+0\times 3 = 26,$$

$$[4 \quad 3 \quad 0]\begin{bmatrix}1\\3\\4\end{bmatrix} = 4\times 1+3\times 3+0\times 4 = 13.$$

**Propriétés :**

Le produit matriciel est :

- Associatif : $\mathbf{A.B.C} = (\mathbf{A.B}).\mathbf{C} = \mathbf{A}.(\mathbf{B.C})$
- Distributif par rapport à l'addition : $\mathbf{A}.(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{A.B}+\mathbf{A.C}$
- Non commutatif : $\mathbf{A.B}$ n'est pas égal à $\mathbf{B.A}$ en général.
- La matrice unité $\mathbf{I}$ est élément neutre pour la multiplication : $\mathbf{A}.\mathbf{I}_{\mathrm{m}} = \mathbf{I}_{\mathrm{n}}.\mathbf{A} = \mathbf{A}$, si la matrice $\mathbf{A}$ est de dimensions n × m.

Transposée d'un produit : $(\mathbf{A.B})^{\mathrm{T}} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}.\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ (Attention au changement d'ordre !).

### Produit particulier :

$\boldsymbol{x}$ étant des vecteurs-colonnes, $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$ est le carré scalaire.

Sa racine carrée $(\boldsymbol{x}^T.\boldsymbol{x})^{½}$ est appelée *norme* du vecteur (*notée* $\|X\|$)

### Inversion des matrices carrées :

Une matrice carrée $\boldsymbol{A}$ *d'ordre 2 ou 3 est dite inversible* s'il existe une matrice carrée *notée* $\boldsymbol{A}^{-1}$ (appelée *matrice inverse*) telle que :

$A\times A^{-1} = A^{-1}\times A = I$

Si $A^{-1}$ n'existe pas, la matrice $A$ est dite *singulière*

**Propriétés :**

- $(A^{-1})^{-1} = A$
- $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$
- $(A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$ (Attention au changement d'ordre !)
- $[diag(D_{ii})]^{-1} = diag(1/D_{ii})$
- La matrice $A$ est dite *orthogonale* si $A^{-1} = A^t$

### Déterminant d'une matrice carrée d'ordre 2 :

Pour une matrice 2 × 2, $A = \begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}$ ; le nombre $a.d - b.c$ est appelé *déterminant* de la matrice $\boldsymbol{A}$, noté : $\begin{vmatrix}a & b\\c & d\end{vmatrix} = |A| = \det(A)$

**Remarque 2 :**

On se limitera aux matrices carrées d'ordre 2

### Propriétés des déterminants :

- $\det(\boldsymbol{A}^t) = \det(\boldsymbol{A})$
- $\det(\boldsymbol{A}.\boldsymbol{B}) = \det(\boldsymbol{A})\times\det(\boldsymbol{B})$

**Exemple 9 :**

Le déterminant de la matrice $\begin{bmatrix}3 & -2\\4 & 1\end{bmatrix}$, qu'on note $\det\begin{bmatrix}3 & -2\\4 & 1\end{bmatrix}$, ou bien $\begin{vmatrix}3 & -2\\4 & 1\end{vmatrix}$ est $3\times 1-(-2\times 4) = 3-(-8) = 3+8 = 11$.

Revenons à nos systèmes d'équations. On considère $\begin{cases}a_1x_1+a_2x_2 = k_1\\b_1x_1+b_2x_2 = k_2\end{cases}$ ; $AX = K$.

On notera $A_i$ la matrice $A$ des coefficients dans laquelle on a remplacé la *ième* colonne par la matrice des constantes. La résolution du système par la méthode de Cramer donne :

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{\det\begin{bmatrix}k_1 & a_2\\k_1 & b_2\end{bmatrix}}{\det\begin{bmatrix}a_1 & a_2\\b_1 & b_2\end{bmatrix}},$$

$$x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{\det\begin{bmatrix}a_1 & k_1\\b_1 & k_2\end{bmatrix}}{\det\begin{bmatrix}a_1 & a_2\\b_1 & b_2\end{bmatrix}}.$$

**Exemple 10 :**

Avec la méthode de Cramer, résoudre ; $\begin{cases}3x-2y = 4\\5x+7y = -2\end{cases}$, $A = \begin{bmatrix}3 & -2\\5 & 7\end{bmatrix}$, $K = \begin{bmatrix}4\\-2\end{bmatrix}$, ça donne $A_1 = \begin{bmatrix}4 & -2\\-2 & 7\end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix}3 & 4\\5 & -2\end{bmatrix}$

$$\Longrightarrow x_1 = \frac{\det\begin{bmatrix}4 & -2\\-2 & 7\end{bmatrix}}{\det\begin{bmatrix}3 & -2\\5 & 7\end{bmatrix}} = \frac{28-4}{21-(-10)} = \frac{24}{31},$$

$$x_2 = \frac{\det\begin{bmatrix}3 & 4\\5 & -2\end{bmatrix}}{\det\begin{bmatrix}3 & -2\\5 & 7\end{bmatrix}} = \frac{-6-20}{21-(-10)} = \frac{-26}{31}$$

### Application aux systèmes d'équations linéaires :

**Formulation matricielle**

Pour exprimer le système $\begin{cases}a_1x_1+a_2x_2 = k_1\\b_1x_1+b_2x_2 = k_2\end{cases}$ sous forme matricielle, on écrit $A.X = K$ :

$\begin{bmatrix}a_1 & a_2\\b_1 & b_2\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}k_1\\k_2\end{bmatrix}$ ; où $A = \begin{bmatrix}a_1 & a_2\\b_1 & b_2\end{bmatrix}$ est la matrice des coefficients. $X = \begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$ est la matrice des variables et $K = \begin{bmatrix}k_1\\k_2\end{bmatrix}$ est la matrice des constantes.

Dans le cas de $X$ et de $K$, qui n'ont qu'une seule colonne on parle indifféremment de matrice ou de vecteur.

La matrice $B = \begin{bmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\b_1 & b_2 & b_3\\c_1 & c_2 & c_3\end{bmatrix} = \begin{pmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\b_1 & b_2 & b_3\\c_1 & c_2 & c_3\end{pmatrix}$ est une matrice 3 × 3.

Pour exprimer le système $\begin{cases}a_1y_1+a_2y_2+a_3y_3 = h_1\\b_1y_1+b_2y_2+b_3y_3 = h_2\\c_1y_1+c_2y_2+c_3y_3 = h_3\end{cases}$ sous forme matricielle, on écrit $B.Y = H$ :

$\begin{bmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\b_1 & b_2 & b_3\\c_1 & c_2 & c_3\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}h_1\\h_2\\h_3\end{bmatrix}$ ; où $B = \begin{bmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\b_1 & b_2 & b_3\\c_1 & c_2 & c_3\end{bmatrix}$ est la matrice des coefficients. $Y = \begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}$ est la matrice (ou le vecteur) des variables et $H = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix}$ est la matrice (ou le vecteur) des constantes.

**Méthode de résolution par Pivot de Gauss :**

Il est important de pouvoir exprimer un système d'équations sous forme matricielle pour plusieurs raisons, notamment pour présenter une méthode de résolution **appelée Résolution par Pivot de Gauss**.

**Exemple 11 :**

Soit le système ; $\begin{cases} u - 4v + 2w = -7 \\ -u + 5v - 3w = 6 \\ 2u - v + w = 4 \end{cases}$. Sa traduction sous forme matricielle sera :

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -1 & 5 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

**Réponse :**

Ecrivons la matrice $\begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -1 & 5 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ et le vecteur $\begin{bmatrix} -7 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix}$ cote à cote puis faisons des opérations élémentaires pour transformer une matrice en une matrice triangulaire supérieure équivalente :

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -1 & 5 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix} \Longrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 7 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7 \\ -1 \\ 18 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L'_2 = L_2 + L_1 \\ L'_3 = L_3 - 2L_1 \end{matrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7 \\ -1 \\ 25 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L'_2 \\ L'_3 - 7L'_2 \end{matrix}$$

On resous ensuite le système suivant :

$$\begin{cases} u - 4v + 2w = -7 \Longrightarrow u = 4v - 2w - 7 = \frac{3}{2} \\ v - w = -1 \Longrightarrow v = -1 + w = \frac{21}{4} \\ 4w = 25 \Longrightarrow w = \frac{25}{4} \end{cases}$$

**Remarque 3 :**

Il faut être prudent lorsqu'on traduit un système d'équations sous forme matricielle. On doit bien respecter l'ordre d'apparition des coefficients et des variables, sauf dans le cas du Pivot de Gauss, dont nous admettons qu'il transforme un système en un système équivalent.

**Exemple 11 :**

Par cette méthode on inverse sans calculer le déterminant de la matrice $\begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -1 & 5 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

On commence par écrire la matrice unité à droite de cette matrice en constituant une seule matrice à 6 colonnes

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -1 & 5 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 7 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L'_2 = L_2 + L_1 \\ L'_3 = L_3 - 2L_1 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -9 & -7 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L'_2 = L_2 + L_1 \\ L''_3 = L'_3 - 7L'_2 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -9 & -7 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} L'_1 = 4L'_2 \\ L'_2 \\ L''_3 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -\frac{9}{4} & -\frac{7}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{matrix} L'_1 \\ L''_2 \\ L'''_3 = \frac{L''_3}{4} \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{5}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{9}{4} & -\frac{7}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{matrix} L''_1 = L'_1 + 2L'''_3 \\ L'''_2 = L''_2 + L'''_3 \\ L'''_3 = \frac{L''_3}{4} \end{matrix}$$

On obtient ainsi $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{5}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{9}{4} & -\frac{7}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$ la matrice inverse de $\begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -1 & 5 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. on a donc :

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{5}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{9}{4} & -\frac{7}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{21}{4} \\ \frac{25}{4} \end{bmatrix};$$

d'où : $u = \frac{3}{2}$ ; $v = \frac{21}{4}$ *et* $w = \frac{25}{4}$.

## A. Applications :

### Equations bicarrées :

**Exemple 1 :**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^4 + x^2 - 12 = 0$.

**Réponse :**

Soit $x^2 = X$, on a : $x^4 + x^2 - 12 = 0$

$\Longrightarrow X^2 + X - 12 = 0 \Longleftrightarrow (X + 4)(X - 3) = 0$

$\Longleftrightarrow (x^2 + 4)(x^2 - 3) = 0$.

- L'équation $x^2 + 4 = 0$ n'a pas de solution,
- L'équation $x^2 - 3 = 0$ a pour solution : $\sqrt{3}$ et $-\sqrt{3}$.
- L'équation $x^4 + x^2 - 12 = 0$ a donc deux solutions $\sqrt{3}$ et $-\sqrt{3}$.

**Exemple 2 :**

$m$ est un nombre réel donné, on considère l'équation d'inconnue $x$ : $(E_m)$ : $x^4 - 3mx^2 + m^2 - 1 = 0$.

**a)** Résoudre $(E)$ pour chacune des valeurs suivantes de $m$ : 0 ; 1 ; 3.
**b)** Déterminer les valeurs de $m$ pour lesquelles cette équation a
- Quatre solutions ;
- Trois solutions distinctes ;
- Deux solutions distinctes

**Réponse :**

**a)** Si $m = 0$ ; on a$(E_0) : x^4 - 1 = 0 \Longrightarrow$
$(x^2+1)(x^2-1) = 0 \Rightarrow (x^2+1)(x-1)(x+1) = 0.$
Donc l'équation$(E_0)$ a deux solutions : $-1$et 1.
- Si $m = 1$ on a : $(E_1) : x^4 - 3x^2 = 0 \Longrightarrow$
$x^2(x^2-3) = 0 \Longrightarrow x^2\left(x-\sqrt{3}\right)\left(x+\sqrt{3}\right) = 0.$
Donc l'équation$(E_1)$ a trois solutions : -$\sqrt{3}$; 0 et $\sqrt{3}$.
- Si $m = 3$ on a : $(E_3) : x^4 - 9x^2 + 8 = 0$
$\Rightarrow (x^2-8)(x^2-1) = 0 \Rightarrow$
$(x-1)(x+1)\left(x-2\sqrt{2}\right)\left(x+2\sqrt{2}\right) = 0.$
Donc l'équation $(E_3)$ a quatre solutions :
-2$\sqrt{2}$ ; -1 ; 1 et 2$\sqrt{2}$.

**b)** On pose $X = x^2$, on obtient l'équation$(E_m)$:
$X^2 - 3mX + m^2 - 1 = 0$ ; ( 2 )
Dans l'équation (2):
$\Delta_{E_m} = 5m^2 + 4 > 0$ ; $p = m^2 - 1$ $et$ $s = 3m.$
- On remarque que pour tout nombre réel $m$ ; l'équation (2) admet deux solutions distinctes.
- L'équation (1) a quatre solutions distinctes si et seulement si l'équation (2) admet deux solutions distinctes et positives. Cette conditions est réalisée si et seulement si $\Delta > 0$ ; $s > 0$ et $p > 0$ ; c'est-à- dire $m \in [1; +\infty[$.
- L'équation (1) a trois solutions distinctes si et seulement si, l'équation (2) a deux solutions distinctes et positives dont l'une est nulle, cette condition est réalisée si et seulement si $\Delta > 0$, $p = 0$ et $s > 0$ c'est-à-dire $m = 1$.
- L'équation (1) a deux solutions distinctes si et seulement si, l'équation (2) a deux solutions distinctes non nulles et de signes opposées, cette condition est réalisée si, et seulement si $\Delta > 0$ ; $p < 0$ c'est-à-dire $m \in ]-1; 1[$.

**Inéquations bicarrées**

**Exemple 3 :**
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $4x^4 - 5x^2 + 1 > 0$ (1)

**Réponse :**
Soit$P$ le polynôme défini par $P(x) = 4x^4 - 5x^2 + 1$ ; on pose $X = x^2$.
On a : $4x^4 - 5x^2 + 1 = 4X^2 - 5X + 1$; le polynôme $4X^2 - 5X + 1$ a pour racines 1 et $\frac{1}{4}$. Donc : $4x^4 - 5x^2 + 1 = 4X^2 - 5X + 1 = (4X - 1)(X - 1)$
$= (4x^2 - 1)(x^2 - 1)$
$= (2x-1)(2x+1)(x-1)(x+1).$
On en déduit le tableau suivant :

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $-\frac{1}{2}$ | | $\frac{1}{2}$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (2x-1)(2x+1) | | + | \| | + | 0 | − | 0 | + | \| | + | |
| (x-1)(x+1) | | + | 0 | − | \| | − | \| | − | 0 | + | |
| P(x) | | + | 0 | − | 0 | + | 0 | − | 0 | + | |

Donc l'ensemble des solutions de l'inéquation (1) est
$S = ]-\infty ; -1[ \cup ]-\frac{1}{2} ; \frac{1}{2} [ \cup ]1 ; +\infty[.$

**Exemple 4 :**
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $x^4 \geq x^2 + 12$ ...(2)

**Réponse :**
On a : $x^4 \geq x^2 + 12 \Rightarrow x^4 - x^2 - 12 \geq 0$ ; on pose $X = x^2$. On a : $x^4 - x^2 - 12 = X^2 - X - 12$ ;
le polynôme$X^2 - X - 12$ a pour racine $-3$et 4, donc
$X^2 - X - 12 = (X+3)(X-4) = (x^2+3)(x^2-4)$
$= (x^2+3)(x-2)(x+2).$
Or, $\forall x \in \mathbb{R}$ ; $x^2 + 3 > 0$ ; donc l'ensemble de solutions de l'inéquation (2) est :
$S = ]-\infty; -2[ \cup [2 ; +\infty[.$

**Autres équations et inéquations**

**Exemple 5 :**
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :
$x^4 - x^3 - 13x^2 + x + 12 = 0$......(1)

**Réponse :**
- Soit $P$ le polynôme défini par :
$P(x) = x^4 - x^3 - 13x^2 + x + 12$ ; $P(1) = 0.$
Donc il existe un polynôme $Q(x)$ tel que
$P(x) = (x-1)Q(x)$ ; ....$P(-1) = 0$
Donc il existe un polynôme $R(x)$ tel que
$Q(x) = (x+1)R(x)$ ; par la suite on a :
$\forall x \in \mathbb{R}$ ; $P(x) = (x-1)Q(x) = (x-1)(x+1)R(x)$
$= (x^2-1)R(x)$
- Pour déterminer le polynôme $R$ on peut effectuer une division euclidienne de $P(x)$ par $(x^2 - 1)$

$$\begin{array}{r|l} x^4 - x^3 - 13x^2 + x + 12 & x^2 - 1 \\ \cline{2-2} x^4 - x^2 \quad\quad\quad\quad & x^2 - x - 12 \\ \hline -x^3 - 12x^2 \quad\quad & \\ -x^3 \quad + x \quad & \\ \hline -12x^2 + 12 & \\ -12x^2 + 12 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

On obtient :
$P(x) = (x^2-1)(x^2-x-12)$
$= (x-1)(x+1)(x-4)(x+3)$
Donc l'ensemble de solutions de l'équation (1) est
$S = \{-1 \; ; \; 1 \; ; \; -3 \; ; \; 4\}$

**Les équations de degrés supérieurs à 2**

**a) Equation de degré 3**

**Exemple 6 :**
Soit l'équation ;$(E)$ : $x^3 + 2x^2 - 2x - 1 = 0$
**a)** Donner une solution évidente de l'équation $(E)$ ;
**b)**Ecrire$(E)$sous la forme $(x-1)(ax^2 + bx + c) = 0$
**c)** Donner les deux autres solutions de $(E)$.



Math 6AS.indd 23 26/07/2024 10:40:39

**Réponse :**

**a)** 1 est solution évidente de l'équation $(E)$, en effet ;

$(1)^3+2(1)^2-2(1)-1=1+2-2-1=3-3=0$

**b)** Ecrivons $(E)$

$$(x-1)(ax^2+bx+c)$$
$$=ax^3+bx^2+cx-ax^2-bx-c$$
$$\Rightarrow \begin{cases} ax^3=x^3 \Rightarrow \boldsymbol{a=1} \\ (b-a)x^2=2x^2 \Rightarrow b-a=2 \Rightarrow \boldsymbol{b=3} \\ (c-b)x=-2x \Rightarrow c-b=-2 \\ -c=-1 \Rightarrow \boldsymbol{c=1} \end{cases}$$
$$\boldsymbol{x^3+2x^2-2x-1=(x-1)\left(x^2+3x+1\right)=0}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x-1=0 \Rightarrow \boldsymbol{x=1} \\ ou \\ x^2+3x+1=0 \end{cases}$$
$$x^2+3x+1=0 \Rightarrow \Delta=9-4=5$$
$$\Rightarrow \sqrt{\Delta}=\sqrt{5} \Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{x_1}=\dfrac{\boldsymbol{-3-\sqrt{5}}}{\boldsymbol{2}} \\ \boldsymbol{x_2}=\dfrac{\boldsymbol{-3+\sqrt{5}}}{\boldsymbol{2}} \end{cases}$$
$$\boldsymbol{S}=\left\{\frac{\boldsymbol{-3-\sqrt{5}}}{\boldsymbol{2}};\frac{\boldsymbol{-3+\sqrt{5}}}{\boldsymbol{2}};\boldsymbol{1}\right\}$$

**Exercice 1 :**

Soit l'équation ;$E:\ x^3-6x^2+11x-6=0$

**1°)** En admettant que cette équation admet trois solutions distinctes $p,\ q et r$ ;

Sans résoudre l'équation $E$, calculer ;

$$p+q+r\ ;\ p\times q\times r \quad et \quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}.$$

**2°)** Résoudre l'équation $E$ et vérifier vos résultats obtenus.

**Solution :**

**1°)** $x^3-6x^2+11x-6=(x-p)(x-q)(x-r)$
$$=(x-p)(x^2-(q+r)x+qr)$$
$$=x^3-(q+r)x^2+qrx-px^2-p(q+r)x-pqr$$
$$=x^3-\underbrace{(p+q+r)}_{S}x^2-(pq+pr+qr)x-\underbrace{pqr}_{P}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} p+q+r=6 \\ pqr=6 \\ \dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}+\dfrac{1}{r}=\dfrac{11}{6} \end{cases}$$

**2°)** Résolution
$$E:\ x^3-6x^2+11x-6=0$$

$x_0=1$est une solution évidente, en effet :
$$(1)^3-6(1)^2+11(1)-6=12-12=0$$
$$\Rightarrow \frac{x^3-6x^2+11x-6}{x-1}$$
$$=\frac{x^3-x^2-5x^2+5x+6x-6}{x-1}$$
$$=\frac{x^2(x-1)-5x(x-1)+6(x-1)}{x-1}$$
$$=\frac{(x-1)(x^2-5x+6)}{x-1}$$
$$\Rightarrow x^3-6x^2+11x-6=(x-1)(x^2-5x+6)$$
$$x^3-6x^2+11x-6=0 \Rightarrow (x-1)(x^2-5x+6)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-1=0 \Rightarrow x=1 \\ ou \\ x^2-5x+6=0 \Rightarrow \end{cases}$$
$$\Delta=25-24=1 \Rightarrow \begin{cases} x_1=\dfrac{5-1}{2}=\dfrac{4}{2}=2 \\ x_2=\dfrac{5+1}{2}=\dfrac{6}{2}=3 \end{cases}=\{\boldsymbol{1};\boldsymbol{2};\boldsymbol{3}\}$$

**Vérification**

$$\boldsymbol{1+2+3=6,\qquad 1\times 2\times 3=6,\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{11}{6}}$$

**b) Equation de degré 4**

- **Equation bicarrée :**

**Mise en pratique**

**Exercice 2 :** Soit l'équation ; $x^4+8x^2-9=0$

**Solution :**

Procédons à un changement de variable en posant ; $x^2=X \Rightarrow X^2+8X-9=0$
$$\Delta=64+36=100 \Rightarrow \Delta>0 \Rightarrow \sqrt{\Delta}=10,$$
$$\begin{cases} X_1=\dfrac{-8-10}{2}=\dfrac{-18}{2}=-9 \\ X_2=\dfrac{-8+10}{2}=\dfrac{2}{2}=1 \end{cases}$$
$$x^2=X \Rightarrow \begin{cases} X_1=x_1^2=-9\ (impossible) \\ X_2=x_2^2=1 \Rightarrow x_2=\pm 1 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \boldsymbol{S}=\{\boldsymbol{-1},\boldsymbol{1}\}.$$

- **Les équations à coefficients symétriques :**

**Exercice 3 :**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation à coefficients symétriques suivante : $x^4-5x^3+8x^2-5x+1=0$

**Solution :**

On a ; $x=0$ n'est pas une solution, donc
$$x^4-5x^3+8x^2-5x+1=0$$
$$\Rightarrow x^2\left(x^2-5x+8-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}\right)=0$$
$$\Rightarrow x^2-5x+8-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}=0$$
$$\Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}-5\left(x+\frac{1}{x}\right)+8=0$$
$$\Rightarrow \left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2-5\left(x+\frac{1}{x}\right)+8=0$$
$$\Rightarrow \left(x+\frac{1}{x}\right)^2-5\left(x+\frac{1}{x}\right)+6=0$$

Changeons de variable en posant ;
$$\left(x+\frac{1}{x}\right)=X \Rightarrow X^2-5X+6=0,$$
$$\Delta=25-24=1 \Rightarrow \begin{cases} X_1=\dfrac{5+1}{2}=\dfrac{6}{2}=3 \\ X_2=\dfrac{5-1}{2}=\dfrac{4}{2}=2 \end{cases}$$
$$X=x+\frac{1}{x}=3 \Rightarrow \boldsymbol{x^2-3x+1=0}\ \boxed{1}$$
$$X=x+\frac{1}{x}=2 \Rightarrow \boldsymbol{x^2-2x+1=0}\ \boxed{2}$$

$$\boxed{1} \Rightarrow \Delta = 9-4=5 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \\ x_2 = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

$$\boxed{2} \Rightarrow \Delta = 4-4=0 \Rightarrow x_3 = 1 \ (\textit{Solution double})$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{S} = \left\{\frac{\mathbf{3}-\sqrt{\mathbf{5}}}{\mathbf{2}}; \mathbf{1}; \frac{\mathbf{3}+\sqrt{\mathbf{5}}}{\mathbf{2}}\right\}$$

## Exercice 4 :

On considère l'équation $(E)$ :

$x^4 - 2x^3 - 6x^2 - 2x + 1 = 0$

**1°)** Vérifier que 0 n'est pas solution de $(E)$.

**2°)** Montrer que si $\alpha$ est solution de $(E)$, alors $\frac{1}{\alpha}$ est aussi solution de $(E)$.

**3°)** Montrer que l'équation $(E)$ est équivalente à :

$$E' : x^2 - 2x - 6 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$

**4°)** Calculer $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2$.

**5°)** En posant ; $X = x + \frac{1}{x}$ ;

Montrer que l'équation $(E')$ est équivalente à l'équation ; $(E'') : X^2 - 2X - 8 = 0$.

**6°)** Résoudre l'équation $(E'')$.

**7°)** En déduire les solutions de l'équation $(E)$.

(*Vérifier le résultat de la question 2*).

## Solution :

**1°)** $(0)^4 - 2(0)^3 - 6(0)^2 - 2(0) + 1 = 1 \neq 0$

**2°)** $\alpha$ est solution $E$

$$\Rightarrow \alpha \neq 0 \Rightarrow \alpha^4 - 2\alpha^3 - 6\alpha^2 - 2\alpha + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \alpha^2\left(\alpha^2 - 2\alpha - 6 - \frac{2}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2}\right) = 0$$

$$(\alpha^2 \neq 0) \Rightarrow \alpha^2 - 2\alpha - 6 - \frac{2}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2}$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2} - \frac{2}{\left(\frac{1}{\alpha}\right)} - 6 - 2\left(\frac{1}{\alpha}\right) + \left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\alpha} \text{est solution de l'équation E}$$

**3°)** $(E)$ : $x^4 - 2x^3 - 6x^2 - 2x + 1 = 0$ est équivalente à l'équation ;

$$E' : \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} - 6 - 2x + x^2 = 0$$

**4°)** $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2.x.\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}$

**5°)** l'équation $E'$ peut alors s'écrire ;$E'$ : $\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} - 6 - 2x + x^2 = 0$

$$E' : x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} - 2x - \frac{2}{x} - 8 = 0$$

$$E' : \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2\left(x + \frac{1}{x}\right) - 8 = 0$$

En posant ; $X = x + \frac{1}{x}$. On a ; $E''$ : $X^2 - 2X - 8 = 0$

**6°)** $E''$ : $X^2 - 2X - 8 = 0 \Rightarrow \Delta = 4 + 32 = 36$

$$\Rightarrow \sqrt{\Delta} = 6 \Rightarrow \begin{cases} X_1 = \dfrac{2-6}{2} = \dfrac{-4}{2} = -2 \\ X_2 = \dfrac{2+6}{2} = \dfrac{8}{2} = 4 \end{cases}$$

$$7°) \Rightarrow \begin{cases} X_1 = x + \dfrac{1}{x} = -2 \Rightarrow \mathbf{x^2 + 2x + 1 = 0}\ \boxed{1} \\ X_2 = x + \dfrac{1}{x} = 4 \Rightarrow \mathbf{x^2 - 4x + 1 = 0}\ \boxed{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta_1 = 4-4=0 \Rightarrow x_1 = \dfrac{-2}{2} = -1 \\ \Delta_2 = 16-4=12 \begin{cases} x_2 = \dfrac{4+2\sqrt{3}}{2} = 2+\sqrt{3} \\ x_3 = \dfrac{4-2\sqrt{3}}{2} = 2-\sqrt{3} \end{cases} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{S} = \{\mathbf{2}-\sqrt{\mathbf{3}}; -\mathbf{1}; \mathbf{2}+\sqrt{\mathbf{3}}\}$$

**Verification :**

**Les solutions $\alpha$**

☒ $(2-\sqrt{3})^4 - 2(2-\sqrt{3})^3 - 6(2-\sqrt{3})^2 - 2(2-\sqrt{3}) + 1 =$

$(7-4\sqrt{3})(7-4\sqrt{3}) - 2(7-4\sqrt{3})(2-\sqrt{3}) - 6(7-4\sqrt{3}) - 2(2-\sqrt{3}) + \mathbf{1} =$

$97 - 56\sqrt{3} - 2(26-15\sqrt{3}) - 42 + 24\sqrt{3} - 4 + 2\sqrt{3} + 1 =$

$97 - 56\sqrt{3} - 52 + 30\sqrt{3} - 42 + 24\sqrt{3} - 4 + 2\sqrt{3} + 1 =$

$97 - 52 - 42 - 4 - 56\sqrt{3} + 30\sqrt{3} + 24\sqrt{3} + 2\sqrt{3} + 1 = 0.$

☒ $(2+\sqrt{3})^4 - 2(2+\sqrt{3})^3 - 6(2+\sqrt{3})^2 - 2(2+\sqrt{3}) + 1 =$

$(7+4\sqrt{3})(7+4\sqrt{3}) - 2(7+4\sqrt{3})(2+\sqrt{3}) - 6(7+4\sqrt{3}) - 2(2+\sqrt{3}) + \mathbf{1} =$

$97 + 56\sqrt{3} - 2(26+15\sqrt{3}) - 42 - 24\sqrt{3} - 4 - 2\sqrt{3} + 1 =$

$97 + 56\sqrt{3} - 52 - 30\sqrt{3} - 42 - 24\sqrt{3} - 4 - 2\sqrt{3} + 1 =$

$97 - 52 - 42 - 4 + 56\sqrt{3} - 30\sqrt{3} - 24\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 1 = 0.$

☒ $(-1)^4 - 2(-1)^3 - 6(-1)^2 - 2(-1) + 1 = 1 + 2 - 6 + 2 + 1 = 6 - 6 = 0.$

**Les inverses des solutions**

☒ $\dfrac{\mathbf{1}}{-\mathbf{1}} = -\mathbf{1}$

**Donc, l'inverse de $-1 = -1$**

☒ $$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}-\sqrt{\mathbf{3}}} = \frac{\mathbf{1}}{(\mathbf{2}-\sqrt{\mathbf{3}})} \times \frac{\mathbf{2}+\sqrt{\mathbf{3}}}{(\mathbf{2}+\sqrt{\mathbf{3}})} = \frac{\mathbf{2}+\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{4}-\mathbf{3}} = \frac{\mathbf{2}+\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{1}} = \mathbf{2}+\sqrt{\mathbf{3}}$$

**Donc, l'inverse de $2-\sqrt{3} = 2+\sqrt{3}$**

☒ Si **l'inverse de $2-\sqrt{3} = 2+\sqrt{3}$**

Alors, **l'inverse de $2+\sqrt{3} = 2-\sqrt{3}$**

Donc les inverses des solutions nous ramènent aux mêmes solutions déjà existantes.

**Exemple 7 :**

Soit le polynôme $P(x) = x^4 + x^3 - 5x + x - 6$

**a)** Vérifier que $-3$ et $2$ sont racines de $P$ et en déduire une factorisation du polynôme $P(x)$.

**b)** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $x^4 + x^3 - 5x + x - 6 < 0$ ……..(2)

**Réponse :**

●$P(-3) = 81 - 27 - 45 - 3 - 6 = 0$, donc $-3$ est racine de $P(x)$

●$P(2) = 16 + 8 - 20 + 2 - 6 = 0$, donc 2 est racine de $P(x)$

On en déduit qu'il existe un polynôme $Q(x)$ tel que $P(x) = (x-2)(x-3)Q(x)$.

Pour déterminer ce polynôme $Q$, on peut utiliser la méthode de cœfficients indéterminés.

$Q$est un polynôme du $2nd$ degré, on pose $Q(x) = ax^2 + bx + c$ ; on a $\forall x \in \mathbb{R}$ ;

$P(x) = (x^2 + x - 6)(ax^2 + bx + c\ )$.

Donc, $(x^2 + x - 6)(ax^2 + bx + c) = x^4 + x^3 - 5x + x - 6$ ;

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + ax^3 + bx^2 + cx - 6ax^2 - 6bx - 6c = x^4 + x^3 - 5x + x - 6$$

$$ax^4 + (b+a)x^3 + (c+b-6a)x^2 + (c-6b)x - 6c = x^4 + x^3 - 5x + x - 6$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b + a = 1 \Rightarrow b = 0 \\ c + b - 6a = -5 \Rightarrow c = 1 \\ c - 6b = 1 \end{cases} \Rightarrow P(x) = (x^2 + x - 6)(x^2 + 1)$$

On a pour tout réel $x$ ; $x^2 + 1 > 0 \Rightarrow P(x)$ est du signe de $x^2 + x - 6$ ; donc l'ensemble des solutions de l'inéquation ( 2) est $S = ]-3;\ 2[$

**Equations irrationnelles**

On appelle équation irrationnelle toute équation où l'inconnue figure sous un radical.

**Exemple 8 :**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sqrt{2-x} = x + 10$…(1)

**Réponse :**

Nous allons proposer deux méthodes pour résoudre une telle équation.

● **Résolution par implication** :

Pour tous nombres réels $a$ et $b$ on a

$a = b \Rightarrow a^2 = b^2$ ; on peut écrire :

$$\sqrt{2-x} = x + 10 \Leftrightarrow 2 - x = (x+10)^2$$
$$\Leftrightarrow x^2 + 21x + 98 = 0 ;$$

$(x+7)(x+14) = 0$ ;l'équation $(x+7)(x+14) = 0$ a deux solutions $-7$ et $-14$.

Pour terminer la résolution on doit vérifier si, $-7$ et 14 sont solutions de l'équation (1) :

$\sqrt{2-(-7)} = \mathbf{-7 + 10}$ $-7$ est solution ;

$\sqrt{2-(-14)} = -14 + \mathbf{10} - 14$ n'est pas solution

Donc ; l'équation (1) a une solution unique $x = -7$.

● **Résolution par équivalence :** Pour tous nombres réels $a$ et $b$ on a : $\sqrt{a} = b \Leftrightarrow \begin{cases} a = b^2 \\ b \geq 0 \end{cases}$; donc :

$$\sqrt{2-x} = x + 10 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 21x + 98 = 0 = b^2 \\ x \geq -10 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+7)(x+14) = 0 \\ x \geq -10 \end{cases} \Leftrightarrow x = -7$$

Donc l'équation (1) a pour solution $x = -7$.

**Exemple 9 :**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$\sqrt{-x^2 + 5x + 9} = \sqrt{x-3}$ …….(2)

**Réponse :**

Pour tout nombres réels :

$$\sqrt{a} = \sqrt{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ a \geq 0\ et b\ \geq 0 \end{cases}$$

On peut écrire :$\sqrt{-x^2 + 5x + 9} = \sqrt{x-3} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} -x^2 + 5x + 9 = x - 3 \\ x - 3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 + 4x + 12 = 0 \\ x - 3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$(x = 6\ ou\ x = -2)$,

*(la solution $-2$ étant rejetée car, $-2 - 3 = -5 < 0$).*

Donc, l'équation (2) a une seule solution : $x = 6$.

Pour résoudre une équation irrationnelle $(E)$ on peut utiliser la méthode suivante :

● éliminer les radicaux par élévation au carré

● résoudre l'équation $(E')$ sans radical ainsi obtenue ;

● déterminer parmi les solutions de $(E')$ celles qui sont solutions de$(E)$.

**Inéquations irrationnelles**

Pour résoudre une telle inéquation, il est difficile de procéder par implication car les ensembles de solutions contiennent en général une infinité d'éléments ; on ne peut donc pas vérifier si chacun d'eux est solution de l'inéquation initiale.

**Exemple 10 :**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $x + \sqrt{x-1} \geq 3$...(1)

**Réponse :**

● Contraintes sur l'inconnue : $x \in ]1\ ;\ +\infty[$

● On a $\forall\ x \in ]1\ ;\ +\infty[ : x + \sqrt{x-1} \geq 3 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} \geq 3 - x$, or $\forall\ x \in ]1\ ;\ +\infty[\ ;\ \sqrt{x-1} \geq 0$ ; donc :

Si, 3 – x $\leq 0$ ; l'inéquation est vérifiée, et l'ensemble de solutions de (1) dans ce premier cas est $S_1 = [3;\ +\infty[$.

Si,$3 - x > 0$ on a : $\sqrt{x-1} \geq 3 - x \Leftrightarrow x - 1 \geq (3 - x)^2 \Leftrightarrow x^2 - 7x + 10\ \leq 0$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x-5) \leq 0 \Leftrightarrow x \in [2;\ 5].$$

L'ensemble des solutions de (1) dans ce deuxième cas est $S_2 = [2\ ;\ 5]$.

Donc ; l'ensemble des solutions de l'inéquation (1) est $S = S_1 \cup S_2 = [3\ ;+\infty[ \cup [2;\ 5] = [2\ ;+\infty[$.

**Exemple 11 :**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation :$\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2} \geq 3$. (2)

**Réponse :**

Contraintes sur l'inconnue : $x \geq -1$ et $x \geq -2$ ; donc $x \in [-1; +\infty[$,

On a $\forall x \in [-1; +\infty[ : \sqrt{x+1} + \sqrt{x+2} \geq 3 \Leftrightarrow 2x + 3 + 2\sqrt{(x+1)(x+2)} \geq 9 \Leftrightarrow \sqrt{(x+1)(x+2)} \geq -x + 3$. Or $\forall x \in [-1 ; +\infty[ ; \sqrt{(x+1)(x+2)} \geq 0$ ; donc, si $-x + 3 \leq 0$; l'inéquation est vérifiée, dans ce cas, tout nombre réel de l'ensemble $[3 ; +\infty[$ est solution de (2).

Si ; $-x + 3 > 0$, on a ; $\sqrt{(x+1)(x+2)} \geq -x + 3$.

$$\Leftrightarrow (x+1)(x+2) \geq (-x + 3)^2 \Leftrightarrow 9x - 7 \geq 0$$
$$\Leftrightarrow x \geq \frac{7}{9}$$

Dans ce cas, tout nombre réel de l'ensemble $[\frac{7}{9} ; 3[$ est solution de (2), donc, l'ensemble de solutions de l'inéquation (2) est donc $[\frac{7}{9} ; +\infty[$

**Système homogène :**

**Définition :**

Soit l'équation ; $ax^2 + bx + c = 0$, tels que $a \neq 0$ et $\Delta > 0$, on a ;

$$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{x^2 - \mathcal{S}x + \mathcal{P} = 0}$$

Le système linéaire de deux équations à deux inconnues $\begin{cases} x + y = \mathcal{S} \\ xy = \mathcal{P} \end{cases}$ est appelé système homogène et admet comme solution, les Solutions de l'équation $x^2 - \mathcal{S}x + \mathcal{P} = 0$.

**Exercice 5 :**

Déterminer deux nombres réels dont la somme est 7 et le produit est 6.

**Solution :**

Soit $x_1$ et $x_2$ les deux nombres recherchés, on a ;

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 7 \\ x_1x_2 = 6 \end{cases}$$

La solution de ce système homogène, c'est les solutions de l'équation $x^2 - 7x + 6 = 0$

On a ; $a + b + c = 1 - 7 + 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = \frac{6}{1} = 6 \end{cases}$

**Exercice 6 :**

Trouver deux nombres $x$ et $y$ ayant pour somme 25 et pour produit 144.

**Solution :**

Ces deux nombres sont la solution du système homogène ; $x + y = 25$ *et* $xy = 144$

Qui sont les solutions de l'équation ;

$$z^2 - 25z + 144 = 0 \Rightarrow \Delta = 625 - 576 = 49$$

$$\sqrt{\Delta} = 7 \Rightarrow x = \frac{25 - 7}{2} = 9 \text{ et } y = \frac{25 + 7}{2} = 16$$

**Exercice 7 :**

L'équation $2x^2 + 3x - 5 = 0$ admet-elle deux solutions ?

**a)** Si oui sans calculer ces solutions $x_1$ et $x_2$, déterminer leur somme $\mathcal{S}$ et leur produit $\mathcal{P}$.

**b)** En déduire $\frac{1}{x_1x_2}$; $x_1{}^2 + x_2{}^2$; $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$

**Solution :**

Je calcule le discriminant ; $\Delta = 3^2 - 4(2 \times -5)$

**1°)** $\Delta = 49 \Rightarrow \Delta > 0$, il y a donc deux solutions

$$\mathcal{S} = -\frac{b}{a} = \frac{-3}{2}, \quad \mathcal{P} = \frac{c}{a} = \frac{-5}{2}$$

**2°)** $\frac{1}{x_1x_2} = \frac{1}{\mathcal{P}} = \frac{-2}{5}$, $(x_1 + x_2)^2 = x_1{}^2 + x_2{}^2 + 2x_1x_2$

$$\Rightarrow x_1{}^2 + x_2{}^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$$

$$\Rightarrow x_1{}^2 + x_2{}^2 = \mathcal{S}^2 - 2\mathcal{P} = \left(-\frac{3}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{-5}{2}\right)$$

$$\Rightarrow x_1{}^2 + x_2{}^2 = \frac{9}{4} + \frac{10}{2} = \frac{29}{4},$$

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1x_2} = \frac{\mathcal{S}}{\mathcal{P}} = \frac{\frac{-3}{2}}{\frac{-5}{2}} = \frac{3}{5}$$

**Equations du second degré avec paramètre réel**

**Exercice 8 :**

Soit l'équation paramétrique :

$(E_m) : 2x^2 - (5 + m)x + 7 + 3m = 0$

Discuter suivant les valeurs du paramètre réel $m$, les solutions de l'équation $(E_m)$.

**Solution :**

$\Delta_{E_m} = (5 + m)^2 - 4 \times 2(7 + 3m)$

$= 25 + 10m + m^2 - 56 - 24m = -31 - 14m + m^2$

On considère l'équation du second degré en $m$ ;

$m^2 - 14m - 31 = 0$,

$$\Delta_m = (-14)^2 - 4 \times 31 = 196 + 124 = 320$$

$$\sqrt{\Delta} = 8\sqrt{5} \Rightarrow \begin{cases} m_1 = \dfrac{14 - 8\sqrt{5}}{2} = 7 - 4\sqrt{5} \\ m_2 = \dfrac{14 + 8\sqrt{5}}{2} = 7 + 4\sqrt{5} \end{cases}$$

**Conclusion**

Si $m = 7 - 4\sqrt{5}$ ou $m = 7 + 4\sqrt{5}$, alors l'équation $(E_m)$ admet une solution double (*car* $\Delta_{E_m} = 0$).

Si $m \in ]7 - 4\sqrt{5}; 7 + 4\sqrt{5}[$, alors l'équation $(E_m)$ n'admet aucune solution (*car* $\Delta_{E_m} < 0$).

Si $m \in ]-\infty; 7 - 4\sqrt{5}] \cup [7 + 4\sqrt{5}; +\infty[$, alors l'équation $(E_m)$ admet deux solutions distinctes (*car* $\Delta_{E_m} > 0$).

**Exercice 9 :**

Soit l'équation paramétrique ;

$$(E_m) : (m+1)x^2 - (2m - 3)x + m - 4 = 0$$

Discuter suivant les valeurs du paramètre $m$, les solutions de l'équation $(E_m)$.

**Solution :**

$$a + b + c = m + 1 - (2m - 3) + m - 4$$
$$= m + 1 - 2m + 3 + m - 4 = 2m - 2m + 4 - 4 = 0$$

$\Rightarrow (E_m)$ a deux solutions ; $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = \frac{m-4}{m+1} \ (m \neq 0) \end{cases}$

**Vérification :**

$$\Delta_m = [-(2m - 3)]^2 - 4 \times (m + 1)(m - 4)$$

$$= 4m^2 - 12m + 9 - 4\times[m^2 - 3m - 4]$$
$$= 4m^2 - 12m + 9 - 4m^2 + 12m + 16 = 25 > 0$$

**Conclusion**

$\forall m \in \mathbb{R} \Longrightarrow (E_m)$a toujours deux solutions.

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{2m-3+5}{2(m+1)} = \dfrac{2m+2}{2m+2} = 1 \\ x_2 = \dfrac{2m-3-5}{2(m+1)} = \dfrac{2m-8}{2m+2} = \dfrac{m-4}{m+1} \end{cases}$$

**Exercice 10 :**

Résoudre l'équation paramétrique ;

$(E_m) : 2x^2 - (m-3)x + 2m - 14 = 0$

**Solution :**

$$\Delta_{E_m} = [-(m-3)]^2 - 4\times 2\times(2m-14)$$
$$= m^2 - 6m + 9 - 16m + 112 = m^2 - 22m + 121$$
$$\Delta_m = (-22)^2 - 4\times 1\times 121 = 484 - 484 = 0$$
$$\Longrightarrow m = \frac{-(-22)}{2\times 1} = 11 \Longrightarrow \Delta_{E_m} = (m-11)^2$$

**Conclusion :**

Si $m = 11$, alors l'équation $(E_m)$ admet une solution double.

Si $m \in \mathbb{R}\setminus\{11\}$, alors l'équation $(E_m)$ admet deux solutions distinctes ;

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{m-3-m+11}{4} = \dfrac{8}{4} = 2 \\ x_2 = \dfrac{m-3+m-11}{4} = \dfrac{2m-14}{4} = \dfrac{m-7}{2} \end{cases}$$

**Exercice 11 :**

Résoudre l'équation paramétrique ;

$(E_m) : (2m+3)x^2 - (m+5)x - 21m - 42 = 0$

**Solution :**

$$\Delta_{E_m} = [-(m+5)]^2 + 4(2m+3)(21m+42)$$
$$= m^2 + 10m + 25 + 168m^2 + 588m + 504$$
$$= 169m^2 + 598m + 529$$
$$\Delta_m = 598^2 - 4\times 169\times 529 = 357604 - 357604 = 0$$
$$m = \frac{-598}{338} = \frac{-299}{169} = \frac{-23}{13} \Longrightarrow \Delta_{E_m} = (13m+23)^2$$

**Conclusion**

Si $m = \dfrac{-299}{169}$, alors l'équation $(E_m)$ admet une solution double.

Si $m \in \mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{-299}{169}\right\}$, alors l'équation $E_m$ admet deux solutions distinctes ;

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{m+5-13m-23}{4m+6} = \dfrac{-12m-18}{4m+6} = -3 \\ x_2 = \dfrac{m+5+13m+23}{4m+6} = \dfrac{7m+14}{2m+3} \end{cases}$$

**Exercice 12 :**

Soit l'équation ;

$E : 8x^4 - 54x^3 + 101x^2 - 54x + 8 = 0$

**1°)** En posant $t = x + \frac{1}{x}$ ; montrer que l'on se ramène à une équation du second degré $E'$.

**2°)** Résoudre l'équation $E'$puis en déduire les solutions de l'équation $E$.

**Solution :**

$$8x^4 - 54x^3 + 101x^2 - 54x + 8 = 0$$
$$\Longrightarrow x^2\left(8x^2 - 54x + 101 - \frac{54}{x} + \frac{8}{x^2}\right) = 0$$
$$x \neq 0 \Longrightarrow 8x^2 - 54x + 101 - \frac{54}{x} + \frac{8}{x^2} = 0$$
$$\Longrightarrow 8x^2 + \frac{8}{x^2} - 54x - \frac{54}{x} + 101 = 0$$
$$\Longrightarrow 8x^2 + \frac{8}{x^2} + 16 - 16 - 54x - \frac{54}{x} + 101 = 0$$
$$\Longrightarrow 8\left(x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}\right) - 54\left(x - \frac{1}{x}\right) + 85 = 0$$
$$\Longrightarrow 8\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 - 54\left(x - \frac{1}{x}\right) + 85 = 0$$
$$t = x + \frac{1}{x} \Longrightarrow \mathbf{8t^2 - 54t + 99 = 0}$$
$$\Delta = (-54)^2 - 4\times 8\times 85 = 2\,916 - 2\,720 = 196$$
$$\Longrightarrow \sqrt{\Delta} = 14$$
$$\Longrightarrow \begin{cases} t_1 = \dfrac{54-14}{16} = \dfrac{40}{16} = \dfrac{5}{2} \\ t_2 = \dfrac{54+14}{16} = \dfrac{68}{16} = \dfrac{17}{4} \end{cases}$$
$$\Longrightarrow \begin{cases} x + \dfrac{1}{x} = \dfrac{5}{2} \Longrightarrow \mathbf{2x^2 - 5x + 2 = 0}\ \boxed{1} \\ x + \dfrac{1}{x} = \dfrac{17}{4} \Longrightarrow \mathbf{4x^2 - 17x + 4 = 0}\ \boxed{2} \end{cases}$$
$$\boxed{1} \Longrightarrow \Delta = 25 - 16 = 9 \Longrightarrow \sqrt{\Delta} = 3$$
$$\Longrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{5-3}{4} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2} \\ x_2 = \dfrac{5+3}{4} = \dfrac{8}{4} = 2 \end{cases}$$
$$\boxed{2} \Longrightarrow \Delta = 289 - 64 = 225 \Longrightarrow \sqrt{\Delta} = 15$$
$$\Longrightarrow \begin{cases} x_3 = \dfrac{17-15}{8} = \dfrac{2}{8} = \dfrac{1}{4} \\ x_4 = \dfrac{17+15}{8} = \dfrac{32}{8} = 4 \end{cases}, \qquad \mathcal{S} = \left\{\mathbf{\frac{1}{2}}; \mathbf{\frac{1}{4}}; \mathbf{2}; \mathbf{4}\right\}$$

**Exercice 13 :**

Soit le polynôme $P(x) = x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 24x + 28$

**1°/** Calculer $P(-1)$ ;

**2°/** Factoriser $P(x)$ ;

**Solution :**

**1°–**

$$P(-1) = (-1)^4 + 3(-1)^3 - 2(-1)^2 + 24(-1) + 28$$
$$= 1 - 3 - 2 - 24 + 28 = 0$$

**2°/** $P(x) = (x+1)(ax^3 + bx^2 + cx + d)$
$$= ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + ax^3 + bx^2 + cx + d$$
$$= ax^4 + (b+a)x^3 + (c+b)x^2 + (d+c)x + d$$
$$\Longrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{a = 1} \\ b + a = 3 \Longrightarrow \boldsymbol{b = 2} \\ c + b = -2 \Longrightarrow -4 + 2 = -2 \\ d + c = 24 \Longrightarrow \boldsymbol{c = -4} \\ \boldsymbol{d = 28} \end{cases}$$
$$P(x) = (x+1)(x^3 + 2x^2 - 4x + 28)$$

## B. Exercices généraux

**1.**Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :
$x^2 -4x + 3 = 0$ ; $x^2 +x + 1 = 0$ ; $x^2 + 1 = 0$ ;
$x^2 +3x - 4 = 0$ ; $x^2 -2x - 2 = 0$ ; $x^4 -4x^2 +3 = 0$
$x^2 -3x - 4 = 0$ ; $x^2 - 1 = 0$ ; $x + 3\sqrt{x}1 = 0$ ;
$2x^2 -x - 1= 0$; $1- 4x^2 = 0$; $(2x +1)2 -3(2x +1) -4 = 0$
$(x -1) (x + 3) = 0$; $(1 -2x)^2(1 + x) = 0$ ; $x(1-x^2) = 0$

**2.**Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations :
$x + 1 \geq 0$ ; $2x - 1 \leq 0$ ; $\frac{1}{3}x + 1 \geq 0$.

**3.**Soit m un réel. Soit $E_m$ l'équation : $mx^2 - x + 1 = 0$.
Déterminer, suivant les valeurs de m, l'ensemble des solutions de $E_m$.

**4.**Soit $g_m$ le trinôme défini pour tout x réel, par : $g_m(x) = x^2 + 2x -2m$ où m est un paramètre non nul.
1) Discuter suivant les valeurs de m le nombre de solution dans$\mathbb{R}$, de l'équation $g_m(x) = 0$.
2) Dans le cas où l'équation $gm(x) = 0$ admet deux solutions réelles x' et x'' telles que x' < x'' et que si m > 0 alors $x' < -2 < 0 < x''$.

**5.**On donne l'équation (E) : $x^4 -8x^3 - 5x^2 -8x + 1= 0$.

Montrer que( E ) $\Leftrightarrow \begin{cases} X = x + \frac{1}{x} \\ x^2 - 8x - 7 = 0 \end{cases}$

1)
2) Résoudre dans $\mathbb{R}$l'équation ( E ) = 0

**6.**1) Résoudre dans$\mathbb{R}$, le système : $\begin{cases} 5a + 2b = 26 \\ 2a - 3b = -1 \end{cases}$.
2) Déterminer, de la question précédente, la résolution des systèmes suivants :

$$\begin{cases} 5x + 2y^2 = 26 \\ 2x - 3y^2 = -1 \end{cases} ; \begin{cases} 5\sqrt{x} + 2\sqrt{y} = 26 \\ 2\sqrt{x} - 3\sqrt{y} = -1 \end{cases} ; \begin{cases} \frac{5}{x} + \frac{2}{y} = 26 \\ \frac{2}{x} - \frac{3}{y} = -1 \end{cases}$$

**7.**Le plan est rapporté à un repère ( O ; $\vec{\imath}$ ; $\vec{\jmath}$).
Déterminer l'intersection des droites (d) et (d')
données par leurs équations :
(d) $4x + 5y -1 = 0$ 2) (d) $2x - 10y -4 = 0$
(d') $3x + 4y -2 = 0$ (d') $-3x + 15y + 6 = 0$
3) (d) $4x - 2y -1 = 0$ (d') $y = 2x + 1$

**8.**Résoudre dans$\mathbb{R}^3$, chacun des systèmes :

1) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 3x + 2y + 4z = 5 \\ -2x - 5y + 2z = 6 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + y + z = 12 \\ 3x - 2y + 3z = 12 \\ 5x - y + z = 12 \end{cases}$.

**9.**Soit ( O ; $\vec{\imath}$ ; $\vec{\jmath}$) un repère du plan.
1) Les droites $(d_1)$ ; $(d_2)$ ; $(d_3)$ d'équations respectives :
$x + y - 2 = 0$ ; $3x -y -1 = 0$ ; $2x -3y + 2 = 0$ sont-elles concourantes.
2) Vérifier graphiquement la réponse.

**10.**1) Quelles valeurs faut-il donner au nombre réel m pour que les droites $(d_1)$ ; $(d_2)$ ; $(d_3)$ d'équations respectives :
$x + y - 2 = 0$ ; $3x -y -1 = 0$ ; $2x -3y + m = 0$ soient concourantes ?
2) Faites la figure pour la valeur de m trouvée.

**11.**Résoudre graphiquement les inéquations ou systèmes d'inéquations suivantes :
1) $2y - x + 2 \leq 0$ ; 2) $y \geq 0$ ; 3) $x \leq 1$.
4) $\begin{cases} x + y - 1 < 0 \\ 2x - 3y > 0 \end{cases}$ ; 5) $\begin{cases} x + y - 1 \geq 0 \\ x - 2y + 4 \geq 0 \end{cases}$

**12.**On donne un polynôme P et un nombre réel a.
Dans chacun des cas suivants :
Vérifier que P(x) est factorisable par x – a.
Déterminer le quotient de P(x) par x – a.
Factoriser, si possible, ce quotient.
Etudier le signe de P(x).
1) $P(x) = x^3 - 4x^2 + 5x -2$ et $a = 2$
2) $P(x) = -2x^3 + 7x^2 - 12x + 9$ et $a = \frac{3}{2}$.
3) $P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x -9$ et $a = -3$
4) $P(x) = -3x^3 + 2x^2 + 9x -6$ et $a = \sqrt{3}$.

**13.**Le plan est muni d'un repère ( O ; $\vec{\imath}$ ; $\vec{\jmath}$).
On donne les points A(-3 ; 2) ; B(0 ; -3) ; C( 2 ; 2).
1) Déterminer une équation de chacune des droites (AB) ; (AC) et (BC).
2) Déterminer un système d'inéquation définissant l'intéieur du triangle ABC.

**14.**Dans chacun des cas suivants, où P est un polynôme de degré 2. Mettre P(x) sous la forme canonique. Déterminer les racines éventuelles de P
Etudier le signe de P(x).
1) $P(x) = x^2 + 2x -1$ 5) $P(x) = x2 + 2x +2$
2) $P(x) = -x^2 + x -1$ 6) $P(x) = \frac{1}{2}x^2 + 5x - 1$

**15.**Résoudre dans$\mathbb{R}$:
$\sqrt{2x^2+5x-7} = \sqrt{x^2-x-2}$; $2\sqrt{x(x-3)}<2x+2$

**16.1.** Résoudre dans$\mathbb{R}$:
a) $\frac{x-2}{x-1} + \frac{x-4}{2x} = \frac{2}{x^2-x}$; b) $\frac{x(x+1)}{x-1} < 2x$
2. Soit $P(x) = 2x^3-x^2-x-3$
Calculer$P\left(\frac{3}{2}\right)$ pour résoudre $\frac{2x^3-x^2-x-3}{x^2-3x+2} < 0$

**17.**On considère l'équation $(E)$: $ax^2 + 2x + c = 0$
Où $a \in [-3;3] - \{0\}$et$c \in [-3;3]$
Trouver l'ensemble des couples (a ; c) dans chacun des cas suivants :

- (E) admet une solution unique ;
- (E) admet 0 comme solution ;
- (E) admet 0 et 2 comme solutions.

**18.**Déterminer les valeurs du paramètre m pour que les équations suivantes aient deux solutions strictement positives :
a) $2x^2+mx+2=0$
b)$(m-3)x^2 + (2m-1)x-2+4m=0$

**19.**Résoudre dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$les systèmes :

$\begin{cases} x + y = -1 \\ xy = -1 \end{cases}$ ; $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ xy = -2 \end{cases}$ ; $\begin{cases} x - y = 2 \\ xy = 35 \end{cases}$

$\begin{cases} x^2 + y^2 = 20 \\ \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{5}{2} \end{cases}$

$$\begin{cases} \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} = 0 \\ xy = -1 \end{cases} ; \quad \begin{cases} x^4 + y^4 = 17 \\ xy = 2 \end{cases} ; \quad \begin{cases} x^3 + y^3 = 98 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

**20.** On considère le polynôme : $x^3+4x^2-5x+8$ qui a trois racines : a, b et c. Sans calculer les racines, déterminer : a+b+c ; abc ; $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$

**21.** Soit l'équation ; $E : 2x^2 - ax - 3a - 6 = 0$
Déterminer la valeur de $a$ pour que l'équation $E$ admet 2 comme solution et donner sa deuxième solution.

**22.** $ABCD$ est un rectangle déterminer le réel $k$ tel que ; $\frac{AB}{BC} = \frac{AB+BC}{AB} = k$

**23.** Déterminer les réels $p$, $q$ et $r$ pour que $-2$ et 3 soient les solutions de l'équation ;

$$E : x^2 - (2p+q)x + 3p - 2q = 0$$

**24.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ suivant les valeurs du paramètre réel $m$, les équations suivantes :

$x^2 - (m+1)x + m = 0$

$(3m-5)x^2 - (m+2)x + m + 2 = 0$

$(m-3)x^2 - (7-4m)x + 20 = 0$

$(6-m)x^2 - (3m+1)x - 3 - 9m = 0$

$(4m+1)x^2 - 2(7-2m)x + 3 + m = 0$

$(m^2-4)x^2 - 2(m+2)x + (m-1) = 0$

**25.** Déterminer $m$ pour que 1 soit solution des équations suivantes :

$$(m+1)x^2 - 2mx + 5 = 0$$

$$mx^2 - (2m+1)x + 2 = 0$$

$$(m^2+1)x^2 + 3(m-1)x + m = 0$$

**26.** Déterminer $m$ pour que $-1$ soit solution de l'équation suivante : $(2m-1)x^2 - 2mx + 5 = 0$

**27.** Déterminer l'inverse de la matrice ; par le pivot de Gauss $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

**28.** On considère les matrices $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ et $N = A - I$, où $I$ est la matrice identité d'ordre 3.

**a)** Calculer $N^2$ et $N^3$. En déduire $N^n$ pour $n, n \geq 3$.

**b)** En déduire une formule exprimant $A^n$ en fonction de $I$, $N$ et $N^2$ pour $n$ entier naturel.

**c)** Déterminer les nombres $a$, $b$ et $c$ tels que la matrice $B = aI + bN + cN^2$ vérifie ; $AB = I$. En déduire la matrice $A^{-1}$ en fonction de $I$, $N$ et $N^2$.

**d)** Calculer $A^{-n}$ pour $n$ entier positif. En déduire $A^k$ pour $k$ entier relatif quelconque.

**29.** On considère les matrices :

$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ et $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

**a)** Calculer $A^2$ et $A^3$.

**b)** Déterminer trois entiers $a$, $b$ et $c$ tels que : $A^3 + aA^2 + bA + cI = 0$.

**c)** En déduire que $A$ est inversible, et écrire son inverse $A^{-1}$.

**30.** Soit $A$ et $B$ deux matrices carrées de même ordre vérifiant les deux conditions : $A.B \neq 0$ et $B.A = 0$, et soit $A.B = C$.

**a)** Calculer $C^2$.

**b)** Est-ce que $A$ et $B$ sont inversibles ?

**c)** Si on fixe $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, trouver toutes les matrices $B$ vérifiant les deux conditions $A.B \neq 0$ et $B.A = 0$.

**31.** Soit $M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

**a)** Calculer $M^n$ pour tout entier $n \geq 1$.

**b)** Montrer que $M$ est inversibleet déterminer $M^{-1}$.

**c)** Déterminer toutes les matrices $A$ telles que ; $A.M = M.A$

**32.** Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$. Trouver toutes les matrices $M$ telles que ; $A.M = M.A$.

**33.** Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

**a)** Calculer $A^2$, $A^3$ et $A^4$.

**b)** En déduire $A^k$ pour tout $k \geq 1$.

**c)** Montrer que $A$ est inversible et calculer $A^{-1}$.

**d)** Calculer $A^{-k}$ pour tout entier $k \geq 1$.

**34.** Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

**a)** Calculer $A^2$, $A^3$ puis $A^n$ (par récurrence).

**b)** La matrice $A$ est-elle inversible ?

**35.** Soit $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -4 \end{bmatrix}$.

**a)** Peut-on trouver une matrice $B$ de format $(3 \times 2)$ telle que $A.B = I_2$ ?

**b)** Peut-on trouver une matrice $C$ de format $(3 \times 2)$ telle que $A.B = I_3$ ?

**36.** Soit $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

**a)** Calculer $A^2$ et $A^2 - A$.

**b)** En déduire que $A$ est inversible. Que vaut $A^{-1}$ ?

**37.** Calculer les inverses des matrices suivantes :

**a)** $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, **c)** $\begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, **e)** $\begin{bmatrix} -4 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$,

**b)** $\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$, **d)** $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ -5 & 7 & 0 \end{bmatrix}$, **f)** $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & -4 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

# CHAPITRE 03 Fonctions ; Généralités – Limite – Continuité

## Cours

### I. Généralités :

**Définition :**

Une fonction est une application de $\mathbb{R}$ ou une partie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui associe à tout nombre $x \in \mathbb{R}$ une image $f(x)$, et on note :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto y = f(x)$$

**Ensemble de définition :**

**Définition :**

Soit $f$ une fonction numérique de la variable réellex, c'est-à-dire, une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. L'ensemble $\mathcal{D}_f$ de définition de $f$ est l'ensemble des réels $x$ tels que $f(x)$ existe.

**Exemple 1 :**

L'ensemble de définition d'une fonction polynôme est $\mathbb{R}$.

L'ensemble de définition d'une fonction rationnelle (*c'est-à-dire quotient de deux polynômes*) est $\mathbb{R}$ privé des valeurs éventuelles qui annulent le dénominateur.

L'ensemble de définition de la racine carrée d'une fonction polynôme est l'ensemble des réels pour lesquels cette fonction est positive.

**Exercice 1 :**

Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes :

**1°**/ $f_1(x) = 5x^3 - 2x^2 + 3x - 7$ ;

**2°**/ $f_2(x) = \frac{x^2-6x+9}{2x-4}$ ; **3°**/ $f_3(x) = \frac{1}{x^2-5x+6}$ ;

**4°**/ $f_4(x) = \frac{x^2-1}{x^2-x+1}$ ; **5°**/ $f_5(x) = \frac{x^2+1}{x^3-6x^2+9x}$ ;

**6°**/ $f_6(x) = \sqrt{x^2-7x+10}$ **7°**/ $f_7(x) = \sqrt{3x^2-2x+1}$

**8°**/ $f_8(x) = \sqrt{1+x-2x^2}$ ; **9°**/ $f_9(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-16}}$ ;

**10°**/ $f_{10}(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$ ; **11°**/ $f_{11}(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}$ ;

**12°**/ $f_{12}(x) = \frac{\sqrt{2x+1}-3}{x-4}$.

**Solution :**

**1°**/ $f_1(x) = 5x^3 - 2x^2 + 3x - 7$ : $\mathcal{D}_{f_1} = \mathbb{R}$ (*car $f_1$ est une fonction polynôme*)

**2°**/ $f_2(x) = \frac{x^2-6x+9}{2x-4}$ : $f_2(x)$ est définie si, et seulement si : $2x - 4 \neq 0 \Longrightarrow x \neq 2 \Longrightarrow \mathcal{D}_{f_2} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

**3°**/ $f_3(x) = \frac{1}{x^2-5x+6}$ : $f_3(x)$ est définie si, et seulement si : $x^2 - 5x + 6 \neq 0 \Longrightarrow \Delta = 25 - 24 = 1 > 0$

$x_1 = \frac{5-1}{2} = \frac{4}{2} = 2$, $\quad x_2 = \frac{5+1}{2} = \frac{6}{2} = 3$

$\Longrightarrow \mathcal{D}_{f_3} = \mathbb{R} \setminus \{\mathbf{2, 3}\}$

**4°**/ $f_4(x) = \frac{x^2-1}{x^2-x+1}$ : $f_4(x)$ est définie si, et seulement si : $x^2 - x + 1 \neq 0 \Longrightarrow \Delta = 1 - 4 = -3 < 0 \Longrightarrow \mathcal{D}_{f_4} = \mathbb{R}$

**5°**/ $f_5(x) = \frac{x^2+1}{x^3-6x^2+9x}$ : $f_5(x)$ est définie si, et seulement si :

$x^3 - 6x^2 + 9x = x(x^2 - 6x + 9) = x(x-3)^2$ : $x(x-3)^2 \neq 0 \Longrightarrow \mathcal{D}_{f_5} = \mathbb{R} \setminus \{\mathbf{0, 3}\}$

**6°**/ $f_6(x) = \sqrt{x^2 - 7x + 10}$ : $f_6(x)$ est définie si, et seulement si :

$$x^2 - 7x + 10 \geq 0 \Longrightarrow \Delta = 49 - 40 = 9 > 0$$

$x_1 = \frac{7-3}{2} = \frac{4}{2} = 2$, $\quad x_2 = \frac{7+3}{2} = \frac{10}{2} = 5$

| $x$ | $-\infty$ | | 2 | | 5 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f_6(x)$ | | + | **0** | − | **0** | + | |

$\Longrightarrow \mathcal{D}_{f_6} = \mathbb{R} \setminus ]\mathbf{2}; \mathbf{5}[ = ]-\infty; \mathbf{2}] \cup [\mathbf{5}; +\infty[$

**7°**/ $f_7(x) = \sqrt{3x^2 - 2x + 1}$ : $f_7(x)$ est définie si, et seulement si :

$$3x^2 - 2x + 1 \geq 0 \Longrightarrow \Delta = 4 - 12 = -8 < 0$$

| $x$ | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f_7(x)$ | | + | |

$\Longrightarrow \mathcal{D}_{f_7} = \mathbb{R}$

**8°**/ $f_8(x) = \sqrt{1 + x - 2x^2}$ : $f_8(x)$ est définie si, et seulement si : $1 + x - 2x^2 \geq 0$

$$a + b + c = 0 \Longrightarrow x_1 = 1, \quad x_2 = \frac{-1}{2}$$

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{1}{2}$ | | 1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f_8(x)$ | | − | **0** | + | **0** | − | |

$$\Longrightarrow \mathcal{D}_{f_8} = \left[-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}; \mathbf{1}\right]$$

**9°**/ $f_9(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-16}}$ : $f_9(x)$ est définie si, et seulement si : $x^2 - 16 > 0 \Longrightarrow x = -4$ ou $x = 4$.

| $x$ | $-\infty$ | | $-4$ | | 4 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2 - 16$ | | + | **0** | − | **0** | + | |

$\Longrightarrow \mathcal{D}_{f_9} = \mathbb{R} \setminus [\mathbf{-4}\ ; \mathbf{4}] = ]-\infty\ ; \mathbf{-4}[ \cup ]\mathbf{4}\ ; +\infty[$

**10°**/ $f_{10}(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$ : $f_{10}(x)$ est définie si, et seulement si : $\begin{cases} x + 1 \neq 0 \\ \frac{x-1}{x+1} \geq 0 \end{cases}$

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | 1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x - 1$ | | − | \| | − | **0** | + | |
| $x + 1$ | | − | **0** | + | \| | + | |
| $\frac{x-1}{x+1}$ | | + | \|\| | − | **0** | + | |

$\Longrightarrow \mathcal{D}_{f_{10}} = \mathbb{R} \setminus [\mathbf{-1}; \mathbf{1}[ = ]-\infty; \mathbf{-1}[ \cup [\mathbf{1}; +\infty[$

**11°**) $f_{11}(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}$ : $f_{11}(x)$ est définie si, et seulement si : $\begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ x + 1 > 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x > -1 \end{cases} \Longrightarrow \mathcal{D}_{f_{11}} = [\mathbf{1}; +\infty[$

**12°)** $f_{12}(x) = \frac{\sqrt{2x+1}-3}{x-4}$ : $f_{12}(x)$ est définie si, et seulement si : $\begin{cases} 2x+1 \geq 0 \\ x-4 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ x \neq 4 \end{cases}$

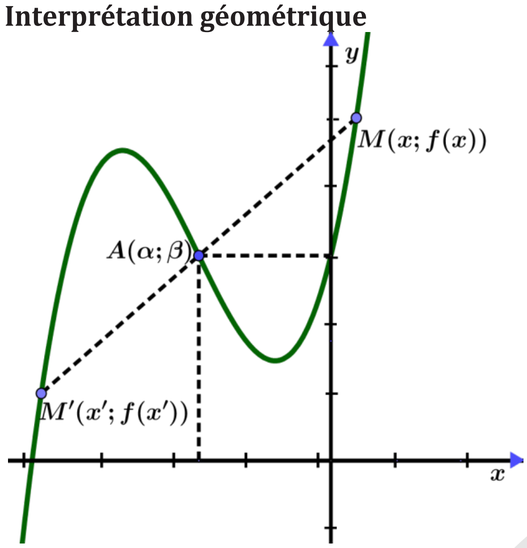
$$\Rightarrow \mathcal{D}_{f_{12}} = \left[-\frac{1}{2};\ +\infty\right[ \setminus \{4\}$$

### Centre de symétrie d'une courbe :

**Définition :**

On dit que le point $A(\alpha\ ;\ \beta)$ est le centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$ si et seulement si $f(2\alpha - x) + f(x) = 2\beta$.

**Interprétation géométrique**




On a $A = M * M'$ alors,

$$\begin{cases} \dfrac{x+x'}{2} = \alpha \Rightarrow x + x' = 2\alpha \Rightarrow x' = 2\alpha - x \\ \dfrac{f(x)+f(x')}{2} = \beta \Rightarrow f(x) + f(x') = 2\beta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{f(x) + f(2\alpha - x) = 2\beta}$$

**Exemple 2 :**

Soit la fonction $f$ définie par : $f(x) = \frac{5x-3}{x+2}$.

Montrer que le point $A(-2\ ;\ 5)$ est le centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$.

**Réponse :**

Le point $A(-2\ ;\ 5)$ est le centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$ si $f(x) + f(2 \times (-2) - x) = 2 \times 5$

$$f(x) + f(-4-x) = \frac{5x-3}{x+2} + \frac{5(-4-x)-3}{(-4-x)+2}$$

$$= \frac{5x-3}{x+2} + \frac{-20-5x-3}{-4-x+2}$$

$$= \frac{5x-3}{x+2} + \frac{-5x-23}{-x-2}$$

$$= \frac{5x-3}{x+2} + \frac{-(5x+23)}{-(x+2)} = \frac{5x-3}{x+2} + \frac{5x+23}{x+2}$$

$$= \frac{5x-3+5x+23}{x+2}$$

$$= \frac{10x+20}{x+2} = \frac{10(x+2)}{x+2} = 10 = 2 \times 5$$

D'où, le point $A(-2; 5)$ est centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$.

**Remarque 1 :**

Si $A = O(0\ ;\ 0) \Rightarrow f(2 \times 0 - x) + f(x) = 2 \times 0 \Rightarrow f(-x) + f(x) = 0 \Rightarrow \boldsymbol{f(-x) = -f(x)}$

Propriété d'une fonction impaire. La fonction $f$ admet l'origine $O$ du repère comme centre de symétrie.

**Exemple 3 :**

Soit la fonction $f$ définie par : $f(x) = \frac{3x^3-2x-1}{x^2+x-2}$

**1°)** On pose $h(x) = 3x^3 - 2x - 1$. Calculer $h(1)$ et factoriser $h(x)$.

**2°)** Simplifier $f(x)$.

**3°) a)** Déterminer les réels $a, b$ et $c$ tels que :

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x+2}$$

a. Montrer que le point $A(-2, -2a + b)$ est le centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$.

**Réponse :**

**1°)** $h(1) = 3 \times (1)^3 - 2 \times (1) - 1 = 3 - 2 - 1 = 0$

Factorisation de $h(x) = (x-1)(3x^2 + 3x + 1)$

**2°)** Simplification de

$$f(x) = \frac{(x-1)(3x^2+3x+1)}{(x-1)(x+2)} = \frac{3x^2+3x+1}{x+2}$$

**a)** Déterminons $a, b$ et $c$ tels que :

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x+2}$$

En utilisant la méthode de l'identification, on a :

$a = 3$, $\quad b = -3, c = 7 \Rightarrow f(x) = 3x - 3 + \frac{7}{x+2}$

**a.** Le point $A(-2, -2a + b) = A(-2, -9)$ est le centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$ si :

$$f(-4-x) + f(x) = 2 \times -9 = -18$$

$f(-4-x) + f(x)$

$$= 3(-4-x) - 3 + \frac{7}{(-4-x)+2} + 3x - 3 + \frac{7}{x+2}$$

$$= -12 - 3x - 3 + \frac{7}{-4-x+2} + 3x - 3 + \frac{7}{x+2}$$

$$= -3x - 15 + \frac{7}{-x-2} + 3x - 3 + \frac{7}{x+2}$$

$$= -18 = 2 \times -9 \Rightarrow A(-2, -9)$$

est le centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$.

**Remarque 2 :**

On pourra également utiiser la formule :

$f(\alpha - x) + f(\alpha + x) = 2\beta$(resp.$f(a - x) = f(a + x)$)

pour montrer que $A(\alpha\ ;\ \beta)$ est centre de symétrie de la fonction(resp. la droite d'équation $x = a$ est un axe de symétrie)

## II. Limite d'une fonction :

### 1. Limite d'une fonction en 0 :

#### a. Limite infinie d'une fonction en 0 :

- Soit $f$une fonction numérique définie sur un intervalle ouvert en 0, de la forme $]0; c]$ ou $[b; 0[$ ou sur $[b; 0[ \cup ]0; c]$.

Si $f(x)$ est aussi grand *(resp. aussi petit)* que l'on veut dès que $x$ est assez proche de 0, on dit que :

$f$ a pour limite $+\infty$ en 0 (*resp.* $-\infty$ en 0).

On écrit $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$(resp. $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$).

**b. Limite infinie à gauche et à droite d'une fonction en 0 :**

**Fonctions de référence**

Quand $x$ tend vers 0, avec $x > 0$ les fonctions :

$x \mapsto \frac{1}{x}$, $x \mapsto \frac{1}{x^2}$, $x \mapsto \frac{1}{x^3}$, $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$tendent vers $+\infty$.

Quand $x$ tend vers 0, avec $x < 0$ les fonctions :$x \mapsto \frac{1}{x}$, $x \mapsto \frac{1}{x^3}$ tendent vers $-\infty$ et la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ tend vers $+\infty$.

**Remarque 3 :**

On note la limite à gauche en 0 de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{1}{x} = -\infty$$

On note la limite à droite en 0 de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \text{ ou } \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty$$

**c. Limite finie d'une fonction en 0 :**

- Soit $f$ une fonction numérique définie sur un intervalle ouvert en 0, ou au voisinage de 0, de la forme $]0\,;\,c]$ ou $[b\,;\,0[$ ou $[b\,;\,0[\cup]0\,;\,c]$, et soit $L$ un réel.

Si la distance $|f(x) - L|$ est aussi petite que l'on veut dès que $x$ est assez proche de 0, on dit que :

$f$ a pour limite $L$en 0.

On écrit $\lim_{x\to 0} f(x) = L$ ; ou $\lim_{0} f(x) = L$.

**Exemple 4 :**

Calculer les limites en 0 des fonctions :

$a)\ f(x) = \frac{2x}{x+1}$, $\quad b)\ g(x) = x^2 - 2x$.

**Réponse :**

$a)\ \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{x+1} = \frac{2\times 0}{0+1} = \frac{0}{1} = 0.$

$b)\ \lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0}(x^2 - 2x) = 0^2 - 2\times 0 = 0.$

**d. Limite finie à gauche et à droite d'une fonction en 0 :**

- Soit $f$ une fonction numérique définie sur un intervalle ouvert en 0, ou au voisinage de 0, de la forme $]0\,;c]$ ou $[b\,;0[$ ou $[b\,;0[\cup]0\,;c]$, et soit $L$ un réel.

Si la distance $|f(x) - L|$ est aussi petite que l'on veut dès que $x$ est assez proche de 0, et $x < 0$, on dit que :

$f$ a pour limite $L$ à gauche en 0.

On écrit $\lim_{x\to 0^-} f(x) = L$, ou $\lim_{0^-} f(x) = L$.

- Soit $f$ une fonction numérique définie sur un intervalle ouvert en 0, ou au voisinage de 0, de la forme $]0;c]$ ou $[b;0[$ ou $[b;0[\cup]0;c]$, et soit $L$ un réel.

Si la distance $|f(x) - L|$ est aussi petite que l'on veut dès que $x$ est assez proche de 0, et $x > 0$, on dit que :

$f$ a pour limite $L$ à droite en 0.

On écrit $\lim_{x\to 0^+} f(x) = L$ ; ou $\lim_{0^+} f(x) = L$.

**Remarque 4 :**

D'après ce qui précède :

$\lim_{x\to 0} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x\to 0}|f(x) - L| = 0$

**Exemple 5 :**

Soit la fonction $f$ définie par : $f(x) = \frac{3x+2}{x-1}$

Montrer que $\lim_{x\to 0} f(x) = -2$.

**Réponse :**

Soit la fonction $g(x) = f(x) — 2 = f(x) + 2$.

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0}(f(x) + 2) = \lim_{x\to 0} \frac{3x+2}{x-1} + 2$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{3x+2+2x-2}{x-1} = \lim_{x\to 0} \frac{5x}{x-1} = 0$$

Donc, $\lim_{x\to 0} f(x) = -2$.

**Fonctions de référence pour la limite nulle en 0**

Quand $x$ tend vers 0, les fonctions :$x \mapsto x$, $x \mapsto x^2$, $x \mapsto x^3$, $x \mapsto \sqrt{x}$ tendent vers 0.

**2. Limite d'une fonction en $a$ :**

**a. Limite finie d'une fonction en $a$ :**

Soit une fonction numérique $f$ définie sur un intervalle ouvert en $a$, ou au voisinage de $a$, de la forme $]a;c]$ ou $[b;a[$ ou $[b;a[\cup]a;c]$, et soit $L$ un réel.

La limite de la fonction $f$ en $a$, si elle existe, est égale à la limite en 0 de la fonction $g \mapsto f(a+h)$,

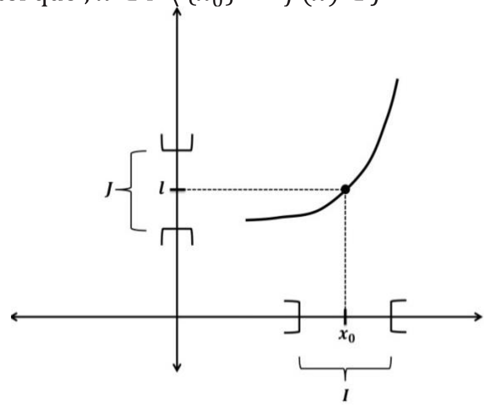
Soit $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{h\to 0} f(a+h)$.

**Autre définition :**

Soit $x_0$ un réel, et soit $f$ une fonction définie sur un intervalle contenant $x_0$ ou d'extrémité $x_0$. On dit que $f$ tend vers un réel$l$lorsque $x$ tend vers $x_0$ et on note ;

$\lim_{x\to x_0} f(x) = l$.

Si pour tout intervalle ouvert $J$ de centre $l$ et de rayon $\beta > 0$, il existe un intervalle $I$ de centre $x_0$ et de rayon $\alpha > 0$ tel que ; $x \in I \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in J$




**Autre Définition :**

On dit qu'une fonction $f$ admet une limite finie $L$ en $x_0$ et on écrit : $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$, si la fonction $g(h) = f(x_0 + h)$ admet la limite $L$ lorsque $h$ tend vers 0.

**Exemple 6 :**

Soit la fonction $f$ définie par $f(x) = x^2 + 3x - 1$

Montrer que $\lim_{x\to 1} f(x) = 3$.

**Réponse :**

Soit la fonction :

$$g(x) = f(h+1) = (h+1)^2 + 3(h+1) - 1$$
$$= h^2 + 2h + 1 + 3h + 3 - 1 = h^2 + 5h + 3$$
$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} f(h+1)$$
$$= \lim_{x\to 0}(h^2 + 5h + 3) = 3$$

**Exercice 2 :**

Calculer les limites des fonctions aux points $x_0$ :

1) $f(x) = \dfrac{x^2-7x+10}{x^2-4}$, $\quad (x_0 = 2)$,

2) $g(x) = \dfrac{3x^3-7x+4}{x^2-7x+6}$, $\quad (x_0 = 1)$

3) $p(x) = \dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x^2-4x+3}$, $\quad (x_0 = 1)$,

4) $h(x) = \dfrac{\sqrt{x+6}-3}{\sqrt{x+1}-2}$, $\quad (x_0 = 3)$

**Solution :**

1) $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-7x+10}{x^2-4} = \dfrac{0}{0}(F.I)$

La levée de l'indétermination :

$$\frac{x^2-7x+10}{x^2-4} = \frac{(x-2)(x-5)}{(x-2)(x+2)}$$

$$= \frac{x-5}{x+2} \Longrightarrow \lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2}\frac{x-5}{x+2} = \frac{2-5}{2+2}$$

$$= \frac{-3}{4} \Longrightarrow \boldsymbol{\lim_{x\to 2} f(x) = \frac{-3}{4}}$$

2) $\lim\limits_{x\to 1} g(x) = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^3-7x+4}{x^2-7x+6} = \dfrac{0}{0}(F.I)$

La levée de l'indétermination :

$$\frac{3x^3-7x+4}{x^2-7x+6} = \frac{(x-1)(3x^2+3x-4)}{(x-1)(x-6)}$$

$$= \frac{3x^2+3x-4}{x-6} \Longrightarrow \lim_{x\to 1} g(x) = \lim_{x\to 1}\frac{3x^2+3x-4}{x-6}$$

$$= \frac{2}{-5} = \frac{-2}{5} \Longrightarrow \boldsymbol{\lim_{x\to 1} g(x) = \frac{-2}{5}}$$

3) $\lim\limits_{x\to 1} p(x) = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x^2-4x+3} = \dfrac{0}{0}(F.I)$

La levée de l'indétermination :

$$\frac{\sqrt{x+3}-2}{x^2-4x+3} = \frac{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}{(x^2-4x+3)(\sqrt{x+3}+2)}$$

$$= \frac{x+3-4}{(x-1)(x-3)(\sqrt{x+3}+2)}$$

$$= \frac{x-1}{(x-1)(x-3)(\sqrt{x+3}+2)}$$

$$= \frac{1}{(x-3)(\sqrt{x+3}+2)}$$

$$\Longrightarrow \lim_{x\to 1} p(x) = \lim_{x\to 1}\frac{1}{(x-3)(\sqrt{x+3}+2)} = \frac{1}{-8}$$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{\lim_{x\to 1} p(x) = \frac{-1}{8}}$$

4) $\lim\limits_{x\to 3} h(x) = \lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+6}-3}{\sqrt{x+1}-2} = \dfrac{0}{0}(F.I)$

$$\frac{\sqrt{x+6}-3}{\sqrt{x+1}-2} = \frac{(\sqrt{x+6}-3)}{(\sqrt{x+1}-2)} \times \frac{(\sqrt{x+6}+3)}{(\sqrt{x+6}+3)} \times \frac{(\sqrt{x+1}+2)}{(\sqrt{x+1}+2)}$$

$$= \frac{(x+6-9)(\sqrt{x+1}+2)}{(x+1-4)(\sqrt{x+6}+3)} = \frac{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}{(x-3)(\sqrt{x+6}+3)}$$

$$= \frac{\sqrt{x+1}+2}{\sqrt{x+6}+3} \Longrightarrow \lim_{x\to 3} h(x) = \lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}+2}{\sqrt{x+6}+3}$$

$$= \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \Longrightarrow \boldsymbol{\lim_{x\to 3} h(x) = \frac{2}{3}}$$

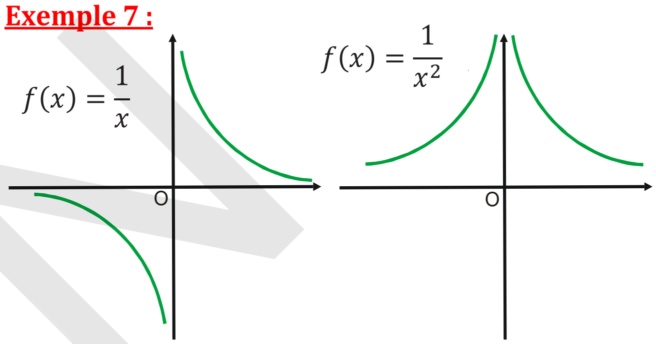
### b. Limite à gauche et limite à droite d'une fonction en $a$ :

- On dit que $f$ tend vers $L$ lorsque $x$ tend vers $a$ à gauche (resp. à droite) et on écrit ; $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = L$ (resp. $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L$), si $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = l$ et $x < a$ (resp. $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = l$ et $x > a$).

### c. Asymptote verticale :

Soit $f$ une fonction numérique. On dit que la droite d'équation $x = a$ est asymptote verticale à la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de $f$, si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$.

**Exemple 7 :**




**Remarque 5 :**

Les courbes représentatives des fonctions :

$$x \longmapsto \frac{1}{x}, \quad x \longmapsto \frac{1}{x^2}, \quad x \longmapsto \frac{1}{x^3}, \quad x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Admettent l'axe des ordonnées comme asymptote verticale.

### c. Limite infinie d'une fonction en $a$ :

Soit $a$ un réel, et soit $f$ une fonction définie sur un intervalle contenant $a$ ou d'extrémité $a$.

- On dit que $f$ tend vers $+\infty$ lorsque $x$ tend vers $a$ et on note $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ ; si pour tout réel $A$>0, il existe un intervalle ouvert $I$ de centre $a$ et de rayon $\alpha > 0$, tel que : $\forall x \in I \setminus \{a\}, f(x) > A$.
- On dit que $f$ tend vers $-\infty$ lorsque $x$ tend vers $a$ et on note $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ ; si pour tout réel $A > 0$, il existe un intervalle ouvert $I$ de centre $a$et de rayon $\alpha > 0$, tel que :$\forall x \in I \setminus \{a\}, f(x) < -A$.

## 3. Limite d'une fonction à l'infini :

### a. Limite infinie d'une fonction à l'infini :

● Soit une fonction définie sur un intervalle du type $[x_0\,; +\infty[$ avec $x_0 \in \mathbb{R}$.

Si $f(x)$ est aussi grand (*resp. aussi petit*) que l'on veut dès que $x$ est assez grand, on dit que : $f$ a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ (*resp.* $-\infty$ *en* $+\infty$). On écrit $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$ (*resp.* $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$).

**Autre définition :**

- On dit que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ (resp. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$), si $\forall A>0, \exists B>0, x>B$ $\Longrightarrow f(x)>A$ (resp. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$), si $\forall A>0, \exists B>0, x>B \Longrightarrow f(x)<-A$).

● Soit une fonction définie sur un intervalle du type $]-\infty;\ x_0]$ avec $x_0\in\mathbb{R}$.
Si $f(x)$ est aussi grand (*resp. aussi petit*) que l'on veut dès que $x$ est assez petit, on dit que : $f$ a pour limite $+\infty$ en $-\infty$ (*resp.* $-\infty$ *en* $-\infty$).
On écrit $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$.(*resp.* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$).

**Autre définition :**

- On dit que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$, si $\forall A>0, \exists B>0$, $x<-B \Longrightarrow f(x)>A$ (resp. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$), si $\forall A>0, \exists B>0, x<-B \Longrightarrow f(x)<-A$).

**Fonctions de référence**

Quand $x$ tend vers $+\infty$, les fonctions :
$x\longmapsto x$, $x\longmapsto x^2$, $x\longmapsto \sqrt{x}$ tendent vers $+\infty$.
Quand $x$ tend vers $-\infty$, la fonction :
$x\longmapsto x^2$ tend vers $+\infty$.
Quand $x$ tend vers $-\infty$, les fonctions :
$x\longmapsto x$, $x\longmapsto x^3$ tendent vers $-\infty$.
Plus généralement : $x\longmapsto x^n$
Si $n$ est paire, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.
Si $n$ est impaire, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

**b. Limite finie à l'infini :**

● Soit une fonction numérique $f$ définie sur un intervalle du type $[x_0;+\infty[$ avec $x_0\in\mathbb{R}$ et $L$ un nombre réel.
Si la distance $|f(x)-L|$ est aussi petite que l'on veut dès que $x$ est assez grand, on dit que :
$f$ a pour limite $L$ en $+\infty$
On écrit $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L$ ;ou $\lim\limits_{+\infty} f(x)=L$.

● Soit une fonction numérique $f$ définie sur un intervalle du type $]-\infty;\ x_0]$ avec $x_0\in\mathbb{R}$ et $L$ un nombre réel.
Si la distance $|f(x)-L|$ est aussi petite que l'on veut dès que $x$ est assez petit, on dit que :
$f$ a pour limite $L$ en $-\infty$
On écrit $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=L$; ou $\lim\limits_{-\infty} f(x)=L$.

- On dit que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=l$ (resp. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=l$), si pour tout intervalle ouvert $J$ de centre $l$ et de rayon $\beta>0$, il existe un réel strictement positif $A$ tel que $\forall x>A, f(x)\in J$ (resp. $\forall x<-A, f(x)\in J$).

**Fonctions de référence :**

Quand $x$ tend vers $+\infty$, les fonctions :
$x\longmapsto \frac{1}{x}$, $x\longmapsto \frac{1}{x^2}$, $x\longmapsto \frac{1}{x^3}$, $\frac{1}{\sqrt{x}}$
tendent vers 0.
Quand $x$ tend vers $-\infty$, les fonctions :
$x\longmapsto \frac{1}{x}$, $x\longmapsto \frac{1}{x^2}$, $x\longmapsto \frac{1}{x^3}$ tendent vers 0.

**Exercice 3 :**

Déterminer les limites suivantes :

$1°/\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-6x+9}{x-2}$, $2°/\ \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x+1}{x^2-x+1}$,
$3°/\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x^2-4x+1}{2x^2-3x+2}$, $4°/\ \lim\limits_{x\to4^+}\frac{x^2-5x+6}{x-4}$
$5°/\ \lim\limits_{x\to4^-}\frac{x^2-5x+6}{x-4}$, $6°/\ \lim\limits_{x\to2^+}\frac{1}{(x-2)^2}$,
$7°/\ \lim\limits_{x\to4}\frac{x^2-7x+12}{x^2-6x+8}$, $8°/\ \lim\limits_{x\to5}\frac{\sqrt{3x+1}-4}{x-5}$
$9°/\ \lim\limits_{x\to1^+}\frac{x^3-x^2-x+1}{(x-1)^3}$, $10°/\ \lim\limits_{x\to1^-}\frac{x^3-x^2-x+1}{(x-1)^3}$,
$11°/\ \lim\limits_{x\to4}\frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{6x+1}-5}$, $12°/\ \lim\limits_{x\to1}\frac{x^3-x^2-x+1}{2x^2-x-1}$,
$13°/\ \lim\limits_{x\to-\infty}(2x^3-x^2-6x+1)$,
$14°/\ \lim\limits_{x\to+\infty}(3x^3-6x^2+5x-1)$

**Solution :**

$1°/\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-6x+9}{x-2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$

$2°/\ \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x+1}{x^2-x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2}{x}=\frac{2}{-\infty}=0$

$3°/\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x^2-4x+1}{2x^2-3x+2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x^2}{2x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$

$4°/\ \lim\limits_{x\to4^+}\frac{x^2-5x+6}{x-4}=\frac{4^2-5\times4+6}{4-4}=\frac{2}{0^+}=+\infty$

$5°/\ \lim\limits_{x\to4^-}\frac{x^2-5x+6}{x-2}=\frac{4^2-5\times4+6}{4-4}=\frac{2}{0^-}=-\infty$

$6°/\ \lim\limits_{x\to2^-}\frac{1}{(x-2)^2}=\frac{1}{(2-2)^2}=\frac{1}{(0^-)^2}=\frac{1}{0^+}=+\infty$

$7°/\ \lim\limits_{x\to4}\frac{x^2-7x+12}{x^2-5x+8}=\frac{2^2-7\times2+12}{2^2-5\times2+8}=\frac{0}{0}\ (F.I)$

La division euclidienne de$x^2-7x+12$ et $x^2-6x+8$ par $x-4$ donne :
$x^2-7x+12=(x-4)(x-3)$
$x^2-6x+8=(x-4)(x-2)$d'où ;

$\lim\limits_{x\to4}\frac{x^2-7x+12}{x^2-6x+8}$
$=\lim\limits_{x\to4}\frac{(x-4)(x-3)}{(x-4)(x-2)}=\lim\limits_{x\to4}\frac{x-3}{x-2}=\frac{4-3}{4-2}=\frac{1}{2}$

$8°/\ \lim\limits_{x\to5}\frac{\sqrt{3x+1}-4}{x-5}=\frac{\sqrt{3\times5+1}-4}{5-5}=\frac{0}{0}\ (F.I)$

$\lim\limits_{x\to5}\frac{\sqrt{3x+1}-4}{x-5}=\lim\limits_{x\to5}\frac{(\sqrt{3x+1}-4)(\sqrt{3x+1}+4)}{(x-5)(\sqrt{3x+1}+4)}$
$=\lim\limits_{x\to5}\frac{3x+1-16}{(x-5)(\sqrt{3x+1}+4)}$
$=\lim\limits_{x\to5}\frac{3(x-5)}{(x-5)(\sqrt{3x+1}+4)}=\frac{3}{8}$
$=\lim\limits_{x\to5}\frac{3}{(\sqrt{3x+1}+4)}=\frac{3}{(\sqrt{3\times5+1}+4)}$

$$9°/\ \lim_{x\to1^+}\frac{x^3-x^2-x+1}{(x-1)^3}$$
$$=\frac{1^3-1^2-1+1}{(1-1)^3}=\frac{0}{0}\ (F.I)$$
La division euclidienne de $x^3-x^2-x+1$ par $x-1$ est $x^3-x^2-x+1=(x-1)(x^2-1)$
$=(x-1)(x+1)(x-1)=(x-1)^2(x+1)$
$$\Rightarrow \lim_{x\to1^+}\frac{x^3-x^2-x+1}{(x-1)^3}=\lim_{x\to1^+}\frac{(x-1)^2(x+1)}{(x-1)^3}$$
$$=\lim_{x\to1^+}\frac{x+1}{x-1}=\frac{1+1}{1-1}=\frac{2}{0^+}=+\infty$$
$$10°/\ \lim_{x\to1^-}\frac{x^3-x^2-x+1}{(x-1)^3}=\lim_{x\to1^-}\frac{x+1}{x-1}=\frac{1+1}{1^--1}$$
$$=\frac{2}{0^-}=-\infty$$
$$11°/\ \lim_{x\to4}\frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{6x+1}-5}=\frac{\sqrt{2\times4+1}-3}{\sqrt{6\times4+1}-5}$$
$$=\frac{3-3}{5-5}=\frac{0}{0}\ (F.I)$$
$$\frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{6x+1}-5}$$
$$=\frac{(\sqrt{2x+1}-3)(\sqrt{2x+1}+3)(\sqrt{6x+1}+5)}{(\sqrt{6x+1}-5)(\sqrt{6x+1}+5)(\sqrt{2x+1}+3)}$$
$$=\frac{(2x+1-9)(\sqrt{6x+1}+5)}{(6x+1-25)(\sqrt{2x+1}+3)}$$
$$=\frac{(2x-8)(\sqrt{6x+1}+5)}{(6x-24)(\sqrt{2x+1}+3)}$$
$$=\frac{2(x-4)(\sqrt{6x+1}+5)}{6(x-4)(\sqrt{2x+1}+3)}=\frac{(\sqrt{6x+1}+5)}{3(\sqrt{2x+1}+3)}$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to4}\frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{6x+1}-5}=\lim_{x\to4}\frac{(\sqrt{6x+1}+5)}{3(\sqrt{2x+1}+3)}$$
$$=\frac{(\sqrt{6\times4+1}+5)}{3(\sqrt{2\times4+1}+3)}=\frac{5+5}{9+9}=\frac{10}{18}=\frac{5}{9}$$
$$12°/\ \lim_{x\to1}\frac{x^3-x^2-x+1}{2x^2-x-1}=\frac{1-1-1+1}{2-1-1}=\frac{0}{0}\ (F.I)$$
$$\lim_{x\to1}\frac{x^3-x^2-x+1}{2x^2-x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2-1)}{(x-1)(2x+1)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{2x+1}=\frac{1-1}{2+1}=\frac{0}{3}=0$$
$$13°/\ \lim_{x\to-\infty}(2x^3-x^2-6x+1)$$
$$=\lim_{x\to-\infty}2x^3=2(-\infty)^3=-\infty$$
$$14°/\ \lim_{x\to+\infty}(3x^3-6x^2+5x-1)$$
$$=\lim_{x\to+\infty}3x^3=2(+\infty)^3=+\infty$$

### 4. Limites de fonctions trigonométriques :

#### a. Limites remarquables :

$$1°/\ \lim_{t\to0}\frac{\sin t}{t}=1,\qquad 2°/\ \lim_{t\to0}\frac{\tan t}{t}=1$$
$$3°/\ \lim_{t\to0}\frac{1-\cos t}{t}=0\qquad 4°/\ \lim_{t\to0}\frac{1-\cos^2 t}{t}=\frac{1}{2}$$

## Exercice 4 :

Déterminer les limites suivantes :

$$1°/\ \lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2\sin x-1}{x-\frac{\pi}{6}},\qquad 2°/\ \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{x-\frac{\pi}{4}},$$
$$3°/\ \lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sin 3x}{x-\frac{\pi}{3}},\qquad 4°/\ \lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\sin 6x}{2\sin x-1},$$
$$5°/\ \lim_{x\to1}(x-1)\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right),\qquad 6°/\ \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1-\tan x}{\sin 4x}$$

## Solution :

$$1°/\ \lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2\sin x-1}{x-\frac{\pi}{6}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)-1}{\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{6}}$$
$$=\frac{2\left(\frac{1}{2}\right)-1}{\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{6}}=\frac{1-1}{\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{6}}=\frac{0}{0}(FI)$$
On pose $t=x-\frac{\pi}{6}$ alors ;
$$\lim_{t\to0}t=\lim_{t\to0}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{6}=0\ \text{ et }\ x=t+\frac{\pi}{6}$$
$$\lim_{t\to0}\frac{2\sin x-1}{x-\frac{\pi}{6}}=\lim_{t\to0}\frac{2\sin\left(t+\frac{\pi}{6}\right)-1}{t}$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{2\left(\sin t.\cos\frac{\pi}{6}+\cos t\sin\frac{\pi}{6}\right)-1}{t}$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{2\left(\frac{\sqrt3}{2}\sin t+\frac{1}{2}\cos t\right)-1}{t}$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{\sqrt3\sin t+\cos t-1}{t}$$
$$=\lim_{t\to0}\left(\frac{\sqrt3\sin t}{t}+\frac{\cos t-1}{t}\right)$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{\sqrt3\sin t}{t}+\lim_{t\to0}\frac{\cos t-1}{t}$$
$$=\sqrt3\lim_{t\to0}\frac{\sin t}{t}-\lim_{t\to0}\frac{1-\cos t}{t}=\sqrt3\times1-0$$
$$\Rightarrow \boldsymbol{\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2\sin x-1}{x-\frac{\pi}{6}}=\sqrt3}$$
$$2°/\ \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{x-\frac{\pi}{4}}$$
$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}}=\frac{\frac{\sqrt2}{2}-\frac{\sqrt2}{2}}{\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}}=\frac{0}{0}\ (FI)$$
On pose $t=x-\frac{\pi}{4}$, alors ; $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}t=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$
$$=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}=0.\ \text{On a; }\ x=t+\frac{\pi}{4}$$
$$\lim_{t\to0}\frac{\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(t+\frac{\pi}{4}\right)}{t}$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{\sin t\cos\frac{\pi}{4}+\cos t\sin\frac{\pi}{4}-\left(\cos t\cos\frac{\pi}{4}-\sin t\sin\frac{\pi}{4}\right)}{t}$$


Math 6AS.indd 36 26/07/2024 10:40:51

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\sin t\cos\frac{\pi}{4} + \cos t\sin\frac{\pi}{4} - \cos t\cos\frac{\pi}{4} + \sin t\sin\frac{\pi}{4}}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin t + \cos t - \cos t + \sin t)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin t + \sin t)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\sqrt{2}\sin t}{t} = \sqrt{2}\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = \sqrt{2}\times 1 = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{x - \frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}}$$

3°/ $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\sin 3x}{x - \frac{\pi}{3}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\sin\left(3\times\frac{\pi}{3}\right)}{\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3}} = \frac{0}{0}\ (FI)$

On suppose $t = x - \frac{\pi}{3}$, alors ; $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} t$

$= \lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = 0.$ On a $x = t + \frac{\pi}{3}$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\sin 3x}{x - \frac{\pi}{3}} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin 3\left(t + \frac{\pi}{3}\right)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\sin 3\left(t + \frac{\pi}{3}\right)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin(3t + \pi)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{-\sin 3t}{t} = -3\lim_{t\to 0}\frac{\sin 3t}{3t} = -3\times 1 = -3$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\sin 3x}{x - \frac{\pi}{3}} = -3$$

4°/ $\lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{\sin 6x}{2\sin x - 1} = \lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{\sin 6\left(\frac{\pi}{6}\right)}{2\sin\frac{\pi}{6} - 1}$

$= \frac{\sin\pi}{2\left(\frac{1}{2}\right) - 1} = \frac{0}{0}\ (FI)$

On pose $t = x - \frac{\pi}{6}$, alors ; $\lim_{x\to\frac{\pi}{6}} t$

$= \lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = 0.$ On a $x = t + \frac{\pi}{6}$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{\sin 6x}{2\sin x - 1} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin 6\left(t + \frac{\pi}{6}\right)}{2\sin\left(t + \frac{\pi}{6}\right) - 1}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{-\sin 6t}{2\left(\sin t\cos\frac{\pi}{6} + \cos t\sin\frac{\pi}{6}\right) - 1}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{-\sin 6t}{2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin t + \frac{1}{2}\cos t\right) - 1}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{-\sin 6t}{\sqrt{3}\sin t + \cos t - 1} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{-\sin 6t}{t}}{\frac{\sqrt{3}\sin t + \cos t - 1}{t}}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\frac{-6\sin 6t}{6t}}{\frac{\sqrt{3}\sin t}{t} - \frac{1 - \cos t}{t}} = \frac{-6}{\sqrt{3}\times 1 - 0} = \frac{-6}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{\sin 6x}{2\sin x - 1} = -2\sqrt{3}$$

5°/ $\lim_{x\to 1} (x-1)\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right) = 0\times\infty\ (FI)$

On pose $t = x - 1$, alors;

$\lim_{x\to 1} (x-1) = 1 - 1 = 0\ et\ x = t + 1$

$$\lim_{x\to 1} (x-1)\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right) = \lim_{t\to 0} t\tan\left(\frac{\pi(t+1)}{2}\right)$$

$$= \lim_{t\to 0} t\tan\left(\frac{\pi t}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \lim_{t\to 0} t\frac{\sin\left(\frac{\pi t}{2} + \frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi t}{2} + \frac{\pi}{2}\right)}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{t\cos\frac{\pi t}{2}}{-\sin\frac{\pi t}{2}} = \lim_{t\to 0} \left(\frac{\frac{\pi t}{2}}{\sin\frac{\pi t}{2}}\right)\left(\frac{-\cos\frac{\pi t}{2}}{\frac{\pi}{2}}\right)$$

$$= \frac{1}{1}\times\frac{-1}{\frac{\pi}{2}} = \frac{-2}{\pi}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\lim_{x\to 1} (x-1)\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right) = \frac{-2}{\pi}}$$

6°/ $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{1 - \tan x}{\sin 4x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{1 - \tan\frac{\pi}{4}}{\sin 4\left(\frac{\pi}{4}\right)}$

$= \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0}\ (FI)$

On pose $t = x - \frac{\pi}{4}$, alors ;

$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = 0\ et\ x = t + \frac{\pi}{4}$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{1 - \tan x}{\sin 4x} = \lim_{t\to 0} \frac{1 - \tan\left(t + \frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(4\left(t + \frac{\pi}{4}\right)\right)}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{1 - \tan\left(t + \frac{\pi}{4}\right)}{\sin(4t + \pi)} = \lim_{t\to 0} \frac{1 - \frac{\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right)}}{\sin(4t + \pi)}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{1 - \frac{\sin t\cos\frac{\pi}{4} + \cos t\sin\frac{\pi}{4}}{\cos t\cos\frac{\pi}{4} - \sin t\sin\frac{\pi}{4}}}{-\sin 4t} = \lim_{t\to 0} \frac{1 - \frac{\sin t + \cos t}{\cos t - \sin t}}{-\sin 4t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\frac{\cos t - \sin t - \sin t - \cos t}{\cos t - \sin t}}{-\sin 4t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{-2\sin t}{\cos t - \sin t}}{-\sin 4t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{2\sin t}{\sin 4t\,(\cos t - \sin t)}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{2t\left(\frac{\sin t}{t}\right)}{4t\left(\frac{\sin 4t}{4t}\right)(\cos t - \sin t)}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{2\left(\frac{\sin t}{t}\right)}{4\left(\frac{\sin 4t}{4t}\right)(\cos t - \sin t)} = \frac{2\times 1}{4\times 1(1-0)}$$

$$= \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{1 - \tan x}{\sin 4x} = \frac{1}{2}$$

**Asymptote horizontale :**

- Si $\lim_{+\infty} f(x) = L$

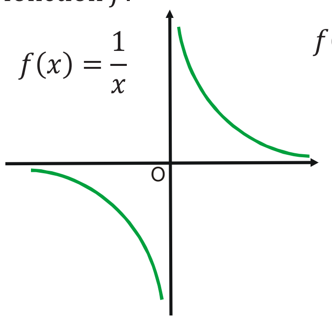
On dit que la droite d'équation $y = L$ est asymptote horizontale en $+\infty$ à la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de la fonction $f$.

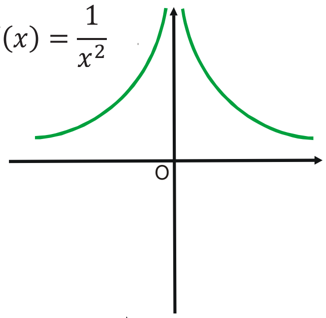
- Si $\lim_{-\infty} f(x) = L$

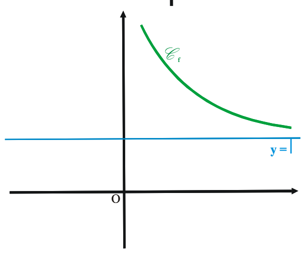


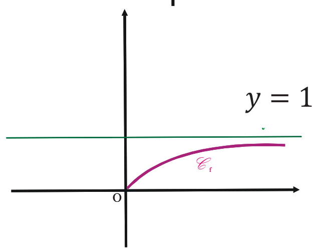
Math 6AS.indd 37 26/07/2024 10:40:52

On dit que la droite d'équation $y = L$ est asymptote horizontale en $-\infty$ à la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de la fonction $f$.




**Exercice 5 :**

Soit la fonction $f$ définie par : $f(x) = \frac{3x^2+x+1}{x^2-3x+2}$

**1°)** Déterminer $\mathcal{D}_f$,

**2°)** Calculer les limites de $f$ et en déduire ses asymptotes,

**Solution :**

**1°)** La fonction $f$ existe si $x^2 - 3x + 2 \neq 0$.

$x^2 - 3x + 2 = 0$ on a $1 - 3 + 2 = 0$.

Donc $x_1 = 1$et $x_2 = 2$.

Donc, $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{1, 2\} = ]-\infty; 1[ \cup ]1; 2[ \cup ]2; +\infty[$

**2°)** Les bornes du domaine de définition sont donc :$-\infty$, 1, 2, $+\infty$.

Les limites de $f$ et ses bornes sont :

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \frac{5}{0^+} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \frac{5}{0^-} = -\infty \end{array}\right. \Rightarrow \boldsymbol{x = 1} \text{ est } A.V$$

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \frac{15}{0^-} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \frac{15}{0^+} = -\infty \end{array}\right. \Rightarrow \boldsymbol{x = 2} \text{ est } A.V$$

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{3x^2+x+1}{x^2-3x+2} = \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{3x^2}{x^2} = 3 \\ \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{3x^2+x+1}{x^2-3x+2} = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{3x^2}{x^2} = 3 \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{y = 3} \text{ est } AH.$$

**Remarque 6 :**

$$\text{Si } k > 0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \frac{k}{0^-} = -\infty \\ \frac{k}{0^+} = +\infty \end{array}\right., \quad \left\{\begin{array}{l} \frac{k}{-\infty} = 0^- \\ \frac{k}{+\infty} = 0^+ \end{array}\right.$$

$$\text{Si } k < 0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \frac{k}{0^-} = +\infty \\ \frac{k}{0^+} = -\infty \end{array}\right., \quad \left\{\begin{array}{l} \frac{k}{+\infty} = 0^- \\ \frac{k}{-\infty} = 0^+ \end{array}\right.$$

## 5. Opérations sur les limites :

Dans toute cette partie :

- $\alpha$ désigne soit $+\infty$, soit $-\infty$, soit un nombre réel ;
- Lorsque la limite indiquée est $\pm\infty$, le signe est celui de la fonction au voisinage de $\alpha$ ;
- L'abréviation $F.I$ dans les tableaux désigne les formes indéterminées, c'est-à-dire les cas où les théorèmes ne permettent pas de conclure.

**Limite de $\lambda f$**

| Si $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$ | $L$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
|---|---|---|---|
| Alors $\lim\limits_{x\to\alpha} (\lambda f)(x)$ avec $\lambda > 0$ | $\lambda L$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
| Alors $\lim\limits_{x\to\alpha} (\lambda f)(x)$ avec $\lambda < 0$ | $\lambda L$ | $-\infty$ | $+\infty$ |

**Exemple 8 :**

Soit la fonction $g$ définie sur $]-\infty; 0[ \cup ]0; +\infty[$ par:

$$g(x) = \frac{-5}{x^3}$$

on a $g = -5f$avec $f(x) = \frac{1}{x^3}$, donc par produit on obtient : $\lim\limits_{x\to -\infty} g(x) = 0$; $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = 0$;

$$\lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = +\infty; \ \lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = -\infty.$$

**Limite de $f + g$**

| $f$ \ $g$ | **0** | **$L$** | $+\infty$ | $-\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| **0** | 0 | $L$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
| **$L'$** | $L'$ | $L + L'$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
| $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $(F.I)$ |
| $-\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $(F.I)$ | $-\infty$ |

**Exemple 9 :**

Soit la fonction $h$ définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$h(x) = \sqrt{x} - \frac{5}{x^3}$$

La fonction $h$ est la somme de deux fonctions :

$h(x) = f(x) + g(x)$, avec $f(x) = \sqrt{x}$et$g(x) = -\frac{5}{x^3}$.

- On a $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$. D'où, par somme, $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x) = -\infty$.
- On a $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = 0$et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$. D'où, par somme, $\lim\limits_{x\to +\infty} h(x) = +\infty$.

**Limite de $f.g$**

| $f$ \ $g$ | **0** | **$L \neq 0$** | $+\infty$ | $-\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| **0** | 0 | 0 | $(F.I)$ | $(F.I)$ |
| **$L' \neq 0$** | 0 | $L \times L'$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
| $+\infty$ | $(F.I)$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
| $-\infty$ | $(F.I)$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ |

**Exemple 10 :**

Soit la fonction $h$ définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$h(x) = (\sqrt{x} - 1)\left(1 + \frac{1}{x}\right).$$

La fonction $h$ est le produit de deux fonctions $f$ et $g$ avec $f(x) = \sqrt{x} - 1$ et $g(x) = 1 + \frac{1}{x}$

- On a $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -1$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = +\infty$

D'où, par produit, $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x) = -1 \times +\infty = -\infty$.

- On a $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = 1$

D'où, par produit, $\lim\limits_{x\to +\infty} h(x) = +\infty$.

**Limite de $1/f$**

| $f$ | $0$ | $L \neq 0$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $1/f$ | $\pm\infty$ | $1/L$ | $0$ | $0$ |

**Exemple 11 :**

Soit la fonction $f$ définie sur $]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1}{x^3 - 1}$$

On a : $\lim\limits_{x\to -\infty} (x^3 - 1) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to +\infty} (x^3 - 1) = +\infty$

D'où par inverse : $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{1}{x^3-1} = 0$; $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{x^3-1} = 0$.

On a : $\lim\limits_{x\to 1^-} (x^3 - 1) = 0^-$; $\lim\limits_{x\to 1^+} (x^3 - 1) = 0^+$

D'où par inverse : $\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{1}{x^3-1} = -\infty$; $\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{1}{x^3-1} = +\infty$

**Limite de $f/g$**

| $f$ \ $g$ | $0$ | $L \neq 0$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $0$ | $(F.I)$ | $\pm\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
| $L' \neq 0$ | $0$ | $L/L'$ | $\pm\infty$ | $\pm\infty$ |
| $+\infty$ | $0$ | $0$ | $(F.I)$ | $(F.I)$ |
| $-\infty$ | $0$ | $0$ | $(F.I)$ | $(F.I)$ |

**Exemple 12 :**

Soit la fonction $h$ définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$h(x) = \frac{\sqrt{x} - 1}{\frac{1}{x} + 1}.$$

La fonction $h$ est le quotient de deux fonctions : $h = \frac{f}{g}$

avec $f(x) = \sqrt{x} - 1$ et $g(x) = \frac{1}{x} + 1$.

On a : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -1$ ; $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = +\infty$

On en déduit par quotient que : $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x) = 0$

On a : $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$ ; $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = 1$.

On en déduit par quotient que : $\lim\limits_{x\to +\infty} h(x) = +\infty$

**Asymptote oblique**

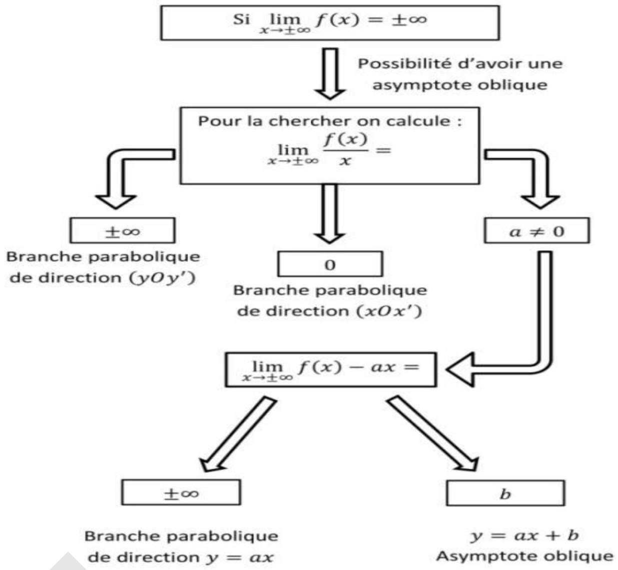
Schéma de recherche de l'asymptote oblique

Si $\lim\limits_{x\to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$, il y a une possibilité d'avoir une asymptote oblique. On calcule $\lim\limits_{x\to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$

Trois cas peuvent se présenter ;

- Si $\lim\limits_{x\to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$, on a une branche parabolique $(BP)$ de direction $(yOy')$.
- Si $\lim\limits_{x\to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, on a une branche parabolique de direction $(xOx')$.
- Si $\lim\limits_{x\to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a \neq 0$, on calcule $\lim\limits_{x\to \pm\infty} (f(x) - ax)$.

  Deux cas peuvent se présenter ;
  - Si $\lim\limits_{x\to \pm\infty} (f(x) - ax) = \pm\infty$, on a une branche parabolique de direction la droite $y = ax$.
  - Si $\lim\limits_{x\to \pm\infty} (f(x) - ax) = b$, la droite $(\Delta): y = ax + b$ est asymptote oblique à la courbe de $f$.




**Exemple 13 :**

Soit la fonction $f$ définie par : $f(x) = \frac{3x^2-2x+2}{x+4}$

**1°)** Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de $f$ et préciser ses bornes.

**2°)** Déterminer les asymptotes éventuelles à la courbe $\mathcal{C}_f$ de $f$.

**Réponse :**

**1°)** Déterminons $\mathcal{D}_f$ et précisons ses bornes :

$f(x)$existe si $x + 4 \neq 0 \Longrightarrow x \neq -4$.

Donc ; $\mathcal{D}_f = \{x \in \mathbb{R} / x \neq -4\}$ d'où,

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-4\} = ]-\infty, -4[\cup]-4, +\infty[$$

Les bornes de $\mathcal{D}_f$ sont : $-\infty$, $-4^-$, $-4^+$, $+\infty$.

**2°)** Déterminons les asymptotes éventuelles à la courbe $\mathcal{C}_f$ de $f$.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{3x^2 - 2x + 2}{x + 4} \\ \quad = \lim\limits_{x\to -\infty} 3x = -\infty \\ \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{3x^2 - 2x + 2}{x + 4} \\ \quad = \lim\limits_{x\to +\infty} 3x = +\infty \end{cases}$$

*(Inexistence d'asymptote horizontale, éventualité d'asymptote oblique).*

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to -4^-} f(x) = \dfrac{58}{0^-} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to -4^+} f(x) = \dfrac{58}{0^+} = +\infty \end{cases} \Longrightarrow \boldsymbol{x = -4} \text{ est } A.V$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{3x^2-2x+2}{x+4}}{x}$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x^2 - 2x + 2}{x^2 + 4x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x^2}{x^2} = 3$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - 3x) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{3x^2 - 2x + 2}{x + 4} - 3x\right)$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-14x + 2}{x + 4} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-14x}{x} = -14$$

$$y = 3x - 14 \text{ est } A.O$$

**Remarque 7 :**

Soit $a$ et $b$ deux réels et soient $f$ et $g$ deux fonctions telles que : $\begin{cases} f(x) = ax + b + g(x) \\ \text{et} \\ \lim\limits_{x \to \pm\infty} g(x) = 0 \end{cases}$

Alors, la droite $\Delta : y = ax + b$ est une asymptote oblique à la courbe $\mathcal{C}_f$ de $f$.

**Exemple 14 :**

Soit la fonction $f$ définie par : $f(x) = \frac{2x^2+3x+1}{x-1}$.

**1°)** Déterminer $\mathcal{D}_f$, ses bornes, préciser les limites de $f$ en ces bornes et en déduire les asymptotes éventuelles à $\mathcal{C}_f$.

**2°)** Déterminer les réels $a$, $b$ et $c$ tels que :

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x-1}$$

Puis en déduire que $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote oblique qu'on notera $\Delta$.

**3°)** Montrer que le point $A(1, a+b)$ est le centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$.

**4°)** Etudier les positions relatives de $\mathcal{C}_f$ et $\Delta$.

**Réponse :**

**1°)** Déterminons $\mathcal{D}_f$, ses bornes, précisons les limites de $f$ en ces bornes et déduisons-en les asymptotes éventuelles à $\mathcal{C}_f$ : $f(x)$ existe si $x - 1 \neq 0 \Longrightarrow x \neq 1$.

Donc ; $\mathcal{D}_f = \{x \in \mathbb{R} / \, x \neq 1\}$, d'où :

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{1\} = ]-\infty, 1[ \cup ]1, +\infty[$$

Les bornes de $\mathcal{D}_f$ sont : $-\infty$, $1^-$, $1^+$, $+\infty$.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{2x^2+3x+1}{x-1} \\ \quad = \lim\limits_{x \to -\infty} 2x = -\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x^2+3x+1}{x-1} \\ \quad = \lim\limits_{x \to +\infty} 2x = +\infty \end{cases}$$

*(Inexistence d'asymptote horizontale, éventualité d'asymptote oblique).*

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \frac{6}{0^-} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \frac{6}{0^+} = +\infty \end{cases} \Longrightarrow \boldsymbol{x = 1} \text{ est } A.V$$

**2°)** Déterminons les réels $a$, $b$ et $c$ tels que :

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x-1}$$

$$= \frac{(ax+b)(x-1)+c}{x-1} = \frac{ax^2 + (b-a)x + c - b}{x-1}$$

Par identification, on a :

$$\begin{cases} a = 2 \\ b - a = 3 \\ c - b = 1 \end{cases} \Longrightarrow \boldsymbol{a = 2, b = 5, c = 6}$$

$$\Longrightarrow f(x) = 2x + 5 + \frac{6}{x-1}$$

Déduisons-en que $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote oblique qu'on notera $\Delta$ :

Comme $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{6}{x-1} = 0 \Longrightarrow \boldsymbol{y = 2x + 5}$ est $\boldsymbol{A.O}$ à $\mathcal{C}_f$

**3°)** Montrons que le point $A(1, a+b)$ est le centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$. $A(1,7)$ est le centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$ si : $f(2 \times 1 - x) + f(x) = 2 \times 7$

$$\Longrightarrow f(2-x) + f(x) = 14$$

$$2(2-x) + 5 + \frac{6}{(2-x)-1} + 2x + 5 + \frac{6}{x-1}$$

$$= 4 - 2x + 5 + \frac{6}{2-x-1} + 2x + 5 + \frac{6}{x-1}$$

$$= -2x + 2x + 4 + 5 + 5 + \frac{6}{1-x} + \frac{6}{x-1}$$

$$14 - \frac{6}{x-1} + \frac{6}{x-1} = 14$$

D'où, $A(1,7)$ est le centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$.

**4°)** Etudions les positions relatives de $\mathcal{C}_f$ et $\Delta$. Pour étudier les positions relatives de $\mathcal{C}_f$ et $\Delta$, on étudie le signe de : $f(x) - y = \frac{6}{x-1}$

| $x$ | $-\infty$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $6$ | $+$ | | $+$ |
| $x-1$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $\frac{6}{x-1}$ | $-$ | $\Vert$ | $+$ |
| $P.R$ | $\Delta / \mathcal{C}_f$ | | $\mathcal{C}_f / \Delta$ |

## 6. Théorèmes de comparaison :

### a) Théorème de majoration, de minoration :

Si pour $x$ assez grand on a $\boldsymbol{f}(x) \geq U(x)$ et si $\lim\limits_{x \to +\infty} U(x) = +\infty$ alors, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ .

Si pour x assez grand on a $\boldsymbol{f}(x)) \leq U(x)$ et si $\lim\limits_{x \to +\infty} U(x) = -\infty$ alors, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ .

**Exemple 15 :**

Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} (-x + \sin x)$ ; $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}$

- On a pour tout $x \in \mathbb{R}$ ; $\sin x \leq 1 \Rightarrow \boldsymbol{f}(x) \leq 1 - x$ et comme $\lim\limits_{x \to +\infty} (1 - x) = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ .
- On a : $1 \leq 1 + x^2 \Rightarrow 1 \leq \sqrt{1+x^2} \Rightarrow \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2} \geq \frac{1}{x^2}$ et comme $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2} = +\infty$.

### b) Théorèmes d'encadrements :

Si pour x assez grand on a $|f(x) - l| \leq U(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} U(x) = 0$.

Alors, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$.

**Exemple 16 :**

Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 + \frac{\sin x}{x}$; $\lim\limits_{x\to 0}(2 - x\cos\frac{1}{x})$.

- On a : $f(x) - 1 = \frac{\sin x}{x}$ ; d'où $|f(x) - 1| = \left|\frac{\sin x}{x}\right| = \frac{|\sin x|}{x}$ ; pour x > 0 ; et comme $|\sin x| \leq 1 \Rightarrow$ $|f(x) - 1| \leq \frac{1}{x}$ ; pour x > 0. Comme $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\frac{1}{x} = 0 \Rightarrow$ $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}(1 + \frac{\sin x}{x}) = 1.$
- On a : $f(x) - 2 = - x\cos\frac{1}{x} \Rightarrow |f(x) - 2| = \left|x\cos\frac{1}{x}\right|$ $= |x|\left|\cos\frac{1}{x}\right|$, et comme $\left|\cos\frac{1}{x}\right| \leq 1 \Rightarrow$ $|(f(x) - 2)| \leq |x|$ et comme $\lim\limits_{x\mapsto 0}|x| = 0 \Rightarrow$ $\lim\limits_{x\mapsto 0} f(x) = 2.$

### c) Théorème des Gendarmes :

Si, pour $x$ assez grand, $u(x) \leq f(x) \leq v(x)$ ; avec $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} u(x) = \lim\limits_{x\mapsto+\infty} v(x) = \ell \Rightarrow \lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x) = \ell.$

**Exemple 17 :**

Calculer $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}$ ; On a : $x^2 \leq 1 + x^2 \leq (1 + x^2)^2 \Rightarrow 1 \leq f(x) \leq 1 + \frac{1}{x}$ ; et comme on a :

$\lim\limits_{x\mapsto+\infty} 1 + \frac{1}{x} = 1 \Rightarrow \lim\limits_{x\mapsto+\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2} = 1.$

## III. Continuité d'une fonction :

### 1. Continuité d'une fonction en un point : Continuité à gauche, continuité à droite :

**Définition :**

Soit $f$ une fonction ; et $I$ un intervalle de son domaine de définition et $x_0$ un réel de $I$.

On dit que $f$ est continue en $x_0$ si seulement si ;

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

On dit que $f$ est continue à gauche en $x_0$ si ;

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

On dit que $f$ est continue à droite en $x_0$ si ;

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

**Exercice 6 :**

Etudier la continuité de $f$ en $x_0$ dans chacun des cas suivants :

1°/ $\begin{cases} f(x) = \dfrac{|x^2 - 5x + 6|}{x - 2} \; si\ x \neq 2 \\ f(2) = \dfrac{5}{4} \end{cases}$ $(x_0 = 2)$,

2°/ $\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{x^2} \; si\ x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$ $(x_0 = 0)$

3°/ $\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sqrt{5x + 1} - 4}{x - 3} \; si\ x \neq 3 \\ f(3) = \dfrac{5}{8} \end{cases}$ $(x_0 = 3)$,

4°/ $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 5x + 6} \; x \neq 2; 3 \\ f(2) = 2 \\ f(3) = 0 \end{cases}$ $(x_0 = 2; 3)$

**Solution :**

1°/ $\begin{cases} f(x) = \dfrac{|x^2 - 5x + 6|}{x - 2} \; si\ x \neq 2 \\ f(2) = \dfrac{5}{4} \end{cases}$ $(x_0 = 2)$

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \frac{|x^2 - 5x + 6|}{x - 2} = \frac{|2^2 - 5\times 2 + 6|}{2 - 2} = \frac{0}{0}\ (F.I)$$

La division euclidienne de $x^2 - 5x + 6$ par $x - 2$ est ; $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$.

$$\lim_{x\to 2}\frac{|x^2 - 5x + 6|}{x - 2} = \lim_{x\to 2}\frac{|(x - 2)(x - 3)|}{x - 2}$$

| $x$ | $-\infty$ | | 2 | | 3 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x - 2$ | | $-$ | 0 | $+$ | \| | $+$ | |
| $x - 3$ | | $-$ | \| | $-$ | 0 | $+$ | |
| $x^2 - 5x + 6$ | | $+$ | 0 | $-$ | \| | $+$ | |

■ $Si\ x \in ]-\infty; 2] \cup [3; +\infty[ \Rightarrow |x^2 - 5x + 6| = x^2 - 5x + 6$

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{|(x - 2)(x - 3)|}{x - 2} = \lim_{x\to 2^-}\frac{(x - 2)(x - 3)}{x - 2} = \lim_{x\to 2^-}(x - 3) = 2 - 3 = -1$$

■ $x \in [2; 3] \Rightarrow |x^2 - 5x + 6| = -x^2 + 5x - 6$

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{|(x - 2)(x - 3)|}{x - 2} = \lim_{x\to 2^+}\frac{(x - 2)(3 - x)}{x - 2} = \lim_{x\to 2^+}(3 - x) = 3 - 2 = 1$$

Donc, $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$

D'où, $f$ n'est pas continue en 2.

2°/ $\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{x^2} \; si\ x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$ $(x_0 = 0)$

On a $f(0) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x} = \frac{1}{0} = +\infty$

D'où, $f$ n'est pas continue en 0.

3°/ $\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sqrt{3x + 1} - 4}{x - 3} \; si\ x \neq 3 \\ f(3) = \dfrac{5}{8} \end{cases}$ $(x_0 = 3)$

On a $f(3) = \frac{5}{8}$ et $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = \lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{5x + 1} - 4}{x - 3}$ $= \frac{4 - 4}{3 - 3} = \frac{0}{0}\ (F.I)$

$$\frac{\sqrt{5x + 1} - 4}{x - 3} = \frac{(\sqrt{5x + 1} - 4)(\sqrt{5x + 1} +* 4)}{(x - 3)(\sqrt{5x + 1} + 4)}$$

$$= \frac{5x + 1 - 16}{(x - 3)(\sqrt{5x + 1} + 4)} = \frac{5x - 15}{(x - 3)(\sqrt{5x + 1} + 4)}$$

$$= \frac{5(x - 3)}{(x - 3)(\sqrt{5x + 1} + 4)} = \frac{5}{\sqrt{5x + 1} + 4}$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{5}{\sqrt{5x + 1} + 4} = \frac{5}{\sqrt{5\times 3 + 1} + 4} = \frac{5}{8}$$

Donc, $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = f(3)$. D'où, $f$ est continue en 3.





Math 6AS.indd 41 26/07/2024 10:40:56

$$4°/\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-5x+6} & x\neq 2;3 \\ f(2)=2 & (x_0=2;3) \\ f(3)=0 \end{cases}$$

**a)** On a $x_0=2$ et $f(2)=2$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-6x+8}{x^2-5x+6}=\frac{2^2-6\times 2+8}{2^2-5\times 2+6}=\frac{0}{0}\ (F.I)$$

La division euclidienne de $x^2-6x+8$ et $x^2-5x+6$ par $x-2$ est :

$$x^2-6x+8=(x-2)(x-4)$$
$$x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$$
$$\frac{x^2-6x+8}{x^2-5x+6}=\frac{(x-2)(x-4)}{(x-2)(x-3)}=\frac{x-4}{x-3}$$
$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-6x+8}{x^2-5x+6}=\lim_{x\to 2}\frac{x-4}{x-3}=\frac{2-4}{2-3}=\frac{-2}{-1}=2$$

D'où, $\lim_{x\to 2}f(x)=f(2)$ d'où, $f$ est continue en2.

**b)** On a $f(3)=0$ et

$$\lim_{x\to 3^-}\frac{x^2-6x+8}{x^2-5x+6}=\frac{3^2-6\times 3+8}{3^2-5\times 3+6}=\frac{17-18}{15-15}=\frac{-1}{0^-}=+\infty$$
$$\lim_{x\to 3^+}\frac{x^2-6x+8}{x^2-5x+6}=\frac{3^2-6\times 3+8}{3^2-5\times 3+6}=\frac{17-18}{15-15}=\frac{-1}{0^+}=-\infty$$

Donc, $\lim_{x\to 3^-}f(x)\neq\lim_{x\to 3^+}f(x)$

D'où, $f$ n'est pas continue en 3.

**Exemple 18 :**

Soit $f$ la fonction définie de la façon suivante :

$$f(x)=\begin{cases} 1+\sqrt{x^2-1} & si & x<-1 \\ \sqrt{-x^2-x} & si & -1\leq x\leq 0 \\ \sqrt{x-x^2} & si & 0<x\leq 1 \\ \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}} & si & x>1 \end{cases}$$

Etudier la continuité de $f$ à gauche et à droite en$x_0$, puis préciser si $f$ est continue en $x_0$, dans chacun des cas suivants ;

**1°/**$x_0=-1$,  **2°/**$x_0=0$,  **3°/**$x_0=1$

**Réponse :**

**1°/**$x_0=-1$ :

**Continuité à gauche**

$$f(-1)=\sqrt{-(-1)^2-(-1)}=\sqrt{-1+1}=0\Rightarrow f(-1)=0$$
$$\lim_{x\to -1^-}f(x)=\lim_{x\to -1^-}\left(1+\sqrt{x^2-1}\right)=\left(1+\sqrt{(-1)^2-1}\right)=1\Rightarrow\lim_{x\to -1^-}f(x)\neq f(-1)$$

D'où, $f$ n'est donc pas continue à gauche en $-1$.

**Continuité à droite**

$$\lim_{x\to -1^+}f(x)=\lim_{x\to -1^+}\sqrt{-x^2-x}=\sqrt{-(-1)^2-(-1)}=1\Rightarrow\lim_{x\to -1^+}f(x)=f(-1)$$

D'où, $f$ est donc continue à droite en $-1$.

**Continuité :**

Comme $f$ est discontinue à gauche en $-1$, $f$ n'est donc pas continue en $-1$.

**2°/**$x_0=0$ :

**Continuité à gauche**

$$f(0)=\sqrt{-0^2-0}=0\Rightarrow f(0)=0$$
$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\sqrt{-x^2-x}=\sqrt{-0^2-0}=0\Rightarrow\lim_{x\to 0^-}f(x)=f(0)$$

D'où, $f$ est donc continue à gauche en0.

**Continuité à droite**

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x-x^2}=\sqrt{0-0^2}=0\Rightarrow\lim_{x\to 0^+}f(x)=f(0)$$

D'où, $f$ est donc continue à droite en0.

**Continuité :**

Comme $\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^-}f(x)=f(0)$, donc $\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)$ d'où $f$ est continue en $x_0=0$.

**3°/**$x_0=1$ :

**Continuité à gauche**

$$f(1)=\sqrt{1-1^2}=\sqrt{1-1}=0\Rightarrow f(1)=0$$
$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}\sqrt{x-x^2}=\sqrt{1-1^2}=0$$

$f(1)=\lim_{x\to 1^-}f(x)$.D'où,$f$est continue à gauche en1.

**Continuité à droite**

$$\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

$f(1)\neq\lim_{x\to 1^+}f(x)$.D'où, $f$n'est pas continue à droite en 1.

**Continuité :**

Comme $f$ est discontinue à droite en 1, $f$ n'est donc pas continue en 1.

## 2. Continuité sur un intervalle :

**Définition :**

On dit qu'une fonction $f$ est continue sur un intervalle $I$, si $f$ est continue en tout point de $I$. C'est-à-dire :

$f$ est continue sur un intervalle $I\Rightarrow f$ est continue en tout point de $I$.

$f$ est continue sur $[a\,;b[$ (resp. $[a\,;+\infty[$) $\Rightarrow f$ est continue sur $]a\,;b[$ (resp. $]a\,;+\infty[$) et à droite en $a$.

$f$ est continue sur $]a\,;b]$ (resp. $]-\infty\,;b]$) $\Rightarrow f$ est continue sur $]a;b[$ (resp. $]-\infty;\ b[$) et à gauche en $b$.

$f$ est continue sur $[a\,;\,b]\Rightarrow f$ est continue sur $]a\,;b[$, à droite en $a$ et à gauche en $b$.

**Remarque 8 :**

Toute fonction polynôme est continue sur $\mathbb{R}$.

Toute fonction rationnelle (quotient de fonctions polynômes) est continue sur son ensemble de définition.

Les fonctions $cos$et $sin$ sont continues sur $\mathbb{R}$.

Les fonctions $tan$ et $cotg$ sont continues chacune sur son ensemble de définition.

Si $U$ et $V$ sont deux fonctions continues sur un intervalle $I$, alors les fonctions :

$U+V, U.V, U^n(n\in\mathbb{N})$ et $|U|$ sont continues sur $I$.

Si $U$ est continue sur $I$, et si $\forall x \in I, U(x) \geq 0$, alors $\sqrt{U}$ est continue sur $I$.

Si $U$ et $V$ sont deux fonctions continues sur un intervalle $I$, et si $U$ et $V$ ne s'annulent pas sur $I$, alors les fonctions : $\frac{U}{V}, \frac{V}{U}, \frac{1}{U}, \frac{1}{V}$ sont continues sur I.

Si $U$ est continue sur $I$, et $V$ est continue sur $J = f(I)$, alors $V \circ U$ est continue sur $I$.

**Exercice 7 :**

Soit $f$ la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x\sqrt{-x}\ ;\ si\ x \leq 0 \\ \dfrac{4-2x}{\sqrt{4x-x^2}}\ ;\ si\ 0 < x < 4 \\ \sqrt{x^2-4x}\ ;\ si\ x \geq 4 \end{cases}$$

**1°)** Déterminer $\mathcal{D}_f$.

**2°)** Etudier la continuité de $f$ sur chacun des intervalles suivants :

**a)** $I_1 = ]-\infty; 0]$, **b)** $I_2 = ]0; 4[$, **c)** $I_3 = [0; 4[$,
**d)** $I_4 = ]0; 4]$, **e)** $I_5 = [4; +\infty[$

**Solution :**

**1°)** Comme $x \in ]-\infty; 0] \Longrightarrow x \leq 0 \Longrightarrow -x \geq 0$,
$f(x) = x\sqrt{-x}$ est définie pour tout $x \in ]-\infty; 0]$.

$$4x - x^2 = 0 \Longrightarrow x(4-x) = 0 \Longrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ ou \\ x = 4 \end{cases}$$

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $\vert$ | $+$ | |
| $4-x$ | | $+$ | $\vert$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $4x-x^2$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $\vert$ | $-$ | |

Donc, $x \in ]0\ ;\ 4[, 4x - x^2 > 0$, d'où ;

$$f(x) = \frac{4-2x}{\sqrt{4x-x^2}} \text{ est définie pour tout } x \in ]0; 4[$$

$$x^2 - 4x = 0 \Longrightarrow x(x-4) = 0 \Longrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ ou \\ x = 4 \end{cases}$$

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $\vert$ | $+$ | |
| $x-4$ | | $-$ | $\vert$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $x^2-4x$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $\vert$ | $+$ | |

Donc, $x \in [4; +\infty[, 4x - x^2 > 0$,
d'où ; $f(x) = \sqrt{x^2-4x}$ est définie pour tout $x \in [4; +\infty[$. Donc,

$$\mathcal{D}_f = ]-\infty; 0] \cup ]0; 4[ \cup [4; +\infty[ = ]-\infty; +\infty[ = \mathbb{R}$$

**2°)** La continuité de $f$

**a)** $I_1 = ]-\infty; 0]$, $f(x) = x\sqrt{-x}$

Le produit de $x \longmapsto x$ (*fonction polynôme*) et de $x \longmapsto \sqrt{-x}$ (*fonction racine carrée d'une fonction polynôme positive*), d'où, $f$ est continue sur $I_1 = ]-\infty; 0]$

**b)** $I_2 = ]0; 4[$, $f(x) = \dfrac{4-2x}{\sqrt{4x-x^2}} = U(x).\dfrac{1}{V(x)}$

On a $U$ est polynôme et $V$ est racine carrée d'une fonction polynôme strictement positive, d'où $f$ est continue sur l'intervalle ouvert $I_2 = ]0; 4[$.

**c)** $I_3 = [0; 4[$, on vient de montrer en **b)** que $f$ est continue sur l'intervalle $I_2 = ]0; 4[$, étudions la continuité de $f$ à droite en 0.

$f(0) = 0\sqrt{0} = 0 \Longrightarrow f(0) = 0$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{4-2x}{\sqrt{4x-x^2}} = \frac{4-2\times 0}{\sqrt{4\times 0-0^2}} = \frac{4-0}{\sqrt{0}}$$

$$= \frac{4}{0^+} = +\infty\ ;\ \lim_{x \to 0^+} f(x) \neq f(0)$$

D'où, $f$ n'est pas continue à droite en 0.
Donc, $f$ n'est pas continue en 0.
Donc, $f$ n'est pas continue sur $I_3 = [0; 4[$.

**d)** $I_4 = ]0; 4]$, on a montré en **b)** que $f$ est continue sur l'intervalle $I_2 = ]0; 4[$, étudions la continuité de $f$ à gauche en 4.

$$f(4) = \sqrt{4^2 - 4\times 4} = 0 \Longrightarrow f(4) = 0$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{4-2x}{\sqrt{4x-x^2}}$$

$$= \frac{4-2\times 4}{\sqrt{4\times 4-4^2}} = \frac{4-8}{\sqrt{0}} = \frac{-4}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) \neq f(0)$$

D'où, $f$ n'est pas continue à gauche en 4.
Donc, $f$ n'est pas continue en 4.
Donc, $f$ n'est pas continue sur $I_4 = ]0; 4]$.

**e)** $I_5 = [4; +\infty[, f(x) = \sqrt{x^2-4x}$. Or $\forall x \in [4; +\infty[$, $x^2 - 4x \geq 0, f(x) = \sqrt{x^2-4x}$ est la racine carrée d'une fonction polynôme positive sur $I_5 = [4; +\infty[$, $f$ est donc continue sur $I_5 = [4; +\infty[$.

## 3. Prolongement par continuité :

### Définition :

Soit $f$ une fonction et soit $\mathcal{D}_f$ son domaine de définition.

Si $x_0 \notin \mathcal{D}_f$, et si $f$ admet une limite finie $l$ en $x_0$, alors $f$ admet un prolongement $g$ par continuité en $x_0$ défini par : $g(x) = \begin{cases} f(x) & si & x \neq x_0 \\ l & si & x = x_0 \end{cases}$

**Exemple 19 :**

Dans chacun des cas suivants, préciser si $f$ admet un prolongement par continuité en $x_0$ puis préciser ce prolongement s'il existe ;

**1°/** $f(x) = \dfrac{|2x^2-5x+3|}{x-1}$, $\quad (x_0 = 1)$

**2°/** $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, $\quad (x_0 = 0)$

**3°/** $f(x) = \dfrac{\sqrt{5x+1}-4}{x-3}$, $\quad (x_0 = 3)$

**Réponse :**

**1°/** $f(x) = \dfrac{|2x^2-5x+3|}{x-1}$

$f$ est défini si $x - 1 \neq 0, x \neq 1, \mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$
Donc, $1 \notin \mathcal{D}_f$.

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{|2x^2-5x+3|}{x-1} = \frac{0}{0}\ (F.I)$$

$$2x^2-5x+3=0 \Longrightarrow \begin{cases} x=1 \\ ou \\ x=\frac{3}{2} \end{cases}$$

$$f(x)=|2x^2-5x+3|=\left|2(x-1)\left(x-\frac{3}{2}\right)\right|$$

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $\frac{3}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2x^2-5x+3$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

Si $x \in ]-\infty;1[,\ 2x^2-5x+3>0$, d'où ;

$$\lim_{x\to1^-}\frac{|2x^2-5x+3|}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{2(x-1)\left(x-\frac{3}{2}\right)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1^-}2\left(x-\frac{3}{2}\right)=2\times\frac{-1}{2}=-1$$

Si $x \in \left]1;\frac{3}{2}\right[,\ 2x^2-5x+3<0$, d'où ;

$$\lim_{x\to1^+}\frac{|2x^2-5x+3|}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{-2(x-1)\left(x-\frac{3}{2}\right)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1^+}-2\left(x-\frac{3}{2}\right)=-2\times\frac{-1}{2}=1$$
$$\lim_{x\to1^-}f(x)\neq\lim_{x\to1^+}f(x)$$

D'où, $f$ n'admet pas une limite, et n'admet donc pas de prolongement par continuité en 1

**2°/** $f(x)=\frac{1}{x^2}$, $\quad x_0=0$

$f$ est définie si $x\neq0, \mathcal{D}_f=\mathbb{R}\setminus\{0\}=\mathbb{R}^*$; donc $0\notin\mathcal{D}_f$.

$$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2}=\frac{1}{0}=+\infty$$

D'où, $f$ n'admet pas une limite, et n'admet donc pas un prolongement par continuité en 0.

**3°/** $f(x)=\frac{\sqrt{5x+1}-4}{x-3}$, $\quad x_0=3$

$f$ est définie si : $\begin{cases} x-3\neq0 \\ 5x+1\geq0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x\neq3 \\ x\geq\frac{-1}{5} \end{cases}$

$\mathcal{D}_f=\left[\frac{-1}{5};+\infty\right[\setminus\{3\}$. Donc, $3\notin\mathcal{D}_f$.

$$\lim_{x\to3}f(x)=\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{5x+1}-4}{x-3}=\frac{4-4}{3-3}=\frac{0}{0}\ (F.I)$$
$$\frac{\sqrt{5x+1}-4}{x-3}=\frac{(\sqrt{5x+1}-4)(\sqrt{5x+1}+4)}{(x-3)(\sqrt{5x+1}+4)}$$
$$=\frac{5x+1-16}{(x-3)(\sqrt{5x+1}+4)}$$
$$=\frac{5(x-3)}{(x-3)(\sqrt{5x+1}+4)}=\frac{5}{\sqrt{5x+1}+4}$$
$$\lim_{x\to3}f(x)=\lim_{x\to3}\frac{5}{\sqrt{5x+1}+4}=\frac{5}{8}$$

D'où, $f$ admet un prolongement par continuité en 3 défini par :

$$\begin{cases} g(x)=f(x) \quad si \quad x\in\left[\frac{-1}{5};+\infty\right[\setminus\{3\} \\ g(3)=\frac{5}{8} \end{cases}$$

Ou encore par : $g(x)=\frac{5}{\sqrt{5x+1}+4}$

**Exemple 20 :**

Un prolongement par continuité de la fonction :

$f(x)=\frac{x^3-x^2}{x-1}$ au point $x_0=1$ est tel que : on a : $\lim_{x\to1}\frac{x^3-x^2}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{x^2(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{x^2(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to1}x^2=1$ ; donc la fonction $g(x)=\begin{cases} f(x) & ;\ x\in D_f \\ g(1)=1 \end{cases}$

est un prolongement par continuité de $f$ sur $\mathbb{R}$.

**Exemple 21 :**

Soit la fonction $f$ définie par : $f(x)=\frac{x^2-25}{x+5}$

Montrer que $f$ est prolongeable par continuité en $x_0=-5$ et donner son prolongement.

**Réponse :**

$$\lim_{x\to-5}f(x)=\lim_{x\to-5}\frac{x^2-25}{x+5}=\frac{0}{0}\ (F.I)$$

La levée de l'indétermination :

$$\lim_{x\to-5}f(x)=\lim_{x\to-5}\frac{x^2-25}{x+5}=\lim_{x\to-5}\frac{(x-5)(x+5)}{x+5}$$
$$=\lim_{x\to-5}(x-5)=-10$$

$f$ est donc prolongeable au point $x_0=-5$ et son prolongement par continuité est :

$$g(x)=\begin{cases} f(x)=\frac{x^2-25}{x+5} & si \quad x\neq-5 \\ -10 & si \quad x=-5 \end{cases}$$

**Exemple 22 :**

Soit la fonction $f$ définie par :

$$f(x)=\begin{cases} x^2-1\ ;\ si\ x<2 \\ x+3\ ;\ si\ x\geq2 \end{cases}$$

Etudier la continuité de $f$ en $x_0=2$

**Réponse :**

$f(2)=2+3=5$

$\lim_{x\to2^-}f(x)=\lim_{x\to2^-}(x^2-1)=4-1=3$

$\lim_{x\to2^+}f(x)=\lim_{x\to2^+}(x+3)=2+3=5$

$\lim_{x\to2^-}f(x)\neq f(2)$. D'où, $f$ n'est pas continue à gauche en 2.

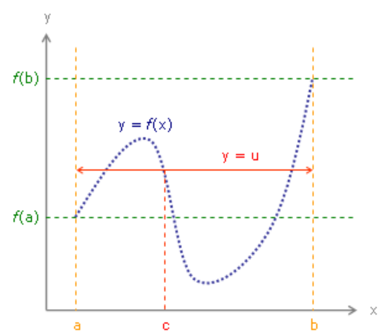
$\lim_{x\to2^+}f(x)=f(2)=5$.

D'où, $f$ est continue à droite en 2.

## 4. Théorème des valeurs intermédiaires :

**Théorème : (admis)**

Soit $f$ : [a, b]→R une fonction continue sur cet intervalle. Pour tout réel y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe c ∈[a, b] tel que $f(c)$ = y.

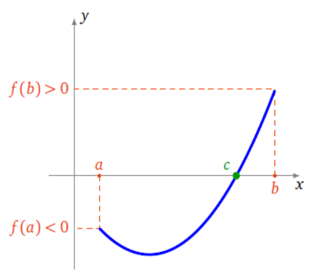





Math 6AS.indd 44 26/07/2024 10:41:01

**Remarque 9 :**
Ce théorème est appelé **Théorème des valeurs intermédiaires**
Voici la version la plus utilisée du théorème des valeurs intermédiaires.

***Corollaire 1 :***
Soit $f$ : [a, b]→IR une fonction continue sur l'intervalle [a,b].
Si $f$(**a**) ·$f$(**b**) <0, alors il existe c ∈ ]a,b[ tel que $f$(c)=0.

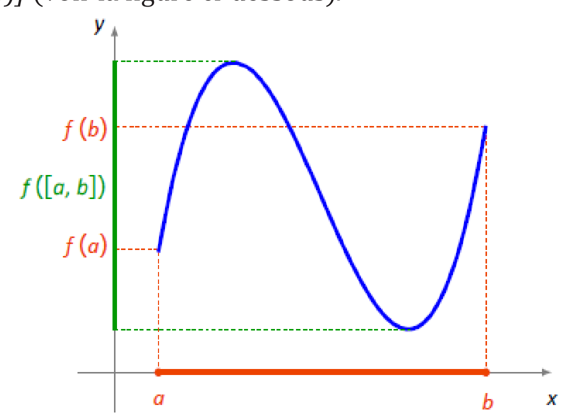



**Démonstration :**
Ils'agit d'une application directe du théorème des valeurs intermédiaires avec y=0. L'hypothèse $f(a)\cdot f(b)<0$ signifiant que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires.

**Exercice 8 :**
On pose $\forall x \in \mathbb{R};\ f(x) = x^2 + x - 1$
Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle ]0 ; 1[.
**Solution :**
Comme f est une fonction polynôme définie et continue sur $\mathbb{R}$, et comme $f(0) = -1$ et $f(1) = 1$, donc d'après le corollaire du théorème de la valeur intermédiaire, il existe au moins un réel c ∈ ]0 ; 1[ tel que ; $f(c) = 0$.
L'équation $f(x) = 0$ admet donc au moins une solution dans l'intervalle ]0 ; 1[.
Voici une formulation plus théorique du théorème des valeurs intermédiaires.

**Corollaire2 :**
Soit $f$ : I→$\mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle.
Alors f(I) est un intervalle.

**Attention !** Il serait faux de croire que l'image par une fonction f de l'intervalle $[a, b]$ soit l'intervalle *[f(a), f(b)]* (voir la figure ci-dessous).




**Démonstration :**
Soient $y_1$ et $y_2 \in$ f(I), $y_1 < y_2$. Montrons que si y∈ [ $y_1, y_2$], alors y ∈ f(I). Par hypothèse, il existe $x_1$, $x_2 \in$ I tels que $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$ et donc y est compris entre $f(x_1)$ et $f(x_2)$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, comme f est continue, il existe donc x ∈ I tel que y =f (x) et ainsiy ∈ f(I).
**Théorème 2 :**
Soit $f$ : [a, b]→ $\mathbb{R}$ une fonction continue sur ce segment. Alors il existe deux réels m et M tels que $f([a, b]) = [m, M]$. Autrement dit, l'image d'un segment par une fonction continue est un segment.
**Remarque 10 :**
Comme on sait déjà par le théorème des valeurs intermédiaires que f ([a, b]) est un intervalle, le théorème précédent signifie exactement que :
Si f est continue sur [a, b], alors f est bornée sur [a, b], et elle atteint ses bornes.
Donc m est le minimum de la fonction sur l'intervalle [a, b] alors que M est le maximum.

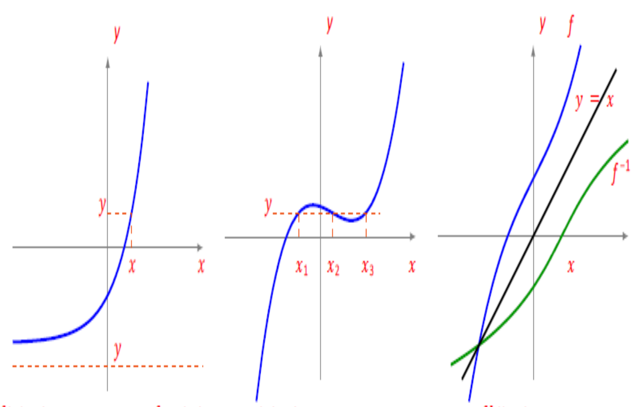
## IV. Fonctions monotones et bijections :

### 1. Rappels : injection, surjection, bijection

Dans cette section nous rappelons les connaissances nécessaires concernant les applications bijectives.
**Définition :**
*Soit f :E→F* une fonction, *E et* F étant des parties de $\mathbb{R}$.

- F est **injective** si $\forall x, y \in E\ f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$;
- F est **surjective** si $\forall y \in F\ \exists x \in E\ / y = f(x)$;
- F est **bijective** si $f$ est à la fois injective et surjective, c'est-à-dire si $\forall y \in F\ \exists! x \in E / \ y = f(x)$.

**Proposition :**




*f injective* *f surjective et non injective* *f bijective*

*Si f : E→F* est une fonction bijective alors il existe une unique application $g$ : F→E telle que :
$g \circ f = id_E$ *et* $f \circ g = id_F$.
La fonction $g$ est la **bijection réciproque** de $f$ est notée $f^{-1}$.

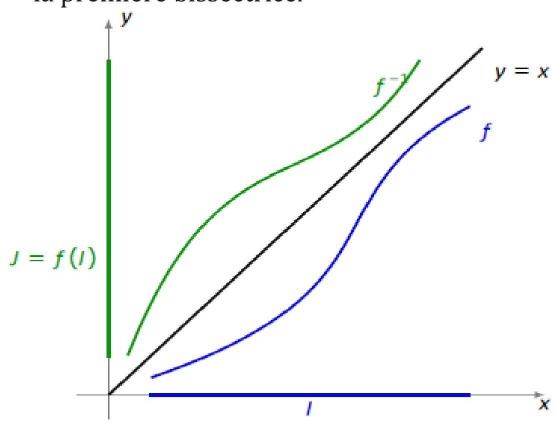




Math 6AS.indd 45 26/07/2024 10:41:02

**Remarque 11 :**

- On rappelle que l'**identité**, $id_E : E \to E$ est simplement définie par $x \longmapsto x$.
- $g \circ f = id_E$ *se reformule ainsi :* $\forall x \in E, g(f(x)) = x$.
- *Alors que* $f \circ g = id_F$ *s'écrit :* $\forall x \in F,\ f(g(y)) = y$
- Dans un repère orthonormé les graphes des fonctions $f$ *et* $f^{-1}$ sont symétriques par rapport à la première bissectrice.




## 2. Fonctions monotones et bijections :

Voici un théorème très utilisé dans la pratique pour montrer qu'une fonction est bijective.

**Théorème 3:** (***Théorème de la bijection***)

*Soit* $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I de IR. *Si* $f$ est continue et strictement monotone sur I, alors *:*

1. F établit une bijection de l'intervalle $I$ dans l'intervalle image $J = f(I)$,
2. La fonction réciproque $f^{-1}: J \to I$ est continue et strictement monotone sur J et elle a le même sens de variation que $f$.

En pratique, si on veut appliquer ce théorème à une fonction continue $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$, on découpe l'intervalle I en sous-intervalles sur lesquels la fonction $f$ est strictement monotone.

**Exemple 23 :**

Considérons la fonction carrée définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2$. La fonction f n'est pas strictement monotone sur $\mathbb{R}$ *:* elle n'est pas même pas injective car un nombre et son opposé ont même carré. Cependant, en restreignant son ensemble de définition à $]-\infty, 0]$ d'une part et à $[0, +\infty[$ d'autre part, on définit deux fonctions strictement monotones :

$$\begin{array}{ccc} ]-\infty, 0] \to [0, +\infty[ & \qquad & [0, +\infty[ \to [0, +\infty[ \\ x \mapsto x^2 & & x \mapsto x^2 \end{array}$$

*On a :* $f(]-\infty\,; 0]) = f([0\,; +\infty[) = [0\,;\ +\infty[$.

*D'après le théorème précédent, les fonctions* $f_1$ *et* $f_2$ *sont des bijections.*

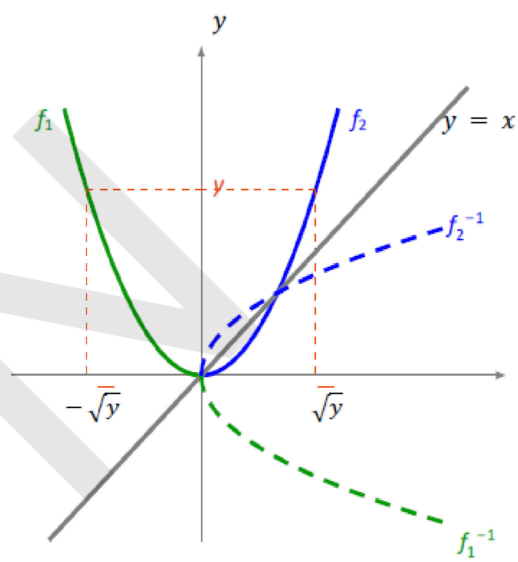
*Déterminons leurs fonctions réciproques* $f_1^{-1}$: $[0\,; +\infty[ \to ]-\infty\,;\ 0]$ et $f_2^{-1}$: $[0, +\infty[ \to [0, +\infty[$.

*Soient deux réels x et y tels que y≥0. Alors :*

$y = f(x) \Leftrightarrow y = x^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{y}$ *ou* $x = -\sqrt{y}$.

c'est-à dire y admet(au plus) deux antécédents, l'un dans $[0, +\infty[$ et l'autre dans $]-\infty\,;\ 0]$. Et donc $f_1^{-1}(y) = -\sqrt{y}$ et $f_2^{-1}(y) = \sqrt{y}$. On vérifie bien que chacune des deux fonctions $f_1$ et $f_2$ a le même sens de variation que sa réciproque.

On remarque que la courbe totale en pointillé (à la fois la partie bleue et la verte), qui est l'image du graphe de f par la symétrie par rapport à la première bissectrice, ne peut pas être le graphe d'une fonction : c'est une autre manière de voir que f n'est pas bijective.




*Généralisons en partie l'exemple précédent.*

**Exemple 24 :**

*Soit n >1. Soit* $f : [0, +\infty[ \to [0, +\infty[$ *définie par :* $f(x) = x^n$. *Alors f est continue et strictement croissante. Comme* $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$ *; alors f est une bijection. Sa* bijection réciproque $f^{-1}$ est notée : $x \mapsto x^{\frac{1}{n}}$(ou aussi $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ *)* c'est la fonction racine n-ième.

Elle est continue et strictement croissante.

***Démonstration :***

On établit d'abord une proposition utile à la démonstration du «théorème de la bijection».

**Proposition :**

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$. Si $f$ est strictement monotone sur $I$, alors $f$ est injective sur $I$.

***Démonstration :***

*Soient x, x'∈ I tels que* $f(x) = f(x')$*. Montrons que* $x = x'$*. Si on avait* $x<x'$, alors on aurait nécessairement $f(x)<f(x')$ *ou* $f(x)>f(x')$*, suivant que f est strictement croissante, ou strictement décroissante. Comme c'est impossible, on en déduit que* $x \leq x'$*. En échangeant les* *rôles de x et de x', on montre de même que x'≤ x.On en conclut que x = x' et donc que f est injective.*

***Démonstration du théorème :*** (***Pour la série Mahts***)

1. D'après la propriété précédente, $f$ est injective sur I. En restreignant son ensemble d'arrivée à son image $J=f(I)$, on obtient que f établit une bijection de $I$ dans $J$. Comme f est continue, par le théorème des valeurs intermédiaires, l'ensemble $J$ est un intervalle.
2. *Supposons pour fixer les idées que f est strictement croissante.*

   (a) *Montrons que $f^{-1}$ est strictement croissante sur J. Soient y et y' ∈ J tels que y< y'.*

   *Notons $x = f^{-1}(y) \in I$ et $x' = f^{-1}(y') \in I$. Alors $y = f(x)$, $y' = f(x')$ et donc :*

   $y < y' \Rightarrow f(x) < f(x')$

   $\Rightarrow x < x' \Rightarrow f^{-1}(y) < f^{-1}(y')$ *c'est-à-dire*

   $f^{-1}$ est strictement croissante sur $J$.

   (b) Montrons que $f^{-1}$ *est continue sur J. On se limite au cas où I est de la forme ]a, b[, les autres cas se montrent de la même manière. Soit $y_0 \in J$. On note $x_0 = f^{-1}(y_0) \in I$.*

   *Soit $\varepsilon > 0$. On peut toujours supposer que $[x_0 - \varepsilon\,;\, x_0 + \varepsilon] \subset I$. On cherche un réel $\delta > 0$ tel que pour tout $y \in J$ on ait $y_0 - \delta < y < y_0 + \delta$ $\Rightarrow f^{-1}(y_0) - \varepsilon < f^{-1}(y) < f^{-1}(y_0) + \varepsilon$ c'est-à-dire tel que pour tout $x \in I$ on ait :*

   $y_0 - \delta < f(x) < y_0 + \delta \Rightarrow f^{-1}(y_0)) - \varepsilon < x < f^{-1}(y_0) + \varepsilon$.

   *Or, comme f est strictement croissante, on a pour tout $x \in I$*

   $f(x_0 - \varepsilon) < f(x) < f(x_0 + \varepsilon) \Rightarrow x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon \Rightarrow f^{-1}(y_0) - \varepsilon < x < f^{-1}(y_0) + \varepsilon$.

Comme $f(x_0 - \varepsilon) < y_0 < f(x_0 + \varepsilon)$, on peut choisir le réel $\delta > 0$ tel que :

$f(x_0 - \varepsilon) < y_0 - \delta$ et $f(x_0 + \varepsilon) > y_0 + \delta$ et on a bien alors pour tout $x \in I$ $y_0 - \delta < f(x) < y_0 - \delta$

$\Rightarrow f(x_0 - \varepsilon) < f(x) < f(x_0 + \varepsilon)$

$\Rightarrow f^{-1}(y_0) - \varepsilon < x < f^{-1}(y_0) + \varepsilon$.

La fonction $f^{-1}$ est donc continue sur $J$.

## A. Applications :

### Limites d'une fonction polynôme à l'infini

**Exemple 1 :**

Calculer la limite en +∞ de la fonction : $f(x) = 3x^4 - 2x^2$

**Réponse :**

On a : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) = 3x^4 - 2x^2 = 3x^4\left(1 - \frac{2}{3x^2}\right)$

et on a: $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} 3x^4 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} (1 - \frac{2}{3x^2}) = 1 \Rightarrow$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ ;

Plus généralement, on a, la propriété suivante :

- La limite à l'infini d'une fonction polynôme est égale à la limite de son monôme du plus haut degré.

### Limite d'une fonction rationnelle à l'infini

**Exemple 2 :**

Calculer la limite en +∞ de la fonction rationnelle :

$f(x) = \frac{3x^2+2x^2}{-7x^5+11}$.

**Réponse :**

On a : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$; $\frac{3x^4+2x^2}{-7x^5+11} = \frac{3x^4\left(1+\frac{2x^2}{3x^4}\right)}{-7x^5\left(1-\frac{11}{7x^5}\right)} = \frac{3x^4}{-7x^5} \times \frac{1+\frac{2x^2}{3x^4}}{1-\frac{11}{7x^5}}$

on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3x^4}{7x^5} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3}{7x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1+\frac{2x^2}{3x^4}}{1-\frac{11}{7x^5}} = 1$ ; d'où

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3x^4+2x^2}{-7x^5+11} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3x^4}{-7x^5} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3}{-7x} = 0$,

Plus généralement, on a la propriété suivante :
La limite à l'infini d'une fonction rationnelle est égale à la limite à l'infini du quotient des monômes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur.

### Autres types de fonctions

**Exemple 3 :**

Déterminer la limite en +∞ de la fonction

$f(x) = \sqrt{x^2+1} - x$ et en 2 de la fonction $f(x) = \frac{x^2-4}{x^2+2x-8}$.

**Réponse :**

- On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+1} - x = +\infty - (+\infty) =$ ; donc on ne peut pas conclure directement.

  Mais, $\forall x \in \mathbb{R}$; $\sqrt{x^2+1} + x \neq 0$, donc on peut écrire ;

  $$f(x) = \frac{(\sqrt{x^2+1} - x)(\sqrt{x^2+1} + x)}{(\sqrt{x^2+1} + x)}$$

  $$= \frac{1}{(\sqrt{x^2+1} + x)}$$

d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\frac{1}{(\sqrt{x^2+1}+x)} = 0.$

- On a $\lim\limits_{x\to2} x^2 - 4 = 0$ *et* $\lim\limits_{x\to2} x^2 + 2x - 8 = 0$ ; donc

  on ne peut conclure directement.

  Mais, $\forall x \in \mathbb{R} - \{-4; 2\}$; *ona* :

$$\frac{x^2-4}{x^2+2x-8} = \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x+4)} = \frac{x+2}{x+4}$$

Or, $\lim\limits_{x\to2} \frac{(x+2)}{(x+4)} = \frac{2}{3}$ ; donc $\lim\limits_{x\to2} f(x) = \frac{2}{3}$.

**Exemple 4 :**

L'objectif de cet exercice est d'établir des limites qui seront investies ultérieurement.

1) Soit x $\in$ $]0\,;\,\frac{\pi}{2}[$, M son image sur le cercle trigonométrique C et N le point d'intersection de la droite (OM) avec la tangente à C en I.

Calculer en fonction de x les aires des triangles OIM et OIN, ainsi que l'aire du secteur circulaire OIM.

En déduire que : sinx$\leq$ x $\leq$tanx .

2) On suppose maintenant que x $\in$ $]0\,;\frac{\pi}{2}[$,

a) Démontrer que $|\sin x| \leq |x|$ , en déduire que $\lim\limits_{x\to0}$sinx = 0.

b) Démontrer que : $\lim\limits_{x\to0}$ cos2x = 1 , en déduire que $\lim\limits_{x\to0}$cosx = 1.

3) On suppose maintenant que x $\in$ $]-\frac{\pi}{2}\,;0\,[\,\cup\,]0\,;\frac{\pi}{2}\,[$

a) Démontrer que : cosx$\leq\frac{\sin x}{x}\leq$ 1 ; en déduire que : $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}$=1.

b) Vérifier que $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2.\frac{1}{1+\cos x}$,

en déduire que : $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$.

c) Déterminer la limite en 0 de f tq $f$(x) =$\frac{\cos x-1}{x}$

**Réponse :**

1) A ( OIM) = $\frac{B\times h}{2} = \frac{1\times\sin x}{2} = \frac{1}{2}\sin x$ ;

A(OIN) = $\frac{B\times h}{2} = \frac{1\times\tan x}{2} = \frac{1}{2}\tan x$ ;

A(OÎM)= $\frac{x}{2\pi}\times\pi\times1^2 = \frac{x}{2}$; A(OIM)$\leq$ A (OÎM)$\leq$ A (OIN)

$\Leftrightarrow\frac{\sin x}{2}\leq\frac{x}{2}\leq\frac{\tan x}{2}\Leftrightarrow \sin x\leq x\leq\tan x.$

2) a) l'inégalité est évidente pour $x = 0$; pour $x \neq 0$ ; deux cas sont envisageables ;

- 1[er] cas : $0\leq x\leq\frac{\pi}{2}$ ; d'après la question 1) on a :

  $0 \leq\sin x\leq x$; donc $|\sin x| \leq |x|$.

- 2[ème] cas : $-\frac{\pi}{2}\leq x\leq 0$ ; on a : $0\leq -x\leq\frac{\pi}{2}$ ; donc ; d'après

  1) on a : $|\sin(-x)| \leq |-x| \Rightarrow |\sin(x)| \leq |x|$ ;

On a ;$\lim\limits_{x\to0}|x| = 0$ et $\forall\, x \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$; $|\sin x| \leq |x| \Rightarrow \lim\limits_{x\mapsto0}\sin x = 0$ .( Th. des Gendarmes).

b) On a $\lim\limits_{x\to0}\cos 2x = \lim\limits_{x\to0}(1-2\sin^2 x) = 1$. On pose $x$ = 2a ; on a : $\lim\limits_{x\to0}\cos x = \lim\limits_{a\to0}\cos 2a = 1$

3) a) Deux cas sont à envisager :

- 1[er] cas ; $0< x <\frac{\pi}{2}$ ; d'après la question 1) on a :

$0 < \sin x < x < \frac{\sin x}{\cos x} \leq \frac{1}{\cos x}$ ;

on en déduit que : $\cos x\leq\frac{\sin x}{\cos x}\leq 1$.

- 2[ème] cas ; $-\frac{\pi}{2}< x <0$ ; $\Rightarrow$ $0 <- x <\frac{\pi}{2}$; d'après le cas

précédent

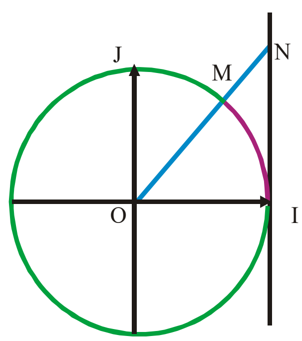
$\cos(-x) \leq\frac{\sin(-x)}{\cos(-x)}\leq$ 1 ; on en déduit que :

$\cos x\leq\frac{\sin x}{\cos x}\leq 1$ ;

on a : $\lim\limits_{x\to0}\cos x = 1$ ; donc, d'après le théorème d'encadrement : $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x} = 1$

b) On a :

$\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\frac{1}{1+\cos x} = \frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)} = \frac{1-\cos x}{x^2}$.




De plus ; $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x} = 1$ et

$\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{1+\cos x} = \frac{1}{2}$ ; donc,

$\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$;

c) On a : $\frac{1-\cos x}{x} = x\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim\limits_{x\mapsto0}\frac{\cos x-1}{x} = 0$

## B. Exercices généraux

**1.** Soit la fonction $f(x) = x - \sqrt{x}$,
Démontre que $\forall x \in ]4\,;\,+\infty[;\ f(x) > \sqrt{x}$.
2)a) Trouver un réel A pour lequel :
$x > A \Rightarrow f(x) > 10^4$
b) B étant un nombre réel strictement positif, trouve un réel A tel que $x > A \Rightarrow f(x) > B$.
c) En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

**2.** Soit la fonction $f(x) = \frac{x+2}{x+1}$
Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*\ |f(x) - 1| < \frac{1}{x}$,
2) a) Trouver un réel A pour lequel : $x > A \Rightarrow$
$|f(x) - 1| < 10^{-4}$.
b) ε étant u réel strictement positif, trouver un nombre réel A pour lequel $x > A \Rightarrow |f(x) - 1| < \varepsilon$
c) En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

**3.** Soit la fonction $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$
1 ) Démontrer que : $\forall x \in ]\,1\,;+\infty[\,;\ f(x) > \frac{x}{2}$
2) a) Comment choisir x pour que $|f(x)| > 10^6$ ?
b) Peut-on rendre $f(x)$ aussi grand que l'on veut ?
c) En déduire la limite de $f$ en $+\infty$.

**4.** Utiliser les propriétés de comparaison pour calculer les limites des fonctions suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2 + \cos^2 x}\ ;\ \lim_{x\to+\infty} x\sqrt{1 + \sin^2 x}\ ;$$
$$\lim_{x\to-\infty} x\sqrt{1 + \sin^2 x}$$

**5.** Soit la fonction $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x} - 1}$
Démontrer que $\forall x \in ]\,1\,;+\infty[\,;\ f(x) > \sqrt{x} + 1$, en déduire la limite de f en $+\infty$.

**6.** Dans chacun des cas suivants calculer les limites de $f$ en $+\infty$ et $-\infty$.
a) $f(x) = 4x^3 + 3x^2 - 1$ ; b) $f(x) = x^4 - 3x^2 + 2x$ ;
c) $f(x) = -x^3 + 5x^2 - 7x$ ; d) $f(x) = 4x^2 - 3x^2 + 2x$
e) $f(x) = -x^6 - x^2 + 4$ ; f) $f(x) = \frac{4x-5}{2x+3}$ ;
g) $f(x) = \frac{4x-5}{x+4}$ ; h) $f(x) = \frac{x^2+4}{x^3-1}$ ;

**7.** Dans chacun des cas suivants, calculer les limites de $f$ en $x_0$ (éventuellement à gauche et à droite).
a) $f(x) = \frac{3}{(x-2)^2}$; $x_0 = 2$ ;
b) $f(x) = \frac{x^2-4}{x+2}$; $x_0 = -2$ ;
c) $f(x) = \frac{x^2+3x-4}{x^2-2}$; $x_0 = -1$ ;
d) $f(x) = \frac{x}{x^2-4} - \frac{1}{x-2}$; $x_0 = 2$ ;
e) $f(x) = \frac{1}{x(x-1)} - \frac{1}{x}$; $x_0 = 0$ ;

**8.** Dans chacun des cas suivants étudier la limite de $f$ en $x_0$ (éventuellement à gauche et à droite).
a) $f(x) = \frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$; $x_0 = 4$ ;
b) $f(x) = \frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}$; $x_0 = 2$
c) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}-1}$; $x_0 = 0$ ;
d) $f(x) = \frac{x\sqrt{x}-8}{4-x}$; $x_0 = 4$ ;

**9.** Dans chacun des cas suivants calculer la limite de $f$ en $+\infty$ et $-\infty$ .
a) $f(x) = \frac{\sqrt{3x+1}}{3x-1}$; b) $f(x) = x + 2 + \sqrt{x^2 - 3x + 1}$
c) $f(x) = \frac{\sqrt{3x^2+1}+5x}{3x-1}$; d) $f(x) = \sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2+1}$
e) $f(x) = \frac{\sqrt{3x^2+1}}{\sqrt{4x^2+3}}$; f) $f(x) = \frac{x-\sqrt{x^2-3x+1}}{2x+\sqrt{4x^2+x}}$.

**10.** Calculer les limites suivantes :
a) $\lim\limits_{x\to0} \frac{x}{\sin x}$ ; b) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x} + \tan x\right)$ ;
c) $\lim\limits_{x\to0} \frac{\tan x}{x}$ ; d) $\lim\limits_{x\to0} \frac{\sin 3x}{2x}$
e) $\lim\limits_{x\to0} \frac{\tan 2x}{5x}$ ; f) $\lim\limits_{x\to0} \frac{\sin 3x}{\sin 5x}$
g) $\lim\limits_{x\to0} \frac{\tan 2x}{\tan 5x}$ ; h) $\lim\limits_{x\to0} \frac{\sin 2x}{x\cos x}$

**11.** Etudier la continuité des fonctions en $x_0$.
$$a)\ f(x)\begin{cases} x^2 + 4\ ;\ x \le 2 \\ 3x + 2\ ;\ x > 2 \end{cases}\quad ;\ x_0 = 2$$
$$b)\ f(x)\begin{cases} \dfrac{x+1}{2x+3}\ ;\ x \le 0 \\ x^2 + x + 0\ ;\ x > 0 \end{cases}\quad ;\ x_0 = 0$$

**12.** Donner les prolongements par continuité éventuelle de $f$ en $x_0$.
a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{3x^2 - 7x + 2}$ ; $x_0 = 2$
b) $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$ ; $x_0 = 0$
c) $f(x) = \frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ ; $x_0 = 0$; d) $f(x) = \frac{\tan x}{x}$; $x_0 = 0$.

**13.** Soit la fonction : $f(x) = \frac{x+E(\sqrt{x})}{x}$ ;

1) Démontrer que :

$$\forall x \in \, ]\, 0\,;+\infty[\,;\, 2 \leq f(x) \leq \frac{2x+1}{x},$$

3) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

**14.** Dans chacun des cas, étudier la continuité de $f$ en $x_0$.

$a) f(x) = 3x^2 - 5x - 7 \quad ; \quad x_0 = 2$

$b) f(x) = \sqrt{4-x} \quad ; \quad x_0 = 4,$

$c) f(x) = \dfrac{3x^2 - 5x - 7}{8x^2 - 5x + 3} \quad ; \quad x_0 = 1,$

$d) f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x+2} \quad ; \quad x_0 = -2.$

i) $f(x) = \frac{x^3+4}{1-2x}$ ; $x_0 = \frac{1}{2}$ ; j) $f(x) = \frac{(x-2)^2}{1-3x^2}$ ; $x_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$

**15.** Soit $f(x) = \frac{E(\sqrt{x})}{x}$, ou E désigne la partie entière.

1) Démontrer que : $\forall x \in \, ]\, 0\,;1[\,;\, f(x) = 0$, en déduire $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

2) Démontrer que : $\forall x \in \, ]\, 0\,;+\infty[\,;\, 0 \leq f(x) \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$, en déduire la limite de $f$ en $+\infty$.

**16.** Vérifier que la fonction :

$g(x) = \frac{1}{1+\sqrt{1+x}}$ est le prolongement par continuité en 0 de la fonction

$f(x) = \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$.

**17.** Dans les deux cas suivants calculer la limite de $f$ en 0.

$a)\ f(x) = \dfrac{\sin(x+\frac{\pi}{4})-\frac{1}{2}}{x}$ ; $b) f(x) = \dfrac{\cos(x+\frac{\pi}{4})-\frac{\sqrt{2}}{2}}{x}$.

**18.** Soient $f$ et $g$ deux fonctions réelles définies par :

$f(x) = \frac{(1-x)^2}{2} + \frac{3}{(1-x)^2}$ *et* $g(x) = \frac{3x+13}{x+4}$.

1. Montrer que la droite d'équation $x = 1$ est un axe de symétrie de la courbe $C_f$.
2. Montrer que le point $A(-4\,;3)$ est un centre de symétrie de la courbe $C_g$.

**19.** Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$

1. Vérifier que $f$ est majorée par $\frac{1}{2}$. (*utiliser l'identité* $(1-x)^2 = 1 - 2x + x^2$).
2. Montrer qu'elle est bornée.
3. Etudier les variations de $f$.

**20.** Soit $h$ la fonction réelle définie par $h(x) = \dfrac{2x-3}{x-5}$.

1. Déterminer le domaine de définition de $h$
2. $h$ est-elle injective ? Surjective ?
3. Déterminer deux intervalles $I$ *et* $J$ tels que $h : I \to J$ soit bijective
4. Préciser sa réciproque $h^{-1}$

**21.** 1) Soit la fonction $g(x) = x^3 + 3x - 2$.

a) Montrer que $g$ est strictement monotone.

b) Prouver qu'il existe un unique réel α tel que $g(\alpha) = 0$.

c) Donner un encadrement de α d'amplitude $10^{-1}$.

2) Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ $f(x) = \dfrac{x^3+1}{x^2+1}$.

a) Préciser $D_f$ le domaine de définition de $f$.

b) Calculer le taux de variation de $f$. En déduire le sens de variation. **(On utilisera les résultats de la partie 1)**

c) Etudier les asymptotes à f en $+\infty$ et en $-\infty$ ainsi que la position du graphe de f par rapport aux asymptotes (on pourra écrire $x^3 + 1 = (x^2+1)(\alpha x + \beta) + \gamma x + \delta$).

d) Donner l'allure approximative du graphe de f.

**22.** Soit $f$ la fonction définie par $f(x) = \frac{x^3-x^2-1}{x^2+1}$

1) Déterminer le domaine de définition de $f$ et calculer les limites aux bornes

2) Soient $x$ *et* $y$ deux réels tels que calculer le taux de variations de la fonction $f$. En déduire le sens de variation.

3) Déduire de l'étude des variations l'existence d'une ou plusieurs solutions à l'équation $f(x) = 0$

4) A l'aide de la calculatrice, donner un encadrement à $10^{-3}$ près de la solution de cette équation.

5) On s'intéresse à l'équation $f(x) = 2$.

Justifier l'existence et l'unicité de la solution de cette équation et en déduire un encadrement à $10^{-2}$ près.

CHAPITRE 04

# Barycentre d'un système de points pondérés

## Cours

### I. Barycentre d'un système de points :

#### 1. Point pondéré :

**Définition :**

Soit un point du plan ou de l'espace, et soit un nombre réel. La notation $A(\alpha)$ ou $(A\ ;\ \alpha)$ signifie que le point $A$ est affecté du coefficient $\alpha$, ou que le point pondéré $A$ est affecté de la masse $\alpha$.

**Exemple 1 :**

$(A,5)$ ; $(B,-3)$ ; $(C,2)$ ; $\left(D,-\frac{3}{4}\right)$ ; $(E,0)$ ; $\left(F,\sqrt{2}\right)$

sont des points pondérés.

**Définition :**

**Physiquement,** on appelle barycentre $G$ d'un ensemble de points pesants, le point d'équilibre de cet ensemble de points. **Mathématiquement,** la notion est étendue à des coefficients qui peuvent être négatifs.

#### 2. Barycentre de deux points :

Soit $A$ ; $B$ deux points distincts donnés dans le plan ou dans l'espace,

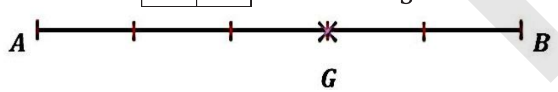
Soit $\alpha$ ; $\beta$ deux réels donnés tels que : $\alpha+\beta\neq 0$ ;

$$G = bar \begin{array}{|c|c|} A & B \\ \alpha & \beta \end{array} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0} \\ \overrightarrow{AG}=\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{BG}=\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}\overrightarrow{BA} \end{cases}$$

Egalités permettant de construire G.

**Exemple 2 :**

$$G = bar \begin{array}{|c|c|} \hline A & B \\ \hline 2 & 3 \\ \hline \end{array} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$$




Un point G est aligné avec deux points $A$ et $B$ si, et seulement si, il existe deux réels $\alpha$ et $\beta$ tels que ;

$$G = bar \begin{array}{|c|c|} \hline A & B \\ \hline \alpha & \beta \\ \hline \end{array} \text{ ; avec } \alpha+\beta\neq 0$$

$[AB]$ est un segment de milieu $I$.

$$I = bar \begin{array}{|c|c|} \hline A & B \\ \hline 1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$\Leftrightarrow B = bar \begin{array}{|c|c|} \hline I & A \\ \hline 2 & -1 \\ \hline \end{array}$$

$$\Leftrightarrow A = bar \begin{array}{|c|c|} \hline I & B \\ \hline 2 & -1 \\ \hline \end{array}$$


Soit $A$ et $B$ deux points distincts dans le plan ou dans l'espace

$$(AB) = \{M / M = bar \begin{array}{|c|c|} \hline A & B \\ \hline \alpha & \beta \\ \hline \end{array} \ ;\ \alpha+\beta\neq 0\}$$

$$[AB] = \{M / M = bar \begin{array}{|c|c|} \hline A & B \\ \hline \alpha & \beta \\ \hline \end{array} \ ;\ \alpha+\beta\neq 0 \text{ et } \alpha\times\beta\geq 0\}$$

$$[AB] = \{M / M = bar \begin{array}{|c|c|} \hline A & B \\ \hline 1-k & k \\ \hline \end{array} \ ;\ k\in[0;1]\}$$

- $(AB)$ et $(CD)$ sont sécantes en $G$, si et seulement si,

$$G = bar \begin{array}{|c|c|} \hline A & B \\ \hline \alpha_1 & \beta_1 \\ \hline \end{array} \quad \alpha_1+\beta_1\neq 0$$

$$\text{et } G = bar \begin{array}{|c|c|} \hline C & D \\ \hline \alpha_2 & \beta_2 \\ \hline \end{array} \quad \alpha_2+\beta_2\neq 0$$

- $(AB)$ ; $(CD)$ et $(EF)$ sont concourantes en $G$, si et seulement si,

$$G = bar \begin{array}{|c|c|} \hline A & B \\ \hline \alpha_1 & \beta_1 \\ \hline \end{array} \quad \alpha_1+\beta_1\neq 0$$

$$\text{et } G = bar \begin{array}{|c|c|} \hline C & D \\ \hline \alpha_2 & \beta_2 \\ \hline \end{array} \quad \alpha_2+\beta_2\neq 0$$

$$\text{et } G = bar \begin{array}{|c|c|} \hline E & F \\ \hline \alpha_3 & \beta_3 \\ \hline \end{array} \quad \alpha_3+\beta_3\neq 0$$

#### 3. Barycentre de trois points :

Soit $A$ ; $B$ ; $C$ trois points dans le plan ou l'espace, Soit $\alpha$ ; $\beta$ ; $\gamma$ trois réels tels que : $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$

$$G = bar \begin{array}{|c|c|c|} \hline A & B & C \\ \hline \alpha & \beta & \gamma \\ \hline \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=\vec{0}$$

- Si l'une seulement des masses de $G$ est nulle, alors $G$ est le barycentre des deux autres points.

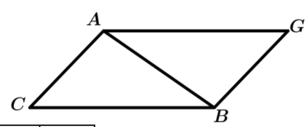
**Exemple 3 :**

$$G = bar \begin{array}{|c|c|c|} \hline A & B & C \\ \hline \alpha & \beta & 0 \\ \hline \end{array} = bar \begin{array}{|c|c|} \hline A & B \\ \hline \alpha & \beta \\ \hline \end{array}$$

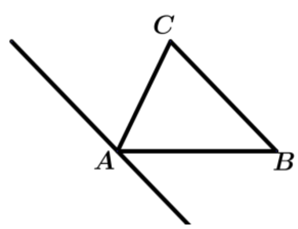
- Soit $ABC$ un triangle,

$G$ ; $A$ ; $B$ ; $C$ sont les sommets d'un parallélogramme sur lequel $G$ est opposé à $C$, si et seulement si ;

$$G = bar \begin{array}{|c|c|c|} \hline A & B & C \\ \hline 1 & 1 & -1 \\ \hline \end{array}$$




$$\text{On a } G = bar \begin{array}{|c|c|c|} \hline A & B & C \\ \hline t & t & -t \\ \hline \end{array} \quad (t\in\mathbb{R})$$



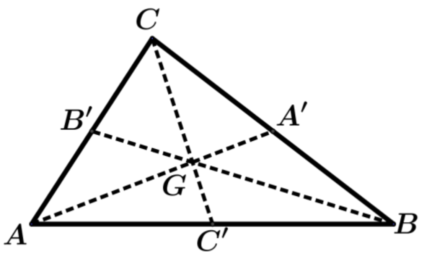

Si et seulement si, $G$ appartient à la parallèle à $(BC)$ passant par $A$.





Math 6AS.indd 51 26/07/2024 10:41:06

$G = bar\begin{array}{|c|c|c|}\hline A & B & C \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline\end{array}$




$\Leftrightarrow$ $G$ est le point de concours des médianes $(AA')$ ; $(BB')$ ;$(CC')$ du triangle $ABC$ ;

$\Leftrightarrow$ $G$ est le centre de gravité du triangle $ABC$.

$A'$ milieu de $[BC]$ ; $B'$ milieu de $[CA]$ ; $C'$ milieu de $[AB]$

Soit $\mathcal{P}$ le plan $(ABC)$ dans l'espace

$$\mathcal{P} = \{M \in \mathcal{E} \;/\; M = bar\begin{array}{|c|c|c|}\hline A & B & C \\ \hline \alpha & \beta & \gamma \\ \hline\end{array} \quad \alpha + \beta + \gamma \neq 0$$

## 4. Barycentre de quatre points :

### Définition :

Soit $A$ ; $B$ ; $C$ ; $D$ quatre points dans le plan ou dans l'espace, et soit $\alpha$; $\beta$; $\gamma$; $\delta$ quatre réels tels que : $\alpha + \beta + \gamma + \delta \neq 0$.

Le point $G$ tel que : $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} + \delta\overrightarrow{GD} = \vec{0}$ existe et est unique, on l'appelle barycentre du système : $\mathcal{S} = \{(A,\alpha); (B,\beta); (C,\gamma); (D,\delta)\}$.

On écrit : $G = bar\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline A & B & C & D \\ \hline \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \hline\end{array}$

### Existence et unicité :

Le point $G = bar\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline A & B & C & D \\ \hline \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \hline\end{array}$

existe si, et seulement si, $\alpha + \beta + \gamma + \delta \neq 0$

Le point $G = bar\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline A & B & C & D \\ \hline \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \hline\end{array}$

si, et seulement si ;

$$\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}\overrightarrow{AB} + \frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}\overrightarrow{AC} + \frac{\delta}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}\overrightarrow{AD}$$

$$\overrightarrow{BG} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}\overrightarrow{BA} + \frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}\overrightarrow{BC} + \frac{\delta}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}\overrightarrow{BD}$$

$$\overrightarrow{CG} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}\overrightarrow{CA} + \frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}\overrightarrow{CB} + \frac{\delta}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}\overrightarrow{CD}$$

$$\overrightarrow{DG} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}\overrightarrow{DA} + \frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}\overrightarrow{DB} + \frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}\overrightarrow{DC}$$

### Isobarycentre :

Lorsque $G = bar\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline A & B & C & D \\ \hline t & t & t & t \\ \hline\end{array}$ $(t \in \mathbb{R})$

Alors, $G$ est appelé isobarycentre des points $A$ ; $B$ ; $C$ et $D$.

### Conservation du barycentre :

$$G = bar\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline A & B & C & D \\ \hline \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \hline\end{array}$$

$$= bar\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline A & B & C & D \\ \hline k\alpha & k\beta & k\gamma & k\delta \\ \hline\end{array}$$

$$= bar\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline A & B & C & D \\ \hline \frac{\alpha}{k} & \frac{\beta}{k} & \frac{\gamma}{k} & \frac{\delta}{k} \\ \hline\end{array}$$

$$G = bar\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline A & B & C & D \\ \hline \alpha & \alpha & \alpha & \alpha \\ \hline\end{array}$$

$$= bar\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline A & B & C & D \\ \hline 2 & 2 & 2 & 2 \\ \hline\end{array}$$

$$= bar\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline A & B & C & D \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline\end{array}$$

Si une seulement des masses de $G$ est nulle, alors $G$ est un barycentre de trois points.

### Exemple 4 :

$$G = bar\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline A & B & C & D \\ \hline \alpha & \beta & \gamma & 0 \\ \hline\end{array} = bar\begin{array}{|c|c|c|}\hline A & B & C \\ \hline \alpha & \beta & \gamma \\ \hline\end{array}$$

Si deux seulement des masses de $G$ sont nulles, alors $G$ est un barycentre de deux points.

### Exemple 5 :

$$G = bar\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline A & B & C & D \\ \hline \alpha & \beta & 0 & 0 \\ \hline\end{array} = bar\begin{array}{|c|c|}\hline A & B \\ \hline \alpha & \beta \\ \hline\end{array}$$

$G = bar\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline A & B & C & D \\ \hline 1 & -1 & 2 & 3 \\ \hline\end{array}$ ; avec $I = bar\begin{array}{|c|c|}\hline A & C \\ \hline 1 & 2 \\ \hline\end{array}$

(barycentre partiel de $G$)

$G = bar\begin{array}{|c|c|c|}\hline I & B & D \\ \hline 3 & -1 & 3 \\ \hline\end{array}$ ; avec $J = bar\begin{array}{|c|c|}\hline B & D \\ \hline -1 & 3 \\ \hline\end{array}$

(barycentre partiel de $G$), on a ;

$G = bar\begin{array}{|c|c|}\hline I & J \\ \hline 3 & 2 \\ \hline\end{array}$

En augmentant les points du barycentre $G$, sans changer la somme initiale des masses $\alpha$; $\beta$; $\gamma$; $\delta$, alors, $G$ est conservé.

### Exemple 6 :

$$G = bar\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline A & B & C & D \\ \hline 1 & 2 & 3 & 1 \\ \hline\end{array} = bar\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\hline A & B & B & C & C & D \\ \hline 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ \hline\end{array}$$

$$= bar\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline A & B & C & D & E \\ \hline 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ \hline\end{array} = bar\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\hline A & B & C & D & E & E \\ \hline 1 & 2 & 3 & 1 & -2 & 2 \\ \hline\end{array}$$

### Coordonnées d'un barycentre :

Soit $G = bar\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline A & B & C & D \\ \hline \alpha & \beta & \delta & \theta \\ \hline\end{array}$ avec ; $\alpha + \beta + \delta + \theta \neq 0$

| Dans le plan rapporté à un repère$(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$ | Dans l'espace rapporté à un repère $\left(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$ |
|---|---|
| $x_G = \dfrac{\alpha x_A+\beta x_B+\delta x_C+\theta x_D}{\alpha+\beta+\delta+\theta}$ <br> $y_G = \dfrac{\alpha y_A+\beta y_B+\delta y_C+\theta y_D}{\alpha+\beta+\delta+\theta}$ | $x_G = \dfrac{\alpha x_A+\beta x_B+\delta x_C+\theta x_D}{\alpha+\beta+\delta+\theta}$ <br> $y_G = \dfrac{\alpha y_A+\beta y_B+\delta y_C+\theta y_D}{\alpha+\beta+\delta+\theta}$ <br> $z_G = \dfrac{\alpha z_A+\beta z_B+\delta z_C+\theta z_D}{\alpha+\beta+\delta+\theta}$ |

## II. Barycentre d'un système de $n$ points pondérés :

**Définition :**

Soit $A_1, A_2, \dots, A_n$,$n$ points du plan ou de l'espace et $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$des réels. Si $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\cdots+\alpha_n \neq 0$, il existe un unique point $G$ tel que :

$$\alpha_1\overrightarrow{GA_1}+\alpha_2\overrightarrow{GA_2}+\alpha_3\overrightarrow{GA_3}+\cdots+\alpha_n\overrightarrow{GA_n}=\vec{0},$$

Le point $G$ est alors appelé barycentre du système de points pondérés ;

$\mathcal{S}=\{(A_1,\alpha_1),(A_2,\alpha_2),(A_3,\alpha_3),\dots,(A_n,\alpha_n)\}$ et on note :$G=\{(A_1,\alpha_1),(A_2,\alpha_2),(A_3,\alpha_3),\dots,(A_n,\alpha_n)\}$.Ou encore ;

$G = bar$

| $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | ... | $A_n$ |
|---|---|---|---|---|
| $\alpha_1$ | $\alpha_2$ | $\alpha_3$ | ... | $\alpha_n$ |

### 1. Fonction vectorielle de Leibniz :

**Définition :**

Dans le plan ou dans l'espace, soit $\mathcal{S}=\{(A_1,\alpha_1),(A_2,\alpha_2),(A_3,\alpha_3),\dots,(A_n,\alpha_n)\}$ un système ou famille de points pondérés.On appelle fonction vectorielle de Leibniz associée à la famille$\{(A_i,\alpha_i)_{1\leq i\leq n}\}$l'application $f$ qui à tout point $M$de l'espace associe le vecteur :

$$\overrightarrow{f(M)}=\alpha_1\overrightarrow{MA_1}+\alpha_2\overrightarrow{MA_2}+\alpha_3\overrightarrow{MA_3}+\cdots+\alpha_n\overrightarrow{MA_n}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{MA_i}$$

### 2. Simplification de l'expression de $f$ :

Soit $\overrightarrow{f(M)}=\alpha_1\overrightarrow{MA_1}+\alpha_2\overrightarrow{MA_2}+\alpha_3\overrightarrow{MA_3}+\cdots+\alpha_n\overrightarrow{MA_n}$ la FVL associée au système :

$$\mathcal{S}=\{(A_1,\alpha_1),(A_2,\alpha_2),(A_3,\alpha_3),\dots,(A_n,\alpha_n)\}$$

Si $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\cdots+\alpha_n\neq 0$, le système admet un barycentre $G$ et on a pour tout point $M$ ;

$$\overrightarrow{f(M)}=(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\cdots+\alpha_n)\overrightarrow{MG}$$

$$\Rightarrow \forall M,\overrightarrow{f(M)}=\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right)\overrightarrow{MG}$$

Si $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\cdots+\alpha_n=0$, le système n'a pas de barycentre soit $O$ un point quelconque.

$$\Rightarrow \overrightarrow{f(M)}=\alpha_1\overrightarrow{OA_1}+\alpha_2\overrightarrow{OA_2}+\alpha_3\overrightarrow{OA_3}+\cdots+\alpha_n\overrightarrow{OA_n}$$
$$\Rightarrow \forall M,\quad \overrightarrow{f(M)}=\overrightarrow{f(O)}$$

Dans ce cas $f$ est une fonction constante indépendante de $M$.

Dans ce cas on peut simplifier l'expression $\overrightarrow{f(M)}=\alpha_1\overrightarrow{OA_1}+\alpha_2\overrightarrow{OA_2}+\alpha_3\overrightarrow{OA_3}+\cdots+\alpha_n\overrightarrow{OA_n}$en faisant intervenir $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ ;

$$\begin{aligned}\overrightarrow{f(M)}&=\alpha_2\overrightarrow{A_1A_2}+\alpha_3\overrightarrow{A_1A_3}+\cdots+\alpha_n\overrightarrow{A_1A_n}\\&=\alpha_1\overrightarrow{A_2A_1}+\alpha_3\overrightarrow{A_2A_3}+\cdots+\alpha_n\overrightarrow{A_2A_n}\\&=\alpha_1\overrightarrow{A_3A_1}+\alpha_2\overrightarrow{A_3A_2}+\cdots+\alpha_n\overrightarrow{A_3A_n}\\&\dots\\&=\alpha_1\overrightarrow{A_nA_1}+\alpha_2\overrightarrow{A_nA_2}+\cdots+\alpha_{n-1}\overrightarrow{A_nA_{n-1}}\end{aligned}$$

Donc, quels que soient les points $M$ et $P$ de l'espace :

$$\overrightarrow{f(M)}=\overrightarrow{f(P)}+\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right)\overrightarrow{MP}$$

Si $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=0$, alors $f$ est constante

Si $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\neq 0$, et si $G=bar\{(A_i,\alpha_i)_{1\leq i\leq n}\}$,

alors pour tout point O on a :

$$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i}\overrightarrow{f(O)}.\ \overrightarrow{f(M)}=\left(\textstyle\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right)\overrightarrow{MG},\ \text{car}\ \overrightarrow{f(G)}=\vec{0}$$

Soit $A$ ; $B$ ; $C$ ; $D$ quatre points donnés dans le plan (*ou dans l'espace*). Soit $\alpha$ ; $\beta$ ; $\gamma$ ;$\delta$quatre réels donnés.

A tout point$M$ du plan (*ou de l'espace*), on associe le vecteur : $\overrightarrow{f(M)}=\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}+\delta\overrightarrow{MD}$.

La fonction $f$ ainsi définie est appelée fonction vectorielle de Leibniz associée au système :

$\{(A;\ \alpha),(B;\ \beta),(C;\ \gamma),(D;\ \delta)\}$.En plus

| **Si,** | **alors** |
|---|---|
| $\alpha+\beta+\gamma+\delta\neq 0$ | $\overrightarrow{f(M)}=(\alpha+\beta+\gamma+\delta)\overrightarrow{MG}$ ; <br> avec, $G=bar$ $\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|}\hline A & B & C & D\\\hline \alpha & \beta & \gamma & \delta\\\hline\end{array}$ <br> **Exemple :** <br> $2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MD}=5\overrightarrow{MG}$ <br> avec, $G=bar$ $\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|}\hline A & B & C & D\\\hline 2 & 1 & 3 & -1\\\hline\end{array}$ |
| $\alpha+\beta+\gamma+\delta=0$ | $\boldsymbol{f}(M)$ est un vecteur constant, indépendant de $M$. C'est-à -dire : $\forall\ M,N:\boldsymbol{f}(M)=\boldsymbol{f}(N)$. |

**Exercice :**

Dans un plan $\mathcal{P}$ de l'espace, on considère trois points $A, B$ et $C$ non alignés. Déterminer les ensembles de points du plan dans les cas suivants :

**1°**/ $M\in\Sigma_1$ :
$$\left\|2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|2\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|$$

**2°**/ $M\in\Sigma_2$ :
$$\left\|2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=2\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|$$

**3°**/ $M\in\Sigma_3$ :
$$\left\|2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|$$

**4°**/ $M\in\Sigma_4$ :
$$\left(2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right).\left(2\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)=0$$

**5°**/ $M\in\Sigma_5$ :
$$\left(2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right).\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)=0$$





Math 6AS.indd 53 26/07/2024 10:41:09

**Solution :**

**1°/** $M \in \Sigma_1$ :

$$\|2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\| = \|2\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|$$

$$2+3+1=6\neq 0$$

Soit $G = bar\begin{array}{|c|c|c|}\hline A & B & C\\\hline 2 & 3 & 1\\\hline\end{array}$

Alors, $2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=6\overrightarrow{MG}$

$$2-3+1=0$$

Le système $2\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$ n'a pas de barycentre.

$$2\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}$$

Soit $L = bar\begin{array}{|c|c|}\hline A & C\\\hline 2 & 1\\\hline\end{array}$

Alors $2\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=3\overrightarrow{BL}$

$$M\in\Sigma_1 \Longrightarrow \|6\overrightarrow{MG}\| = \|3\overrightarrow{BL}\| \Longrightarrow MG=\frac{1}{2}BL$$

$\Sigma_1$ est donc le cercle de centre $G$ et de rayon $\frac{1}{2}BL$.

Or, $L = bar\begin{array}{|c|c|}\hline A & C\\\hline 2 & 1\\\hline\end{array}$

et $G = bar\begin{array}{|c|c|c|}\hline A & B & C\\\hline 2 & 3 & 1\\\hline\end{array}$

D'où, $G = bar\begin{array}{|c|c|}\hline L & B\\\hline 3 & 3\\\hline\end{array} \Longrightarrow \overrightarrow{BG}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BL}$

$\Sigma_1$ est le cercle de centre $G$ et de rayon $\frac{1}{2}BL=BG$ et de diamètre $[BL]$

**2°/** $M \in \Sigma_2$ :

$$\|2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\| = 2\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|$$

$$2+3+1=6\ (\neq 0)$$

Soit $G = bar\begin{array}{|c|c|c|}\hline A & B & C\\\hline 2 & 3 & 1\\\hline\end{array}$

$$2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=6\overrightarrow{MG}$$

$$1+1+1=3\ (\neq 0)$$

Soit $G' = bar\begin{array}{|c|c|c|}\hline A & B & C\\\hline 1 & 1 & 1\\\hline\end{array}$

$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG'}$$

$$\|2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\| = 2\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|$$

$$\Longrightarrow \|6\overrightarrow{MG}\| = 2\left\|3\overrightarrow{MG'}\right\| \Longrightarrow 6MG=6MG'$$

$$\Longrightarrow MG=MG'$$

$\Sigma_2$ est donc la médiatrice $[GG']$.

**3°/** $M \in \Sigma_3$ :

$$\|2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|$$

$$2+3+1=6\ (\neq 0)$$

Soit $G = bar\begin{array}{|c|c|c|}\hline A & B & C\\\hline 2 & 3 & 1\\\hline\end{array}$

$$2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=6\overrightarrow{MG}$$

$$1-1+1=1\ (\neq 0)$$

Soit $G' = bar\begin{array}{|c|c|c|}\hline A & B & C\\\hline 1 & -1 & 1\\\hline\end{array}$

$$\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MG'}$$

$$\|2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|$$

$$\Longrightarrow \|6\overrightarrow{MG}\| = \left\|\overrightarrow{MG'}\right\| \Longrightarrow 6MG=MG'$$

$$\Longrightarrow (6MG)^2 = MG'^2 \Longrightarrow 36MG^2-MG'^2=0$$

$$\Longrightarrow \left(6\overrightarrow{MG}-\overrightarrow{MG'}\right).\left(6\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{MG'}\right)=0$$

Soit $K = bar\begin{array}{|c|c|}\hline G & G'\\\hline 6 & 1\\\hline\end{array}$ $L = bar\begin{array}{|c|c|}\hline G & G'\\\hline 6 & -1\\\hline\end{array}$

$$\Longrightarrow 7\overrightarrow{MK}.5\overrightarrow{ML}=0 \Longrightarrow 35\overrightarrow{MK}.\overrightarrow{ML}=0 \Longrightarrow \overrightarrow{MK}.\overrightarrow{ML}=0$$

$\Sigma_3$ est donc le cercle de diamètre $[KL]$.

**4°/** $M \in \Sigma_4$ :

$$\left(2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right).\left(2\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)=0$$

Soit $G = bar\begin{array}{|c|c|c|}\hline A & B & C\\\hline 2 & 3 & 1\\\hline\end{array}$

$$\Longrightarrow 2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=6\overrightarrow{MG}$$

Soit $L = bar\begin{array}{|c|c|}\hline A & C\\\hline 2 & 1\\\hline\end{array}$

Alors $2\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=3\overrightarrow{BL}$

$\Longrightarrow 6\overrightarrow{MG}.3\overrightarrow{BL}=0 \Longrightarrow 18\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{BL}=0 \Longrightarrow \overrightarrow{MG}.\overrightarrow{BL}=0$

$\Sigma_4$ est la droite passant par $G$ et perpendiculaire à $[BL]$. Or $G$ est le milieu de $[BL]$ ;
d'où $\Sigma_4$ est la médiatrice de $[BL]$.

**5°/** $M \in \Sigma_5$ :

$$\left(2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right).\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)=0$$

$$2+3+1=6\ (\neq 0)$$

Soit $G = bar\begin{array}{|c|c|c|}\hline A & B & C\\\hline 2 & 3 & 1\\\hline\end{array}$

$$2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=6\overrightarrow{MG}$$

$$1+1+1=3\ (\neq 0)$$

Soit $G' = bar\begin{array}{|c|c|c|}\hline A & B & C\\\hline 1 & 1 & 1\\\hline\end{array}$

$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG'}$

$6\overrightarrow{MG}.3\overrightarrow{MG'}=0 \Longrightarrow 18\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{MG'}=0$

$\Longrightarrow \overrightarrow{MG}.\overrightarrow{MG'}=0$

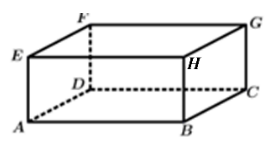
$\Sigma_5$ est le cercle de diamètre $[GG']$.

## A. Applications

### Alignement de points

**Exemple 1 :**

$ABCDEFGH$ est un pavé.
$I$ est le centre de gravité du triangle $BDE$.
Montrer que les points $A$ ; $I$ ; $G$ sont alignés.




**Réponse :**

Comme $EFGH$ est un parallélogramme.

Donc, $G = bar\begin{array}{|c|c|c|}\hline E & F & H\\\hline -1 & 1 & 1\\\hline\end{array}$

Or, $ABFE$ et $ADHE$ sont des parallélogrammes, d'où

$G = bar\begin{array}{|c|c|c|}\hline A & B & E\\\hline -1 & 1 & 1\\\hline\end{array}$ et $H = bar\begin{array}{|c|c|c|}\hline A & D & E\\\hline -1 & 1 & 1\\\hline\end{array}$

$$G = bar\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|}\hline E & A & B & E & A & D & E \\ \hline -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ \hline\end{array}$$

$$G = bar\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline A & B & D & E \\ \hline -2 & 1 & 1 & 1 \\ \hline\end{array}$$

Donc ; $G = bar\begin{array}{|c|c|}\hline A & I \\ \hline -2 & 3 \\ \hline\end{array}$

Donc, les points $A$ ; $I$ ; $G$ sont alignés.

**Concours de droites**

**Exemple 2 :**

$ABCD$un tétraèdre. $ABPC$, $ABQD$, $ACRD$ sont des parallélogrammes.

**1)** Montrer que les droites $(DP)$, $(CQ)$ et $(BR)$ sont concourantes.

**2)** Que peut-on dire des quadrilatères : $DCPQ$, $DBPR$, $CBQR$ ?

**Réponse :**

**1)**Comme $ABPC$ ; $ABQD$, $ACRD$ sont des parallélogrammes.

Donc ; $P = bar\begin{array}{|c|c|c|}\hline A & B & C \\ \hline -1 & 1 & 1 \\ \hline\end{array}$

$$Q = bar\begin{array}{|c|c|c|}\hline A & B & D \\ \hline -1 & 1 & 1 \\ \hline\end{array}$$

$$R = bar\begin{array}{|c|c|c|}\hline A & C & D \\ \hline -1 & 1 & 1 \\ \hline\end{array}$$

$$G = bar\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline A & B & C & D \\ \hline -1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline\end{array}$$

$G = bar\begin{array}{|c|c|}\hline D & P \\ \hline 1 & 1 \\ \hline\end{array}$ et $G = bar\begin{array}{|c|c|}\hline C & Q \\ \hline 1 & 1 \\ \hline\end{array}$

$$G = bar\begin{array}{|c|c|}\hline B & R \\ \hline 1 & 1 \\ \hline\end{array}$$

Donc $G \in (DP)$ ; $G \in (CQ)$ ; $G \in (BR)$. D'où les droites $(DP)$ ; $(CQ)$ ; $(BR)$ sont concourantes en $G$.

**2)**Comme $G$ est le milieu des segments $[DP]$ ; $[CQ]$ et $[BR]$. Donc, $PCQR$ ; $DBPR$ ; $CBQR$ sont des parallélogrammes.

**Détermination des masses d'un barycentre :**

**Exemple 3 :**

$ABC$ un triangle,$\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

$D$ est le symétrique de $B$ par rapport à $A$.

Les droites $(BI)$ et $(CD)$ se coupent en $G$.

La parallèle à $(AB)$ passant par $C$, coupe $(BI)$ en $H$.

**1)** Déterminer des réels $\alpha_1$ ; $\beta_1$ ;$\gamma_1$ tels que :

$$G = bar\begin{array}{|c|c|c|}\hline A & B & C \\ \hline \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \hline\end{array}$$

**2)** Déterminer des réels $\alpha_2$ ;$\beta_2$ ;$\gamma_2$ tels que :

$$H = bar\begin{array}{|c|c|c|}\hline A & B & C \\ \hline \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \hline\end{array}$$

**3)** Déterminer l'ensemble$(\Gamma_1)$ des points $M$ du plan $(ABC)$ tels que :

$$2\|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC}\| = 5\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\|$$

**4)** Déterminer l'ensemble $(\Gamma_2)$des points $M$ du plan tels que les vecteurs ;

$2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC}$ et $\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}$ soient colinéaires.

**Réponse :**

**1)** $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} \Rightarrow I = bar\begin{array}{|c|c|}\hline A & C \\ \hline 1 & 2 \\ \hline\end{array}$

Comme $A$ est milieu de $[BD]$, $\Rightarrow D = bar\begin{array}{|c|c|}\hline A & B \\ \hline 2 & -1 \\ \hline\end{array}$

Or, $G \in (IB) \Rightarrow G = bar\begin{array}{|c|c|}\hline I & B \\ \hline 3 & \beta \\ \hline\end{array}$

$$\Rightarrow G = bar\begin{array}{|c|c|c|}\hline A & B & C \\ \hline 1 & \beta & 2 \\ \hline\end{array}$$

Or, $G \in (CD) \Rightarrow$

$G = bar\begin{array}{|c|c|}\hline C & D \\ \hline \gamma & 1 \\ \hline\end{array} \Rightarrow G = bar\begin{array}{|c|c|c|}\hline A & B & C \\ \hline 2 & -1 & \gamma \\ \hline\end{array}$

Donc, $\frac{2}{1} = \frac{-1}{\beta} = \frac{\gamma}{2} \Rightarrow 2\beta = -1 \Rightarrow \beta = \frac{-1}{2}$

Donc, $G = bar\begin{array}{|c|c|c|}\hline A & B & C \\ \hline 1 & \frac{-1}{2} & 2 \\ \hline\end{array}$

Donc, $G = bar\begin{array}{|c|c|c|}\hline A & B & C \\ \hline 2 & -1 & 4 \\ \hline\end{array}$

Donc, $H = bar\begin{array}{|c|c|c|}\hline A & B & C \\ \hline 1 & t & 2 \\ \hline\end{array}$

**2)**Comme $H \in (BI)$, or $H \in$ la parallèle à $(AB)$ passant par $C$. Donc ; $1 + t = 0$ ; d'où $t = -1$. Donc,

$$H = bar\begin{array}{|c|c|c|}\hline A & B & C \\ \hline 1 & -1 & 2 \\ \hline\end{array}$$

**3)**$2\|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC}\| = 5\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\|$

$\Leftrightarrow 2\|(2 - 1 + 4)\overrightarrow{MG}\| = 5\|(1 - 1 + 2)\overrightarrow{MH}\|$

$\Leftrightarrow 2 \times 5 \times MG = 5 \times 2 \times MH \Leftrightarrow MG = MH$

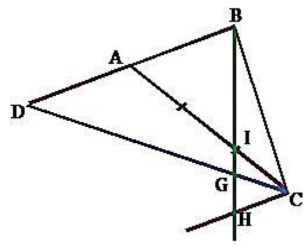
Donc, l'ensemble $(\Gamma_1)$ est la médiatrice du segment $[GH]$.

**4)**$2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC}$ et $\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow$

$(2 - 1 + 4)\overrightarrow{MG}$est colinéaire à $\overrightarrow{BA} - 3\overrightarrow{BB} + 2\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow$

$5\overrightarrow{MG}$ est colinéaire $(1 + 2)\overrightarrow{BI}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MG}$est colinéaire à $\overrightarrow{BI}$.




Donc l'ensemble $(\Gamma_2)$ est la droite $(IB)$.

## B. Exercices Divers

**1.**(AB) est une droite, I ; J ; K les points tels que : $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$ ; $\overrightarrow{BJ} = \frac{3}{10}\overrightarrow{AB}$ ; $\overrightarrow{AK} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$.

1) Faire une figure.

2) Compléter les tableaux :

$I = \text{bar}\begin{array}{c|c|}A & B \\ \hline & \end{array}$ ; $J = \text{bar}\begin{array}{c|c|}A & B \\ \hline & \end{array}$ ; $K = \text{bar}\begin{array}{c|c|}A & B \\ \hline & \end{array}$

**2.**(AB) une droite, I ; J ; K les points tels que :

$$\overrightarrow{IL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{IJ}\ ;\ \overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{JL}\ ;$$

1) Comment sont les points I ; J ; K ; L.

2) Faire une figure.

3) Montrer que I est le milieu de [JL].

**3.**[AB] un segment de milieu I.

$C = \text{bar}\begin{array}{c|c|}A & B \\ \hline 2 & 3\end{array}$ ; $D = \text{bar}\begin{array}{c|c|}A & B \\ \hline 3 & 2\end{array}$

1) Faire une figure.

3) Montrer que I est le milieu de [CD].

**4.**ABC un triangle. Construire les points :

$G = \text{bar}\begin{array}{c|c|c|}A & B & C \\ \hline 1 & 1 & 1\end{array}$ ; $H = \text{bar}\begin{array}{c|c|c|}A & B & C \\ \hline 1 & 1 & -1\end{array}$

$E = \text{bar}\begin{array}{c|c|c|}A & B & C \\ \hline 1 & 1 & 2\end{array}$ ; $F = \text{bar}\begin{array}{c|c|c|}A & B & C \\ \hline 1 & 2 & -1\end{array}$

**5.**ABC un triangle, I, J , K les points tels que :

$$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AI} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\ ;\ \overrightarrow{BJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}\ ;$$

$\overrightarrow{CK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

1) Faire une figure.

2) Compléter les tableaux :

$I = \text{bar}\begin{array}{c|c|c|}A & B & C \\ \hline & & \end{array}$ ; $J = \text{bar}\begin{array}{c|c|c|}A & B & C \\ \hline & & \end{array}$ ;

$K = \text{bar}\begin{array}{c|c|c|}A & B & C \\ \hline & & \end{array}$

**6.**MED un triangle de centre de gravité G, Z ; A ; H les points tels que :

$$\overrightarrow{MZ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{ME}\ ;\ \overrightarrow{EA} = \frac{1}{3}\overrightarrow{ED}\ ;\ \overrightarrow{DH} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DM}$$

1) Faire une figure.

2) Montrer que G est le centre de gravité du triangle ZAH.

**7.**MEDOU une pyramide de sommet M, de base un parallélogramme EDOU de centre I, J et K les centres de gravités respectifs des triangles MED et MOU. Montrer que les droites (MI) et ( JK) sont sécantes .

**8.**ABCD un tétraèdre I ; J ; K ; L ; M sont les milieux respectifs de [AB] ; [BD] ; [BC] ; [CD] ; [DA] ; [CA]. Montrer que les droites (IL) ; (JN) ; (KM) sont concourantes.

**9.**ABC un triangle. G et H les points tels que:

$$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\ ;\ \overrightarrow{BH} = \frac{4}{5}\overrightarrow{BC}$$

1) Faire une figure.

2) Montrer que les points A ; G ; H sont alignés.

**10.**ABCD un carré de centre O, I et J les points tels que :

$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ ; $\overrightarrow{CJ} = \frac{5}{6}\overrightarrow{CD}$.

E le symétrique de C par rapport au milieu de [AB].

1) Déterminer $\text{bar}\begin{array}{c|c|c|c|}A & B & C & D \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1\end{array}$

2)Construire $G = \text{bar}\begin{array}{c|c|c|c|}A & B & C & D \\ \hline 2 & 1 & 1 & 5\end{array}$

3) Déterminer l'ensemble Δ des points M du plan tels que :

$$9\left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\right\| = 4\left\|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + 5\overrightarrow{MD}\right\|$$

4) Déterminer l'ensemble Γ des points M du plan tels que :

$$\left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\right\| = \left\|4\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MB} - 4\overrightarrow{MC} - 4\overrightarrow{MD}\right\|$$





Math 6AS.indd 56 26/07/2024 10:41:12

**11.** ABCD un carré.

E est le symétrique de C par rapport à D.

1) Déterminer des réels α ; β ;γ tels que :

$$E = \text{bar}\begin{array}{c|c|c|}A & B & C \\ \hline \alpha & \beta & \delta\end{array}$$

2) Soit F le symétrique de C par rapport à B.

Montrer que A est le milieu de [EF].

3) Déterminer et construire l'ensemble des points M tels que :

$$\left\|2\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = \left\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC}\right\|.$$

**12.** ABC un triangle, I ; J les points tels que

$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ ; $\overrightarrow{BJ} = \frac{3}{7}\overrightarrow{BL}$.

Les droites (IC) et (JA) se coupent en G.

2) Déterminer des réels α ; β ;γ tels que :

$$G = \text{bar}\begin{array}{c|c|c|}A & B & C \\ \hline \alpha & \beta & \delta\end{array}$$

3) La droite (BG) coupe (AC) en K, déterminer la position de K sur la droite (AC).

**13.** ABCD un carré de centre O.

Dans chacun des cas suivants, simplifier le vecteur proposé.

$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$ ; $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$

$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD}$ ; $-\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$

**14.** ABCD un carré. I ; J ; K ; L les milieux respectifs de [AB] ; [BC] ; [CD] ; [DA] ; G est le centre de gravité du triangle ABC.

Préciser chacun des vecteurs suivants :

$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD}$ ; $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MD}$;

$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MD}$ ; $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MD}$;

$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MD} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$

**15.** ABC un triangle. I un point tel que : $\overrightarrow{BI} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$.

La parallèle à (AB) passant par C coupe (AI) en G.

Faire une figure

Déterminer des réels α ; β ;δ tel que :

$$G = \text{bar}\begin{array}{c|c|c|}A & B & C \\ \hline \alpha & \beta & \delta\end{array}$$

Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que :

$$\left\|\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}\right\| \leq \frac{3}{4}\left\|4\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}\right\|$$

**16.** ABCD est un parallélogramme.

1) Définir D comme barycentre de A, B et C.
2) A tout point M du plan, on définit la fonction f :

$\overrightarrow{f(M)} = \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ et la fonction g :

$\overrightarrow{g(M)} = 2\overrightarrow{MD} - \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC}$

a) Simplifier l'expression de $\overrightarrow{f(M)}$ et montrer que $\overrightarrow{g(M)}$ est constante.

b) Déterminer l'ensemble des points tels que

- $\left\|\overrightarrow{f(M)}\right\| = \left\|\overrightarrow{g(M)}\right\|$
- $\overrightarrow{f(M)}$ et $\overrightarrow{g(M)}$ soient colinéaires.

**17.** Soit ABCD un carré tel que AD = 4 cm et F le barycentre des points (C , 2) et (D , - 1)

1°)- Construire le point F

2°)- La droite (AF) coupe le segment [BC] en I

a / Calculer le rapport $\frac{CF}{AB}$

b / En déduire que I est le milieu de [BC]

3°)- Soit E le barycentre des points pondérés (B , 2) ; (C , 2) et (D , - 1)

a / Montrer que E est le barycentre des points (I , 4) et (D , - 1)

b / Montrer que E est le barycentre des points (B , 2) et (F , 1)

c / Construire le point E

4°)- a / Déterminer l'ensemble $\Delta$ des points M du plan tel que : $\left\|2\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD}\right\| = 3\left\|\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD}\right\|$

b / Déterminer l'ensemble **C** des points M du plan tel que : $\left\|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = \left\|\overrightarrow{MD} - \overrightarrow{MA}\right\|$

**18.** On considère un triangle ABC tel que BC = 8

1°)- Construire le point I barycentre des points pondérés (A , 2) et (B , 3)

2°)- Soit G le point défini par

$2\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

Montrer que G est le barycentre des points pondérés ( I , 5) et (C , 1)

3°)- Soit J le point tel que $\overrightarrow{JA} + 2\overrightarrow{JC} = \overrightarrow{AC}$

a – Montrer que J est le barycentre des points pondérés (A , 2) et (C , 1) puis construire J

b – Montrer que G est le milieu de [JB]

4°)- Soit K le point défini par $\overrightarrow{BK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$

Montrer que les droites (BJ) , (CI) et (AK) sont concourantes

5°)- Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que :

$$5\left\|2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = 6\left\|2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}\right\|$$

6°)- Soient L et E deux points définis par $\overrightarrow{AL} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{LE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{LJ}$

La droite (AE) coupe (BC) en F .

Montrer que F est le barycentre des points B et C affectés des coefficients que l'on précisera.

**19.** On considère un triangle ABC rectangle isocèle en A, avec AB = AC = a, a étant un nombre positif donné. On appelle I le milieu de [BC]. 1) Soit G le barycentre des points pondérés (A, 4), (B, –1),

(C, –1).

Déterminer sa position. Puis déterminer l'ensemble des points M tels que

$4\ MA^2 - MB^2 - MC^2 = a^2$.

**20.** ABCD est un quadrilatère.

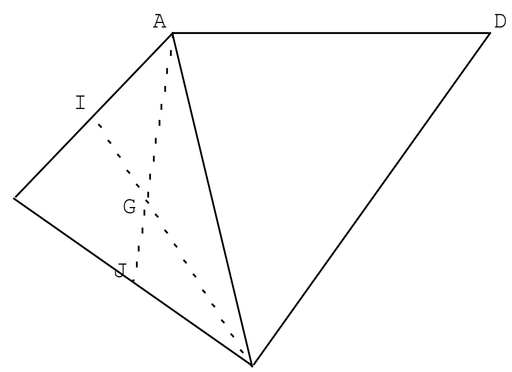
G est le centre de gravité du triangle ABC.

I et J sont les milieux respectifs de [AB] et [BC].

L est le barycentre de (A, 1) et (D, 3).

K est le barycentre de (C, 1) et (D, 3).

Le but de l'exercice est de démontrer que les droites (IK), (JL) et (DG) sont concourantes.




Pour cela, on utilise le barycentre H de (A, 1), (B, 1), (C, 1) et (D, 3).

1) Placer en justifiant, les points L et K.

2) Démontrer que H est le barycentre de G et D munis de coefficients que l'on précisera.

3) Démontrer que H est le barycentre de J et L munis de coefficients que l'on précisera.

4) Démontrer que H est le barycentre de I et K munis de coefficients que l'on précisera.

5) Conclure.

**21.** [AB] est un segment tel que AB = 4 cm.

G est le barycentre des points (A, 7) et (B, – 3).

1) Construire G (et justifier la construction).

**2)** M est un point quelconque du plan. Réduire la somme $7\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB}$.

**3)** M est un point quelconque du plan. Réduire la somme $5\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}$ en utilisant un barycentre noté H.

**4)** En déduire l'ensemble des points M du plan tels que $\|7\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB}\| = \|5\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\|$.

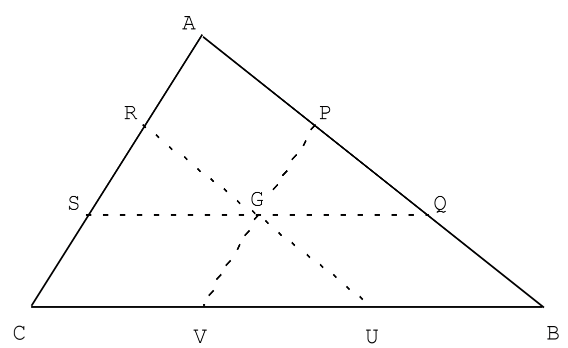
Représenter l'ensemble de ces points sur la figure.

**22.** ABC est un triangle de centre de gravité G.

On définit les points P, Q, R, S, U, V par :

$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ ; $\overrightarrow{AQ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ ;$\overrightarrow{AR} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ ; $\overrightarrow{AS} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ ;

$\overrightarrow{BU} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ ;$\overrightarrow{BV} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.




1) Démontrer que P est le barycentre de (A, 2) et (B, 1) et que V est barycentre de (C, 2) et (B, 1).
2) En déduire que G est le milieu de [PV].
3) On démontre, de même, que G est le milieu de [RU] et de [SQ] (inutile de refaire les calculs). Démontrer que RPUV est un parallélogramme.

# CHAPITRE 05 Dérivation – Dérivées - Primitives

## Cours

## I. Dérivabilité et dérivation d'une fonction en un point

### 1.Dérivabilité d'une fonction en $x_0$:

**Définition**

Soit $f$ une fonction, $I$ un intervalle de son domaine de définition, et $x_0$ un point de $I$.

On dit que f est dérivable en $x_0$ si ; $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ a une limite finie en $x_0$.

**Autrement dit ;** s'il existe un réel l tel que :

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l$$

On dit alors que cette limite $l$ est le nombre dérivé de $f$ en $x_0$, et on note : $f^{'}(x_0) = l$.

On a alors ; $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) = l$.

**Remarque 1 : (*changement de variable*)**

On peut également poser $h = x - x_0$, lorsque $x$ tend vers $x_0$, $h$ tend vers 0. On a donc ;

$$f^{'}(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = l$$

**Exemple 1:**

Soit la$f$ fonction définie par $f(x) = x^2$, étudions la dérivabilité de $f$en $x_0 = -1$.

On a :

$$\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} = \frac{x^2-1}{x+1} = \frac{(x+1)(x-1)}{x+1} = x+1,$$

d'où : $\lim\limits_{x\to -1} \frac{f(x)-(-1)}{x+1} = \lim\limits_{x\to -1} (x-1) = -2$

La fonction $f$ est donc, dérivable en $-1$ et

$f'(-1) = -2$.

### 2. Dérivabilité à gauche, dérivabilité à droite :

**Définitions :**

Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$ contenant $x_0$, ou d'extrémité $x_0$.

**a)** On dit que $f$ est dérivable à gauche en $x_0$, si $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$a une limite finie$l_1$ à gauche en $x_0$.

Cette limite est appelée nombre dérivé de $f$ à gauche en $x_0$. Et on note :

$$f_g^{'}(x_0) = \lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l_1$$

**b)** On dit que $f$ est dérivable à droite en $x_0$, si $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$a une limite finie $l_2$ à droite en $x_0$.

Cette limite est appelée nombre dérivé de $f$ à droite en $x_0$. Et on note :

$$f_d^{'}(x_0) = \lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l_2$$

**Interprétation graphique ou géométrique du nombre dérivé**

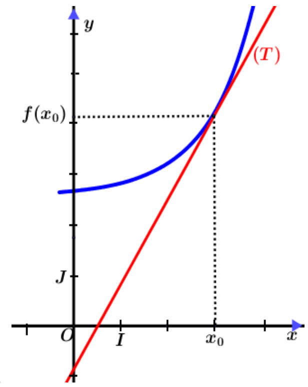
Soit $f$une fonction, $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative et $A$ un point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse $x_0$.

Si $f$ est dérivable en $x_0$, c.-à-d. s'il existe un réel $l$ tel que :

$$\lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l = f'(x_0)$$

Alors la courbe $\mathcal{C}_f$ de $f$ admet au point $A$ d'abscisse $x_0$ une tangente $(T)$ dont le coefficient directeur est $f'(x_0)$ et dont l'équation cartésienne est :

$(T):\ y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$




**Exemple 2 :**

Soit la fonction $f$ définie par $f(x) = x^2 + x - 3$.

Donner une équation de la tangente $(T)$ à la courbe C de $f$au point d'abscisse$x_0 = 2$.

On a : $f(2) = 4 + 2 - 3 = 3$ ;

$$\lim_{x\to 2} \frac{(x^2+x-3)-4-2+3}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{x^2+x-6}{x-2}$$
$$= \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+3)}{x-2} = \lim_{x\to 2}(x+3) = 5,$$

d'où ; $f^{'}(2) = 5$.

Donc, l'équation de la tangente $(T)$ à la courbe $\mathcal{C}$ de $f$au point d'abscisse $x_0 = 2$ est :

$$y - 3 = 5(x-2) \Longrightarrow (T) : y = 5x - 7.$$

S'il existe deux réels distincts $l_1$ et $l_2$ tels que ;

$$\lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l_1$$

et

$$\lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l_2$$

Alors la courbe $\mathcal{C}_f$ de $f$ admet au point d'abscisse $x_0$ deux demi-tangentes.

Une à gauche de coefficient directeur $l_1$ et d'équation $y = l_1(x-x_0) + f(x_0)$, et l'autre à droite de coefficient directeur $l_2$ et d'équation :

$y = l_2(x-x_0) + f(x_0)$.

On dit alors que c'est un point (*de doute*) anguleux.

**Remarque 2 :**

Une fonction $f$ peut être dérivable à gauche et à droite en un point $x_0$sans être dérivable en $x_0$.

C'est dans le cas où il existe deux nombres dérivés différents $l_1$ et $l_2$ tels que :

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l_1 \quad \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l_2$$

Si $x_0$est une borne supérieure (*resp. inférieure*) de $\mathcal{D}_f$, il suffit alors que $f$ soit dérivable à gauche (resp. à droite) en $x_0$.

**Propriété :**

Une fonction$f$ est dérivable en $x_0$ si et seulement si, elle est dérivable à gauche en $x_0$ et elle est dérivable à droite en $x_0$ et les nombres dérivés à gauche et à droite sont égaux.

C.-à-d. : $\begin{cases} f_d'(x_0) = l \\ \quad et \quad (a \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow f'(x_0) = l \\ f_g'(x_0) = l \end{cases}$

**Demi-tangente parallèle à l'axe des ordonnées :**

Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$ contenant $x_0$.

Si ,$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$admet une limite infinie à gauche ou à droite en $x_0$, c.-à-d. si :

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \pm\infty$$

ou

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \pm\infty$$

alors la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de $f$admet une demi-tangente parallèle à l'axe des ordonnées $(y'Oy)$ au point d'abscisse $x_0$.

**Exemple 3 :**

On considère les fonctions $f$ et $g$ définies par :

**1°)** $f(x) = \sqrt{x^2-4x+3}$ et

**2°)** $g(x) = |x^2-6x+5|$

Donner les domaines de définitions de $f$ et $g$, puis étudier leur dérivabilité en précisant les éventuelles tangentes ou demi-tangentes remarquables, puis donner leurs tableaux de variation.

**Réponse :**

**1°) Domaine de définition de $f$**

$f$ est définie si $x^2-4x+3 \geq 0$,

$x^2-4x+3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ ou \\ x = 3 \end{cases}$

| $x$ | $-\infty$ | $1$ | | $3$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x^2-4x+3$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |

$$\mathcal{D}_f = ]-\infty; 1] \cup [3; +\infty[$$

**Dérivabilité**

$f$ est (définie) continue sur son domaine de définition et dérivable $]-\infty; 1] \cup [3; +\infty[$

Etudions sa dérivabilité à gauche en 1 et à droite en 3.

**A gauche en 1**

$$f(1) = 0, \quad \lim_{x \to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{0}{0} \ (F.I)$$

$$\frac{\sqrt{x^2-4x+3}}{x-1} = \frac{\left(\sqrt{x^2-4x+3}\right)\left(\sqrt{x^2-4x+3}\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x^2-4x+3}\right)}$$

$$= \frac{x^2-4x+3}{(x-1)\left(\sqrt{x^2-4x+3}\right)}$$

$$= \frac{(x-1)(x-3)}{(x-1)\left(\sqrt{x^2-4x+3}\right)} = \frac{x-3}{\sqrt{x^2-4x+3}}$$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{x-3}{\sqrt{x^2-4x+3}}$$

$$= \frac{-2}{0^+} = -\infty$$

D'où,$f$ n'est pas dérivable à gauche en 1 et sa courbe admet au point $(1; 0)$ une demi-tangente verticale.

**A droite en 3**

$$f(3) = 0, \quad \lim_{x \to 3^+} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \frac{0}{0} \ (F.I)$$

$$\frac{\sqrt{x^2-4x+3}}{x-3} = \frac{\left(\sqrt{x^2-4x+3}\right)\left(\sqrt{x^2-4x+3}\right)}{(x-3)\left(\sqrt{x^2-4x+3}\right)}$$

$$= \frac{x^2-4x+3}{(x-3)\left(\sqrt{x^2-4x+3}\right)}$$

$$= \frac{(x-1)(x-3)}{(x-3)\left(\sqrt{x^2-4x+3}\right)} = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-4x+3}}$$

$$\lim_{x \to 3^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-3} = \lim_{x \to 3^+} \frac{x-1}{\sqrt{x^2-4x+3}}$$

$$= \frac{2}{0^+} = +\infty.$$

D'où, $f$ n'est pas dérivable à droite en 3 et sa courbe admet au point $(3; 0)$ une demi-tangente verticale.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^2} = \lim_{x \to -\infty} |x| = +\infty,$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2} = \lim_{x \to +\infty} |x| = +\infty$$

**Etude des variations**

$\forall x \in ]-\infty\,;\, 1] \cup [3\,;\, +\infty[$,

$$f'(x) = \frac{2x-4}{2\sqrt{x^2-4x+3}} = \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+3}}$$

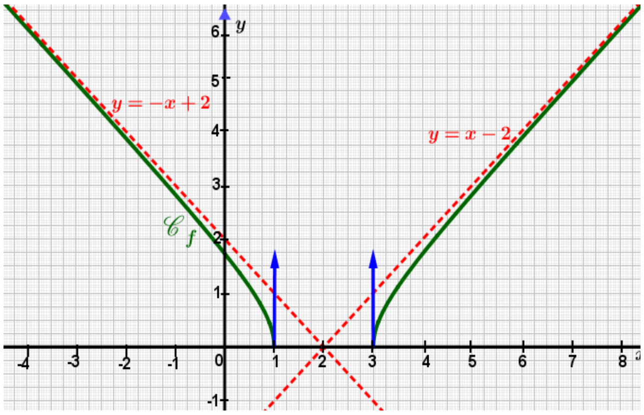
Le dénominateur étant positif, le signe de $f'(x)$ est celui du numérateur ;

$$x-2 = 0 \Rightarrow x = 2, (2 \notin ]-\infty; 1] \cup [3; +\infty[)$$

**Tableau de variation :**

| $x$ | $-\infty$ | $1$ | $2$ | $3$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | | | | $+$ |

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | | | | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $0$ | | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |




**2°)** $g(x) = |x^2 - 6x + 5|$

**Domaine de définition**

$$\mathcal{D}_f = ]-\infty; +\infty[ = \mathbb{R}$$

**Expression de $g$ sur $\mathbb{R}$**

$g$ est continue sur $\mathbb{R}$, $x^2 - 6x + 5 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ ou \\ x = 5 \end{cases}$

| $x$ | $-\infty$ | | 1 | | 5 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2 - 6x + 5$ | | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | |

$$g(x) = |x^2 - 6x + 5| = |(x-1)(x-5)|$$

☒Si $x \in ]-\infty; 1[ \cup ]5; +\infty[$, $(x-1)(x-5) > 0$

$$\Rightarrow g(x) = (x-1)(x-5)$$

☒Si $x \in ]1; 5[$, $(x-1)(x-5) < 0$

$$\Rightarrow g(x) = -(x-1)(x-5)$$

**Dérivabilité**

$g$ est dérivable sur $]-\infty\,; 1[$, $]1\,; 5[$ et $]5\,; +\infty[$.

Etudions la dérivabilité de $g$ en 1 et en 5.

$$g(1) = 0, \quad \lim_{x\to 1} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{|x^2 - 6x + 5|}{x - 1} = \frac{0}{0}(F.I)$$

$$g(5) = 0, \quad \lim_{x\to 5} \frac{g(x) - g(5)}{x - 5} = \lim_{x\to 5} \frac{|x^2 - 6x + 5|}{x - 5} = \frac{0}{0}(F.I)$$

La fonction $g$ a deux points de doute d'abscisses respectives1 et 5. Etudions la dérivabilité de $g$ à droite et à gauche en 1 et en 5.

**Dérivabilité de $g$ en 1**

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{|x^2 - 6x + 5|}{x - 1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{(x-1)(x-5)}{x - 1} = \lim_{x\to 1^-} (x - 5) = -4$$

$$\boldsymbol{\lim_{x\to 1^-} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = -4}$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{|x^2 - 6x + 5|}{x - 1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{-(x-1)(x-5)}{x - 1} = \lim_{x\to 1^+} -(x - 5) = 4$$

$$\boldsymbol{\lim_{x\to 1^+} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = 4}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1^-} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} \neq \lim_{x\to 1^+} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1}$$

D'où, $g$ n'est pas dérivable en 1 et $\mathcal{C}_g$ admet deux demi-tangentes au point d'abscisse 1 ;

- Une, à gauche d'équation : $y = -4x + 4$.
- Une, à droite d'équation : $y = 4x - 4$.

**Dérivabilité de $g$ en 5**

$$\lim_{x\to 5} \frac{g(x) - g(5)}{x - 5} = \lim_{x\to 5} \frac{|x^2 - 6x + 5|}{x - 5} = \frac{0}{0}(F.I)$$

$$\lim_{x\to 5^-} \frac{|x^2 - 6x + 5|}{x - 5} = \lim_{x\to 5^-} \frac{-(x-1)(x-5)}{x - 5} = \lim_{x\to 5^-} -(x - 1) = -4$$

$$\boldsymbol{\lim_{x\to 5^-} \frac{g(x) - g(5)}{x - 5} = 4}$$

$$\lim_{x\to 5^+} \frac{|x^2 - 6x + 5|}{x - 5} = \lim_{x\to 5^+} \frac{(x-1)(x-5)}{x - 5} = \lim_{x\to 5^+} (x - 1) = 4$$

$$\boldsymbol{\lim_{x\to 5^+} \frac{g(x) - g(5)}{x - 5} = 4}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 5^-} \frac{g(x) - g(5)}{x - 5} \neq \lim_{x\to 5^+} \frac{g(x) - g(5)}{x - 5}$$

D'où,$g$ n'est pas dérivable en 5 et $\mathcal{C}_g$ admet deux demi-tangentes au point d'abscisse 5 ;

- Une, à gauche d'équation :$y = -4(x-5) + 0$.
- Une, à droite d'équation : $y = 4(x-5) + 0$.

$$\lim_{x\to -\infty} g(x) = \lim_{x\to -\infty} |x^2 - 6x + 5| = \lim_{x\to -\infty} |x^2| = +\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} g(x) = \lim_{x\to +\infty} |x^2 - 6x + 5| = \lim_{x\to +\infty} |x^2| = +\infty$$

**Dérivé**

Pour tout $x \in ]-\infty; 1[ \cup ]5; +\infty[$,

$$g(x) = x^2 - 6x + 5 \Rightarrow g'(x) = 2x - 6$$

$$g'(x) = 0 \Rightarrow 2x - 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{6}{2} = 3$$

$3 \notin ]-\infty; 1[ \cup ]5; +\infty[$

| $x$ | $-\infty$ | 1 | 3 | 5 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | $-$ | | | | $+$ |
| $g(x)$ | $+\infty \searrow$ | 0 | | 0 | $\nearrow +\infty$ |

Pour tout $x \in ]1; 5[$, $g(x) = -x^2 + 6x - 5$

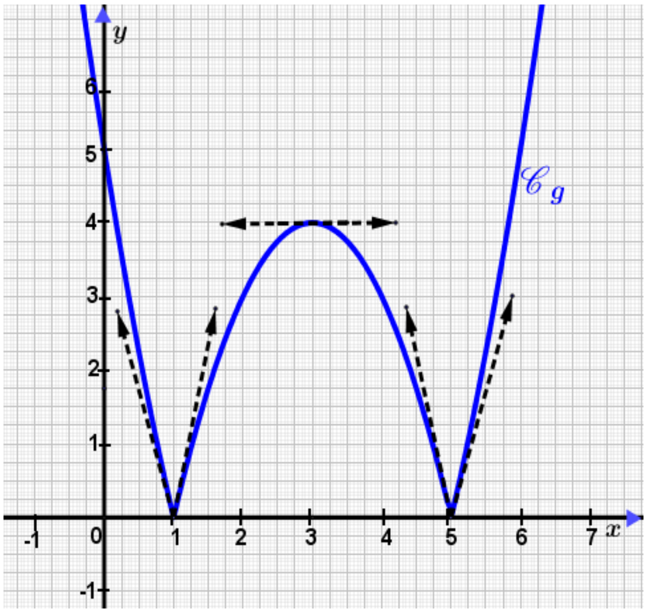
$\Rightarrow g'(x) = -2x + 6\,;\, g'(x) = 0 \Rightarrow -2x + 6 = 0$

$\Rightarrow x = \frac{6}{2} = 3$ et $3 \in ]1; 5[$

| $x$ | 1 | | 3 | | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | | $-$ | |
| $g(x)$ | 0 | $\nearrow$ | 4 | $\searrow$ | 0 |

**Tableau de variation de $g$**

| $x$ | $-\infty$ | | 1 | | 3 | | 5 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | | $+$ | 0 | $-$ | | $+$ | |
| $g(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | 0 | $\nearrow$ | 4 | $\searrow$ | 0 | $\nearrow$ | $+\infty$ |




**Exemple 4 :**

Soit $f$ la fonction définie par ;$f(\quad) = |x^2-1|$, $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

Etudions la dérivabilité de $f$en 1.

$$f(1)=0\ ;\ \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{|x^2-1|}{x-1}\ ;\ \text{ce rapport est égal à :}$$

$$\begin{cases} \dfrac{(x-1)(x+1)}{x-2}, & si\ x \in\ ]-\infty,-1] \cup\ ]1,+\infty[ \\ -\dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1}, & si\ x \in\ ]-1,1] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1, & si\ x \in\ ]-\infty,-1] \cup\ ]1,+\infty[ \\ -(x-1), & si\ x \in\ ]-1,1] \end{cases}$$

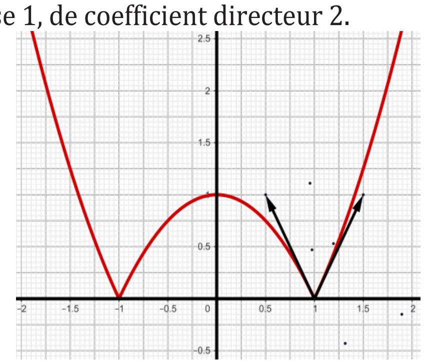
$\lim\limits_{x\to 1^-} -(x+1) = -2;\ d'où\ f'_g(1) = -2.$ $\lim\limits_{x\to 1^+}(x+1) = 2;\ d'où\ f'_d(1) = 2$

Donc,$f$est dérivable à gauche en 1 et admet $-2$ pour nombre dérivé à gauche en 1.

Elle est aussi, dérivable à droite en 1et admet 2 pour nombre dérivé à droite en 1.

$\mathcal{C}$ admet une demi-tangente à gauche au point d'abscisse 1, de coefficient directeur $-2$.

Elle admet aussi, une demi-tangente à droite au point d'abscisse 1, de coefficient directeur 2.



$f$ n'est pas dérivable en 1, car, $f'_g(1) \neq f'_d(1)$

**Exemple 5 :**

Soit $g$ la fonction définie par :$g(x) =$

$$\begin{cases} 2x^2-2x, & si x \in [-1,1] \\ x^2-1, & si x \in\ ]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[ \end{cases}$$

**Dérivabilité de $g$ à gauche en 1 :**

$$\frac{g(x)-g(1)}{x-1} = \frac{2x^2-2x-0}{x-1} = \frac{2x^2-2x}{x-1} = \frac{2x(x-1)}{x-1} = 2x$$

$$\Longrightarrow \lim_{x\to 1^-}\frac{g(x)-g(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} 2x = 2.$$

$$D'où\ ;\ g'_g(1) = 2.$$

**Dérivabilité de $g$ à droite en 1 :**

$$\frac{g(x)-g(1)}{x-1} = \frac{x^2-1-0}{x-1} = \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = x+1$$

$$\Longrightarrow \lim_{x\to 1^+}\frac{g(x)-g(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}(x+1) = 2.$$

D'où ;$g'_d(1) = 2$.

L'égalité des deux nombres dérivés ; $g'_g(1)$ et $g'_d(1)$ prouve la dérivabilité de $g$ en 1.

**Exemple 6:**

Le repère $(O\ ;\ I\ ;\ J)$ est orthonormé.

Soit $f$ la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x}$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative ; On a :

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \Longrightarrow \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty.$$

Donc $f$ n'est pas dérivable à droite en 0.

$\mathcal{C}$ admet une demi-tangente parallèle à l'axe des ordonnées au point d'abscisse 0.

**Exemple 7:**

Etudier la dérivabilité de la fonction $f$ en $x_0$après avoir déterminé$\mathcal{D}_f$, dans chacun des cas suivants :

**1°)**$f(x) = x^2$, $(x_0 \in \mathbb{R})$.

**2°)**$f(x) = |x^2-4x+3|$, $(x_0 = 1;\ x_0 = 3)$.

**3°)**$f(x) = \sqrt{x}$, $(x_0 = 0)$

**Réponse :**

**1°)**$f(x) = x^2$, $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$, $f(x_0) = {x_0}^2$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{x^2-{x_0}^2}{x-x_0} = \frac{{x_0}^2-{x_0}^2}{x_0-x_0} = \frac{0}{0}\ (F.I)$$

$$\frac{x^2-{x_0}^2}{x-x_0} = \frac{(x-x_0)(x+x_0)}{x-x_0} = x+x_0$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} x+x_0 = x_0+x_0 = 2x_0$$

D'où,$f$ est dérivable en $x_0$et$f'(x_0) = 2x_0$.

**2°)**$f(x) = |x^2-4x+3|$, $(x_0 = 1;\ x_0 = 3)$

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$

**a)** $x_0 = 1$, $f(1) = |1^2-4\times 1+3| = 0$

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{|x^2-4x+3|}{x-1} = \frac{0}{0}\ (F.I)$$

$$x^2-4x+3 = 0 \Longrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ ou \\ x = 3 \end{cases}$$

$$f(x) = |x^2-4x+3| = |(x-1)(x-3)|$$

| $x$ | $-\infty$ $\quad$ $1$ $\quad\quad$ $3$ $\quad$ $+\infty$ |
|---|---|
| $x^2-4x+3$ | $+\quad 0 \quad - \quad 0 \quad +$ |

Si $x \in ]-\infty;1[$, $x^2-4x+3>0$, d'où ;

$$\lim_{x\to1^-}\frac{|x^2-4x+3|}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{(x-1)(x-3)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1^-}(x-3)=1-3=-2$$

Si $x\in]1;3[$, $2x^2-4x+3<0$, d'où ;

$$\lim_{x\to1^+}\frac{|x^2-4x+3|}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{-(x-1)(x-3)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1^+}-(x-3)=-1\times(1-3)=2$$
$$\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\neq\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

D'où, $f$ n'est pas dérivable en 1.

**b)** $x_0=3,\quad f(3)=|3^2-4\times3+3|=0$

$$\lim_{x\to3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{|3^2-4\times3+3|}{3-3}=\frac{0}{0}\quad(F.I)$$
$$f(x)=|x^2-4x+3|=|(x-1)(x-3)|$$

Si $x\in[1;3]$, $x^2-4x+3<0$, d'où ;

$$\lim_{x\to3^-}\frac{|x^2-4x+3|}{x-3}=\lim_{x\to3^-}\frac{-(x-1)(x-3)}{x-3}$$
$$=\lim_{x\to3^-}-(x-1)=-(3-1)=-2$$

Si $x\in[3;+\infty[$, $2x^2-4x+3>0$, d'où ;

$$\lim_{x\to3^+}\frac{|x^2-4x+3|}{x-3}=\lim_{x\to3^+}\frac{(x-1)(x-3)}{x-3}$$
$$=\lim_{x\to3^+}(x-1)=(3-1)=2$$
$$\lim_{x\to3^-}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}\neq\lim_{x\to3^+}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}$$

D'où, $f$ n'est pas dérivable en 3.

**3°)** $f(x)=\sqrt{x}$,

$\mathcal{D}_f=[0;+\infty[=\mathbb{R}^+,\qquad x_0=0,\qquad f(0)=\sqrt{0}=0$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{x}}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

Donc, $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=+\infty$

D'où, $f$ n'est pas dérivable à droite en 0

## 3. Fonction dérivées :

### a. Dérivabilité d'une fonction sur un intervalle :

**Définition :**

On dit qu'une fonction $f$ est dérivable sur un intervalle $I$, lorsqu'elle est dérivable en tout point de $I$. C'est-à-dire : $f$ est dérivable sur un intervalle ouvert $I$ si elle est dérivable en tout point de $I$.

$f$ est dérivable sur un intervalle semi-ouvert $[a;b[$ (resp. $[a;+\infty[$) si elle est dérivable en tout point de $]a;b[$ (resp. $]a;+\infty[$) et à droite en $a$.

$f$ est dérivable sur un intervalle semi-ouvert $]a;b]$ (resp. $]-\infty;b]$) si elle est dérivable en tout point de $]a;b[$ (resp. $]-\infty;b[$) et à gauche en $b$.

$f$ est dérivable sur un intervalle fermé $[a;b]$ si elle est dérivable en tout point de $]a;b[$, à droite en $a$ et à gauche en $b$.

**Remarque 3 :**

**1°)** Si $f$ et $g$ sont deux fonctions dérivables sur un intervalle $I$, et si $k$ est une constante, alors les fonctions : $f+g, k.f$ et $f\times g$ sont dérivables sur $I$.

**2°)** Si $f$ et $g$ sont dérivables sur $I$, et si $k$ est une constante, et si $\forall x\in I, g(x)\neq0$, alors les fonctions ${}^{f}/_{g}$, ${}^{1}/_{f}$, ${}^{1}/_{g}$ et ${}^{k}/_{g}$ sont dérivables sur $I$.

**3°)** Si $f$ est dérivable sur $I$, et si $\forall x\in I, f(x)>0$ alors la fonction $\sqrt{f(x)}$ est dérivable sur son intervalle.

**4°)** Si $f$ est dérivable sur $I$ et $g$ est dérivable sur $J=f(I)$, alors $g\circ f$ est dérivable sur $I$.

**5°)** Toute fonction polynôme est dérivable sur $\mathbb{R}$.

**6°)** Toute fonction rationnelle (*quotient de deux polynômes polynôme*) est dérivable sur son domaine de définition

**7°)** Les fonctions $sin$ et $cos$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

**8°)** Les fonctions $tan$ et $cotg$ sont dérivables sur leurs ensembles de définition respectifs.

**Exemple 8 :**

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ de la façon suivante :

$$f(x)=\begin{cases}x\sqrt{-x} & si \quad x\leq0\\ \dfrac{4-2x}{\sqrt{4x-x^2}} & si \quad 0<x<4\\ \sqrt{x^2-4x} & si \quad x\geq4\end{cases}$$

Etudier la dérivabilité de $f$ sur chacun des intervalles suivants :

**a)** $I_1=]-\infty;0]$, **b)** $I_2=]0;4[$, **c)** $I_3=[0;4[$,
**d)** $I_4=]0;4]$, **e)** $I_5=[4;+\infty[$,

**Réponse :**

**a)** $I_1=]-\infty;0]$

Sur l'intervalle ouvert $]-\infty;0[$, $x\sqrt{-x}$ produit d'une fonction polynôme $(x\mapsto x)$ et de la racine carrée $(x\mapsto\sqrt{-x})$ d'une fonction polynôme strictement positive sur $]-\infty;0[$, d'où, $f$ est dérivable sur $]-\infty;0[$ étudions sa dérivabilité à gauche en 0.

$$f(0)=0\times\sqrt{0}=0\times0=0$$
$$\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{x\sqrt{-x}}{x}$$
$$=\lim_{x\to0^-}\sqrt{-x}=\sqrt{0}=0$$

Donc, $f$ est dérivable en 0, d'où $f$ est dérivable sur $I_1=]-\infty;0]$.

**b)** $I_2=]0;4[$,

on a déjà vue que ;

$\forall x\in]0;4[, 4x-x^2>0$, donc, sur $I_2=]0;4[$

$$f(x)=\frac{4-2x}{\sqrt{4x-x^2}}$$

produit d'une fonction polynôme $(x\mapsto4-2x)$ et de l'inverse de la racine carrée d'une fonction polynôme strictement positive sur $I_2=]0;4[$, d'où, $f$ est dérivable sur $I_2=]0;4[$.

**c)** $I_3=[0;4[$

On vient de montrer que $f$ est dérivable sur $]0;4[$, étudions sa dérivabilité à droite en 0.

On a $f(0)=0$.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{4-2x}{\sqrt{4x-x^2}}}{x}$$
$$\lim_{x\to 0^+}\frac{4-2x}{x\sqrt{4x-x^2}}=\frac{4}{0^+\times 0^+}=\frac{4}{0^+}=+\infty$$
$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=+\infty$$

D'où, $f$ n'est pas dérivable à droite en 0.

Donc $f$ n'est pas dérivable en 0.

Donc $f$ n'est pas dérivable sur l'intervalle $I_3=[0;4[$.

**d)** $I_4=]0;4]$

On a déjà montré que $f$ est dérivable sur $]0;4[$, étudions sa dérivabilité à gauche en 4.

On a $f(4)=\sqrt{4^2-4\times 4}=0$.

$$\lim_{x\to 4^-}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}=\lim_{x\to 4^-}\frac{\frac{4-2x}{\sqrt{4x-x^2}}}{x-4}$$
$$\lim_{x\to 4^-}\frac{4-2x}{(x-4)\sqrt{4x-x^2}}=\frac{-4}{0^-\times 0^+}=\frac{-4}{0^-}=+\infty$$
$$\lim_{x\to 4^-}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}=+\infty$$

D'où, $f$ n'est pas dérivable à gauche en 4.

Donc $f$ n'est pas dérivable en 4.

Donc $f$ n'est pas dérivable sur l'intervalle $I_4=]0;4]$.

**e)** $I_5=[4;+\infty[$

On a déjà vu dans un exercice précédent que ;

$$\forall x\in[4;+\infty[,\ f(x)=\sqrt{x^2-4x}$$

$f$ est la racine carrée d'une fonction polynôme strictement positive. D'où, $f$ est dérivable sur $]4;+\infty[$.

Etudions maintenant la dérivabilité de $f$ à droite en 4.

On a $f(4)=0$

$$\lim_{x\to 4^+}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}=\lim_{x\to 4^+}\frac{\sqrt{x^2-4x}}{x-4}$$
$$=\lim_{x\to 4^+}\frac{\left(\sqrt{x^2-4x}\right)\left(\sqrt{x^2-4x}\right)}{(x-4)\left(\sqrt{x^2-4x}\right)}$$
$$=\lim_{x\to 4^+}\frac{x^2-4x}{(x-4)\left(\sqrt{x^2-4x}\right)}$$
$$=\lim_{x\to 4^+}\frac{x(x-4)}{(x-4)\left(\sqrt{x^2-4x}\right)}$$
$$=\lim_{x\to 4^+}\frac{x}{\sqrt{x^2-4x}}=\frac{4}{\sqrt{4^2-4\times 4}}=\frac{4}{0^+}=+\infty$$
$$\lim_{x\to 4^+}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}=+\infty$$

D'où, $f$ n'est pas dérivable à droite en 4.

Donc $f$ n'est pas dérivable en 4.

Donc $f$ n'est pas dérivable sur l'intervalle : $I_5=[4;+\infty[$.

### b. Dérivée d'une fonction :

La fonction de $I$ dans $\mathbb{R}$ qui à tout réel $x$ de $I$ associe le nombre dérivé de $f$ en $x$ est appelée dérivée de $f$ est notée $f'$.

**Exemple 9 :**

- Soit la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2$, soit $x_0$ un nombre réel quelconque.

Etudions la dérivabilité de $f$ en $x_0$.

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{x^2-{x_0}^2}{x-x_0}$$
$$=\frac{(x+x_0)(x-x_0)}{x-x_0}=x+x_0$$
$$\Longrightarrow \lim_{x\to x_0}(x+x_0)=2x_0$$

Donc, $f$ est dérivable en $x_0$ et sa valeur dérivée est : $f'(x_0)=2x_0$

- Soit la fonction $g$ définie sur $[0\,;+\infty[$ par $g(x)=\sqrt{x}$, soit $x_0$ un élément de $]0\,;+\infty[$.

$$\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0}=\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{x_0}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}{(x-x_0)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}$$
$$=\frac{(x-x_0)}{(x-x_0)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}$$
$$\Longrightarrow \lim_{x\to x_0}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}.$$

Donc g est dérivable en $x_0$ et sa valeur dérivée est :

$$g'(x_0)=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

## II. Calculs des dérivées :

### 1. Dérivées des fonctions usuelles :

- Fonction constante, soit : $f: x\longmapsto k\,(k\in\mathbb{R})$

Soit $x_0\in\mathbb{R}$ ; pour tout $x\neq x_0$ ;

D'où $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=0$,

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{k-k}{x-x_0}=\frac{0}{x-x_0}=0;$$

La fonction constante $f: x\longmapsto k$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $f'(x)=0$

- Fonction : $f: x\longmapsto x$

Soit $x_0\in\mathbb{R}$ ; pour tout $x\neq x_0$ ;

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{x-x_0}{x-x_0}=1\ ;\ \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=1$$

La fonction : $f: x\longmapsto x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $f'(x)=1$

- Fonction : $f: x\longmapsto x^2$

Soit $x_0\in\mathbb{R}$ ; pour tout $x\neq x_0$ ;

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{x^2-{x_0}^2}{x-x_0}=\frac{(x-x_0)(x+x_0)}{x-x_0}$$
$$=x+x_0\Longrightarrow \lim_{x\to x_0}(x+x_0)=2x_0$$

Donc, $f: x\longmapsto x^2$ dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa fonction dérivée est : $f'(x)=2x$

- Fonction : $f: x\longmapsto x^3$

Soit $x_0\in\mathbb{R}$ ; pour tout $x\neq x_0$ ; $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{x^3-{x_0}^3}{x-x_0}$

$$=\frac{(x-x_0)(x^2+xx_0+{x_0}^2)}{x-x_0}=x^2+xx_0+{x_0}^2$$
$$\Longrightarrow \lim_{x\to x_0}(x^2+xx_0+{x_0}^2)=3{x_0}^2$$

Donc, $f: x\longmapsto x^3$ dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa fonction dérivée est : $f'(x)=3x^2$

Fonction : $f: x\longmapsto \frac{1}{x}$

Soit $x_0 \in \mathbb{R}^*$ ; pour tout

$$x \neq x_0\ ;\ \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}}{x-x_0} = \frac{(x_0-x)}{(x-x_0)xx_0}$$
$$= \frac{-1}{xx_0} \Longrightarrow \lim_{x\to x_0}\left(\frac{-1}{xx_0}\right) = \frac{-1}{{x_0}^2}$$

Donc, $f : x \longmapsto \frac{1}{x}$ dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et sa fonction dérivée est : $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

- Fonction : $f : x \longmapsto \sqrt{x}$

Soit $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$ / $x \neq x_0$;

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0}$$
$$= \frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{x_0}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}{(x-x_0)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}$$
$$= \frac{(x-x_0)}{(x-x_0)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)} = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}$$
$$\Longrightarrow \lim_{x\to x_0}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}.$$

La fonction $f : x \longmapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$; sa fonction dérivée est : $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

- Fonctions : $f : x \longmapsto \sin x$ et $f : x \longmapsto \cos x$

La fonction $f : x \longmapsto \sin x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction $x \longmapsto \cos x$

La fonction $f : x \longmapsto \cos x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction $x \longmapsto -\sin x$

## 2. Dérivées et opérations sur les fonctions :

### Dérivée de la somme de deux fonctions :

Soit $f$ et $g$ deux fonctions dérivables sur un intervalle ouvert $I$, $f'$ et $g'$ leurs fonctions dérivées respectives.

La fonction $U$ définie par : $U = f + g$ est dérivable sur $I$ et on a : $U' = (f+g)' = f' + g'$

**Exemple 10 :**

Soit la fonction $U$ définie par : $U(x) = x^2 + \frac{1}{x}$.

Posons $f(x) = x^2$ et $g(x) = \frac{1}{x}$, on a $f'(x) = 2x$ ; $g'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

$U$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $U'(x) = 2x - \frac{1}{x^2}$.

### Dérivée du produit de deux fonctions :

Soit $f$ et $g$ deux fonctions dérivables sur un intervalle ouvert $I$, $f'$ et $g'$ leurs fonctions dérivées respectives.

La fonction $U$ définie par : $U = f.g$ est dérivable sur $I$ et on a : $U'(x) = (f.g)' = f'.g + f.g'$

### Cas particuliers :

- Si, $g$ est la fonction définie par $\boldsymbol{g}(x) = k$ ($k \in \mathbb{R}$), on a $g'(x) = 0$ ; On en déduit que $(kf)' = k.f'$
- Si, $f = g$ on a : $f' = g'$, on en déduit que $(f^2)' = 2f'f$.

**Exemple 11 :**

Soit $f$ et $g$ deux fonctions définies par

$f(x) = x^2 \cos x$ et $g(x) = 5x^2$.

$f'(x) = (x^2)'.\cos x + x^2(\cos x)'$

$= 2x\cos x - x^2\sin x;$

$g'(x) = 5(x^2)' = 5 \times 2x = 10x.$

### Dérivée de la puissance d'une fonction :

Soit $f$ une fonction dérivable sur un intervalle ouvert $I$ et $n$ un entier supérieur ou égal à 2.

La fonction $U$ définie par: $U = f^n$ est dérivable sur $I$ et on a $U'(x) = (f^n)' = n\,.\,f'.f^{n-1}$.

**Exemple 12 :**

- Soit $f$ la fonction définie par $f(x) = x^n$( $n$ entier et $n \geq 2$),

$f'(x) = (x^n)' = n(x)'.x^{n-1} = n(1).x^{n-1} = n.x^{n-1}$.

- Soit $g$ la fonction définie par $g(x) = \cos^3 x$

$g'(x) = (\cos^3 x)' = 3(cosx)'(\cos^2 x) \Longrightarrow g'(x) = -3\sin x\,.\cos^2 x.$

### Dérivée de l'inverse d'une fonction :

Soit $g$ une fonction dérivable sur un intervalle $I$ tel que, pour $x \in I$, $g(x) \neq 0$.

La fonction $U$ définie par :

$U = \frac{1}{g}$ est dérivable sur $I$ et on a :

$$U'(x) = \left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$$

**Exemple 13 :**

Soit $f$ la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{1}{x^2+1}\ ;\ f'(x) = \left(\frac{1}{x^2+1}\right)'$$
$$= \frac{(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$$

### Dérivée du quotient de deux fonctions :

Soit $f$ et $g$ deux fonctions dérivables sur un intervalle ouvert $I$ tel que, pour tout $x \in I$, $g(x) \neq 0$.

La fonction $U$ définie par : $U = \frac{f}{g}$ est dérivable sur $I$ et on a : $U'(x) = \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.

**Exemple 14 :**

$f$ est une fonction définie par ; $f(x) = \frac{1-x}{2x^2+1}$

$$f'(x) = \frac{(1-x)'(2x^2+1)-(1-x)(2x^2+1)'}{(2x^2+1)^2}$$
$$= \frac{-1(2x^2+1)-(1-x)(4x)}{(2x^2+1)^2} = \frac{2x^2-4x-1}{(2x^2+1)^2}$$

### Dérivée de la racine carrée d'une fonction :

Soit $f$ une fonction dérivable sur un intervalle ouvert $I$, tel que, pour $x \in I$, $f(x) > 0$.

La fonction $f$ définie par : $f(x) = \sqrt{x}$ est dérivable sur $I$ et on a : $f'(x) = \left(\sqrt{x}\right)' = \frac{f'}{2\sqrt{f}}$.

**Exemple 15 :**

Soit la fonction $\boldsymbol{f}$ définie par $f(x) = \sqrt{x^2+1}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 + 1 > 0$ ; $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $\boldsymbol{f}'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

### Dérivée de la fonction $f(ax+b)$ :

Soit $x \longmapsto ax + b$ une fonction affine et $x_0$ un réel. Si la fonction $f$ dérivable au point $y_0 = ax_0 + b$, la fonction

$g : x \mapsto f(ax+b)$ dérivable en $x_0$ et $g'(x_0) = af'(ax_0+b)$

La fonction $: x \mapsto ax+b$ ; est dérivable sur $J$ et on a $\left(f(ax+b)\right)' = a\left(f'(ax+b)\right)$.

**Exemple 16 :**

Soit la fonction $f$ définie par : $f(x) = \cos\left(2x - \frac{2\pi}{3}\right)$.

$$f'(x) = 2 \times (-)\sin\left(2x - \frac{2\pi}{3}\right) = -2\sin\left(2x - \frac{2\pi}{3}\right)$$

### 3. Tableaux récapitulatifs :

**Dérivées usuelles**

| Fonction $f$ | Dérivée $f'$ | Intervalle $I$ |
|---|---|---|
| $a$ | $0$ | $\mathbb{R}$ |
| $ax+b$ | $a$ | $\mathbb{R}$ |
| $\frac{1}{x}$ | $\frac{-1}{x^2}$ | $\mathbb{R}^*$ |
| $\sqrt{x}$ | $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ | $\mathbb{R}_+^*$ |
| $x\sqrt{x}$ | $\frac{3}{2}\sqrt{x}$ | $\mathbb{R}_+^*$ |
| $\frac{1}{x^n}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ | $\frac{-n}{x^{n+1}}$ | $\mathbb{R}^*$ |
| $x^r$ $(r \in \mathbb{Q})$ | $rx^{r-1}$ | $\mathbb{R}_+^*$ |

| Fonction $f$ | Dérivée $f'$ | Intervalle $I$ |
|---|---|---|
| $\sin x$ | $\cos x$ | $\mathbb{R}$ |
| $\cos x$ | $-\sin x$ | $\mathbb{R}$ |
| $\sin(ax+b)$ | $a\cos(ax+b)$ | $\mathbb{R}$ |
| $\cos(ax+b)$ | $-a\sin(ax+b)$ | $\mathbb{R}$ |
| $\tan x$ | $1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ | $\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi ; \frac{\pi}{2}+k\pi\right[$ |
| $\operatorname{cotg} x$ | $-1-\operatorname{cotg}^2 x = \frac{-1}{\sin^2 x}$ | $]k\pi\,;\,k\pi+\pi[$ |
| $x^n$ | $nx^{n-1}$ | $\mathbb{R}$ |

**Algèbre des dérivées de fonctions :**

| Fonction $f$ | Dérivée $f'$ |
|---|---|
| $k.U$ $(k \in \mathbb{R})$ | $k.U'$ |
| $U+V$ | $U'+V'$ |
| $U.V$ | $U'.V+V'.U$ |
| $U/V$ | $\frac{U'V-V'U}{V^2}$ |
| $1/U$ | $\frac{-U'}{U^2}$ |

| Fonction $f$ | Dérivée $f'$ |
|---|---|
| $\sqrt{U}$ | $\frac{U'}{2\sqrt{U}}$ |
| $U\sqrt{U}$ | $\frac{3}{2}U'\sqrt{U}$ |
| $U^n (n \in \mathbb{N})$ | $nU'.U^{n-1}$ |
| $\frac{1}{U^n}$ | $\frac{-nU'}{U^{n+1}}$ |
| $U^r (r \in \mathbb{R})$ | $rU'.U^{r-1}$ |
| $\sin U$ | $U'\cos U$ |
| $\cos U$ | $-U'\sin U$ |
| $\tan U$ | $U'(1+\tan^2 U) = \frac{U'}{\cos^2 U}$ |
| $\operatorname{cotg} U$ | $-U'(1+\operatorname{cotg}^2 U) = \frac{-U'}{\sin^2 U}$ |
| $V \circ U$ | $U'.(V' \circ U)$ |

## III. Applications de la dérivation :

### 1. Signe de la dérivée et sens de variation :

**Théorème :**

Soit $f$ une fonction dérivable sur un intervalle ouvert $I$.

- Si $f'$ est positive (resp. négative) sur un intervalle $I$, alors $f$ est croissante (resp. décroissante) sur $I$.
- Si $f'$ est nulle sur tous les points d'un intervalle $I$, alors $f$ est constante sur $I$.
- Si $f'$ s'annule en un point $x_0$ de $I$ en changeant de signe, alors $f$ admet un extrémum relatif (minimum ou maximum) sur $I$.
- Si $f'$ garde un même signe sur $I$, et si elle ne s'annule pas sauf peut-être en un nombre fini de point de $I$, alors $f$ est strictement monotone sur $I$.

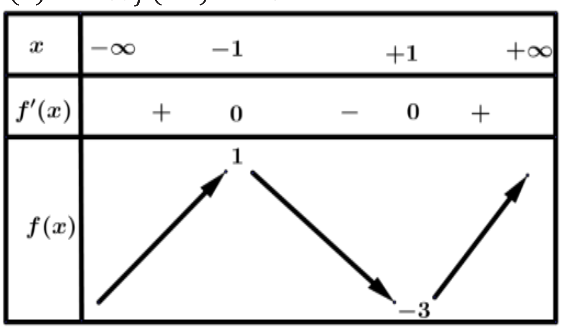
**Exemple 17 :**

Soit $f$ la fonction définie par :

$f(x) = x^3 - 3x - 1$, $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2-1) = 3(x-1)(x+1)$.

$\forall\, x \in ]-\infty ; -1[ \cup ]1 ; +\infty[$, $f'(x) > 0$, donc $f$ est croissante, $\forall\, x \in [-1 ; 1]$, donc $f$ est décroissante, on en déduit le tableau de $f$ que l'on complète en calculant $f(1) = 1$ et $f(-1) = -3$




### 2. Extremum relatif d'une fonction :

**Propriété :**

Soit $f$ une fonction dérivable sur un intervalle $]a ; b[$ et $x_0 \in ]a ; b[$, si $f'$ s'annule et change de signe en $x_0$, alors $f$ admet un extremum relatif en $x_0$.

| $x$ | $a$ | $x_0$ | $b$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | \| | $-$ |
| $f(x)$ | $\nearrow$ | $M$ | $\searrow$ |

$f$ admet un maximum relatif $M$ en $x_0$

| $x$ | $a$ | $x_0$ | $b$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | | $+$ |
| $f(x)$ | $\searrow$ | $m$ | $\nearrow$ |

$f$admet un minimum relatif m en $x_0$

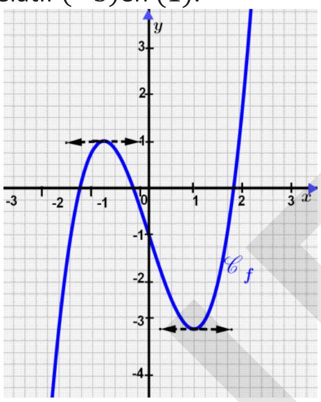
**Exemple 18 :**

la courbe ci-contre est la représentation graphique de la fonction $f$ de l'exemple précédent :

$f(x) = x^3 - 3x - 1$.

- $f'$ s'annule et change de signe en $(-1)$ et en $(1)$.
- $f$ admet un maximum relatif $(1)$ en $(-1)$ et

un minimum relatif $(-3)$en $(1)$.




## IV. Branches infinies :

### A°) Asymptotes verticale *(AV)* :

Soit un réel $a$, la droite d'équation $x = a$ est une asymptote verticale (parallèle à $(y'Oy)$) à la courbe $C$ d'une fonction $f$ssi :

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty, \qquad \lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$$

### B°) Asymptote horizontale (AH) :

Soit $b$ un réel, la droite d'équation $y = b$ est une asymptote horizontale (parallèle à $(x'Ox)$) à la courbe $C$ d'une fonction $f$ au voisinage de $-\infty$ (resp. au voisinage de $+\infty$) ssi :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = b, \qquad (\text{resp. si } \lim_{x \to +\infty} f(x) = b)$$

### C°) Asymptote oblique *(AO)* :

Soit $a$ un réel non nul, et soit $b$ un réel quelconque.

La droite d'équation $y = ax + b$ est une asymptote oblique à la courbe $C$ d'une fonction $f$ au voisinage de $-\infty$ (resp. au voisinage de $+\infty$) si :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a \\ \lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - ax) = b \end{cases}$$

Ou encore $\lim\limits_{x \to -\infty} \big(f(x) - (ax + b)\big) = 0$

(resp. si : $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a \\ \lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - ax) = b \end{cases}$

Ou encore $\lim\limits_{x \to +\infty} \big(f(x) - (ax + b)\big) = 0)$

### D°) Branche parabolique de direction $(y'Oy)$ :

La courbe $C$ d'une fonction $f$ admet une branche parabolique parallèle à l'axe des ordonnées au voisinage de $-\infty$ (resp. au voisinage de $+\infty$), si $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$ $(resp. \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty)$

### E°) Branche parabolique de direction $(x'Ox)$ :

La courbe $C$ d'une fonction $f$ admet une branche parabolique parallèle à l'axe des abscisses au voisinage de $-\infty$ (resp. au voisinage de $+\infty$), si

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \pm\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0 \end{cases}$$

$$\left( resp. \begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \pm\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0 \end{cases} \right)$$

### F°) Branche parabolique parallèle à une droite d'équation $y = ax$ $(a \neq 0)$ :

Soit $a$ un réel non nul, la courbe $C$ d'une fonction $f$ admet une branche parabolique parallèle à la droite d'équation $y = ax$ au voisinage de $-\infty$ (resp. au voisinage de $+\infty$), si :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a \\ \lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - ax) = \pm\infty \end{cases}$$

$$\left( resp. \begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a \\ \lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - ax) = \pm\infty \end{cases} \right)$$

**Exercice 1 :**

Déterminer les branches infinies des fonctions suivantes :

$\boldsymbol{a})f_1 = x^2;\quad \boldsymbol{b})f_2 = \sqrt{x};\quad \boldsymbol{c})f_3 = \dfrac{x^2 - 6x + 9}{2x - 4}$

$\boldsymbol{d})f_4 = \sqrt{x^2 - 2x};\quad \boldsymbol{e})f_5 = x + \sqrt{x};\quad \boldsymbol{f})f_6 = \dfrac{3x - 6}{2x + 2}$

**Solution :**

$\boldsymbol{a})f_1 = x^2$ ;$\mathcal{D}_{f_1} = \mathbb{R} = ]-\infty; +\infty[$

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f_1(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f_1(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$

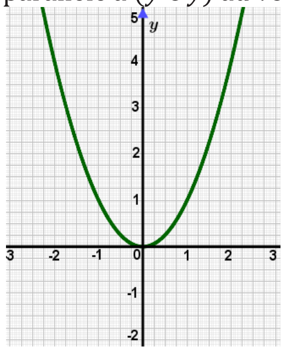
$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f_1(x)}{x} = -\infty$

La courbe de $f_1$ admet donc une branche parabolique parallèle à $(y'Oy)$ au voisinage de $-\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f_1(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f_1(x)}{x} = +\infty$

La courbe de $f_1$ admet donc une branche parabolique parallèle à $(y'Oy)$ au voisinage de $+\infty$



$\boldsymbol{b)} f_2 = \sqrt{x}\,; \mathcal{D}_{f_2} = \mathbb{R}^* = [0;\ +\infty[$

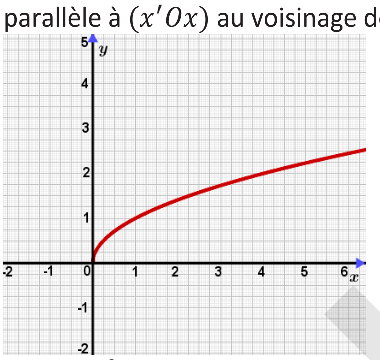
$$\lim_{x\to 0^+} f_2(x) = \lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} = \sqrt{0} = 0$$

$$\lim_{x\to +\infty} f_2(x) = \lim_{x\to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f_2(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

Donc ; $\begin{cases} \lim\limits_{x\to +\infty} f_2(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{f_2(x)}{x} = 0 \end{cases}$

D'où, la courbe $\mathcal{C}_{f_2}$ admet une branche parabolique parallèle à $(x'Ox)$ au voisinage de $+\infty$



$\boldsymbol{c)} f_3 = \dfrac{x^2 - 6x + 9}{2x - 4}$

$$\mathcal{D}_{f_3} = \mathbb{R} \setminus \{2\} = ]-\infty; 2[ \cup ]2;\ +\infty[$$

$$\lim_{x\to 2^-} f_3(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{x^2 - 6x + 9}{2x - 4} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 2^+} f_3(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{x^2 - 6x + 9}{2x - 4} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Donc, la droite d'équation $x = 2$ est une asymptote verticale.

$$\lim_{x\to -\infty} f_3(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2 - 6x + 9}{2x - 4} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x}{2} = \frac{-\infty}{2} = -\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} f_3(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2 - 6x + 9}{2x - 4} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x}{2} = \frac{+\infty}{2} = +\infty$$

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{f_3(x)}{x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2 - 6x + 9}{x(2x - 4)}$$

$$= \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2 - 6x + 9}{x(2x - 4)} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to -\infty} \left(f_3(x) - \frac{1}{2}x\right)$$

$$= \lim_{x\to -\infty} \left(\frac{x^2 - 6x + 9}{2x - 4} - \frac{2x^2 - 4x}{2(2x - 4)}\right)$$

$$= \lim_{x\to -\infty} \frac{2x^2 - 12x + 18 - 2x^2 + 4x}{2(2x - 4)}$$

$$= \lim_{x\to -\infty} \frac{-4x + 9}{2x - 4} = \lim_{x\to -\infty} \frac{-4x}{2x} = -2$$

Donc ;

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{f_3(x)}{x} = \dfrac{1}{2} \\ \lim\limits_{x\to -\infty} \left(f_3(x) - \dfrac{1}{2}x\right) = -2 \end{cases}$$

D'où, la courbe de $f_3$ admet une asymptote oblique d'équation $y = \frac{1}{2}x - 2$ au voisinage de $-\infty$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f_3(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2 - 6x + 9}{x(2x - 4)}$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2 - 6x + 9}{x(2x - 4)} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to +\infty} \left(f_3(x) - \frac{1}{2}x\right)$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x^2 - 6x + 9}{2x - 4} - \frac{2x^2 - 4x}{2(2x - 4)}\right)$$

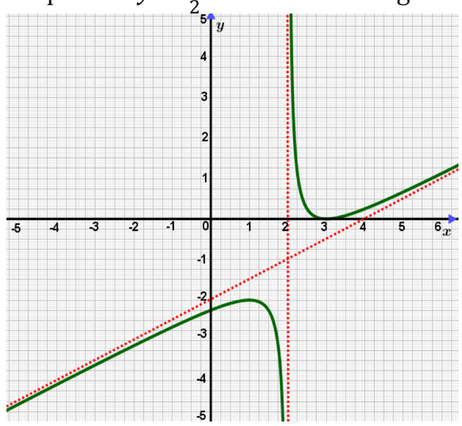
$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{2x^2 - 12x + 18 - 2x^2 + 4x}{2(2x - 4)}$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{-4x + 9}{2x - 4} = \lim_{x\to +\infty} \frac{-4x}{2x} = -2$$

Donc ;

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{f_3(x)}{x} = \dfrac{1}{2} \\ \lim\limits_{x\to +\infty} \left(f_3(x) - \dfrac{1}{2}x\right) = -2 \end{cases}$$

D'où, la courbe de $f_3$ admet asymptote oblique d'équation $y = \frac{1}{2}x - 2$ au voisinage de $+\infty$



$\boldsymbol{d)} f_4 = \sqrt{x^2 - 2x}$, $f_4$ est définie si $x^2 - 2x \geq 0$

$$\Longrightarrow \mathcal{D}_{f_4} = ]-\infty; 0] \cup [2;\ +\infty[$$

$$\lim_{x\to +\infty} f_4(x) = \lim_{x\to +\infty} \sqrt{x^2 - 2x}$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \sqrt{x^2} = \lim_{x\to +\infty} |x| = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-} f_4(x) = f_4(0) = 0$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f_4(x) - f_4(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{x^2 - 2x}}{x} = \frac{0}{0}(F.I)$$

$$\frac{\sqrt{x^2 - 2x}}{x} = \frac{\left(\sqrt{x^2 - 2x}\right)\left(\sqrt{x^2 - 2x}\right)}{x\sqrt{x^2 - 2x}}$$

$$= \frac{x^2-2x}{x\sqrt{x^2-2x}} = \frac{x-2}{\sqrt{x^2-2x}}$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{x-2}{\sqrt{x^2-2x}} = \frac{-2}{0} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f_4(x)-f_4(0)}{x-0} = -\infty$$

Donc la courbe de $f$admet au point d'abscisse 0 une demi-tangente parallèle à l'axe des ordonnées.

$$\lim_{x \to 2^+} f_4(x) = f_4(2) = 0$$

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{f_4(x)-f_4(2)}{x-2} = \lim_{x \to 2^+} \frac{\sqrt{x^2-2x}}{x-2} = \frac{0}{0} (F.I)$$

$$\frac{\sqrt{x^2-2x}}{x} = \frac{(\sqrt{x^2-2x})(\sqrt{x^2-2x})}{(x-2)\sqrt{x^2-2x}}$$

$$= \frac{x^2-2x}{(x-2)\sqrt{x^2-2x}} = \frac{x}{\sqrt{x^2-2x}}$$

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{x}{\sqrt{x^2-2x}} = \frac{2}{0} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{f_4(x)-f_4(2)}{x-2} = +\infty$$

Donc la courbe de $f$admet au point d'abscisse 2 une demi-tangente parallèle à l'axe des ordonnées.

$$\lim_{x \to -\infty} f_4(x) = \lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^2-2x}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^2} = \lim_{x \to -\infty} |x| = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f_4(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2-2x}}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2}}{x}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{|x|}{x} = -1$$

$$\lim_{x \to -\infty} (f_4(x)-x) = \lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2-2x}-x\right)$$

$$= +\infty - \infty \ (F.I)$$

$$\sqrt{x^2-2x}+x = \frac{(\sqrt{x^2-2x}+x)(\sqrt{x^2-2x}-x)}{(\sqrt{x^2-2x}-x)}$$

$$= \frac{x^2-2x-x^2}{\sqrt{x^2-2x}-x} = \frac{-2x}{\sqrt{x^2-2x}-x}$$

$$\lim_{x \to -\infty} (f_4(x)+x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{-2x}{|x|\left(\sqrt{1-\frac{2}{x}}-1\right)}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{-2}{-\sqrt{1-\frac{2}{x}}-1} = \frac{-2}{-2} = 1$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f_4(x)}{x} = -1 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} (f_4(x)+x) = 1 \end{cases}$$

D'où, la courbe de $f_3$ admet une asymptote oblique d'équation $y = -x+1$ au voisinage de $-\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} f_4(x) = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2-2x} = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} |x| = +\infty.$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f_4(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2-2x}}{x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{|x|}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} (f_4(x)-x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2-2x}-x\right)$$

$$= +\infty - \infty \ (F.I)$$

$$\sqrt{x^2-2x}-x = \frac{(\sqrt{x^2-2x}-x)(\sqrt{x^2-2x}+x)}{(\sqrt{x^2-2x}+x)}$$

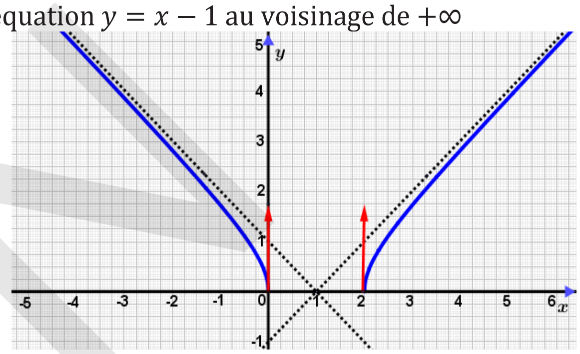
$$= \frac{x^2-2x-x^2}{\sqrt{x^2-2x}+x} = \frac{-2x}{\sqrt{x^2-2x}+x}$$

$$\lim_{x \to +\infty} (f_4(x)-x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{-2x}{|x|\left(\sqrt{1-\frac{2}{x}}+1\right)}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{-2}{\sqrt{1-\frac{2}{x}}+1} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f_4(x)}{x} = 1 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} (f_4(x)-x) = -1 \end{cases}$$

D'où, la courbe de $f_3$ admet une asymptote oblique d'équation $y = x-1$ au voisinage de $+\infty$




$\boldsymbol{e})$$f_5 = x + \sqrt{x}$ ; $\mathcal{D}_{f_5} = \mathbb{R}^* = [0;\ +\infty[$

$$\lim_{x \to 0^+} f_5(x) = f_5(0) = 0, \qquad \lim_{x \to +\infty} f_5(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f_5(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x+\sqrt{x}}{x} = \frac{+\infty}{+\infty} \ (F.I)$$

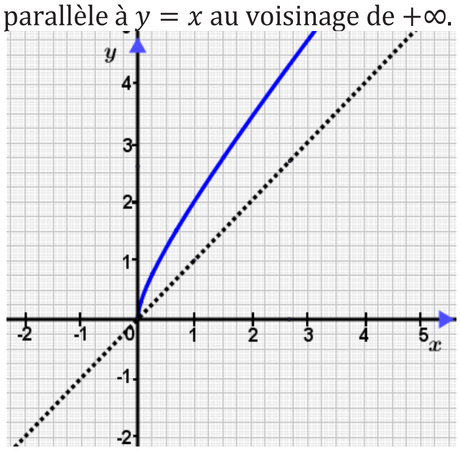
$$\frac{x+\sqrt{x}}{x} = \frac{x\left(1+\sqrt{\frac{1}{x}}\right)}{x} = 1 + \sqrt{\frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f_5(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left(1+\sqrt{\frac{1}{x}}\right) = 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} (f_5(x)-x) = \lim_{x \to +\infty} \left(x+\sqrt{x}-x\right) = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x}$$

$$= +\infty$$

La courbe de $f_5$ admet donc une branche parabolique parallèle à $y = x$ au voisinage de $+\infty$.



$f) f_6 = \frac{3x-6}{2x+2}$ ; $\mathcal{D}_{f_6} = ]-\infty; -1[ \cup ]-1; +\infty[ = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

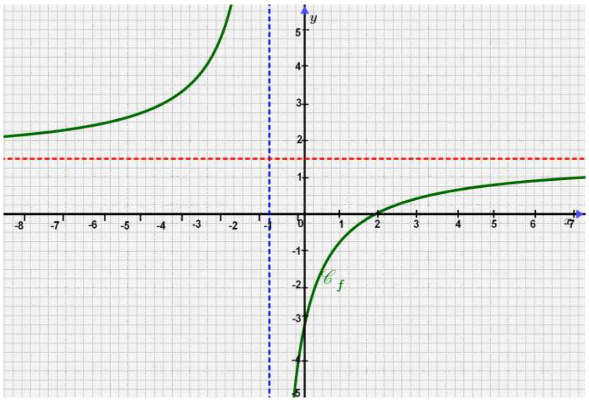
$$\lim_{x\to-\infty} f_6(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{3x-6}{2x+2} = \frac{3}{2}$$

$$\lim_{x\to-1^-} f_6(x) = \lim_{x\to-1^-} \frac{3x-6}{2x+2} = \frac{-9}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x\to-1^+} f_6(x) = \lim_{x\to-1^+} \frac{3x-6}{2x+2} = \frac{-9}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f_6(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x-6}{2x+2} = \frac{3}{2}.$$

Donc, la droite $x = -1$ est une asymptote verticale à la courbe de $f_6$, et la droite $y = \frac{3}{2}$ est une asymptote horizontale à la courbe de $f_6$ au voisinage de $-\infty$ et $+\infty$.




## V. Propriétés des fonctions dérivables :

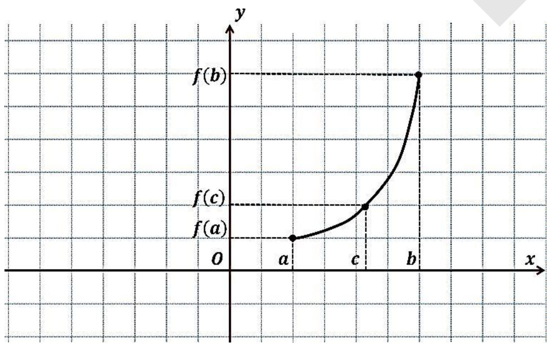
### Théorème des valeurs intermédiaires(Rappels) :

Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle $I$ ; et soient $a$ et $b$ deux réels de $I$ avec $a < b$.

Alors $f$ prend sur $[a\,;\,b]$ au moins une fois une valeur comprise entre $f(a)$et $f(b)$.

En particulier si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires.

Alors $f(a) \times f(b) \leq 0$ (resp. $f(a) \times f(b) < 0$), il existe un réel $c \in [a\,;\,b]$ (resp. $c \in ]a\,;\,b[$) tel que $f(c) = 0$.




### L'image par une fonction continue d'un intervalle borné fermé :

L'image par une fonction continue $f$ d'un intervalle borné fermé $[a; b]$ est un intervalle borné fermé $[m; M]$. C'est-à-dire que si $f$ est continue sur$[a; b]$, elle est alors bornée sur $[a; b]$ et elle atteint ses bornes.

$m$ est le minimum de $f$ sur $[a; b]$ et $M$ est son maximum sur $[a; b]$.

Si $f$ est croissante sur$[a; b]$ (resp. décroissante sur $[a; b]$) alors ; $\begin{cases} f(a) = m \\ \quad et \\ f(b) = M \end{cases}$ , $\left( resp. \begin{cases} f(a) = M \\ \quad et \\ f(b) = m \end{cases} \right)$.

Si $f$ n'est pas monotone sur $[a; b]$, les réels $f(a)$ et $f(b)$ ne sont pas nécessairement les extrémums de $f$ sur $[a; b]$.

### Inégalité des accroissements finis :

Soit $f$ une fonction dérivable sur un intervalle$I$.

S'il existe deux réels $m$ et $M$ tels que ;

$\forall x \in I, m \leq f'(x) \leq M$ alors ;

$\forall a, b \in I$ avec $a \leq b$ on a :

$$\boldsymbol{m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)}.$$

Et s'il existe un réel positif $k$ tel que ;

$\forall x \in I,\ |f'(x)| \leq k$ alors ;

$$\forall a, b \in I, \boldsymbol{|f(b) - f(a)| \leq k|b-a|}$$

## Exercice 1 :

Soit $f$ la fonction définie par ; $f(x) = \dfrac{x+6}{x+2}$

**1°)** Etudier les variations de$f$.

**2°)** Montrer que $\forall x \in [1; +\infty[, f(x) \in [1; +\infty[$.

**3°)**Montrer que $\forall x \in [1; +\infty[, |f'(x)| \leq \frac{4}{9}$.

**4°)**Soit $(\mathcal{U}_n)$ la suite définie par :

$\begin{cases} \mathcal{U}_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{U}_{n+1} = f(\mathcal{U}_n) \end{cases}$

**a)** Montrer que$\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{U}_n \in [1; +\infty[$.

**b)** Montrer que$\forall n \in \mathbb{N}, |\mathcal{U}_{n+1} - 2| \leq \frac{4}{9}|\mathcal{U}_n - 2|$,

puis que $\forall n \in \mathbb{N}, |\mathcal{U}_n - 2| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n$.

**c)** En déduire que, $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathcal{U}_n = 2$.

## Solution :

**1°)** $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\} = ]-\infty; -2[ \cup ]-2; -\infty[$

$f$ est continue et dérivable sur $\mathcal{D}_f$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x} = 1,$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to-2^-} f(x) = \lim_{x\to-2^-} \frac{4}{0^-} = -\infty,$$

$$\lim_{x\to-2^+} f(x) = \lim_{x\to-2^+} \frac{4}{0^+} = +\infty$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{-4}{(x+2)^2} < 0, \forall x \in \mathcal{D}_f$$

**Tableau de variations de $f$**

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | ‖ | $-$ | |
| $f(x)$ | $1$ | ↘ | $-\infty$ ‖ $+\infty$ | ↘ | $1$ |

**2°/** D'après le tableau de variation de $f$ ;

$f(]-2; +\infty[) = ]1; +\infty[$

Or, $[1; +\infty[ \subset ]-2; +\infty[$ ; d'où :

$f([1; +\infty[) \subset f(]-2; +\infty[)$

Or, $]1;\ +\infty[\ \subset [1;\ +\infty[$ d'où ; $f([1;\ +\infty[) \subset [1;\ +\infty[$
C'est-à-dire $\forall x \in [1;\ +\infty[,\ \boldsymbol{f(x) \in [1;\ +\infty[}$.

**3°/** On a : $f'(x) = \dfrac{-4}{(x+2)^2}$,

$$x \in [1;\ +\infty[\ \Rightarrow x \geq 1 \Rightarrow x + 2 \geq 3$$
$$\Rightarrow (x+2)^2 \geq 9 \Rightarrow \frac{1}{(x+2)^2} \leq \frac{1}{9} \Rightarrow \frac{-4}{(x+2)^2} \geq \frac{-4}{9}$$

Or, $\dfrac{4}{9} < 0 \Rightarrow \forall n \in [1;\ +\infty[, \boldsymbol{|f'(x)| \leq \dfrac{4}{9}}$

**4°) a)** Montrons par récurrence que ;
$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{U}_n \in [1;\ +\infty[$$

**Initiation :**
Pour $n = 0$, on a $\mathcal{U}_0 = 1$ donc, $\mathcal{U}_0 \in [1;\ +\infty[$

**Transmission :**
On suppose que pour un entier naturel$n$, $\mathcal{U}_n \in [1;\ +\infty[$. Alors, d'après **2°/**, on a $f(\mathcal{U}_n) \in [1;\ +\infty[$. Or, $f(\mathcal{U}_n) = \mathcal{U}_{n+1}$, d'où, $\mathcal{U}_{n+1} \in [1;\ +\infty[$.
Donc, $\forall n \in \mathbb{N},\ \boldsymbol{\mathcal{U}_n \in [1;\ +\infty[}$.

**b)** On a montré en 3°/ que ;
$$\forall n \in [1;\ +\infty[, |f'(x)| \leq \frac{4}{9}$$
D'où, d'après l'inégalité des accroissements finis,
$$\forall a, b \in [1;\ +\infty[, \qquad |f(b) - f(a)| \leq \frac{4}{9}|b - a|$$
Or, $2 \in [1;\ +\infty[$, et $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{U}_n \in [1;\ +\infty[$
$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \qquad |f(\mathcal{U}_n) - f(2)| \leq \frac{4}{9}|\mathcal{U}_n - 2|$$
Or, $f(2)$et $\forall n \in \mathbb{N}, f(\mathcal{U}_n) = \mathcal{U}_{n+1}$. D'où,
$$\forall n \in \mathbb{N}, |\mathcal{U}_{n+1} - 2| \leq \frac{4}{9}|\mathcal{U}_n - 2|$$
Donc,
$$|\mathcal{U}_1 - 2| \leq \frac{4}{9}|\mathcal{U}_0 - 2|$$
$$|\mathcal{U}_2 - 2| \leq \frac{4}{9}|\mathcal{U}_1 - 2|$$
$$|\mathcal{U}_3 - 2| \leq \frac{4}{9}|\mathcal{U}_2 - 2|$$
…
$$|\mathcal{U}_n - 2| \leq \frac{4}{9}|\mathcal{U}_{n-1} - 2|$$
En multipliant membre par membre et en simplifiant on obtient ;
$$|\mathcal{U}_n - 2| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n |\mathcal{U}_0 - 2|$$
Or, $\mathcal{U}_0 = 1 \Rightarrow |\mathcal{U}_0 - 2| = |1 - 2| = |-1| = 1$
$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \qquad \boldsymbol{|\mathcal{U}_n - 2| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n}$$

**c)** On a donc :
$$\forall n \in \mathbb{N}, |\mathcal{U}_n - 2| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, -\left(\frac{4}{9}\right)^n \leq \mathcal{U}_n - 2 \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n$$
Donc, $2 - \left(\frac{4}{9}\right)^n \leq \mathcal{U}_n \leq 2 + \left(\frac{4}{9}\right)^n$

*Or*, $-1 < \dfrac{4}{9} < 1 \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{4}{9}\right)^n = 0$

$$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \left(2 - \left(\frac{4}{9}\right)^n\right) = 2 - 0 = 2,$$
$$et \lim_{n \to +\infty} \left(2 + \left(\frac{4}{9}\right)^n\right) = 2 + 0 = 2.$$
D'où, d'après le théorème du gendarme ;
$$\boldsymbol{\lim_{n \to +\infty} \mathcal{U}_n = 2}$$

## Fonction réciproque :

Soit $f$ une fonction et soit $I$ un intervalle de l'ensemble de définition $def$. Si $f$ est continue et strictement monotone su l'intervalle$I$, alors ;
La restriction $g$ de $f$ à $I$ réalise une bijection de $I$ sur l'intervalle $J = g(I)$ ; c'est-à-dire que tout réel de $J$ a un unique antécédent par $g$dans$I$, et $g$ admet donc une fonction réciproque définie sur $J$.
La fonction $g^{-1}$ est alors continue et strictement monotone sur $J$.
$g^{-1}$ a même sens de variation que$g$.
- Si $g'$ s'annule en un point $x_0$de $I$, alors $g^{-1}$ n'est pas dérivable en $y_0 = g(x_0)$.
- Si $g$ est dérivable, et si sa dérivé ne s'annule pas sur un intervalle $I_1$ inclus dans$I$, alors $g^{-1}$ est dérivable sur $J_1 = g(I_1)$, et ; $\forall x \in J,\ (g^{-1})'(x) = \frac{1}{g'(g^{-1}(x))}$
La courbe de $g^{-1}$ est la symétrique de celle de $g$ par rapport à la droite d'équation $y = x$ dans un repère orthonormé.

## Exercice 2 :

On pose $f(x) = x^2 - 4x + 3$

**1°)** Etudier la dérivabilité de $f$ et tracer sa courbe $C$ représentative dans un repère orthonormé$(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

**2°)** Soit $g$ la restriction de $f$ sur l'intervalle$[2\ ;\ +\infty[$,

**a)** Montrer que $g$ admet une fonction réciproque$g^{-1}$ définie sur intervalle$J$ que l'on déterminera.

**b)** Déterminer le domaine $D$ de dérivabilité de$g^{-1}$.

**c)** Donner l'expression de$g^{-1}(x)$.

**d)** Calculer de deux façons $(g^{-1})'(x)$pour $x \in D$.

**e)** Tracer la courbe $C'$ de $g^{-1}$dans le repère $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

## Solution :

**1°)** $\mathcal{D}_f = ]-\infty;\ +\infty[ = \mathbb{R}$.
$f$est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ (*car polynôme*).
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x^2 - 4x + 3$$
$$= \lim_{x \to -\infty} x^2 = \lim_{x \to -\infty} (-\infty)^2 = +\infty$$
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (x^2 - 4x + 3)$$
$$= \lim_{x \to +\infty} x^2 = \lim_{x \to +\infty} (+\infty)^2 = +\infty$$
$f'(x) = 2x - 4\ ; f'(x) = 0 \Rightarrow 2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$
$f(2) = -1$

**Tableau de variations :**

| $x$ | $-\infty$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $-1$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-4x+3}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x}$$
$$=\lim_{x\to-\infty}x=-\infty$$

D'où, $C$ admet une $BP//(y'Oy)$ au voisinage de $-\infty$.

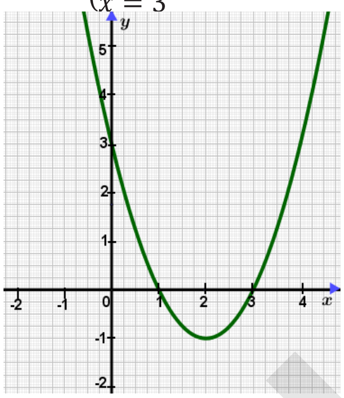
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-4x+3}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$$

D'où, $C$ admet une $BP//(y'Oy)$ au voisinage de $+\infty$.

**Intersection avec les axes de coordonnées :**

$f(0)=3 \Longrightarrow C\cap(y'Oy)=A(0;\ 3)$

$$f(x)=0\Longrightarrow\begin{cases}x=1\\ ou\\ x=3\end{cases}\Longrightarrow C\cap(x'Ox)=\begin{cases}B(1;0)\\ C(3;0)\end{cases}$$




2°/a)

| $x$ | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | $-1$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Comme $g$ est continue et strictement monotone sur l'intervalle $I=[2;\ +\infty[$ elle réalise une bijection de $I$ sur l'intervalle ;$J=g(I)=[-1;\ +\infty[$

**b)** Comme $g'(2)=0$, la fonction $g^{-1}$ n'est pas dérivable en $g(2)=-1$.

Et comme $g$ est dérivable et comme sa dérivée ne s'annule pas sur l'intervalle ouvert $]2;\ +\infty[$, la fonction $g^{-1}$ est dérivable sur l'intervalle :

$g(]2;\ +\infty[)=]-1;\ +\infty[$

Le domaine de dérivabilité de $g^{-1}$ est donc l'intervalle ouvert$D=]-1;\ +\infty[$.

**c)**$g^{-1}(x)=y\Longrightarrow g(y)=x,\begin{cases}f(y)=x\\ y\in]2;\ +\infty[\end{cases}$

$$f(y)=x\Longrightarrow y^2-4y+3=x\Longrightarrow y^2-4y+4$$
$$=x+1\Longrightarrow(y-2)^2=x+1$$
$$\Longrightarrow y=2-\sqrt{x+1}\ ou\ y=2+\sqrt{x+1}$$

Or, $y\in]2;\ +\infty[$ c'est-à-dire que $y>2$

D'où, l'expression retenue est $y=2+\sqrt{x+1}$

$$\boldsymbol{g^{-1}(x)=2+\sqrt{x+1}}$$

**d)** Calcul de $(g^{-1})'(x)$ pour $x\in D$

**Méthode 1 :**

Dérivation de l'expression de $g^{-1}(x)$ :

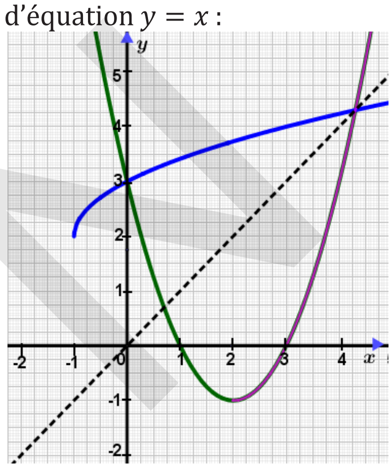
on a ; $g^{-1}(x)=2+\sqrt{x+1}\Rightarrow(g^{-1})'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}$.

**Méthode 2 :**

Formule de la dérivée de fonction de la fonction réciproque :

$$\forall x\in J,\qquad (g^{-1})'(x)=\frac{1}{g'(g^{-1}(x))}=\frac{1}{2g^{-1}(x)-4}$$
$$=\frac{1}{4+2\sqrt{x+1}-4}=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}$$

**e)** La courbe $C'$ de $g^{-1}$ dans le repère $(O;\ \vec{i},\vec{j})$ est la symétrique de celle $C$ de $g$ par rapport à la droite d'équation $y=x$ :

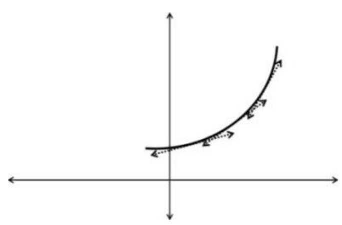



## Fonction dérivée seconde et concavité :

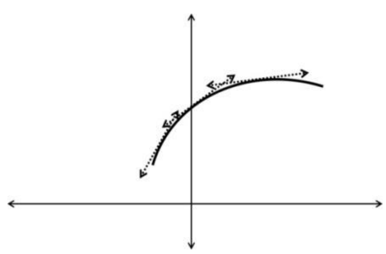
### Définition :

La fonction dérivée seconde d'une fonction $f$ est la fonction dérivée $f''$ de$f'$.

Si $f''$ est positive sur$I$, alors la concavité de $C_f$ est vers le haut, c'est-à-dire que $C_f$ est au-dessus de ses tangentes.



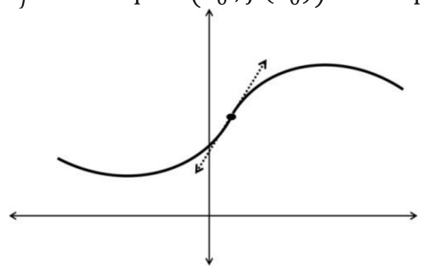
Si $f''$ est négative sur $I$, alors la concavité de $C_f$est vers le bas, c'est-à-dire que $C_f$ est au-dessous de ses tangentes.





Math 6AS.indd 72 26/07/2024 10:41:27

Si $f''$ s'annule en un point $x_0$ en changeant de signe, alors la tangente à $C_f$ au point $A$ d'abscisse $x_0$ traverse $C_f$. On dit que $A(x_0\,;f(x_0))$ est un point d'inflexion.



**Exercice 3 :**

Soit fonction : $f(x)=\frac{2x-4}{\sqrt{4x-x^2}}$.

**1°)** Etudier les variations de $f$.

**2°)** Calculer $f''(x)$ et en déduire la concavité de $C_f$.

Montrer que $C_f$ admet un point d'inflexion $A$ que l'on précisera, puis donner une équation de la tangente $T$ à $C_f$ en $A$.

**3°)** Tracer $C_f$ dans une repère orthonormé.

**Solution :**

**1°)** $f$ est définie si $4x-x^2>0$

$$4x-x^2=0 \Longrightarrow \begin{cases} x=0 \\ ou \\ x=4 \end{cases}$$

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $4x-x^2$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

$$\mathcal{D}_f=]0;4[$$

$f$ est continue et dérivable sur $\mathcal{D}_f$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{2x-4}{\sqrt{4x-x^2}}=\frac{-4}{0^+}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 4^-} f(x)=\lim_{x\to 4^-}\frac{2x-4}{\sqrt{4x-x^2}}=\frac{4}{0^+}=+\infty$$

$$f'(x)=\frac{2\sqrt{4x-x^2}-\frac{-(2x-4)^2}{2\sqrt{4x-x^2}}}{4x-x^2}$$

$$=\frac{4(4x-x^2)+(2x-4)^2}{2(4x-x^2)\sqrt{4x-x^2}}$$

$$=\frac{16x-4x^2+4x^2-16x+16}{2(4x-x^2)\sqrt{4x-x^2}}$$

$$=\frac{8}{(4x-x^2)\sqrt{4x-x^2}}>0,\qquad \forall x\in\,]0;4[$$

**Tableau de variations de $f$**

| $x$ | $0$ | $4$ |
|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ ↗ | $+\infty$ |

**2°)** on a $\forall x\in D_f;\ f'(x)=8(4x-x^2)^{\frac{-3}{2}}$

$$f''(x)=8\left(\frac{-3}{2}\right)(4-2x)(4x-x^2)^{\frac{-5}{2}}$$

$$=-12(4-2x)(4x-x^2)^{\frac{-5}{2}}=\frac{-24(2-x)}{(4x-x^2)^2\sqrt{(4x-x^2)}}$$

Le dénominateur étant positif sur $]0;4[$, d'où, $f(x)$ dépend du signe du numérateur.

$$f''(x)=0\Longrightarrow 2-x=0\Longrightarrow x=2$$

| $x$ | $0$ | | $2$ | | $4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $concav.Cf$ | | ∩ | Pt d'inflection | ∪ | |

Le point $A(2\,;0)$ est un point d'inflexion de $C_f$ en $A(2;0)$.

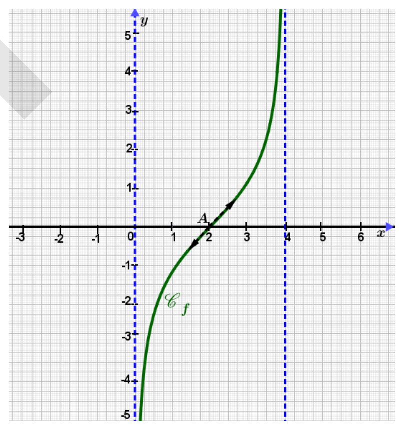
$y=f'(2)(x-2)+f(2)$.

Or, $f(2)=0$ et $f'(2)=1$, d'où, l'équation de la tangente en $A$ est $\boldsymbol{T}:\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}-\mathbf{2}$

**3°)** $x=0$ est une $A.V$, $x=4$ est une $A.V$.

$C_f\cap(y'Oy)=\emptyset$.

$C_f\cap(x'Ox)\Longrightarrow f(x)=0\Longrightarrow x=2\Longrightarrow A(2;0)$.




## VI. Primitive d'une fonction :

### 1. Définition d'une primitive :

**Définition :**

Soient $f$ et $F$ deux fonctions définies sur un intervalle $I$. On dit que $F$ est une primitive de $f$ sur $I$, si $F$ est dérivable sur $I$ et si $\forall x\in I$, $F'(x)=f(x)$.

**Exemple 19 :**

- La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par ; $f(x)=2x$, alors $F(x)=x^2+c$ ($où\ c\ est\ une\ constante$), est une primitive de $f$ sur $\mathbb{R}$, car $F$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x\in\mathbb{R}$, $F'(x)=2x=f(x)$.
- La fonction $F:x\longmapsto 3x+c$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f:x\longmapsto 3$.

- La fonction$F : x \longmapsto x^2 + c$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f : x \mapsto 2x$
- La fonction$F : x \longmapsto \frac{1}{x} + c$ est une primitive sur $]-\infty ;\ 0[ \cup ]0 ;\ +\infty[$ de la fonction $f : x \longmapsto \frac{-1}{x^2}$
- La fonction$F : x \longmapsto \sqrt{x} + c$est une primitive sur $]0 ;\ +\infty[$ de la fonction $f : x \longmapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$

## 2. Ensemble de primitives d'une fonction :

**Théorème :**

Soit $F$ une primitive sur l'intervalle $I$ de la fonction, pour tout $x$ de $I$, $F'(x) = f(x)$.

**Si** $k$ est un réel, la fonction $G$ définie sur $I$ par : $G(x) = F(x) + k$ est dérivable sur $I$ et $G'(x) = F'(x) = f(x)$. Donc $G$ est une primitive de $f$ sur $I$.

**Réciproquement,**

Si $F$ et $G$ sont deux primitives de $f$ sur$I$, la fonction $H = G - F$ est dérivable sur $I$ ;

$H'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0;$ il existe donc un réel $k$ tel que :

$H(x) = k \Leftrightarrow G(x) - F(x) = k \Leftrightarrow G(x) = F(x) + k$.

**D'où le théorème suivant :**

Si $F$ est primitive de $f$ sur un intervalle $I$, toute autre primitive $G$ de $f$est telle que pour tout $x$ de $I$ :

$G(x) = F(x) + k$ où $k$ est une constante.

## 3. Tableau de primitives usuelles :

| Fonction $f$ | Une primitive$F$ de $f$ | Intervalle $I$ |
|---|---|---|
| $0$ | $a\ (a \in \mathbb{R}^*)$ | $\mathbb{R}$ |
| $a$ | $ax + c\ (c \in \mathbb{R}^*)$ | $\mathbb{R}$ |
| $x^n (n \in \mathbb{N}^*)$ | $\frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ | $\mathbb{R}$ |
| $\frac{1}{x^n}\ (n > 1)$ | $\frac{-1}{(n-1)x^{n-1}} + c$ | $\mathbb{R}^*$ |
| $\frac{1}{\sqrt{x}}$ | $2\sqrt{x} + c$ | $\mathbb{R}_+^*$ |
| $\sqrt{x}$ | $\frac{2}{3}x\sqrt{x} + c$ | $\mathbb{R}_+$ |
| $x^r (r \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\})$ | $\frac{x^{r+1}}{r+1} + c$ | $\mathbb{R}_+^*$ |

| Fonction $f$ | Une primitive$F$ de $f$ | Intervalle $I$ |
|---|---|---|
| $\cos x$ | $\sin x + c$ | $\mathbb{R}$ |
| $\sin x$ | $-\cos x + c$ | $\mathbb{R}$ |
| $\cos(ax+b)$ $(a \neq 0)$ | $\frac{1}{a}\sin(ax+b) + c$ | $\mathbb{R}$ |
| $\sin(ax+b)$ $(a \neq 0)$ | $-\frac{1}{a}\cos(ax+b) +$ | $\mathbb{R}$ |
| $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$ | $\tan x + c$ | $\left]-\frac{\pi}{2} + k\pi;\ \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$ |
| $\frac{1}{\sin^2 x} = 1 - \text{cotg}^2\, x$ | $-\text{cotg}\, x + c$ | $]k\pi;\ \pi + k\pi[$ $(k \in \mathbb{Z})$ |

## Algèbre des primitives de fonctions :

| Fonction $f$ | Une primitive $F$ de $f$ |
|---|---|
| $kU'$ | $kU$ |
| $U' + V'$ | $U + V$ |
| $U'V - V'U$ | $U.V$ |
| $\frac{U'V - V'U}{V^2}$ | $\frac{U}{V}$ |
| $\frac{U'}{U^2}$ | $\frac{-1}{U}$ |
| $\frac{U'}{\sqrt{U}}$ | $2\sqrt{U}$ |
| $U'\sqrt{U}$ | $\frac{2}{3}U\sqrt{U}$ |

| Fonction $f$ | Une primitive $F$ de $f$ |
|---|---|
| $U'.U^r\ (r \neq -1)$ | $\frac{U^{r+1}}{r+1}$ |
| $\frac{U'}{U^n}\ (n > 1)$ | $\frac{-1}{(n-1)U^{n-1}}$ |
| $U' \cos U$ | $\sin U$ |
| $U' \sin U$ | $-\cos U$ |
| $\frac{U'}{\cos^2 U} = U' + U'\tan^2 U$ | $\tan U$ |
| $\frac{U'}{\sin^2 U} = U' + U'\,\text{cotg}^2\, U$ | $-\text{cotg}\, U$ |
| $U'.V' \circ U$ | $V \circ U$ |

**Exercice 4 :**

Donner des primitives de :

$f_1(x) = 5x^3 - 6x^2 + 7x - 3$ ; $f_2(x) = \cos(2x+3)$ ;

$f_3(x) = \sin(3x-2)$ ; $f_4(x) = \frac{1}{\cos^2(2x)}$;

$f_5(x) = \frac{1}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}$ ; $f_6(x) = 2x(x^2+1)^4$;

$f_7(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2 - 2x + 2}}$; $f_8(x) = \frac{x}{(x^2+1)^2}$;

$f_9(x) = (4x+2)\sqrt{x^2 + x + 1}$ ; $f_{10}(x) = \frac{x^2}{(x^3+1)^4}$;

$f_{11}(x) = \tan^2 x$ ; $f_{12}(x) = \tan^{2011} x + \tan^{2013} x$ ;

$f_{13}(x) = x^3(x+1)^{2013}$ ; $f_{14}(x) = x^2\sqrt{2x+1}$

**Solution :**

$f_1(x) = 5x^3 - 6x^2 + 7x - 3;$

$$\boldsymbol{F_1(x) = \frac{5}{4}x^4 - 2x^3 + \frac{7}{2}x^2 - 3x + c}$$

$f_2(x) = \cos(2x+3)$ ; $\boldsymbol{F_2(x) = \frac{1}{2}\sin(2x+3) + c}$

$f_3(x) = \sin(3x-2)$ ; $\boldsymbol{F_3(x) = \frac{-1}{3}\cos(3x-2)}$

$f_4(x) = \frac{1}{\cos^2(2x)}) = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\cos^2(2x)}\right)$. En posant $U(x) = 2x$,

on a ; $\frac{1}{2}\left(\frac{2}{\cos^2(2x)}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{U'(x)}{\cos^2(U)}\right)$ ;

$\boldsymbol{F_4(x) = \frac{1}{2}\tan(2x) + c}$

$f_5(x) = \frac{1}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} = 2\left(\frac{\frac{1}{2}}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}\right)$ ; En posant $U = \frac{x}{2}$, on a ;

$$2\left(\frac{\frac{1}{2}}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}\right) = 2\left(\frac{U'}{\sin^2(U)}\right);$$

$$\boldsymbol{F_5(x) = -2\,\mathrm{cotg}\left(\frac{x}{2}\right) + c}$$

$f_6(x) = 2x(x^2+1)^4$, $f_6$est de la forme $U'.U^n avecU = x^2+1$ et $n = 4$ ; $\boldsymbol{F_6(x) = \frac{(x^2+1)^5}{5} + c}$

$$f_7(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{2x-2}{\sqrt{x^2-2x+2}}\right)$$

*Si on pose* $U = x^2-2x+2$, *on a ;*

$$\frac{1}{2}\left(\frac{2x-2}{\sqrt{x^2-2x+2}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{U'}{\sqrt{U}}\right);$$

$$F_7(x) = \frac{1}{2}\left(2\sqrt{x^2-2x+2}\right) + c;$$

$$\boldsymbol{F_7(x) = \sqrt{x^2-2x+2} + c}$$

$$f_8(x) = \frac{x}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{2x}{(x^2+1)^2}\right).$$

Si on pose $U = x^2+1$ et $n = 2$, on a ;

$$\frac{1}{2}\left(\frac{2x}{(x^2+1)^2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{U'}{U^2}\right);$$

$$F_8(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{x^2+1}\right) + c;\ \boldsymbol{F_8(x) = \frac{-1}{2(x^2+1)} + c}$$

$f_9(x) = (4x+2)\sqrt{x^2+x+1} = 2(2x+1)\sqrt{x^2+x+1}$.

Si on pose $U = x^2+x+1$,

on a ;$2(2x+1)\sqrt{x^2+x+1} = 2U'.\sqrt{U}$;

$$F_9(x) = 2\left(\frac{2}{3}(x^2+x+1)\right)\sqrt{x^2+x+1} + c$$

$$\boldsymbol{F_9(x) = \frac{4}{3}(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x+1} + c}$$

$$f_{10}(x) = \frac{x^2}{(x^3+1)^4} = \frac{1}{3}\left(\frac{3x^2}{(x^3+1)^4}\right).$$

Si on pose $U = x^3+1$ et $n = 4$, on a ;

$$\frac{1}{3}\left(\frac{3x^2}{(x^3+1)^4}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{U'}{(U)^4}\right);$$

$$F_{10}(x) = \frac{1}{3}\left(\frac{-1}{3(x^3+1)^3}\right);\ \boldsymbol{F_{10}(x) = \frac{-1}{9(x^3+1)^3} + c}$$

$f_{11}(x) = \tan^2 x = 1 + \tan^2 x - 1$;

$\boldsymbol{F_{11}(x) = \tan x - x + c}$

$$f_{12}(x) = \tan^{2011} x + \tan^{2013} x = \tan^{2011} x\,(1+\tan^2 x)$$

En posant $U = \tan x etn = 2011$,

on a ; $\tan^{2011} x\,(1+\tan^2 x) = U'.(U)^{2011}$;

$$\boldsymbol{F_{12}(x) = \frac{(\tan x)^{2012}}{2012} + c}$$

$$\begin{aligned}
f_{13}(x) &= x^3(x+1)^{2013}\\
&= (x+1-1)^3(x+1)^{2013}\\
&= \left((x+1)-1\right)^3(x+1)^{2013}\\
&= [(x+1)^3 - 3(x+1)^2 + 3(x+1) - 1](x+1)^{2013}\\
&= (x+1)^3(x+1)^{2013} - 3(x+1)^2(x+1)^{2013}\\
&\quad + 3(x+1)(x+1)^{2013} - (x+1)^{2013}
\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{F_{13}(x) = \frac{(x+1)^{2017}}{2017} - \frac{3(x+1)^{2016}}{2016} + \frac{3(x+1)^{2015}}{2015} - \frac{(x+1)^{2014}}{2014} + c}$$

$$\begin{aligned}
f_{14}(x) &= x^2\sqrt{2x+1} = \left(\frac{2x+1-1}{2}\right)^2\sqrt{2x+1}\\
&= \frac{1}{4}[(2x+1)-1]^2\sqrt{2x+1}\\
&= \frac{1}{4}[(2x+1)^2 - 2(2x+1) + 1]\sqrt{2x+1}\\
&= \frac{1}{4}[(2x+1)^2\sqrt{2x+1} - 2(2x+1)\sqrt{2x+1} + \sqrt{2x+1}]\\
&= \frac{1}{8}\left[2(2x+1)^{\frac{5}{2}} - 4(2x+1)^{\frac{3}{2}} + 2(2x+1)^{\frac{1}{2}}\right]
\end{aligned}$$

En posant $U = 2x+1$, on a ;

$$\frac{1}{8}\left[2(2x+1)^{\frac{5}{2}} - 4(2x+1)^{\frac{3}{2}} + 2(2x+1)^{\frac{1}{2}}\right] = \frac{1}{8}\left[U'(U)^{\frac{5}{2}} - 2U'(U)^{\frac{3}{2}} + U'(U)^{\frac{1}{2}}\right]$$

$$F_{14}(x) = \frac{1}{8}\left[\frac{(2x+1)^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} - \frac{2(2x+1)^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + \frac{(2x+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right] + c$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{(2x+1)^{\frac{7}{2}}}{7} - \frac{2(2x+1)^{\frac{5}{2}}}{5} + \frac{(2x+1)^{\frac{3}{2}}}{3}\right] + c$$

$$\boldsymbol{F_{14}(x) = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{7}(2x+1)^{\frac{7}{2}} - \frac{2}{5}(2x+1)^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}}\right] + c}$$

## A. Applications :

### Dérivation en un point :

**Exemple 1 :**

Dans chacun des cas suivants, calculer le nombre dérivé de la fonction $f$ en $x_0$, puis donner une équation de la tangente à la courbe représentative de $f$ en son point d'abscisse $x_0$.

**a)** $f(x) = x^2 - x$ ; $x_0 = 1$ ; **b)**$f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ ; $x_0 = 2$

**Réponse :**

**a)**$f(1) = 0$ ;

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2-x}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x(x-1)}{(x-1)} = \lim_{x\to 1} x = 1$$

donc, $\boldsymbol{f}'(1) = 1$, d'où l'équation de la tangente cherchée est :$y - 0 = 1(x-1) \Leftrightarrow y = x - 1$ ;





Math 6AS.indd 75 26/07/2024 10:41:30

**b)** $f(2) = 3$ ;

$$\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \frac{\frac{x+1}{x-1}-3}{x-2} = \frac{x+1-3x+3}{(x-1)(x-2)}$$

$$= \frac{-2x+4}{(x-1)(x-2)} = \frac{-2(x-2)}{(x-1)(x-2)} = \frac{-2}{x-1}$$

$f'(2) = \lim\limits_{x\to 2}\frac{-2}{x-1} = -2$ ; d'où l'équation de la tangente cherchée est : $y-3 = -2(x-2) \Leftrightarrow y = -2x + 7$ ;

## Exemple 2 :

On considère la fonction $f$ définie par $f(x) = |x-2|$.

**a)** Donner l'expression de la fonction $f$ sans le symbole de la valeur absolue ;

**b)** Etudier la dérivabilité de $f$ en 2.

**Réponse :**

**a)** $\begin{cases} f(x) = -x+2 & ; \text{ si } x < 2 \\ f(x) = x-2 & ; \text{ si } x \geq 2 \end{cases}$ ; $f(2) = 0$

**b)** $\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^-}\frac{-x+2}{x-2} = -\mathbf{1}$

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^+}\frac{-x+2}{x-2} = \mathbf{1}$$

$f$ est dérivable à gauche en 2 et $f_g(2) = -1$ ; $f$ est dérivable à droite en 2 et $f_d(2) = 1$.

## Applications de la dérivation :

## Calcul de dérivées :

## Exemple 3 :

Déterminer la dérivée de $f$ dans chacun des cas :

a) $f(x) = 4x^3 - 5x^2 + 2$ ; b) $f(x) = x\cos x$ ;

c) $f(x) = \frac{2-3x}{x^2-1}$ ; d) $f(x) = \sqrt{x(3-x)}$ ; e) $f(x) = \sin(3x - \frac{\pi}{2})$ ;

f) $f(x) = \frac{2x^2+7x+4}{x+3}$ ; g) $f(x) = (2x^2+3x)^4$.

**Réponse :**

| Fonction | Dérivée |
|---|---|
| $f(x) = 4x^3 - 5x^2 + 2$ | $f'(x) = 12x^2 - 10x$ |
| $f(x) = x\cos x$ | $f'(x) = (x)'\cos x + x(\cos x)'$ $= \cos x - x\sin x$ |
| $f(x) = \frac{2-3x}{x^2-1}$ | $f'(x) = \frac{-3(x^2-1)-2x(2-3x)}{(x^2-1)^2}$ $= \frac{-3x^2+3-4x+6x^2}{(x^2-1)^2} = \frac{3x^2-4x+3}{(x^2-1)^2}$ |
| $f(x) = \sqrt{(3-x)}$ | $f'(x) = \frac{(3x-x^2)'}{2\sqrt{x(3-x)}} = \frac{3-2x}{2\sqrt{3x-x^2}}$ |
| $f(x) = \sin\left(3x - \frac{\pi}{2}\right)$ | $f'(x) = 3\cos\left(3x - \frac{\pi}{2}\right)$ |
| $f(x) = \frac{2x^2+7x+4}{x+3}$ | $f'(x) = \frac{(4x+7)(x+3)-1(2x^2+7x+4)}{(x+3)^2}$ $= \frac{4x^2+19x+21-2x^2-7x-4}{(x+3)^2}$ $= \frac{2x^2+12x+17}{(x+3)^2}$ |
| $f(x) = (2x^2+3x)^4$ | $f'(x) = 4(4x+3)(2x^2+3x)^3$ |

## Exemple 4 :

Soit $f$ la fonction définie par $f(x) = 2x^4 - x^2 - 1$.

Calculer la dérivée de et dresser son tableau de variation, citer les extremums relatifs de $f$

**Réponse :**

$f'(x) = 8x^3 - 2x = 2x(4x^2-1) = 2x(2x-1)(2x+1)$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = \frac{1}{2}$ ou $x = -\frac{1}{2}$.

$f(0) = -1$ ; $f(-\frac{1}{2}) = f(\frac{1}{2}) = \frac{-9}{8}$.

**Tableau de variation**

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{1}{2}$ | | $0$ | | $\frac{1}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | | $\searrow$ | $\frac{-9}{8}$ | $\nearrow$ | $-1$ | $\searrow$ | $\frac{-9}{8}$ | $\nearrow$ | |

- $f'$ s'annule et change de signe en $-\frac{1}{2}$ ; $0$ ; $\frac{1}{2}$.
- $f$ admet un maximum relatif (-1) en 0 et en minimum relatif $(\frac{-9}{8})$ en $-\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}$.

**Primitives d'une fonction**

## Exemple 5 :

Déterminer sur l'intervalle I une primitive $F$ de la fonction $f$ dans chacun des cas suivants

a) $f(x) = 3x - 4$ ; I = ; b) $f(x) = -2x^2 + 3x + 4$ ; I = $\mathbb{R}$

c) $f(x) = \frac{-2}{x^2}$ ; I = $]0; +\infty[$; d) $f(x) = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$; I = $\mathbb{R}$

e) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$; I = $]1; +\infty[$ f) $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{(x^2+3)}}$; I = $\mathbb{R}$.

**Solution**

| Fonction | Primitive |
|---|---|
| $f(x) = 3x - 4$ | $F(x) = \frac{3}{2}x^2 - 4x$ |
| $f(x) = -2x^2 + 3x + 4$ | $F(x) = \frac{-2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 4x$ |
| $f(x) = \frac{-2}{x^2}$ | $F(x) = \frac{2}{x}$ |
| $f(x) = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$ | $F(x) = \frac{-1}{x^2+1}$ |
| $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$; | $F(x) = 2\sqrt{x-1}$ |
| $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{(x^2+3)}}$; | $F(x) = 2\sqrt{x^2+3}$ |

# B. Exercices divers

**1.** Dans chacun des cas suivants, calculer, en utilisant la définition, le nombre dérivé de la fonction ***f*** en $x_0$.

a) $f(x) = -3x^2 + 4x + 5$ ; $x_0 = 2$

b) $f(x) = \frac{2x-3}{x-2}$ ; $x_0 = \frac{-1}{2}$

c) $f(x) = \frac{x+1}{x^2}$ ; $x_0 = 1$

d) $f(x) = \sqrt{2x+5}$ ; $x_0 = -\frac{1}{2}$

e) $f(x) = 3 + 2x - 4x^2$ ; $x_0 = 0$;

f) $f(x) = x^3 + 1$ ; $x_0 = -1$

**2.** Dans chacun des cas suivants, déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction ***f*** au point d'abscisse $x_0$.

a) $f(x) = x^2 - 3x - 1$ ; $x_0 = -2$

b) $f(x) = \frac{x^3+1}{x}$ ; $x_0 = \frac{1}{3}$ ;

c) $f(x) = \frac{2-3x}{x-2}$ ; $x_0 = 0$ ;

d) $f(x) = \sqrt{2x-3}$ ; $x_0 = 2$ ;

e) $f(x) = x^3$ ; $x_0 = \frac{1}{2}$ ;

f) $f(x) = \frac{1}{x}$ ; $x_0 = -2$ .

**3.** Soit ***f*** la fonction définie par $f(x) = x\sqrt{x}$.

C  sa courbe représentative.

a) Déterminer l'ensemble de définition de ***f***.

b) Calculer le nombre dérivé de ***f*** en en 2.

c) Calculer le nombre dérivé de ***f*** en 0 et donner une équation de la demi-tangente à C  au point d'abscisse 0.

**4.** Soit***f*** la fonction définie par $f(x) = x|x - 3|$

a) Calculer le nombre dérivé de ***f*** à droite et à gauche en 3.

***f*** est-elle dérivable en 3 ?

c) Etudier la dérivabilité de ***f*** en 0.

**5.** Soit ***f*** la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2}{2} - 1 \ ; \ si \quad x < 1 \\ f(x) = \dfrac{x-2}{x+1} \ ; \ si \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Démontrer que ***f*** est continue en 1.

Etudier la dérivabilité de ***f*** en 1.

Déterminer une équation de la demi-tangente à droite et une équation de la demi-tangente à gauche à la courbe représentative de ***f*** au point d'abscisse 1.

Dans les exercices 6 à 15, déterminer le (ou les) intervalle(s) : de sur le(s)quel(s) chacune des fonctions suivantes est dérivable, et expliciter la dérivée

**6.** a) $f(x) = -x^2 + 3x + 1$ ; b) $f(x) = \frac{x^3}{3} + 2x^2 + 3x$; c) $f(x) = 4x^2 - 3x + 1$ ; d) $f(x) = -2x^3 + x^2$ ;

e) $f(x) = 2x - 4 + \frac{3}{x}$; f) $f(x) = x - 1 + \sqrt{x}$;

**7.** a) $f(x) = (2x+3)(3x-7)$ ; b) $f(x) = (5x-4)(1-\frac{x}{2})$

c) $f(x) = (2x^2+1)(3x-1)$ ; d) $f(x) = (2x^2+5)^3$

e) $f(x) = (x^2 + x)\cos^2 x$.

**8.** a) $f(x) = (x^3-x)(x-9)$ ; b) $f(x) = \sqrt{x}\,(3 - 4x)$

c) $f(x) = -x + (1-x)(3-x)$ ; d) $f(x) = (2x+\frac{1}{x})(3x-1)$.

**9.** a) $f(x) = (0{,}5 - \frac{x}{10})^2$ ; b) $f(x) = (3x - 1)^5$

c) $f(x) = x^2(1 - \sqrt{x})$ ; d) $f(x) = (\frac{1}{x} + 2)(\sqrt{x} + 1$

**10.** a) $f(x) = \frac{2x+1}{3x-1}$ ; b) $f(x) = \frac{3x-7}{2-5x}$

c) $f(x)\ \frac{1}{x+1}$ ; d) $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$

**11.** a) $f(x) = \frac{1}{1-3x}$ ; b) $f(x) = \frac{2x}{x^2-4}$

c) $f(x)\ 2x + \frac{1}{\sqrt{x}}$ ; d) $f(x) = \frac{1}{1+\sqrt{x}}$

**12.** a) $f(x) = \frac{1}{x^2+x-2}$; b) $f(x) = \frac{2x^2-5x+3}{x-3}$

c) $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$; d) $f(x) = \frac{x-1}{x(x+1)}$

**13.** a) $f(x) = \left(\frac{x-1}{3-x}\right)^2$; b) $f(x) = \frac{1}{1+\frac{1}{x}}$

c) $f(x) = \frac{x}{x+\sqrt{x}}$ ; d) $f(x) = \left(\frac{1}{1+x}\right)^3$

**14.** a) $f(x) = -\cos x + \sin x$ ; b) $f(x) = \sin^2 x$

c) $f(x) = \cos^2 x$ ; d) $f(x) = \cos x \sin x$.

**15.** a) $f(x) = (\sin x + \cos x)^2$ ; b) $f(x) = \frac{1}{2-\cos x}$

c) $f(x) = \frac{\sin^2 x}{1+\cos^2 x}$

**16.** Soit $f$ la fonction définie par :

$f(x) = ax^2 + bx + c/a$ ; $b$ ; $c$ des réels donnés avec $a \neq 0$.

Déterminer a ; b et c sachant que : $f(0) = 4$ ;

$f'(0) = 3$ et $f(1) = 3$.

**17.** Soient a et b deux nombres réels. On considère la fonction $f$ définie par : $f(x) = ax + b + \frac{1}{3-x}$.

a) Calculer les valeurs de a et b sachant que : $f(2) = 2$ ; $f'(2) = 0$.

b) Donner une équation cartésienne de la tangente au point d'abscisse 2 à la courbe représentative de $f$.

**18.** Dans chacun des cas suivants, préciser sur quel intervalle ( ou réunion d'intervalles) la fonction $f$ est dérivable et exprimer sa dérivée ;

a) $f(x) = \sqrt{2x-5}$ ; b) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x-1}}$

c) $f(x) = \sin 2x$ ; d) $f(x) = \cos\frac{x}{2}$.

e) $f(x) = sin(-\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3})$ ; f) $f(x) = ccos(2x + \frac{\pi}{4})$.

g) $f(x) = \sin\cos 3x$ ; h) $f(x) = 2\,cos^2(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{4})$.

**19.** Dans chacun des cas suivants, préciser l'ensemble de dérivabilité de la fonction f, calculer sa dérivée et dresser son tableau de variation.

a) $f(x) = x^2 + 1$ ; b) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 1$

c) $f(x) = \frac{2x+5}{2-x}$ ; d) $f(x) = \frac{4x^2-11x-2}{x-3}$

**20.** Soit ABCD un rectangle de périmètre P.

on désigne par x la longueur du côté [AB].

1 a) Calculer, en fonction de x, l'aire A (x) du rectangle ABCD.

c) Etudier les variations de la fonction :

$x : \mapsto A(x)$

2) En déduire que l'aire d'un rectangle de périmètre constant est maximale lorsque ce rectangle est un carré.

**21.** Déterminer une primitive de la fonction $f$ dans les cas suivants et préciser sur quel intervalle.

a) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 7x + 1$ ; b) $f(x) = \frac{4}{x^2}$

c) $f(x) = \frac{2x-1}{(x^2-x+1)^2}$ ; d) $f(x) = x^2 + x + \frac{1}{3x^2}$

e) $f(x) = \frac{x^4+4x^2-2}{x^2}$ ; f) $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{2x^2-4x-6}}$.

**22.** Même consigne que pour l'exercice précèdent.

a) $f(x) = 2x(x^2+9)$ ; b) $f(x) = \frac{1}{2x^5}$

c) $f(x) = x(x^2+1)^2$ ; d) $f(x) = \frac{x^2}{(x^3-1)^2}$

e) $f(x) = (3x-1)(\frac{3}{2}x^2 - x + 4)^5$ ;

f) $f(x) = (\frac{1}{x} + x)^7(\frac{1}{x^2} - 1)$.

**23.** Même consigne que pour l'exercice précèdent.

a) $f(x) = sin(2x - \frac{\pi}{3})$ ; b) $f(x) = cos(\frac{\pi}{4} - 3x)$

c) $f(x) = \sin^3 x\cos x$ ; d) $f(x) = \frac{cos\,x}{sin^2\,x}$ ;

e) $f(x) = \frac{sin\,x}{\sqrt{cos\,x}}$ ; f) $f(x) = tanx + \tan^3 x$.

**24.** $f$ est la fonction définie par :

$f(x) = \frac{x^2+1}{(x^2-1)^2}$

a) Déterminer des réels a et b tels que pour tout $x \in \mathbb{R} - \{-1 ; 1\}$ ; $f(x) = \frac{a}{(x-1)^2} + \frac{b}{(x+1)^2}$.

b) Déduisez- en une primitive de $f$ sur $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$

**25.** Soit $f(x) = (x+4)\sqrt{x+4}$.

Donner la dérivée de cette fonction, puis déduire une primitive sur ] -4 ; +∞[ de la fonction :

$x \longmapsto \sqrt{x+4}$

**26.** ***Objet de cet exercice est d'étudier comment varie l'aire $S(x)$ dun triangle Isocèle ABC ; où $AB = AC = 10$ quand on fait varier la longueur x du côté [BC].***

1. Quel est le domaine de définition de $S$ ?

2. Montrer que $S(x) = \frac{x}{4}\sqrt{400 - x^2}$ pour $0 < x < 20$.

3. Etudier les variations de la fonction $x \mapsto S(x)$ à l'aide du changement de variable $X = x^2$.
En déduire les variations $S$et déterminer en particulier son maximum(Préciser le triangle obtenu.)

**4.** Retrouver le maximum de la fonction Sen considérant le projeté orthogonal H de c sur (AB) (le point B étant supposé fixe)

# CHAPITRE 06 Angles orientés de vecteurs dans le plan orienté

## Cours

### I. Angles orientés de deux vecteurs :

#### 1. Angles orientés :

**Angle de vecteurs unitaires et mesures en radians :**

Soit $x$ un réel et $M$ le point correspondant du cercle trigonométrique $\Gamma$, on dit que $x$ est une mesure en radian de l'angle $(\overrightarrow{OA};\ \overrightarrow{OM})$.

L'ensemble des mesures en radians de l'angle $(\overrightarrow{OA}\ ;\ \overrightarrow{OM})$ est l'ensemble des réels de la forme $x + 2k\pi$, où $(k \in \mathbb{Z})$.

**Notation :**

L'angle orienté des vecteurs unitaires $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OM}$ se note $(\widehat{\overrightarrow{OA};\ \overrightarrow{OM}})$ ou plus simplement $(\overrightarrow{OA};\ \overrightarrow{OM})$.

● On peut écrire $(\overrightarrow{OA};\ \overrightarrow{OM}) = x$ ou $(\overrightarrow{OA};\ \overrightarrow{OM}) = x\,rad$.

● Ou $(\overrightarrow{OA};\ \overrightarrow{OM}) = x + 2k\pi$

**Autres unités d'angles :**

On peut utiliser les mesures en degrés ou en grades.

On a : $\pi rad = 180° = 200 gr$.

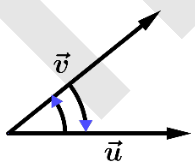
En mathématiques, on utilise le radian car la longueur de l'arc est mesurée avec la même unité que la longueur $OA$ (fig. 1).

**Angles et vecteurs :**

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls dans le plan orienté. $(\vec{u};\ \vec{v})$ et $(\vec{v}, \vec{u})$ désignent les deux angles définis par $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

● Les angles orientés $(\vec{u};\ \vec{v})$ et $(\vec{v}, \vec{u})$ sont opposés : $-(\vec{u};\ \vec{v}) = (\vec{v}, \vec{u})$ et $-(\vec{v};\ \vec{u}) = (\vec{u}, \vec{v})$

● Un angle orienté $(\vec{u};\ \vec{v})$ existe, si et seulement si, $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$




● Soit $A$ ; $B$ ; $C$ ; $D$ des points dans le plan orienté,

$(\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{CD})$ existe, si et seulement si, $A \neq B$ et $C \neq D$.

**Mesure d'un angle orienté**

● Un angle orienté $(\vec{u};\ \vec{v})$ est mesuré modulo $2\pi$ :

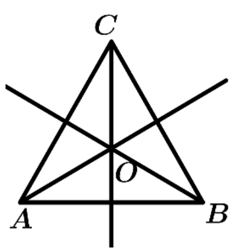
$(\vec{u};\ \vec{v}) = \alpha \Leftrightarrow (\vec{u};\ \vec{v}) = \alpha[2\pi]$

$\Leftrightarrow (\vec{u};\ \vec{v}) = \alpha + 2\pi \Leftrightarrow (\vec{u};\ \vec{v}) = \alpha + 2k\pi\ ; k \in \mathbb{Z}$

La mesure principale de $(\vec{u};\ \vec{v})$ est celle des mesures de $(\vec{u};\ \vec{v})$ modulo $[2\pi]$, qui appartient à l'intervalle $]-\pi\ ;\ \pi[$.

**Des exemples de la lecture et de la mesure principale sur des configurations de base**

**a)** $ABC$ un triangle équilatéral direct de centre $O$.




■ $(\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}$ ■ $(\overrightarrow{CB};\ \overrightarrow{CA}) = -\frac{\pi}{3}$

■ $(\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AO}) = \frac{\pi}{6}$ ■ $(\overrightarrow{OB};\ \overrightarrow{OC}) = \frac{2\pi}{3}$

■ $(\overrightarrow{OB};\ \overrightarrow{OA}) = -\frac{2\pi}{3}$ ■ $(\overrightarrow{BA};\ \overrightarrow{BO}) = -\frac{\pi}{6}$

**b)** $ABC$ un triangle isocèle rectangle en $A$ indirect

■ $(\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AC}) = -\frac{\pi}{2}$

■ $(\overrightarrow{AC};\ \overrightarrow{AB}) = \frac{\pi}{2}$

■ $(\overrightarrow{BA};\ \overrightarrow{BC}) = \frac{\pi}{4}$

■ $(\overrightarrow{CA};\ \overrightarrow{CB}) = -\frac{\pi}{4}$

**c)** $ABCD$ un carré direct de centre $O$.

■ $(\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2}$

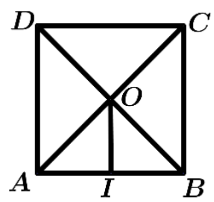
■ $(\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{4}$

■ $(\overrightarrow{OA};\ \overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{2}$

■ $(\overrightarrow{DO};\ \overrightarrow{DA}) = -\frac{\pi}{4}$

■ $(\overrightarrow{CB};\ \overrightarrow{CD}) = -\frac{\pi}{2}$

■ $(\overrightarrow{OA};\ \overrightarrow{OC}) = \pi$




Avec $I$ milieu de $[AB]$, on a ;

$(\overrightarrow{OI};\ \overrightarrow{OD}) = \frac{-3\pi}{4}$, $(\overrightarrow{OI};\ \overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{4}$

#### 2. Modulo $\pi$ :

Un angle orienté $(\vec{u};\ \vec{v})$ peut être mesuré modulo $\pi$

$(\vec{u};\ \vec{v}) = \alpha\ [\pi] \Leftrightarrow (\vec{u};\ \vec{v}) = \alpha + \pi\ [\pi]$

$\Leftrightarrow (\vec{u};\ \vec{v}) = \alpha - \pi\ [\pi] \Leftrightarrow (\vec{u};\ \vec{v}) = \alpha + k\pi\ ; k \in \mathbb{Z}$

● **Relation entre le modulo $\pi$ et le modulo $2\pi$**

$$(\vec{u};\ \vec{v}) = \alpha\ [\pi] \Leftrightarrow \begin{cases} (\vec{u};\ \vec{v}) = \alpha\ [2\pi] \\ ou \\ (\vec{u};\ \vec{v}) = \alpha + \pi\ [2\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\vec{u};\ \vec{v}) = \alpha \\ ou \\ (\vec{u};\ \vec{v}) = \alpha + \pi \end{cases}$$

**Propriété 1 :**

■ $(\vec{u};\ \vec{v}) = 0\ [\pi] \Leftrightarrow \begin{cases} (\vec{u};\ \vec{v}) = 0 \\ ou \\ (\vec{u};\ \vec{v}) = \pi \end{cases}$

■ $-(\vec{u};\ \vec{v}) = (\vec{v};\ \vec{u})[\pi]$ ■ $-(\vec{v};\ \vec{u}) = (\vec{u};\ \vec{v})[\pi]$

■ $(\vec{u};\ \vec{v}) = \frac{\pi}{2}[\pi]$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\vec{u};\ \vec{v}) = \frac{\pi}{2} \\ ou \\ (\vec{u};\ \vec{v}) = \frac{\pi}{2} + \pi = \frac{3\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} - 2\pi\ [2\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\vec{u};\ \vec{v}) = \frac{\pi}{2} \\ ou \\ (\vec{u};\ \vec{v}) = \frac{-\pi}{2} \end{cases}$$

### 3. Double d'un angle orienté $(\vec{u},\vec{v})$

- $2(\vec{u};\ \vec{v})$ est toujours mesuré modulo $2\pi$,
- $-2(\vec{u};\ \vec{v}) = 2(\vec{v};\ \vec{u})$, $\quad -2(\vec{v};\ \vec{u}) = 2(\vec{u};\ \vec{v})$

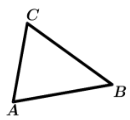
### 4. Colinéarité – Orthogonalité :

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls

| On a | Si, et seulement si |
|---|---|
| $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires de même sens | $(\vec{u};\ \vec{v}) = 0$ |
| $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires de sens contraire | $(\vec{u};\ \vec{v}) = \pi$ |
| $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires | $(\vec{u};\ \vec{v}) = 0$ ou $(\vec{u};\ \vec{v}) = \pi$ |
| $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires | $(\vec{u};\ \vec{v}) = 0\ [\pi]$ |
| $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires | $2(\vec{u};\ \vec{v}) = 0$ |
| $\vec{u}$ et $\vec{v}$ orthogonaux | $(\vec{u};\ \vec{v}) = \frac{\pi}{2}$ ou $(\vec{u};\ \vec{v}) = -\frac{\pi}{2}$ |
| $\vec{u}$ et $\vec{v}$ orthogonaux | $(\vec{u};\ \vec{v}) = \frac{\pi}{2}\ [\pi]$ |
| $\vec{u}$ et $\vec{v}$ orthogonaux | $2(\vec{u};\ \vec{v}) = \pi$ |

| Soit $A$ ; $B$ ; $C$ trois points distincts deux à deux | Soit $(AB)$ et $(CD)$ deux droites |
|---|---|
| • $A$ ; $B$ ; $C$ sont alignés<br>$\Leftrightarrow (\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AC}) = 0$<br>ou $(\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AC}) = \pi$<br>$\Leftrightarrow (\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AC}) = 0\ [\pi]$<br>$\Leftrightarrow 2(\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AC}) = 0$<br>• $ABC$ est un triangle rectangle en $A$<br>$\Leftrightarrow (\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2}$<br>Ou $(\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AC}) = -\frac{\pi}{2}$<br>$\Leftrightarrow (\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2}\ [\pi]$<br>$\Leftrightarrow 2(\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AC}) = \pi$ | • $(AB)$ et $(CD)$ sont parallèles $\Leftrightarrow$<br>$(\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{CD}) = 0$<br>ou $(\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{CD}) = \pi$<br>$\Leftrightarrow (\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{CD}) = 0\ [\pi]$ ou<br>$2(\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{CD}) = 0$<br>• $(AB)$ et $(CD)$ sont perpendiculaires<br>$\Leftrightarrow (\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{CD}) = \frac{\pi}{2}$ ou<br>$(\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{CD}) = -\frac{\pi}{2}$<br>$\Leftrightarrow (\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{CD}) = \frac{\pi}{2}\ [\pi]$<br>$\Leftrightarrow 2(\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{CD}) = \pi$ |

### 5. Somme des angles d'un triangle :




• $ABC$ un triangle, on a ;

$$(\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{BC};\ \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{CA};\ \overrightarrow{CB}) = \pi$$

$$2(\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AC}) + 2(\overrightarrow{BC};\ \overrightarrow{BA}) + 2(\overrightarrow{CA};\ \overrightarrow{CB}) = 2\pi$$

• $ABC$ un triangle rectangle en $A$ si, et seulement si ;

$$2(\overrightarrow{BC};\ \overrightarrow{BA}) + 2(\overrightarrow{CA};\ \overrightarrow{CB}) = \pi$$

### 6. Relation angulaire de Chasles :

Pour tous vecteurs non nuls $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$, on a :

$(\vec{u};\ \vec{v}) = (\vec{u};\ \vec{w}) + (\vec{w};\ \vec{v})$,

$(\vec{u};\ \vec{v}) = (\vec{u};\ \vec{w}) + (\vec{w};\ \vec{v})[\pi]$,

$2(\vec{u};\ \vec{v}) = 2(\vec{u};\ \vec{w}) + 2(\vec{w};\ \vec{v})$

### 7. Effet d'une réflexion sur un angle orienté :

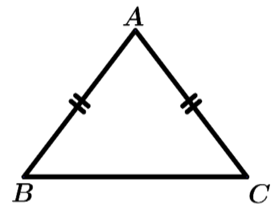
Une réflexion transforme un angle orienté en son opposé.

Si, $A'$ ; $B'$ ; $C'$ sont les images respectives des trois points $A$ ; $B$ ; $C$ par une réflexion, alors :

• $(\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AC}) = -\left(\overrightarrow{A'B'};\ \overrightarrow{A'C'}\right) = \left(\overrightarrow{A'C'};\ \overrightarrow{A'B'}\right)$.

$= -\left(\overrightarrow{A'B'};\ \overrightarrow{A'C'}\right)[\pi] = \left(\overrightarrow{A'C'};\ \overrightarrow{A'B'}\right)[\pi]$

• $2(\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AC}) = -2\left(\overrightarrow{A'B'};\ \overrightarrow{A'C'}\right) = 2\left(\overrightarrow{A'C'};\ \overrightarrow{A'B'}\right)$




$ABC$ est un triangle isocèle en $A$, si et seulement si, La réflexion d'axe la médiatrice de $[BC]$ transforme $A$ en $A$ ; $B$ en $C$ ; $C$ en $B$, si, et seulement si,

• $(\overrightarrow{BC};\ \overrightarrow{BA}) = -(\overrightarrow{CB};\ \overrightarrow{CA}) = (\overrightarrow{CA};\ \overrightarrow{CB})$ ;

• $(\overrightarrow{BC};\ \overrightarrow{BA}) = -(\overrightarrow{CB};\ \overrightarrow{CA})[\pi] = (\overrightarrow{CA};\ \overrightarrow{CB})[\pi]$ ;

• $2(\overrightarrow{BC};\ \overrightarrow{BA}) = -2(\overrightarrow{CB};\ \overrightarrow{CA}) = 2(\overrightarrow{CA};\ \overrightarrow{CB})$ ;

### 8. Multiplication de l'un des vecteurs de l'angle orienté $(\vec{u};\ \vec{v})$ par un réel :

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls ;

• $\forall k \in \mathbb{R}_+^*$ : $(\vec{u};\ \vec{v}) = (\vec{u};\ k\vec{v}) = (k\vec{u};\ \vec{v})$ ; $\forall k \in \mathbb{R}_-^*$ : $(\vec{u};\ \vec{v}) = (\vec{u};\ k\vec{v}) + \pi = (k\vec{u};\ \vec{v}) + \pi$

• $\forall k \in \mathbb{R}^*$ : $(\vec{u};\ \vec{v}) = (\vec{u};\ k\vec{v})[\pi] = (k\vec{u};\ \vec{v})[\pi]$

• $\forall k \in \mathbb{R}^*$ : $2(\vec{u};\ \vec{v}) = 2(\vec{u};\ k\vec{v}) = 2(k\vec{u};\ \vec{v})$

**Exemple 1 :**

• $(\overrightarrow{BA};\ \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AC}) + \pi$ ;

• $(\overrightarrow{BA};\ \overrightarrow{CA}) = (\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{CA}) + \pi$

$= (\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AC}) + 2\pi = (\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AC})$ ;

• $(\overrightarrow{BA};\ \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{CA})[\pi]$ ;

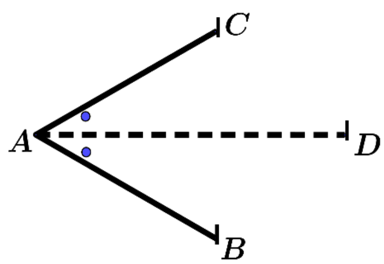
• $2(\overrightarrow{BA};\ \overrightarrow{AC}) = 2(\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AC})$ ;

• $2(\overrightarrow{BA};\ \overrightarrow{CA}) = 2(\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AC})$ ;

• $(\overrightarrow{BA};\ \overrightarrow{CA}) = (\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AC})[2\pi]$ ;

### 9. Bissectrice intérieure d'un angle orienté :

La droite $(AD)$ est la bissectrice intérieure de l'angle orienté $(\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AC})$, si et seulement si,



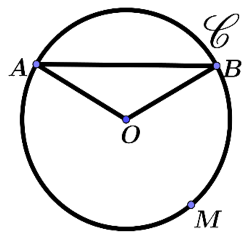

$$(\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AC}) = 2(\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AD}) = 2(\overrightarrow{AD};\ \overrightarrow{AC})$$

### 10. Théorème de l'angle inscrit et de la tangente :

Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre $O$ et $[AB]$ une corde sur $\mathcal{C}$.

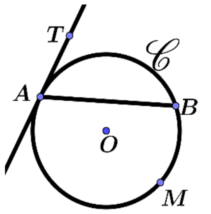
• Pour tout point $M$ appartenant à $\mathcal{C}$ privé de $A$ et $B$, on a ; $2(\overrightarrow{MA};\ \overrightarrow{MB}) = (\overrightarrow{OA};\ \overrightarrow{OB})$.

L'angle $(\overrightarrow{MA};\ \overrightarrow{MB})$ est un angle inscrit et $(\overrightarrow{OA};\ \overrightarrow{OB})$ est l'angle au centre relativement à la corde $[AB]$



● Pour tout point $T$ de la tangente à $\mathcal{C}$ en $A$ et distinct de $A$, on a : $2(\overrightarrow{AT};\ \overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{OA};\ \overrightarrow{OB})$.

● Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre $O$ ; $[AB]$ une corde sur $\mathcal{C}$. Soit $M$ un point de $\mathcal{C}$ privé de $A$et $B$.




La droite $(AT)$ est tangente à $\mathcal{C}$ en A, si et seulement si,$2(\overrightarrow{AT};\ \overrightarrow{AB}) = 2(\overrightarrow{MA};\ \overrightarrow{MB}) = (\overrightarrow{OA};\ \overrightarrow{OB})$

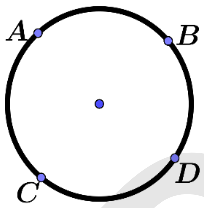
## 11.Cocyclicité :

● Quatre points $A$ ; $B$ ; $C$ ; $D$ non alignés trois à trois et deux à deux distincts sont cocycliques (*appartiennent à un même cercle c.-à-d. que chacun appartient au cercle circonscrit au triangle formé par les trois autres*), si et seulement si,

$\forall M, N \in \{A; B; C; D\}$et$\forall P, Q \in \{A; B; C; D\} - \{M;\ N\}$ ;

$2(\overrightarrow{PM};\ \overrightarrow{PN}) = 2(\overrightarrow{QM};\ \overrightarrow{QN}) \Leftrightarrow (\overrightarrow{PM};\ \overrightarrow{PN}) = (\overrightarrow{QM};\ \overrightarrow{QN})[\pi]$

On désigne par $\{A; B; C; D\}$ le cercle passant par les points$A$ ; $B$ ; $C$ ; $D$.




**Exemple 2 :**

● $A$ ; $B$ ; $C$ ; $D$ sont cocycliques si, et seulement si,

$2(\overrightarrow{AC};\ \overrightarrow{AD}) = 2(\overrightarrow{BC};\ \overrightarrow{BD})$

$\Leftrightarrow (\overrightarrow{AC};\ \overrightarrow{AD}) = (\overrightarrow{BC};\ \overrightarrow{BD})[\pi]$

$\Leftrightarrow 2(\overrightarrow{CA};\ \overrightarrow{CD}) = 2(\overrightarrow{BA};\ \overrightarrow{BD})$

$\Leftrightarrow 2(\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AD}) = 2(\overrightarrow{CB};\ \overrightarrow{CD})$

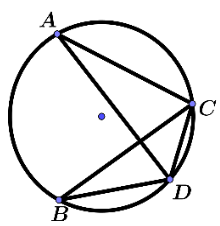
● Soient $A$ ; $B$ ; $C$ ; $D$ quatre points distincts deux à deux,$2(\overrightarrow{AC};\ \overrightarrow{AD}) = 2(\overrightarrow{BC};\ \overrightarrow{BD})$

$\Leftrightarrow (\overrightarrow{AC};\ \overrightarrow{AD}) = (\overrightarrow{BC};\ \overrightarrow{BD})[\pi]$

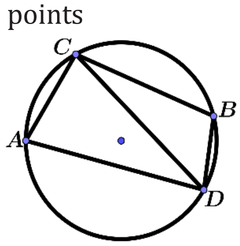
$\Leftrightarrow$Les quatre points $A$ ; $B$ ; $C$ ; $D$ sont cocycliques ou alignés.

**Soit $A$ ; $B$ ; $C$ ; $D$ quatre points non alignés trois à trois et deux à deux distincts.**

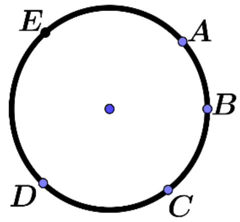
$(\overrightarrow{AC};\ \overrightarrow{AD}) = (\overrightarrow{BC};\ \overrightarrow{BD}) \Leftrightarrow$Les points $A$; $B$; $C$; $D$ sont cocycliques avec $A$ et $B$ du même côté de la corde $[CD]$.




$(\overrightarrow{AC};\ \overrightarrow{AD}) = (\overrightarrow{BC};\ \overrightarrow{BD}) + \pi \Leftrightarrow$Les points $A$ ; $B$ ; $C$ ; $D$ sont cocycliques avec $A$ et $B$ de part et d'autre de la corde $[CD]$.




Des points appartenant à un même cercle sont cocycliques. (*cocyclicitédonnée*),




**Exemple 3 :**

$(\overrightarrow{AC};\ \overrightarrow{AD}) = (\overrightarrow{BC};\ \overrightarrow{BD}) = (\overrightarrow{EC};\ \overrightarrow{ED})[\pi]$ ;

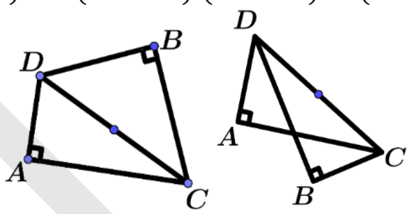
$2(\overrightarrow{AE};\ \overrightarrow{AC}) = 2(\overrightarrow{DE};\ \overrightarrow{DC}) = 2(\overrightarrow{BE};\ \overrightarrow{BC})$.

## Cocyclicité remarquable :

Les sommets de deux triangles rectangles de même hypoténuse sont cocycliques. (*Cocyclicité remarquable*),

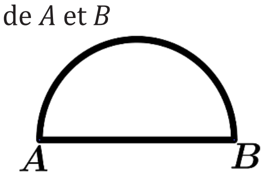
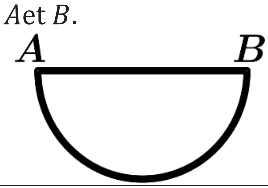
**Exemple 4 :**

$2(\overrightarrow{CA};\ \overrightarrow{CD}) = 2(\overrightarrow{BA};\ \overrightarrow{BD}),(\overrightarrow{BD};\ \overrightarrow{BC}) = (\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AC})[\pi]$




## 12.Ensemble de points :

Soit $A$ et $B$ deux points distincts dans le plan orienté.

| **L'ensemble des points $M$ du plan tels que** | **est** |
|---|---|
| $(\overrightarrow{MA};\ \overrightarrow{MB}) = 0\ [\pi]$ | La droite $(AB)$ privée de $A$et $B$. |
| $(\overrightarrow{MA};\ \overrightarrow{MB}) = \pi$ | Le segment $[AB]$ privé de $A$et $B$. |
| $(\overrightarrow{MA};\ \overrightarrow{MB}) = 0$ | La droite $(AB)$ privée du segment $[AB]$. |
| $(\overrightarrow{MA};\ \overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{2}[\pi]$ | Le cercle de diamètre $[AB]$ privé de $A$et $B$. |
| $(\overrightarrow{MA};\ \overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{2}$ | Un demi-cercle dediamètre $[AB]$ privé de $A$ et $B$  |
| $(\overrightarrow{MA};\ \overrightarrow{MB}) = -\frac{\pi}{2}$ | Un demi-cercle de diamètre $[AB]$ privé de $A$et $B$.  |
| $(\overrightarrow{MA};\ \overrightarrow{MB}) = \alpha[\pi]$ ; avec $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}; 0\right[ \cup \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ | Le cercle $\Gamma$passant par $A$et $B$, tangent à la droite $(AT)$ tel que : $(\overrightarrow{AT};\ \overrightarrow{AB}) = \alpha$, et privé de $A$ et $B$. |

| | |
|---|---|
| $(\overrightarrow{MA};\ \overrightarrow{MB}) = \alpha$ ; avec $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2};0\right[ \cup \left]0;\ \frac{\pi}{2}\right[$ | Le grand arc$AB$ privé de $A$ et $B$ du cercle $\Gamma$cité en haut. |
| $(\overrightarrow{MA};\ \overrightarrow{MB}) = \alpha + \pi$ ; avec $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2};0\right[ \cup \left]0;\ \frac{\pi}{2}\right[$ | Le petit arc$AB$privé de $A$ et $B$ du cercle $\Gamma$cité en haut. |

## II.Approfondissement :

### 1. Angles et vecteurs :

Dans le plan $\mathcal{P}$ rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère deux vecteurs non nuls $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$. On appelle mesure de l'angle de vecteur $(\vec{u}, \vec{v})$ (en radian) tout réel $\theta$ tel que :

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{\vec{u}.\vec{v}}{\|u\|.\|v\|} \\ \sin\theta = \dfrac{det(\vec{u}.\vec{v})}{\|u\|.\|v\|} \end{cases}$$

Où det $(\vec{u}.\vec{v})$ désigne le déterminant de $(\vec{u}.\vec{v})$ dans le repère $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. C.-à-d. :

$$\det(\vec{u}.\vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y$$

**Exemple 5 :**

Dans un repère orthonormé direct $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ du plan, on considère $\vec{u}\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$et $\vec{v}\begin{pmatrix} -3 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$.

Donner une mesure de l'angle de vecteurs $(\vec{u}.\vec{v})$.

**Réponse :**

$$(\vec{u}.\vec{v}) = \theta + 2k\pi, (k \in \mathbb{Z}), \begin{cases} \cos\theta = \dfrac{\vec{u}.\vec{v}}{\|u\|.\|v\|} \\ \sin\theta = \dfrac{det(\vec{u}.\vec{v})}{\|u\|.\|v\|} \end{cases}$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{4} \Longrightarrow \|\vec{\boldsymbol{u}}\| = \mathbf{2},$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{(-3)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{12} \Longrightarrow \|\vec{\boldsymbol{v}}\| = \mathbf{2\sqrt{3}}$$

$$\vec{u}.\vec{v} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} -3 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} = \sqrt{3} \times (-3) + 1 \times \sqrt{3}$$

$$\Longrightarrow \vec{\boldsymbol{u}}.\vec{\boldsymbol{v}} = \mathbf{-2\sqrt{3}}$$

$$\det(\vec{u}.\vec{v}) = \begin{vmatrix} \sqrt{3} & -3 \\ 1 & \sqrt{3} \end{vmatrix} = \sqrt{3} \times \sqrt{3} - 1 \times (-3)$$

$$= 3 + 3$$

$$\Longrightarrow \mathbf{det}(\vec{\boldsymbol{u}}.\vec{\boldsymbol{v}}) = \mathbf{6}$$

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{-2\sqrt{3}}{2 \times 2\sqrt{3}} = \dfrac{-1}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{6}{2 \times 2\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}.$$

$$\text{D'où;}\quad \theta = \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}$$

**Remarque 1 :**

- Un angle de vecteurs est aussi appelé angle de demi-droites.
- Si $\theta$ est une mesure d'un angle de vecteurs, alors l'ensemble des mesures de cet angle est $\{\theta + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$.

### 2.Angle et droites :

Soit $D_1$ et $D_2$ deux droites. On appelle mesure de l'angle des droites$D_1$et$D_2$, la mesure d'un angle de vecteurs $(\vec{u}, \vec{v})$ où $\vec{u}$ et$\vec{v}$ sont des vecteurs directeurs respectifs des droites $D_1$ et $D_2$.

**Remarque 2 :**

Soit $\theta$ une mesure d'un angle de droite, alors l'ensemble des mesures de cet angle est : $\{\theta + k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$.

### 3. Angle au centre et angle inscrit :

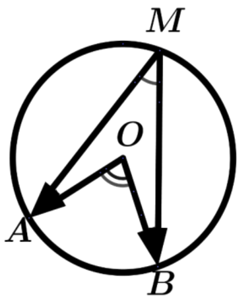
**Définition :**

dans un cercle $\mathcal{C}$ de centre$\Omega$.

Un angle au centre est un angle $(\overrightarrow{\Omega A};\ \overrightarrow{\Omega B})$ où $A$ et $B$ sont deux points de$\mathcal{C}$.

Un angle inscrit est un angle $(\overrightarrow{MA};\ \overrightarrow{MB})$où $M$, $A$ et $B$ sont trois points de $\mathcal{C}$ avec $M \neq A$ et $M \neq B$.

**Théorème de l'angle inscrit :**




Soit $(\mathcal{C})$ un cercle de centre $O$. $A, B$ deux points distincts de $(\mathcal{C})(A \neq B)$,. Pour tout point $M \in (\mathcal{C})$ et distinct de $A$et $B$, alors on a :

$$2\left(\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}}\right)[\mathbf{2\pi}]$$

([$\mathbf{2\pi}$] *se lit « **modulo** $\mathbf{2\pi}$ » ou « **congru** $\mathbf{2\pi}$ »).*

$$M \in \mathcal{C}\backslash\{A, B\} \Longrightarrow 2(\overrightarrow{MA};\ \overrightarrow{MB}) = (\overrightarrow{OA};\ \overrightarrow{OB})[2\pi]$$

**Démonstration :**

$OAM$est un triangle isocèle en $O$, on a :$\left(\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MO}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{AO};\overrightarrow{AM}}\right)$

Dans le triangle $OAM$, on a ;

$$\left(\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MO}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{AO};\overrightarrow{AM}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OA}}\right) = \pi$$

$$\Longrightarrow \mathbf{2}\left(\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MO}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OA}}\right) = \boldsymbol{\pi}\ \boxed{1}$$

$OBM$ est un triangle isocèle en $O$, de même on a : $\Longrightarrow$

$$\mathbf{2}\left(\widehat{\overrightarrow{MO};\overrightarrow{MB}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OM}}\right) = \boldsymbol{\pi}\boxed{2}$$

$$\boxed{1} + \boxed{2} \Longrightarrow 2\left(\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MO}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OA}}\right) + 2\left(\widehat{\overrightarrow{MO};\overrightarrow{MB}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OM}}\right) = \pi + \pi$$

$$\Longrightarrow 2\left(\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OA}}\right) = 2\pi \Longrightarrow 2\left(\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}}\right) + 2\pi \Longrightarrow \mathbf{2}\left(\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}}\right)[\mathbf{2\pi}]$$

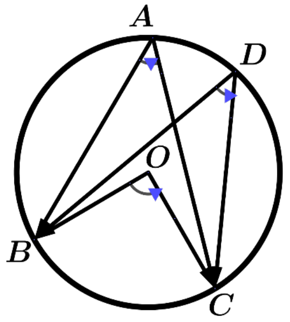
**Propriété 2 :**

Soit$(\mathcal{C})$un cercle de centre$O$, et soit $A, B, C$et$D$ quatre points distincts de$(\mathcal{C})$, alors on a :



Math 6AS.indd 82 26/07/2024 10:41:40

$2\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right) = 2\left(\widehat{\overrightarrow{DB};\overrightarrow{DC}}\right)$
Les points $B$ et $C$ sont appelés les points de base.




**Remarque 3 :**
Inversement, si on a quatre points, $A, B, C$ et $D$ tels que ; $2\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right) = 2\left(\widehat{\overrightarrow{DB};\overrightarrow{DC}}\right)$, alors , $A, B, C$ et $D$ sont situés sur un même cercle ou cocycliques.

## 4. Théorème de l'angle de la tangente :

Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre $\Omega$ et soit $A$ et $B$ deux points de $\mathcal{C}$ $(A \neq B)$. Désignons par $\Delta$ la tangente en $A$ à $\mathcal{C}$, alors : $T \in \Delta \backslash \{A\} \Longrightarrow 2(\overrightarrow{AT};\ \overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{\Omega A};\ \overrightarrow{\Omega B})[2\pi]$

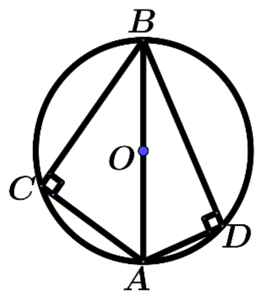
**Conséquences :**
Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre $\Omega$ et soient $A$ et $B$ deux points de $\mathcal{C}$ $(A \neq B)$. Désignons par $\Delta$ la tangente en $A$ à $\mathcal{C}$, alors $\forall M \in \mathcal{C} \setminus \{A, B\}$, $\forall T \in \Delta \setminus \{A\}$,
$2(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB}) = 2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})[2\pi]$

**Démonstration :**
On a $\forall T \in \Delta \setminus \{A\}, 2(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB}) = 2(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B})[2\pi]\boxed{1}$.
$\forall M \in \mathcal{C} \setminus \{A, B\}, 2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = 2(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B})[2\pi]\boxed{2}$.
D'où, $\forall M \in \mathcal{C} \setminus \{A, B\}$, $\forall T \in \Delta \setminus \{A\}$, $2(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB}) = 2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})[2\pi]$

## 5. Cocyclicité ou alignement :

Quatre points $A$, $B$, $C$ et $D$ deux à deux distincts sont $[2\pi]$ cocycliques ou alignés, si et seulement si :
$2(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = 2(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB})[2\pi]$. C'est-à-dire, si et seulement si : $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB})[\pi]$

**Remarque 4 :** ***Cas remarquable de cocyclicité***
Si $ABC$ et $ABD$ sont deux triangles rectangles ayant le même hypoténuse, alors $A, B, C$ et $D$ sont sur un même cercle.

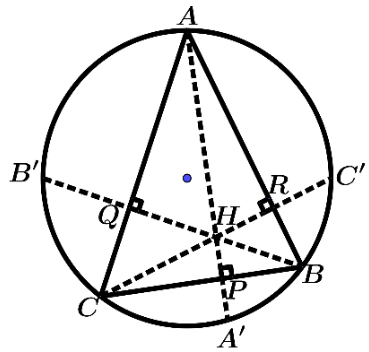



## 6. Effet d'une transformation usuelle sur les angles orientés :

Les translations les homothéties et les rotations conservent les angles orientés.
Les réflexions transforment les angles orientés en leurs opposés.

**Exercice 1 :**
Soit $ABC$ un triangle non rectangle.
1. Montrer que les symétriques respectifs de l'orthocentre $H$ de $ABC$ par rapport à $(BC)$, $(CA)$ et $(AB)$ appartiennent au cercle circonscrit à $ABC$.
2. Montrer que les symétriques respectifs de l'orthocentre $H$ de $ABC$ par rapport aux milieux de $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$ appartiennent au cercle circonscrit à $ABC$.

**Solution :**
**1.** Soit $ABC$ un triangle non rectangle. On désigne par $H$ l'orthocentre de $ABC$, par $A'$, $B'$ et $C'$ les symétriques de $H$ respectivement par rapport à $(BC)$, $(CA)$ et $(AB)$ et par $P$, $Q$ et $R$ les projetés orthogonaux de $H$ respectivement sur $(BC)$, $(CA)$ et $(AB)$. Soit $\mathcal{C}$ le cercle circonscrit à $ABC$.




Pour montrer que $A' \in \mathcal{C}$, il suffit de montrer que $A'$, $A$, $B$ et $C$ sont cocycliques. Soit $S_{(BC)}$ la réflexion d'axe $(BC)$, alors : $\begin{cases} S_{(BC)}(H) = A' \\ S_{(BC)}(B) = B \\ S_{(BC)}(C) = C \end{cases}$

$\left(\overrightarrow{A'B}, \overrightarrow{A'C}\right) = -(\overrightarrow{HB}, \overrightarrow{HC})[\pi]$*(Réflexion d'axe $(BC)$)*
$= (\overrightarrow{HC}, \overrightarrow{HB})[\pi] = (\overrightarrow{HR}, \overrightarrow{HQ})[\pi]$*(Colinéarité)*
$= (\overrightarrow{AR}, \overrightarrow{AQ})[\pi]$*(Cocyclicité remarquable)*
$= (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})[\pi]$*(Cocyclicité)*
Donc, $\left(\overrightarrow{A'B}, \overrightarrow{A'C}\right) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})[\pi]$ d'où, $A' \in \mathcal{C}$

De même : $\begin{cases} S_{(AC)}(H) = B' \\ S_{(AC)}(A) = A \\ S_{(AC)}(C) = C \end{cases}$

$\left(\overrightarrow{B'C}, \overrightarrow{B'A}\right) = -(\overrightarrow{HC}, \overrightarrow{HA})[\pi]$*(Réflexion d'axe$(AC)$)*
$= (\overrightarrow{HA}, \overrightarrow{HC})[\pi] = (\overrightarrow{HP}, \overrightarrow{HR})[\pi]$*(Colinéarité)*
$= (\overrightarrow{BP}, \overrightarrow{BR})[\pi]$*(Cocyclicité remarquable)*
$= (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})[\pi]$*(Cocyclicité)*
Donc, $\left(\overrightarrow{B'C}, \overrightarrow{B'A}\right) = (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})[\pi]$ d'où, $B' \in \mathcal{C}$

De même : $\begin{cases} S_{(AB)}(H) = C' \\ S_{(AB)}(A) = A \\ S_{(AB)}(B) = B \end{cases}$

$\left(\overrightarrow{C'A}, \overrightarrow{C'B}\right) = -(\overrightarrow{HA}, \overrightarrow{HB})[\pi]$*(Réflexion d'axe$(AC)$)*
$= (\overrightarrow{HB}, \overrightarrow{HA})[\pi] = (\overrightarrow{HQ}, \overrightarrow{HP})[\pi]$*(Colinéarité)*
$= (\overrightarrow{CQ}, \overrightarrow{CP})[\pi]$*(Cocyclicité remarquable)*
$= (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})[\pi]$*(Cocyclicité)*
Donc, $\left(\overrightarrow{C'A}, \overrightarrow{C'B}\right) = (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})[\pi]$d'où, $C' \in \mathcal{C}$.




Math 6AS.indd 83 26/07/2024 10:41:43

Les symétriques de l'orthocentre $H$ par rapport à $(BC)$, $(CA)$ et $(AB)$ appartiennent donc au cercle circonscrit au triangle $ABC$.

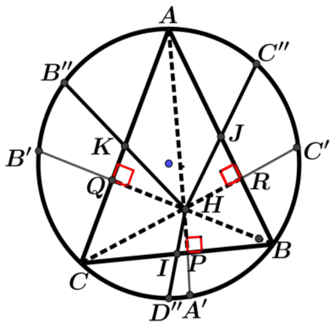
**2.** Soit $I$, $J$ et $K$ les milieux respectifs $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$ et soit $A''$, $B''$ et $C''$ les symétriques respectifs de $H$ par rapport à $I$, $J$ et $K$. Soit $S_I$ la symétrie centrale par rapport à $I$. Alors : $\begin{cases} S_I(H) = A'' \\ S_I(B) = C \\ S_I(C) = B \end{cases}$

Donc, $\left(\overrightarrow{A''B}, \overrightarrow{A''C}\right) = \left(\overrightarrow{HC}, \overrightarrow{HB}\right)[\pi]$.*(Une symétrie centrale du plan est une rotation d'angle $\pi$).*

$= \left(\overrightarrow{HR}, \overrightarrow{HQ}\right)[\pi]$*(colinéarité)*

$= \left(\overrightarrow{AQ}, \overrightarrow{AR}\right)[\pi]$*(cocyclicité remarquable).*$=$

$\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\right)[\pi]$*(colinéarité).*




Donc, $\left(\overrightarrow{A''B}, \overrightarrow{A''C}\right) = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)[\pi]$ d'où, $A'' \in \mathcal{C}$

**De même ;**

Soit $S_J$ la symétrie centrale par rapport à $J$. Alors : $\begin{cases} S_J(H) = C'' \\ S_J(A) = B \\ S_J(B) = A \end{cases}$

Donc, $\left(\overrightarrow{C''A}, \overrightarrow{C''B}\right) = \left(\overrightarrow{HB}, \overrightarrow{HA}\right)[\pi]$.*(Une symétrie centrale du plan est une rotation d'angle $\pi$).*

$= \left(\overrightarrow{HQ}, \overrightarrow{HP}\right)[\pi]$*(colinéarité).*$=$

$\left(\overrightarrow{CP}, \overrightarrow{CQ}\right)[\pi]$*(cocyclicité remarquable)* $=$

$\left(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}\right)[\pi]$*(colinéarité).*

Donc, $\left(\overrightarrow{C''B}, \overrightarrow{C''C}\right) = \left(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}\right)[\pi]$ d'où, $C'' \in \mathcal{C}$

**De même ;** Soit $S_K$ la symétrie centrale par rapport à $K$. Alors : $\begin{cases} S_K(H) = B'' \\ S_K(A) = C \\ S_K(C) = A \end{cases}$

Donc, $\left(\overrightarrow{B''C}, \overrightarrow{B''A}\right) = \left(\overrightarrow{HA}, \overrightarrow{HC}\right)[\pi]$.*(Une symétrie centrale du plan est une rotation d'angle $\pi$).*

$= \left(\overrightarrow{HP}, \overrightarrow{HR}\right)[\pi]$*(colinéarité)*$=$

$\left(\overrightarrow{BR}, \overrightarrow{BP}\right)[\pi]$*(cocyclicité remarquable)*$=$

$\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right)[\pi]$*(colinéarité).*

Donc, $\left(\overrightarrow{B''C}, \overrightarrow{B''A}\right) = \left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right)[\pi]$ d'où, $B'' \in \mathcal{C}$

## Exercice 2 :

*$A$, $B$ et $C$* sont trois points non alignés. $I$, $J$ et $K$ sont trois points appartenant respectivement à $(BC)$, $(CA)$ et $(AB)$ et distincts des sommets du triangle $ABC$.

On désigne par $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ les cercles circonscrits respectivement aux triangles $CIJ$, $BKI$ et $AJK$.

Montrer que $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ ont un point commun.

**Solution :**

Le point $I$ étant commun aux deux cercles distincts $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$, il n'y a que deux possibilités :

**1-**$\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ se recoupent en un second point $P$. Montrons dans ce cas que $P \in \mathcal{C}_3$.

$\left(\overrightarrow{PJ}, \overrightarrow{PK}\right) = \left(\overrightarrow{PJ}, \overrightarrow{PI}\right) + \left(\overrightarrow{PI}, \overrightarrow{PK}\right)[\pi]$

$= \left(\overrightarrow{CJ}, \overrightarrow{CI}\right) + \left(\overrightarrow{BI}, \overrightarrow{BK}\right)[\pi]$*(Cocyclicité sur $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$)*

$= \left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right) + \left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}\right)[\pi]$*(Cocyclicité)*

$= \left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\right)[\pi] = \left(\overrightarrow{AJ}, \overrightarrow{AK}\right)[\pi]$*(Colinéarité)*

Donc, $\left(\overrightarrow{PJ}, \overrightarrow{PK}\right) = \left(\overrightarrow{AJ}, \overrightarrow{AK}\right)[\pi]$, d'où, $P \in \mathcal{C}_3$.

Donc, dans ce cas, les trois cercles $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ ont un point commun $P$.

**2.** $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont tangentes en $I$.

Montrons dans ce cas que $I \in \mathcal{C}_3$. Soit $D$ la tangente à $\mathcal{C}_3$ en $I$ et soit $T$ un point de $D$ distinct de $I$, alors :

$\left(\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{IK}\right) = \left(\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{IT}\right) + \left(\overrightarrow{IT}, \overrightarrow{IK}\right)[\pi] = \left(\overrightarrow{CJ}, \overrightarrow{CI}\right) + \left(\overrightarrow{BI}, \overrightarrow{BK}\right)[\pi]$*(Angle de la tangente et angle inscrit)*

$= \left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right) + \left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}\right)[\pi]$*(Colinéarité)*$=$

$\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\right)[\pi] = \left(\overrightarrow{AJ}, \overrightarrow{AK}\right)[\pi]$*(Colinéarité)*

Donc, $\left(\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{IK}\right) = \left(\overrightarrow{AJ}, \overrightarrow{AK}\right)[\pi]$, d'où, $I \in \mathcal{C}_3$.

Donc, dans ce cas, les trois cercles $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ ont un point commun $I$.

## Exercice 3 : *(Droite de Simson et droite de Steiner)*

*$A$, $B$ et $C$* sont trois points non alignés. $\mathcal{C}$ est le cercle circonscrit au triangle $ABC$. Soit $M$ un point du plan n'appartenant ni à $(AB)$, ni à $(AC)$, ni à $(BC)$. On désigne par $P$, $Q$ et $R$ les projetés orthogonaux de $M$ respectivement sur $(BC)$, $(AC)$ et $(AB)$, et par $I$, $J$ et $K$ les symétriques de $M$ respectivement par rapport à $(BC)$, $(AC)$ et $(AB)$.

**1.** Faire une figure illustrant les données précédentes.

**2. a)** Montrer que :

$$\left(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}\right) = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) + \left(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}\right)[\pi]$$

**b)** En déduire que $P$, $Q$ et $R$ sont alignés.

**3.** Montrer que $I$, $J$ et $K$ sont alignés si et seulement si $M \in \mathcal{C}$.

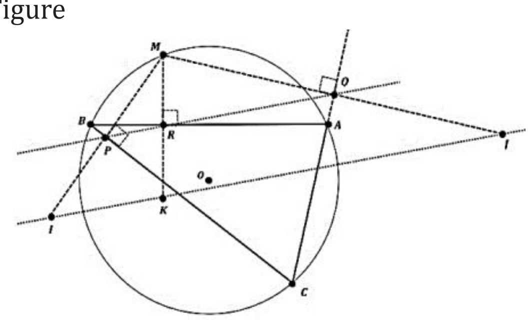
### Remarque 5 :

Lorsque $M \in \mathcal{C}$ ;

- La droite qui passe par $P$, $Q$ et $R$ s'appelle la droite de ***Simson*** relative à $M$.
- Celle qui passe par $I$, $J$ et $K$ s'appelle droite de ***Steiner*** relative à $M$.

**Solution :**

**1.** Figure



**2. a)** $(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MC}) = (\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MP}) + (\overrightarrow{MP},\overrightarrow{MC})[\pi]$*(Chasles)*

$= (\overrightarrow{RB},\overrightarrow{RP}) + (\overrightarrow{QP},\overrightarrow{QC})[\pi]$*(Colinéarité remarquable)*

$= (\overrightarrow{AB},\overrightarrow{RP}) + (\overrightarrow{QP},\overrightarrow{AC})[\pi]$

$= (\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{AC},\overrightarrow{RP}) + (\overrightarrow{QP},\overrightarrow{RP}) + (\overrightarrow{RP},\overrightarrow{AC})[\pi]$*(Chasles)*

$= (\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PR})[\pi]$

Donc, $(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MC}) = (\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PR})[\pi]$.

**b)** On a $(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MC}) = (\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PR})$

donc, $(\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PR}) = -(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MC})$.

**- On suppose que $P, Q, R$ sont alignés, alors :**

$(\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PR}) = 0\ [\pi] \Longrightarrow (\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MC}) - (\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = 0\ [\pi]$

D'où ; $(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MC}) = (\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})[\pi]$donc $M \in \mathcal{C}$.

**Réciproquement ;** On suppose que $M \in \mathcal{C}$ :

Alors, $(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MC}) = (\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})[\pi]$

Donc, $(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MC}) - (\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = 0\ [\pi]$

D'où, $(\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PR}) = 0\ [\pi] \Longrightarrow P, Q, R$ sont donc alignés.

**Conclusion ;** $P, Q, R$ sont donc alignés si et seulement si $M \in \mathcal{C}$.

**3°/** Pour une position fixe de $M$, on considère l'homothétie $h_M$ de centre $M$ et de rapport 2.

Alors ; $\begin{cases} h_M(P) = I \\ h_M(Q) = J \\ h_M(R) = K \end{cases}$

Or, une homothétie conserve l'alignement. D'où, $I, J, K$ sont alignés si et seulement si $P, Q, R$ sont alignés. Or, $P, Q, R$ sont alignés si et seulement si $M \in \mathcal{C}$. D'où, $I, J, K$ sont alignés si et seulement si $M \in \mathcal{C}$.

**L'ensemble des points $M \in \mathcal{P}$ tels que :**

$$(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}) = \theta[\pi]$$

Soit $\theta$ est un réel et $A$ et $B$ deux points distincts. Désignons par $\Gamma$ l'ensemble des points $M$ du plan tels que : $(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}) = \theta[\pi]$

● Si $\theta = 0\ [\pi]$, la relation précédente devient : $(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}) = 0\ [\pi]$. Dans ce cas,$\Gamma = (AB) \setminus \{A, B\}$.

● Si $\theta \neq 0\ [\pi]$et $T$ un point tel que $(\overrightarrow{AT},\overrightarrow{AB}) = \theta[\pi]$. Et soit $\mathcal{C}$ le cercle passant par $A$ et $B$ et tangent en $A$à $(AT)$, alors ce cas, $\Gamma = \mathcal{C} \setminus \{A, B\}$.

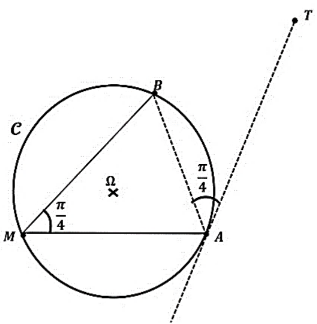
**Exemple 6 :**

$$M \in \Gamma \Leftrightarrow (\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{4}[\pi]$$

Déterminer et construire$\Gamma$.

**Réponse :**

Soit $T$ un point tel que $(\overrightarrow{AT},\overrightarrow{AB}) = \frac{\pi}{4}[\pi]$. Et soit $\mathcal{C}$ le cercle passant par $A$ et $B$ et tangent en $A$à $(AT)$, alors dans ce cas, $\Gamma = \mathcal{C} \setminus \{A, B\}$.




Pour la construction de $\Gamma$, soit $\Omega$ le centre de $\mathcal{C}$ alors :

$\begin{cases} \bullet \Omega \in med[AB] \\ \bullet \Omega \in à\ la \perp en\ A\ à\ [AT] \end{cases}$

$\Longrightarrow$C'est donc le point d'intersection.

**Remarque 6 :**

Si $M \in \Gamma \Longrightarrow (\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{2}[\pi]$, alors $\Gamma$ est le cercle de diamètre $[AB]$ privé $\{A, B\}$.

**L'ensemble des points $M \in \mathcal{P}$ tels que :**

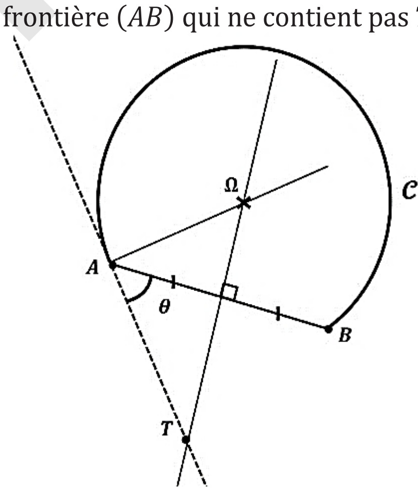
$$(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}) = \theta[2\pi]$$

Soient $A$ et $B$ deux points distincts et $\theta$ un réel et désignons par $\Gamma$ l'ensemble des points $M$ du plan $\mathcal{P}$ tels que $(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}) = \theta[2\pi]$.

- Si $\theta = 0\ [2\pi]$ c'est-à-dire $(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}) = 0\ [2\pi]$, alors $\Gamma = (AB) \setminus [AB]$.


- Si $\theta = \pi[2\pi]$ c'est-à-dire $(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}) = \pi[2\pi]$, alors $\Gamma = [AB] \setminus \{A, B\}$.


- Si $\theta$ n'est pas multiple de $\pi$, soit $T$ un point tel que $(\overrightarrow{AT},\ \overrightarrow{AB}) = \theta[2\pi]$ et soit $\mathcal{C}$ le cercle passant par $A$ et $B$ et tangent en $A$ à $(AT)$, alors dans ce cas $\Gamma$ est l'arc ouvert de $\mathcal{C}$ d'extrémités $A$ et $B$ situé dans le demi-plan de frontière $(AB)$ qui ne contient pas $T$.




**Exemple 7 :**

$A$et$B$ sont deux points distincts. Déterminer et construire l'ensemble $\Gamma$ des points du plan $\mathcal{P}$ tels que :$(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{4}[2\pi]$

**Réponse :**

Soit $T$ un point tel que :$(\overrightarrow{AT},\overrightarrow{AB}) = \frac{\pi}{4}[2\pi]$

Et soit $\mathcal{C}$ le cercle passant par $A$ et $B$ et tangent en $A$à $(AT)$. Alors $\Gamma$ est l'arc ouvert de $\mathcal{C}$ d'extrémités $A$et $B$, situé dans le demi-plan de frontière $(AB)$ et qui ne contient pas $T$.

Pour la construction : le centre $\Omega$ de $\mathcal{C}$ est le point d'intersection de la médiatrice de $[AB]$ et la perpendiculaire en $A$à $(AT)$.

## A. Applications :

### Orthogonalité de droites :

**Exemple 1**

$ABCD$ un carré. $I$ et $J$ milieux respectifs de $[AB]$ ; $[BC]$ ;.

Montrer que les droites $(AJ)$ et $(ID)$ sont perpendiculaires.

**Réponse :**

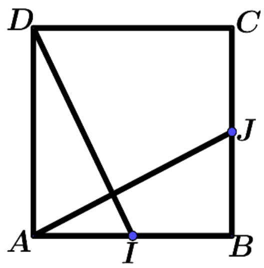
On a : $2(\overrightarrow{AJ},\overrightarrow{ID}) = 2(\overrightarrow{AJ},\overrightarrow{AB}) + 2(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}) + 2(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{ID})$ (*Chasles*) ;

Or, $2(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}) = \pi$ (car, $(AB) \perp (AD)$) ;

$2(\overrightarrow{AJ},\overrightarrow{AB}) = -2(\overrightarrow{CI},\overrightarrow{CB})$ (réflexion d'axe $(BD)$)

$= 2(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CI}) = -2(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DI})$ (*réflexion d'axe la médiatrice de* $[AB]$) $=$

$2(\overrightarrow{DI},\overrightarrow{DA})$.




Donc :

$2(\overrightarrow{AJ},\overrightarrow{ID}) = 2(\overrightarrow{DI},\overrightarrow{DA}) + \pi + 2(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DI})$

$= \pi + 2(\overrightarrow{DI},\overrightarrow{DI})$ (*Chasles*)

$= \pi + 0$ ($\overrightarrow{DI}$ est colinéaire à $\overrightarrow{DI}$).

Donc ; $\mathbf{2(\overrightarrow{AJ},\overrightarrow{ID}) = \pi}$ ; d'où, $(\boldsymbol{AJ}) \perp (\boldsymbol{ID})$

### Parallélisme de droites :

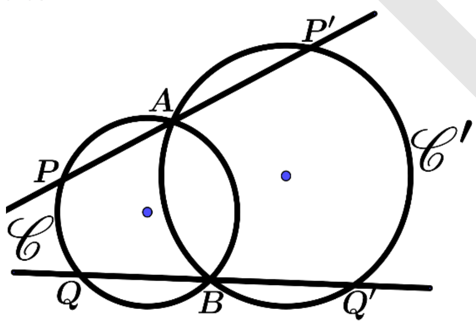
**Exemple 2 :**

$\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux cercles sécants en $A$et $B$.

Une droite passant par $A$ recoupe$\mathcal{C}$et $\mathcal{C}'$ respectivement en $P$ et en $P'$.

Une droite passant par $B$ recoupe$\mathcal{C}$et $\mathcal{C}'$ respectivement en $Q$ et en $Q'$.

Montrer que les droites $(PQ)$ et $(P'Q')$ sont parallèles.




**Réponse :**

$2\left(\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{P'Q'}\right) = 2\left(\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PP'}\right) + 2\left(\overrightarrow{PP'},\overrightarrow{P'Q'}\right)$ (*Chasles*)

$= 2(\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PA}) + 2\left(\overrightarrow{AP'},\overrightarrow{P'Q'}\right)$ (*colinéarité*)

$= 2\left(\overrightarrow{BQ'},\overrightarrow{BA}\right) + 2\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BQ'}\right)$ (*cocyclicité donnée sur* $\mathcal{C}$*et* $\mathcal{C}'$)

$= 2\left(\overrightarrow{BQ'},\overrightarrow{BQ'}\right) = 0.$

Donc ; $\mathbf{2\left(\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{P'Q'}\right) = 0}$, d'où ; $(\boldsymbol{PQ})//(\boldsymbol{P'Q'})$

### Cocyclicité et ensemble de points :

**Exemple 3 :**

$ABCD$ un carré direct de centre$O$, de cercle circonscrit $\mathcal{C}$, $I$ milieu de $[AB]$.

La parallèle à $(IC)$ passant par $B$ recoupe $\mathcal{C}$en $E$.

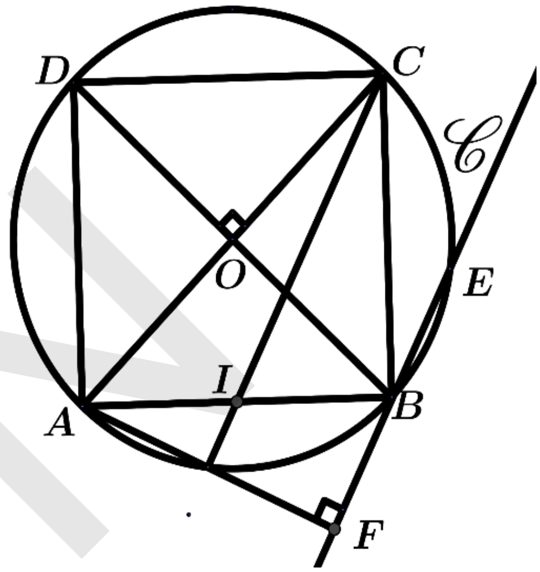
$F$ est le projeté orthogonal de $A$sur $(BE)$.

**1)** Donner la mesure principale de l'angle orienté $(\overrightarrow{EB},\overrightarrow{BC})$.

**2)** Montrer que les points $O$ ; $A$ ; $B$ ;$F$ sont cocycliques.

Donner la mesure principale de l'angle orienté $(\overrightarrow{FO}\ ;\ \overrightarrow{FA})$

**3)** Quel est l'ensemble des points$M$ du plan tels que : $(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{4}[\pi]$




**Réponse :**

**1)** Comme les points $A$ ; $B$ ; $C$ ;$E$ sont cocycliques (*cocyclicité donnée*), $A$ et $E$ de part et d'autre de la corde $[CB]$,

Alors, $(\overrightarrow{EB}\ ;\ \overrightarrow{EC}) = (\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AC}) + \pi$

$$= \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} - 2\pi\ [2\pi],$$

donc; $(\overrightarrow{\boldsymbol{EB}}\ ;\ \overrightarrow{\boldsymbol{EC}}) = -\frac{\mathbf{3\pi}}{\mathbf{4}}$

**2)** Comme les triangles $AOB$ et $AFB$ sont rectangles de même hypoténuse $[AB]$.

Donc ; les points $O$ ; $A$ ; $B$ ;$F$ sont cocycliques avec $B$ et $F$ de même côté de la corde $[OA]$.

Donc ; $(\overrightarrow{FO}\ ;\ \overrightarrow{FA}) = (\overrightarrow{BO}\ ;\ \overrightarrow{BA}) = \frac{\pi}{4}$,

donc ; $(\overrightarrow{FO}\ ;\ \overrightarrow{FA}) = \frac{\pi}{4}$

**3)**$(\overrightarrow{MA}\ ;\ \overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{4}[\pi] \Leftrightarrow (\overrightarrow{MA}\ ;\ \overrightarrow{MB})$

$= (\overrightarrow{CA}\ ;\ \overrightarrow{CB})[\pi] \Leftrightarrow$

Les points $M$ ; $A$ ; $B$ ; $C$ sont cocycliques ; avec $M \neq A$et $M \neq B$.

Donc ; l'ensemble demandé est le cercle$\mathcal{C}$ privé des points $A$ ; $B$.

### Cocyclicité et ensemble depoints

**Exemple4 :**

$ABC$ un triangle équilatéral direct. $I$ ; $J$ ; $K$ les milieux respectifs de $[AB]$ ; $[BC]$ ; $[CA]$. $\mathcal{C}$ un cercle circonscrit au triangle $AIC$.

La tangente à $\mathcal{C}$ en $I$ coupe $(BC)$ en $D$.

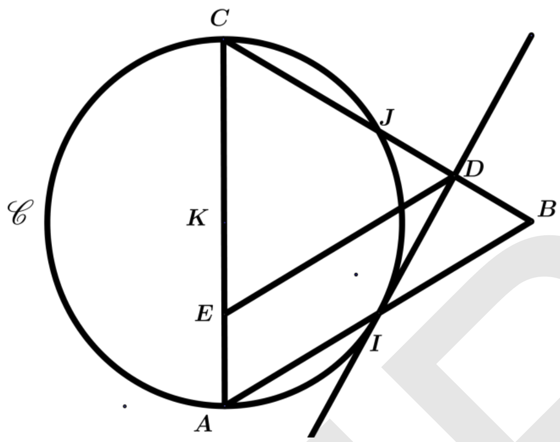
Le triangle $DCE$ est équilatéral direct.

**1)** Montrer que $J$ appartient à $\mathcal{C}$ .

**2)** Montrer que les points $I$ ; $D$ ; $C$ ; $E$ sont cocycliques.

**3)** Déterminer et construire $\Gamma$ l'ensemble des points

$M$ tels que : $(\overrightarrow{MA}\,;\,\overrightarrow{MB}) = -\frac{\pi}{6}[\pi]$




**Réponse :**

**1)** Comme : les triangles $IAC$ et $JAC$ sont rectangles de même hypoténuse $[AC]$.

Donc ; les points $I$ ; $J$ ; $A$ ; $C$ sont cocycliques.

Donc ; $J$ appartient au cercle circonscrit au triangle $(IAC)$ qui est $\mathcal{C}$.

Donc ; $J \in \mathcal{C}$.

**2)** EDC est équilatéral direct.

Donc ; $2(\overrightarrow{ED}\,;\,\overrightarrow{EC}) = \frac{2\pi}{3}$

Or ; $2(\overrightarrow{ID};\overrightarrow{IC}) = 2(\overrightarrow{AI}\,;\,\overrightarrow{AC})$*(angle inscrit et tangente)*

$2(\overrightarrow{ID}\,;\,\overrightarrow{IC}) = 2(\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AC})$*(remplacement par vecteur colinéaire)*

Or; $ABC$ est équilatéral direct ;

Donc, $2(\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AC}) = \frac{2\pi}{3}$

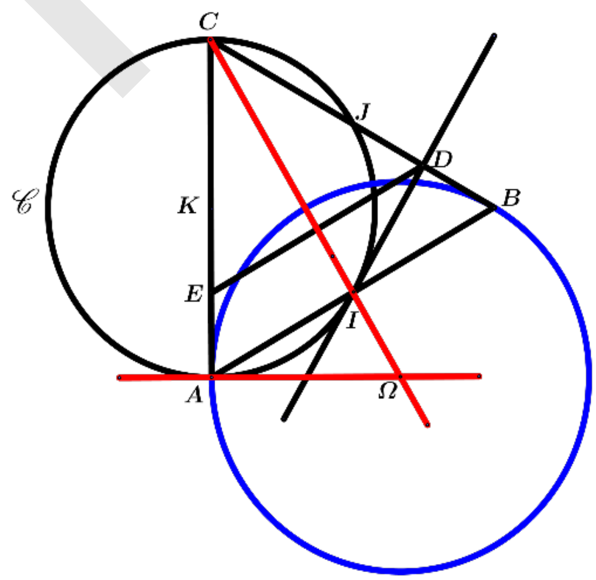
Donc ; $2(\overrightarrow{ED}\,;\,\overrightarrow{EC}) = 2(\overrightarrow{ID}\,;\,\overrightarrow{IC})$;

D'où ; les points $I$ ; $D$ ; $C$ ; $E$ sont cocycliques.

**3)** $(\overrightarrow{MA}\,;\,\overrightarrow{MB}) = -\frac{\pi}{6}[\pi] \Leftrightarrow$ : $(\overrightarrow{MA}\,;\,\overrightarrow{MB})$

$= (\overrightarrow{AJ}\,;\,\overrightarrow{AB})[\pi]$

Donc ; $\Gamma$ est le cercle privé de $A$ et $B$, tangent à $(AJ)$ et passant par $A$ et $B$, de centre $\Omega$ intersection de la médiatrice de $[AB]$ avec la perpendiculaire à $(AJ)$ en $A$.



## B. Exercices divers

**1.** ABC un triangle isocèle rectangle en A direct, I, milieu de [BC].
Donner la mesure principale de chacun des angles orientés :

$(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$ ; $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AI})$ ; $(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AI})$ ;
$(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB})$ ; $(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BI})$ ; $(\overrightarrow{IA};\overrightarrow{IB})$ ;
$(\overrightarrow{IA};\overrightarrow{IC})$ ; $(\overrightarrow{IB};\overrightarrow{IC})$.

**2.** ABC un triangle équilatéral direct de centre O.
Donner la mesure principale de chacun des angles orientés :

$(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{AC})$ ; $(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{CO})$ ; $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{BA})$ ; $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{BC})$

**3.** ABCD est un pentagone régulier direct de centre O.
Donner la mesure principale de chacun des angles orientés :

$(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})$ ; $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OC})$ ; $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OD})$ ; $(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{OA})$
$(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OD})$ ; $(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{OA})$

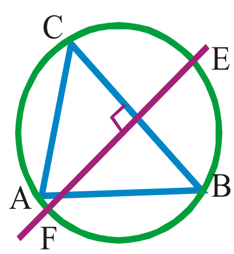
**4.** ABC un triangle équilatéral direct de centre O. I ; J ; K les milieux respectifs de [AB]; [BC] ; [CA]
1) Justifier que les points A ; I ; O K sont cocycliques ainsi que les points A ; B ; J ; K.
2) Donner tous les groupes de points de la figure, qui sont cocycliques pour la même raison que les deux groupes de points de la 1ère question.

**5.** ABC un triangle d'angles aigus, d'orthocentre H ; α ; β ;γ les pieds des hauteurs issues respectivement de A, B, C. les points $H_1$ ; $H_2$ ; $H_3$ sont les symétriques de H respectivement par rapport à (AB) ; (BC) ; (CA).
1) Faire une figure.
2) Montrer que les points A ; B ; C ; $H_1$ sont cocycliques et donner deux autres points appartenant au cercle circonscrit au triangle ABC.
3) Montrer que $(\overrightarrow{\alpha\beta};\overrightarrow{\alpha A}) = (\overrightarrow{\alpha A};\overrightarrow{\alpha\delta})$
Quelle est la bissectrice intérieure de l'angle $(\overrightarrow{\alpha\beta};\overrightarrow{\alpha\delta})$? Que représente H pour le triangle αβ γ ?

**6.** ABCD un quadrilatère de cercle circonscrit C tel que les droites (AD) et (BC) se coupent en E et les droites (AC)et (BD) se coupent en F. D'est le symétrique de D par rapport à la droite (EF).
Montrer que les points E ; F ; C ; D' sont cocycliques.

**7.** ABC un triangle de cercle circonscrit C.
la médiatrice de [BC] coupe C en E et F.
1) Montrer que $(\overrightarrow{FB};\overrightarrow{FE}) = (\overrightarrow{FE};\overrightarrow{FC})$ ;
Montrer que : (AE) est la bissectrice intérieure de l'angle $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$.

**8.** ABC un triangle de cercle circonscrit C .

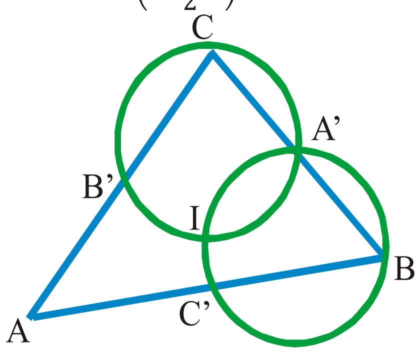



1) Déterminer l'ensemble $\Gamma_1$ des points M du plan tel que : $(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}) = (\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB})$.
2) Déterminer l'ensemble $\Gamma_2$ des points M du plan tel que : $(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}) = (\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CA})$.

**9.** ABC un triangle équilatéral direct de centre O. 1) Déterminer et construire l'ensemble Γ des points du plan tels que :$(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{3}$.
2) Déterminer et construire l'ensemble Γ ' des points du plan tels que : $(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{6}; [\pi]$.

**10.** ABC un triangle isocèle en A, de cercle circonscrit C . P un point du segment [BC] privé de B et C. La droite (AP) recoupe C en M.
1) Montrer que la droite (AB) est tangente au cercle $C_1$ circonscrit au triangle BPM.
2) Montrer que la droite (AC) est tangente au cercle $C_2$ circonscrit au triangle CPM.

**11.** 1) Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls, tels que $(\vec{u};\vec{v}) = \alpha$ Soit k et k' deux réels non nuls.
Exprimer en fonction de α, l'angle$(k\vec{u};k'\vec{v})$
Dans chacun des cas suivants :
a) kk'> 0 ; b) kk'< 0
2) Soit $\vec{u}$ ; $\vec{v}$deux vecteurs non nuls tels que : $(\vec{u};\vec{v}) = \frac{2\pi}{3}$ Donner la mesure principale de chacun des angles orientés : $(2\vec{u};\vec{v})$ ; $(-\vec{u};\vec{v})$; $(-\vec{u};-\vec{v})$ ; $(-\vec{u};-3\vec{v})$;
$\left(\vec{u};\frac{1}{2}\vec{v}\right)$ ; $(3\vec{u};5\vec{v})$ ; $(2\vec{u};-7\vec{v})$



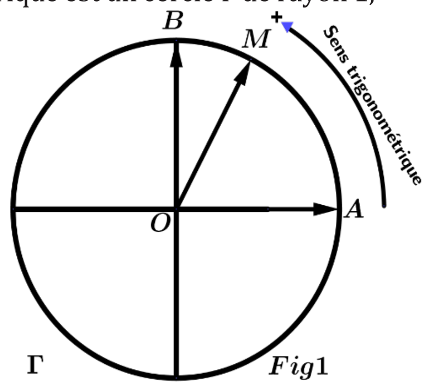

**12.** ABC un triangle. A' ; B' ; C' des points des segments [BC] ; [CA] ; [AB] respectivement tels que : les cercles circonscrits aux triangles A'BC' et A'B'C se recoupent en I. Démontrer quel appartient au cercle circonscrit au triangle AB'C'.

## CHAPITRE 07 Trigonométrie – Calcul trigonométrique

### I. Cercle trigonométrique :

**Définition :**

Le cercle trigonométrique est un cercle $\Gamma$ de rayon 1, son périmètre est donc égal à $2\pi$, le sens trigonométrique est le sens inverse des aiguilles ou antihoraire d'une montre (*fig.1*).




**Graduation en radians :**

$A$ tout réel $x$, on associe un point $M$ du cercle trigonométrique $\Gamma$de la façon suivante (*fig.1*).

- Au réel 0, on associe le point $A$ ;
- A un réel$x > 0$, on associe le point $M$ tel que l'arc $\overset{\frown}{AM}$, parcouru dans le sens trigonométrique, ait pour longueur $x$ ;
- A un réel $x < 0$, on associe le point $M$ tel que l'arc $\overset{\frown}{AM}$, parcouru dans le sens contraire du sens trigonométrique, ait pour longueur $|x|$.

### II. Angles orientés :

#### 1. Angle de vecteurs unitaires :

**Mesures en radians :**

Soit $x$ un réel et $M$ le point correspondant du cercle trigonométrique$\Gamma$, on dit que $x$ est une mesure en radian de l'angle$(\overrightarrow{OA}\,;\,\overrightarrow{OM})$.

L'ensemble des mesures en radians de l'angle$(\overrightarrow{OA}\,;\,\overrightarrow{OM})$ est l'ensemble des réels de la forme $x + 2k\pi$, où $(k \in \mathbb{Z})$.

**Notation :**

L'angle orienté des vecteurs unitaires$\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OM}$ se note$\left(\widehat{\overrightarrow{OA}\,;\,\overrightarrow{OM}}\right)$ ou plus simplement$(\overrightarrow{OA}\,;\,\overrightarrow{OM})$.On peut écrire$(\overrightarrow{OA}\,;\,\overrightarrow{OM}) = x$ou $(\overrightarrow{OA}\,;\,\overrightarrow{OM}) = x rad$ ou$(\overrightarrow{OA}\,;\,\overrightarrow{OM}) = x + 2k\pi$.

**Autres unités d'angles :**

On peut utiliser les mesures en degrés ou en grades.On a : $\pi rad = 180° = 200 gr$.

En mathématiques, on utilise le radian car la longueur de l'arc est mesurée avec la même unité que la longueur $OA$ (fig. 1).

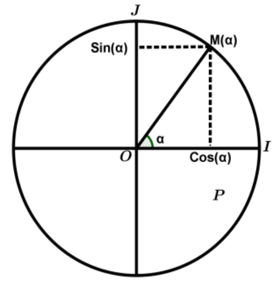
#### 2. Lignes trigonométriques d'un angle orienté :

##### a. Cosinus et sinus d'un angle orienté :

**Définition :**

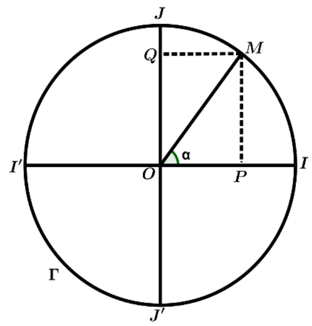
Soit $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ un angle orienté de mesure $\alpha$ et $M$ l'image de $\alpha$sur $(\mathcal{C})$ .

- le cosinus de $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ ou de $\alpha$ est l'abscisse de$M$.
- le sinus de $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ ou de $\alpha$ est l'ordonnée de $M$.




**Remarque 1 :**

**1.** Si $P$et$Q$ sont les projetés orthogonaux respectifs de $M$ sur $(II')$et $(JJ')$, On a : $\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = \cos\alpha = \overline{OP}$ et $\sin(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = \sin\alpha = \overline{OQ}$.




**2.** Dans le plan muni du repère $(O\,;\,I\,;\,J)$, on a : $M\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix}$

**3.** Pour tout nombre réel $\alpha$ et pour tout nombre entier relatif $k$, on a :

- $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$**(relation fondamentale de la trigonométrie)**
- $-1 \leq \cos\alpha \leq 1$et$-1 \leq \sin\alpha \leq 1$ ;
- $\cos\,(\alpha + 2k\pi\,) = \cos\alpha$et $\sin(\alpha + 2k\pi\,) = \sin\alpha$

##### b. Tangente d'un angle orienté :

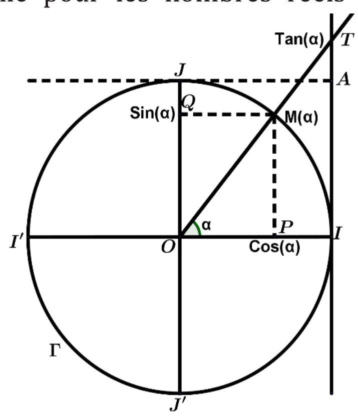
**Définition :**

Soit$(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ un angle orienté non droit de mesure.

La tangente de$(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ ou de$\alpha$ est le nombre réel, noté $tg$ou $tan$, défini par : $\tan(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = \tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

**Remarque 2 :**

- $\tan\alpha$ n'est pas définie pour les nombres réels associés aux points J et J$'$, c.-à-d. les nombres réels $\alpha$ de la forme ; $\frac{\pi}{2} + k\pi$, où $k$ est un nombre entier relatif
- Soit$T$ le point d'intersection de $(OM)$ et $(T)$, $h$ l'homothétie de centre $O$ qui applique $P$ sur $I$.Le rapport de $h$ est $\frac{1}{\cos\alpha}$ et $h(M) = T$.




$$Donc : \overrightarrow{IT} = \frac{1}{\cos\alpha}\overrightarrow{PM} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\overrightarrow{IA}\,;\ d'où, IT = tan\,\alpha.$$

- Pour tout nombre réel$\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ , $k \in \mathbb{Z}$ et pour tout nombre entier relatif $k$, on a :

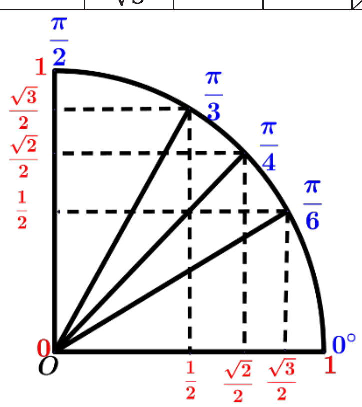
$$\tan(\alpha\ +\ k\pi) = tan\alpha \text{ et } \ 1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

cos $\alpha$, sin $\alpha$ et tan $\alpha$ sont appelés « lignes trigonométriques » de l'angle $(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OM})$ ou du nombre réel $\alpha$.

### c.Lignes trigonométriques des angles remarquables :

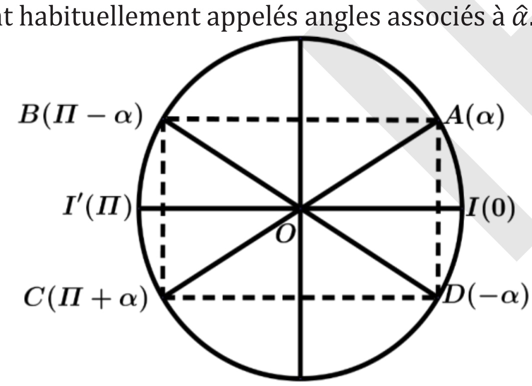
Le tableau ci-dessous indique les lignes trigonométriques remarquables à retenir

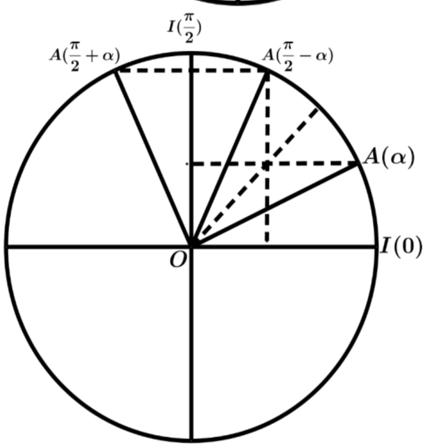
| α | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| cosα | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 |
| sinα | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 |
| tanα | 0 | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | |




### d. Lignes trigonométriques d'angles associés :

Soit $\hat{\alpha}$ un angle orienté de mesure $\alpha$. Les angles orientés de mesures :$-\alpha$ , $\pi-\alpha$ , $\pi+\alpha$ , $\frac{\pi}{2}+\alpha$ , $\frac{\pi}{2}-\alpha$ sont habituellement appelés angles associés à $\hat{\alpha}$.




### Propriétés :

Pour tout nombre réel$\alpha$, on a :

Cos$(-\alpha)$ = cos $\alpha$ ; cos$(\pi-\alpha)$ = − cos $\alpha$;

sin$(-\alpha)$ = − sin $\alpha$ ; sin$(\pi-\alpha)$ = sin $\alpha$ ;

cos$(\pi+\alpha)$ = − cos $\alpha$; sin$(\pi+\alpha)$ = − sin $\alpha$ ;

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \sin\alpha$; $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos\alpha$.

### Remarque 3 :

$\frac{\pi}{2}+\alpha=\pi-(\frac{\pi}{2}-\alpha)$, donc on a également les relations suivantes :

$\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha)$ = - sinα ; $\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha)$ = cosα.

Les tangentes des angles associés se déduisent des formules précédentes ;

ainsi : $\tan(\pi-\alpha) = \frac{\sin(\pi-\alpha)}{\cos(\pi-\alpha)} = \frac{\sin\alpha}{-\cos\alpha}$=-tanα.

## 3. Formules trigonométriques ou relations trigonométriques :

### 3.a. Formules trigonométriques d'angles associés

$\cos(-a) = \cos a$, $\sin(-a) = -\sin a$,$\tan(-a) = -\tan a$.

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-a\right) = \sin a$, $\sin\left(\frac{\pi}{2}-a\right) = \cos a$,$\tan\left(\frac{\pi}{2}-a\right) = \text{cotan}\, a$.

$\cos\left(\frac{\pi}{2}+a\right) = -\sin a$, $\sin\left(\frac{\pi}{2}+a\right) = \cos a$ , $\tan\left(\frac{\pi}{2}+a\right) = -\text{cotan}\, a$. $\cos(\pi-a) = -\cos a$, $\sin(\pi-a) = \sin a$,$\tan(\pi-a) = -\tan a$.

$\cos(\pi+a) = -\cos a$,$\sin(\pi+a) = -\sin a$ , $\tan(\pi+a) = \tan a$.

### 3.b. Formules trigonométriques d'addition

Pour tous nombres réels$a$ et $b$ on a : Soit $(\mathcal{C})$ le cercle trigonométrique et $M$ et $N$ deux points de $(\mathcal{C})$, on pose ; $a = (\overrightarrow{OI};\overrightarrow{ON})$ ; $b = (\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OM})$.

$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$ ;

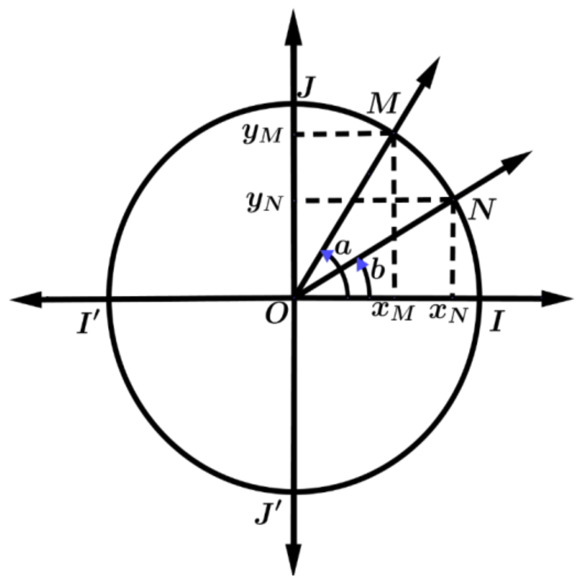
$\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b$ ;

$\sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b$ .

$\sin(a-b) = \sin a\cos b - \cos a\sin b$ ;

$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$,

$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$




Considérons les points $M$et $N$, les images respectives des nombres réels $a$ et $b$ sur le cercle trigonométrique, On a ; $\overrightarrow{OM}=x_M\vec{i}+y_M\vec{j}$ et $\overrightarrow{ON}=x_N\vec{i}+y_N\vec{j}$

$$\Rightarrow \cos a=\frac{y_M}{OM}=y_M\ ;\ \cos b=\frac{y_N}{ON}=y_N$$

$$\Rightarrow M\begin{pmatrix}\cos a\\ \sin a\end{pmatrix}\ et\ N\begin{pmatrix}\cos b\\ \sin b\end{pmatrix}$$

$a$ et $b$ sont des mesures respectives de $\left(\widehat{\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OM}}\right)$et $\left(\widehat{\overrightarrow{OI};\overrightarrow{ON}}\right)$.Donc $b-a$ est une mesure de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{OM};\overrightarrow{ON}}\right)$.

Calculons de deux manières différentes le produit scalaire $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON}$ ;

$$\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON}\cos\left(\widehat{\overrightarrow{OM};\overrightarrow{ON}}\right)$$
$$=OM.ON\cos(b-a)$$
$$=1\times 1\times\cos(b-a)=\cos(a-b)$$

$\boldsymbol{\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON}=\cos(a-b)}\ \boxed{A}$

$$\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON}=x_Mx_n+y_My_N=\begin{pmatrix}\cos a\\ \sin a\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}\cos b\\ \sin b\end{pmatrix}$$
$$=\cos a\cos b+\sin a\sin b$$

$\boldsymbol{\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON}=\cos a\cos b+\sin a\sin b}\ \boxed{B}$

$\boxed{A}=\boxed{B}\Rightarrow \boldsymbol{\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b}$

En remplaçant $b$ par $-b$ dans la formule (1) on obtient la formule (2), en effet ;

$\cos(a-(-b))=\cos a\cos(-b)+\sin a\sin(-b)$

$\cos(a+b)=\cos a\cos b+\sin a(-\sin b)$

$\Rightarrow \boldsymbol{\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b.}$

Etablissons maintenant la formule :

$\boldsymbol{\sin(a-b)=\sin a\cos b-\cos a\sin b.}$

**Méthode 1 :**

$$\sin(a-b)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-(a-b)\right)$$
$$=\cos\left(\left(\frac{\pi}{2}+b\right)-a\right)$$
$$=\cos\left(\frac{\pi}{2}+b\right)\cos\ a+\sin\ \left(\frac{\pi}{2}+b\right)\sin\ a$$
$$Or,\cos\left(\frac{\pi}{2}+b\right)=-\sin b\quad et\sin\left(\frac{\pi}{2}+b\right)=\cos b$$

$\Rightarrow \boldsymbol{\sin(a-b)=\sin a\cos b-\cos a\sin b.}$

En remplaçant $b$ par $-b$ dans la formule précédente on obtient :

$\sin(a-(-b))=\sin a\cos(-b)-\cos a\sin(-b)$

$=\sin(a+b)=\sin a\cos b-\cos a\ (-\sin b)$

$\Rightarrow \boldsymbol{\sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b}$

**Méthode 2 :**

On a ; $\det\left(\overrightarrow{OM};\ \overrightarrow{ON}\right)=\left\|\overrightarrow{OM}\right\|.\left\|\overrightarrow{ON}\right\|\sin(b-a)$

$\Rightarrow \det\left(\overrightarrow{OM};\ \overrightarrow{ON}\right)=1\times 1\times\sin(a-b)$

$\Rightarrow \boldsymbol{\det\left(\overrightarrow{OM};\ \overrightarrow{ON}\right)=\sin(a-b)}\ \boxed{A}$

$$\det\left(\overrightarrow{OM};\ \overrightarrow{ON}\right)=\begin{vmatrix}\cos a & \cos b\\ \sin a & \sin b\end{vmatrix}$$

$\boldsymbol{\det\left(\overrightarrow{OM};\ \overrightarrow{ON}\right)=\cos a\sin b-\sin a\cos b}\ \boxed{B}$

$\boxed{A}=\boxed{B}\Rightarrow \boldsymbol{\sin(a-b)=\cos a\sin b-\sin a\cos b}$

En remplaçant $b$ par $-b$ dans la formule précédente, on obtient la formule :

$\boldsymbol{\sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b.}$

### 3.c. Formules de duplication et de linéarisation :

#### Formules de duplication :

$$\boldsymbol{\cos 2a=cos^2a-sin^2a\,,\ \sin 2a=2\sin a\cos a}$$

$$\boldsymbol{\tan(2a)=\frac{2\tan a}{1-\tan^2 a}}$$

En reprenant les formules d'addition donnant $\boldsymbol{cos(a+b)}$ et $\boldsymbol{sin(a+b)}$ pour $b=a$ on a :

$\cos(a+a)=\cos a\cos a-\sin a\sin a$

$\Rightarrow\cos(2a)=\cos a\cos a-\sin a\sin a$

$=cos^2a-sin^2a$

$\boldsymbol{d'où}$: $\boldsymbol{\cos 2a=cos^2a-sin^2a.}$

$\sin(a+a)=\sin a\cos a+\cos a\sin a.$

$\Rightarrow\sin(2a)=\sin a\cos a+\cos a\sin a=2\sin a\cos a.$

*D'où* :$\boldsymbol{\sin 2a=2\sin a\cos a.}$

#### Formules de linearisation :

$$\boldsymbol{\cos^2 a=\frac{1+\cos 2a}{2},\quad \sin^2 a=\frac{1-\cos 2a}{2}}$$

**Démonstration :**

En reprenant les formules d'addition pour $b=a$ on a :

$\cos 2a=\cos^2 a-\sin^2 a$ ; $\sin 2a=2\sin a\cos a$

En utilisant la relation $\cos^2 a+\sin^2 a=1$, on en déduit :

$\cos 2a=2\cos^2 a-1$ et $\cos 2a=1-\sin^2 a.$

D'où : $\cos^2 a=\dfrac{\boldsymbol{1+\cos 2a}}{\boldsymbol{2}}$ *et* $\boldsymbol{\sin^2 a=\dfrac{1-\cos 2a}{2}}$

### 3.d. Expressions de cos$a$ , sin$a$ et $tana$en fonction de tan$\frac{a}{2}$

Pour tout nombre réel $a$tel que $\tan\frac{a}{2}$soit défini, en posant $t\ =\tan\frac{a}{2}$, on a : $\boldsymbol{cosa=\frac{1-t^2}{1+t^2}}$, $\boldsymbol{\sin a=\frac{2t}{1+t^2}}$,

$\boldsymbol{\tan a=\dfrac{2t}{1-t^2}}$

**Démonstration :**

On sait que : $\cos^2\frac{a}{2}=\frac{1}{1+\tan^2\left(\frac{a}{2}\right)}=\frac{1}{1+t^2}$

On en déduit que : $\cos a=\cos^2\frac{a}{2}-\sin^2\frac{a}{2}=$
$\cos^2\frac{a}{2}\left(1-\frac{\sin^2\left(\frac{a}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{a}{2}\right)}\right)=\boldsymbol{\frac{1-t^2}{1+t^2}}$

$$\sin a=2\cos\frac{a}{2}\sin\frac{a}{2}=\cos^2\frac{a}{2}\left(2\frac{\sin\frac{a}{2}}{\cos\frac{a}{2}}\right)=\boldsymbol{\frac{2t}{1+t^2}}$$

Si, de plus, $\tan a$ est défini, $\boldsymbol{\tan a=\dfrac{2t}{1-t^2}}$

### 3.e. Formules de transformation :

$$\boldsymbol{\cos p+\cos q=2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}}$$

$$\boldsymbol{\cos p-\cos q=2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}}$$

$$\boldsymbol{\sin p+\sin q=2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}}$$

$$\boldsymbol{\sin p-\sin q=2\cos\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}}$$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b)+\cos(a-b)]$$
$$\sin a \sin b = \frac{1}{2}[\cos(a+b)-\cos(a-b)]$$
$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}[\sin(a+b)+\sin(a-b)]$$
$$\cos a \sin b = \frac{1}{2}[\sin(a+b)-\sin(a-b)]$$

**Démonstration :**

Démontrons à l'aide des formules suivantes :

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$et

$\cos\,(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

En additionnant membre à membre, on obtient :

$\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos a \cos b$

En posant $\begin{cases} p = a+b \\ \quad et \\ q = a-b \end{cases}$, on a par addition et par soustraction :$p+q = 2a \Longrightarrow a = \frac{p+q}{2}$,

$$p - q = 2b \Longrightarrow b = \frac{p-q}{2}$$

D'où ; $\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$

D'une manière analogue, on peut démontrer, à l'aide des quatre premières formules d'addition.

**Exemple 1 :**

En utilisant les formules de duplication, calculer $\cos\frac{\pi}{12}$ ; $\sin\frac{\pi}{12}$ ; $\cos\frac{\pi}{8}$ ; $\sin\frac{\pi}{8}$

**Réponse :**

**Méthode 1 :**

□ $\cos\frac{\pi}{6} = \cos\left(2\times\frac{\pi}{12}\right) = cos^2\frac{\pi}{12} - sin^2\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ; de plus

$$cos^2\frac{\pi}{12} + sin^2\frac{\pi}{12} = 1 \Longrightarrow \begin{cases} cos^2\frac{\pi}{12} - sin^2\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ cos^2\frac{\pi}{12} + sin^2\frac{\pi}{12} = 1 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow 2cos^2\frac{\pi}{12} = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \Longrightarrow cos^2\frac{\pi}{12} = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$$

Or ; $0 < \frac{\pi}{12} < \frac{\pi}{2} \Longrightarrow \cos\frac{\pi}{12} > 0 \Longrightarrow \cos\frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}}$

$\Longrightarrow sin\frac{\pi}{12} = \sqrt{1-\frac{2+\sqrt{3}}{4}} \Longrightarrow sin\frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}$(sin$\frac{\pi}{12} >$ 0

**Méthode 2 :**

$$\cos\frac{\pi}{6} = \cos\left(2\times\frac{\pi}{12}\right) = cos^2\frac{\pi}{12} - sin^2\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$
$$\sin\frac{\pi}{6} = \sin\left(2\times\frac{\pi}{12}\right) = 2\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12} = \frac{1}{2}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} cos^2\frac{\pi}{12} - sin^2\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 2\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} cos^2\frac{\pi}{12} - sin^2\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12} = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} cos^2\frac{\pi}{12} - sin^2\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}}{2} \ \boxed{1} \\ \cos\frac{\pi}{12} = \frac{1}{4\sin\frac{\pi}{12}} \ \boxed{2} \end{cases}$$

En remplaçant par $\boxed{2}$dans $\boxed{1}$, on a ;

$$\left(\frac{1}{4\sin\frac{\pi}{12}}\right)^2 - sin^2\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Longrightarrow \frac{1}{16\sin^2\frac{\pi}{12}} - sin^2\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

On multiplie l'équation par$16\sin^2\frac{\pi}{12}$ on a :

$$1 - 16sin^4\frac{\pi}{12} = 8\sqrt{3}\sin^2\frac{\pi}{12}$$
$$\Longrightarrow 16sin^4\frac{\pi}{12} + 8\sqrt{3}\sin^2\frac{\pi}{12} - 1 = 0$$

Posons $X = \sin^2\frac{\pi}{12}$, l'équation devient $16X^2 + 8\sqrt{3}X - 1 = 0$

$$\Delta = \left(8\sqrt{3}\right)^2 + 64 = 256 \Longrightarrow \sqrt{\Delta} = 16$$

$X_1 = \frac{-8\sqrt{3}-16}{32} < 0$ (*rejetée*),

$X_2 = \frac{-8\sqrt{3}+16}{32} > 0$ (*retenue*)

Puisque $\sin^2\frac{\pi}{12}$ étant supérieur à 0.

$\sin^2\frac{\pi}{12} = \frac{2-\sqrt{3}}{4} \Longrightarrow \sin\frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}$(Car $\sin\frac{\pi}{12} > 0$)

**Méthode 1 :**

☒ $\cos\frac{\pi}{4} = \cos\left(2\times\frac{\pi}{8}\right) = cos^2\frac{\pi}{8} - sin^2\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$cos^2\frac{\pi}{8} + sin^2\frac{\pi}{8} = 1 \Longrightarrow \begin{cases} cos^2\frac{\pi}{8} - sin^2\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ cos^2\frac{\pi}{8} + sin^2\frac{\pi}{8} = 1 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow 2cos^2\frac{\pi}{8} = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \Longrightarrow cos^2\frac{\pi}{8} = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$$

Or ; $0 < \frac{\pi}{8} < \frac{\pi}{2} \Longrightarrow \cos\frac{\pi}{12} > 0 \Longrightarrow \cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}$.

De même $0 < \frac{\pi}{8} < \frac{\pi}{2} \Longrightarrow$ s in$\frac{\pi}{12} > 0 \Longrightarrow sin\,\frac{\pi}{8} = \sqrt{1-\frac{2+\sqrt{2}}{4}}$

$$\Longrightarrow sin\,\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}$$

**Méthode 2 :**

$$\cos\frac{\pi}{4} = \cos\left(2\times\frac{\pi}{8}\right) = cos^2\frac{\pi}{8} - sin^2\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin\frac{\pi}{4} = \sin\left(2\times\frac{\pi}{8}\right) = 2\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} cos^2\frac{\pi}{8} - sin^2\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 2\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} cos^2\frac{\pi}{8} - sin^2\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} cos^2\frac{\pi}{8} - sin^2\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2} \boxed{1} \\ \cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}}{4\sin\frac{\pi}{8}} \boxed{2} \end{cases}$$

En remplaçant par $\boxed{2}$ dans $\boxed{1}$, on a ;

$$\Rightarrow \left(\frac{\sqrt{2}}{4\sin\frac{\pi}{8}}\right)^2 - sin^2\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{16\sin^2\frac{\pi}{8}} - sin^2\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

On multiplie l'équation par $16\sin^2\frac{\pi}{8}$, on a :

$$2 - 16sin^4\frac{\pi}{8} = 8\sqrt{2}\sin^2\frac{\pi}{8}$$

$$\Rightarrow 16sin^4\frac{\pi}{8} + 8\sqrt{2}\sin^2\frac{\pi}{8} - 2 = 0$$

Posons $X = \sin^2\frac{\pi}{8}$, l'équation devient :

$16X^2 + 8\sqrt{2}X - 2 = 0,$

$$\Delta = \left(8\sqrt{2}\right)^2 + 128 = 256 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 16$$

$$X_1 = \frac{-8\sqrt{2} - 16}{32} < 0\ (rejetée),$$

$$X_2 = \frac{-8\sqrt{2} + 16}{32} > 0\ (retenue)$$

Puisque $\sin^2\frac{\pi}{8}$ étant supérieur à 0.

$\sin^2\frac{\pi}{8} = \frac{2-\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \mathbf{\sin\frac{\pi}{8}} = \sqrt{\frac{\mathbf{2-\sqrt{2}}}{\mathbf{4}}}$ (Car $\sin\frac{\pi}{12} > 0$)

### 3.f. Linéarisation des fonctions polynômes trigonométriques :

La linéarisation c'est la transformation d'un produit ou d'une puissance en une somme.

**Exemple 2 :**

**1°)** Linéariser l'expression ; $\cos 4x \sin 2x$

**2°)** En déduire une primitive de $f$ sur $\mathbb{R}$.

**Réponse :**

**1°)** pour tout $x \in \mathbb{R}$ ; on a :

$$\cos 4x \sin 2x = \frac{1}{2}[\sin(4x+2x) - \sin(4x-2x)]$$

$$= \frac{1}{2}[\sin(6x) - \sin(2x)]$$

$$\Rightarrow \mathbf{\cos 4x \sin 2x = \frac{1}{2}\sin(6x) - \frac{1}{2}\sin(2x)}$$

**2°)** Soit $f(x) = \cos 4x \sin 2x$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{2}\sin(6x) - \frac{1}{2}\sin(2x)$$

D'où, la primitive $F$ de $f$ sur $\mathbb{R}$ est :

$$F(x) = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{6}\cos(6x) + \frac{1}{2}\cos(2x)\right] + c$$

$$\boldsymbol{F(x) = -\frac{1}{12}\cos(6x) + \frac{1}{4}\cos(2x) + c}$$

**Exemple 3 :**

On pose $f(x) = \cos^3 x$

**1°)** Linéariser $f$.

**2°)** Donner une primitive de $f$ sur $\mathbb{R}$.

**Réponse :**

**1°)** $\cos^3 x = \cos^2 x\,(\cos x)$. Or, $\cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2}$

D'où, $\cos^3 x = \cos x\left(\frac{1+\cos(2x)}{2}\right)$

$$= \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\cos x\cos 2x$$

Or, $\cos x\cos 2x = \frac{1}{2}(\cos(x+2x) + \cos(x-2x))$

$$= \frac{1}{2}(\cos(3x) + \cos(-x)) = \frac{1}{2}(\cos(3x) + \cos x)$$

$$\cos^3 x = \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(\cos(3x) + \cos x)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{4}(\cos(3x) + \cos x)$$

$$= \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{4}\cos(3x) + \frac{1}{4}\cos x$$

$$\Rightarrow \mathbf{\cos^3 x = \frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{4}\cos(3x)}$$

**2°)** Comme $\forall x \in \mathbb{R}\ \cos^3 x = \frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{4}\cos(3x)$

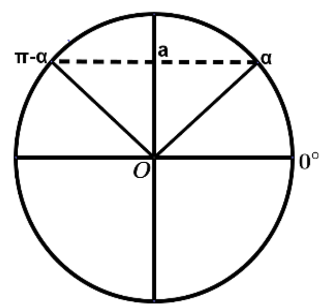
On a donc, $\forall x \in \mathbb{R}$ ; $f(x) = \frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{4}\cos(3x)$

Une primitive de $f$ sur $\mathbb{R}$ est donc ; $\boldsymbol{F(x) = \frac{3}{4}\sin x + \frac{1}{12}\sin(3x) + c}$

## III. Equations et inéquation trigonométriques

### 1°) Type $\sin x = a$, avec $a \in \mathbb{R}$ :

On distingue les cas suivants :




- Si $a < -1$ ou $a > 1$, pas de solution, car, pour tout nombre réel $x$, on a : $-1 \leq \sin x \leq 1$.
- Si $a \in [-1\,;\,1]$, il existe un nombre réel $\alpha$ tel que $\sin\alpha = a$.

C.-à-d. si $a \notin [-1; 1]$, alors l'ensemble des solutions de l'équation $\sin x = a$ est $S = \phi$

Si $a \in [-1; 1]$, alors il existe un réel $\alpha$ tel que $\sin\alpha = a$. On a donc ; $\sin x = a \Leftrightarrow \sin x = \sin\alpha$

$\Leftrightarrow x \equiv \alpha [2\pi] ou x \equiv \pi - \alpha \ [2\pi]$, c'est-à-dire

$$\begin{cases} x = \alpha + 2k\pi \quad ; \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ ou \\ x = \pi - \alpha + 2k\pi \ ; \ (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

**Exercice 1 :**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :

$$\mathbf{1°)}\ \sqrt{3}\sin x = \frac{3}{2}, \qquad \mathbf{2°)}\ 3\sin 2x = 0,$$

$$\mathbf{3)}\ 5\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{\frac{75}{4}}$$

**Solution :**

$\mathbf{1)}\sqrt{3}\sin x = \frac{3}{2} \Longrightarrow \sin x = \frac{3}{2} \div \sqrt{3}$

$$= \frac{3}{2} \times \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Longrightarrow \sin x = \begin{cases} \sin\frac{\pi}{3} + 2k_1\pi \\ \sin\frac{2\pi}{3} + 2k_2\pi \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{S} = \left\{\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{3}} + \mathbf{2}\boldsymbol{k_1\pi} \quad ou\, \frac{\mathbf{2}\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{3}} + \mathbf{2}\boldsymbol{k_2\pi} \ / \ \boldsymbol{k_1, k_2} \in \mathbb{Z}\right\}$$

$\mathbf{2)}\ 3\sin 2x = 0 \Longrightarrow \sin 2x = \sin 0$

$$\Longrightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi \\ ou \\ 2x = (2k+1)\pi \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = \frac{2k\pi}{2} = k\pi \\ ou \\ x = \frac{(2k+1)\pi}{2} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{S} = \left\{\boldsymbol{k_1\pi} \quad ou\, \frac{(\mathbf{2}\boldsymbol{k_2} + \mathbf{1})\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}} \ / \ \boldsymbol{k_1, k_2} \in \mathbb{Z}\right\}$$

$\mathbf{3)}\ 5\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{5\sqrt{3}}{2} \Longrightarrow \sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \Longrightarrow \sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{3}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} 3x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ ou \\ 3x + \frac{\pi}{4} = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 3x = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ ou \\ 3x = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4} + 2k\pi \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} 3x = \frac{\pi}{12} + 2k\pi \\ ou \\ 3x = \frac{5\pi}{12} + 2k\pi \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3} \\ ou \\ x = \frac{5\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3} \end{cases}$$

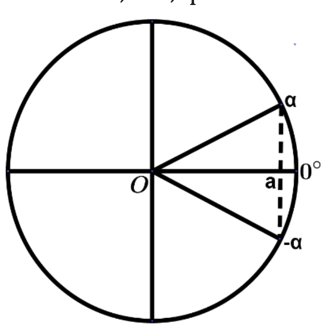
$$\Longrightarrow \boldsymbol{S} = \left\{\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{36}} + \frac{\mathbf{2}\boldsymbol{k_1\pi}}{\mathbf{3}} ou \frac{\mathbf{5}\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{36}} + \frac{\mathbf{2}\boldsymbol{k_2\pi}}{\mathbf{3}} \ / \ \boldsymbol{k_1, k_2} \in \mathbb{Z}\right\}$$

### 2°) Equation type $\cos x = a$, avec $a \in \mathbb{R}$ :

On distingue les cas suivants :

- Si $a < -1$ ou $a > 1$, pas de solution, car, pour tout nombre réel $x$, on a : $-1 \leq \cos x \leq 1$.
- Si $a \in [-1\,;\,1]$, il existe un nombre réel $\alpha$ tel que $\cos\alpha = a$.

C-à-d. si $a \notin [-1; 1]$, alors l'ensemble des solutions de l'équation $\cos x = a$ est $S = \phi$




Si $a \in [-1; 1]$, alors il existe un réel $\alpha$ tel que $\cos\alpha = a$.

On a donc ;$\cos x = a \Leftrightarrow \cos x = \cos\alpha$

$\Leftrightarrow \quad x \equiv \alpha\,[2\pi]\ ou x \equiv -\alpha\,[2\pi]$, c'est-à-dire ;

$$\begin{cases} x = \alpha + 2k\pi \ ; \ (k \in \mathbb{Z}) \\ ou \\ x = -\alpha + 2k\pi\,; \ (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

**Exemple 4 :**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$(\boldsymbol{E_1}) : \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}, (\boldsymbol{E_2}) : \cos x = \frac{1}{2}, (\boldsymbol{E_3}) : \cos x = 3 - \sqrt{2}$

**Réponse :**

$(\boldsymbol{E_1}) : \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad -\frac{\sqrt{3}}{2} \in [-1; 1],$

et $\cos\frac{5\pi}{6} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Donc, $\cos\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Longrightarrow \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x = \frac{5\pi}{6} + 2k_1\pi \\ ou \qquad (k_1, k_2 \in \mathbb{Z}) \\ x = -\frac{5\pi}{6} + 2k_2\pi \end{cases}$$

$(\boldsymbol{E_2}) : \cos x = \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2} \in [-1; 1],$

et $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$. Donc, $\quad \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

$\Longrightarrow \cos x = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + 2k_1\pi \\ ou \qquad (k_1, k_2 \in \mathbb{Z}) \\ x = -\frac{\pi}{3} + 2k_2\pi \end{cases}$$

$(\boldsymbol{E_3}) : \cos x = 3 - \sqrt{2}$

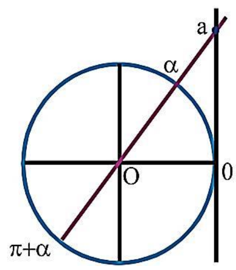
Comme $1 < \sqrt{2} < 2 \Longrightarrow -2 < -\sqrt{2} < -1$

$\Longrightarrow 1 < 3 - \sqrt{2} < 2 \Longrightarrow 3 - \sqrt{2} \notin [-1; 1]$

Donc, l'ensemble des solutions de $(\boldsymbol{E_3})$dans $\mathbb{R}$ est donc $\phi$.

### 3°) Equation type $\tan x = a$:

La fonction tangente prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$, donc pour tout nombre réel $a$, il existe un nombre réel $\alpha$ tel que : $\tan\alpha = a$.




$\tan x = \mathrm{a} \Leftrightarrow \tan x = \tan\alpha$

$\Leftrightarrow x \equiv \alpha [2\pi]\ ou\ x \equiv \pi + \alpha\,[2\pi]$.

C.-à-d. $\begin{cases} x = \alpha + 2k\pi \ ; (k \in \mathbb{Z}) \\ ou \\ x = \pi + \alpha + 2k\pi\,; (k \in \mathbb{Z}) \end{cases} \Leftrightarrow x = \alpha k\pi\ ;\ k \in \mathbb{Z}$.

**Exercice 2 :**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :

$(\boldsymbol{E_1}) : \tan x = \sqrt{3}, \qquad (\boldsymbol{E_2}) : \sqrt{3}\tan x = -1,$

$(\boldsymbol{E_3}) : \tan^2 x - \tan x = 0$

**Solution :**

$(E_1)$ : $\tan x = \sqrt{3}$

$$\Rightarrow \tan x = \tan\frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + 2k_1\pi \\ x = \frac{-2\pi}{3} + 2k_2\pi \end{cases}$$

$(k_1, k_2 \in \mathbb{Z}) \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

$(E_2)$ : $\sqrt{3}\tan x = -1$

$\sqrt{3}\tan x = -1 \Rightarrow \tan x = \frac{-1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \tan x = \tan\left(\frac{-\pi}{6}\right)$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-\pi}{6} + 2k_1\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2k_2\pi \end{cases} (k_1, k_2 \in \mathbb{Z}) \Rightarrow x = \frac{-\pi}{6} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$(E_2)$ : $\tan^2 x - \tan x = 0 \Rightarrow \tan x(\tan x - 1) = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \tan x = 0 \\ ou \\ \tan x - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \tan x = 0 \\ ou \\ \tan x = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tan x = \tan 0 \\ ou \\ \tan x = \tan\frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 + k_1\pi \\ ou \\ x = \frac{\pi}{4} + k_2\pi \end{cases} (k_1, k_2 \in \mathbb{Z})$$

**Exercice 3 :**

Résoudre dans ℝ les équations ;

**1**°) $\tan x = \sqrt{3}$, **2**°) $-2\tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{2}$,

**3**°) $\sqrt{3}\tan\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) = -1$

**Solution :**

$$1°)\ \tan x = \sqrt{3} \Rightarrow \begin{cases} \tan x = \tan\frac{\pi}{3} \\ ou \\ \tan x = \tan\left(-\frac{2\pi}{3}\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + 2k_1\pi \\ ou \\ x = -\frac{2\pi}{3} + 2k_2\pi \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\mathcal{S}} = \left\{\boldsymbol{\frac{\pi}{3} + 2k_1\pi} \ ou \ \boldsymbol{\frac{-2\pi}{3} + 2k_2\pi \,/\, k_1, k_2 \in \mathbb{Z}}\right\}$$

$2°)\ -2\tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{2} \Rightarrow \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{-\sqrt{2}}{2}$

$$\Rightarrow \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \begin{cases} \tan\frac{3\pi}{4} \\ ou \\ \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) \end{cases} \Rightarrow x + \frac{\pi}{3}$$

$$= \begin{cases} \frac{3\pi}{4} + 2k_1\pi \\ ou \\ -\frac{\pi}{4} + 2k_2\pi \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = \begin{cases} \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{3} + 2k_1\pi \\ ou \\ -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} + 2k_2\pi \end{cases} \Rightarrow x = \begin{cases} \frac{5\pi}{12} + 2k_1\pi \\ ou \\ -\frac{7\pi}{12} + 2k_2\pi \end{cases}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{S}} = \left\{\boldsymbol{\frac{5\pi}{12} + 2k_1\pi} \ ou \ \boldsymbol{\frac{-7\pi}{12} + 2k_2\pi \,/\, k_1, k_2 \in \mathbb{Z}}\right\}$$

$3)\sqrt{3}\tan\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) = -1 \Rightarrow \tan\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) = \frac{-1}{\sqrt{3}}$

$$\Rightarrow \tan\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right)$$

$$= \begin{cases} \tan\frac{5\pi}{6} \\ \tan\left(\frac{-\pi}{6}\right) \end{cases} \Rightarrow \frac{\pi}{2} - 3x = \begin{cases} \frac{5\pi}{6} + 2k_1\pi \\ \frac{-\pi}{6} + 2k_2\pi \end{cases} \Rightarrow -3x$$

$$= \begin{cases} \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{2} + 2k_1\pi \\ \frac{-\pi}{6} - \frac{\pi}{2} + 2k_2\pi \end{cases}$$

$$\Rightarrow -3x = \begin{cases} \frac{4\pi}{12} + 2k_1\pi \\ \frac{-8\pi}{12} + 2k_2\pi \end{cases} \Rightarrow x = \begin{cases} \frac{-4\pi}{36} - \frac{2}{3}k_1\pi \\ \frac{8\pi}{36} - \frac{2}{3}k_2\pi \end{cases}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{S}} = \left\{\boldsymbol{\frac{-\pi}{9} - \frac{2}{3}k_1\pi} \ \boldsymbol{ou} \ \boldsymbol{\frac{2\pi}{9} - \frac{2}{3}k_2\pi \,/\, k_1, k_2 \in \mathbb{Z}}\right\}$$

**4°) Equations du type : $acosx + bsinx = c$:**

- Si $a = 0$ ou $b = 0$, on se ramène à une équation du type : $\cos x = k$ ou $\sin x = k'$.
- Si $a \neq 0$ et $b \neq 0$, alors $a^2 + b^2 \neq 0$ et on a :

**Equation de la forme $a\sin x + b\cos x = c(ab \neq 0)$**

$a\cos x + b\sin x = c$

$$\Rightarrow \sqrt{a^2 + b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\sin x\right) = c$$

$$\text{Or, } \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2} = 1$$

D'où, il existe un réel $\alpha$ tel que ;

$$\begin{cases} \cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ et \\ \sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{cases}$$

L'équation devient donc ;

$\sqrt{a^2 + b^2}(\cos\alpha\cos x + \sin\alpha\sin x) = c \Rightarrow$

$\sqrt{a^2 + b^2}\cos(x - \alpha) = c$

$$\Rightarrow \cos(x - \alpha) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

☒ Si $\frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \notin [-1; 1]$c'est − à − dire si ; $|c| > \sqrt{a^2 + b^2}$

Alors l'ensemble des solution de cette équation est $\phi$.

☒ Si $\frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \in [-1; 1]$c'est − à − diresi ; $|c| \leq \sqrt{a^2 + b^2}$

Alors il existe un réel$\beta$ tel que $\cos\beta = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Donc l'équation devient $\cos(x-\alpha)=\cos\beta$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-\alpha=\beta+2k_1\pi \\ x-\alpha=-\beta+2k_2\pi \end{cases} \quad (k_1,k_2\in\mathbb{Z})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=\alpha+\beta+2k_1\pi \\ x=\alpha-\beta+2k_2\pi \end{cases} \quad (k_1,k_2\in\mathbb{Z})$$

**Exemple 5 :**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$(\boldsymbol{E_1})$: $\sqrt{3}\cos x+\sin x=1$ ; $(\boldsymbol{E_2})$: $\cos x+\sin x=\sqrt{3}$

**Réponse :**

$(\boldsymbol{E_1})$ : $\sqrt{3}\cos x+\sin x=1$

$$\Rightarrow 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x+\frac{1}{2}\sin x\right)=1$$

$$\Rightarrow 2\left(\cos\frac{\pi}{6}\cos x+\sin\frac{\pi}{6}\sin x\right)=1$$

$$\Rightarrow 2\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=1$$

$$\Rightarrow \cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}\Rightarrow \cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{3}+2k_1\pi \\ x-\dfrac{\pi}{6}=-\dfrac{\pi}{3}+2k_2\pi \end{cases} \quad (k_1,k_2\in\mathbb{Z})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{3}+2k_1\pi \\ x=\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\pi}{3}+2k_2\pi \end{cases} \quad (k_1,k_2\in\mathbb{Z})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{\pi}{2}+2k_1\pi \\ x=-\dfrac{\pi}{6}+2k_2\pi \end{cases} \quad (k_1,k_2\in\mathbb{Z})$$

$(\boldsymbol{E_2})$ : $\cos x+\sin x=\sqrt{3}$

$$\Rightarrow \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x\right)=\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos x+\sin\frac{\pi}{4}\sin x\right)=\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}},\qquad \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\notin[-1;1]$$

D'où, l'ensemble de solution de $(\boldsymbol{E_2})$dans $\mathbb{R}$ est l'ensemble vide$\phi$.

**5°) Types $\cos^2 x=a$ ;$\sin^2 x=a$ ; $\tan^2 x=a$:**

**Exercice 4 :**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

**1)**$\cos^2 x=1$, **2)** $\sin^2(x+\pi)=3$,

**3)** $9\tan^2\left(\dfrac{3\pi}{4}-5x\right)=3$

**Solution :**

$$\textbf{1)}\ \cos^2 x=1\Rightarrow \cos x=\begin{cases}-1\\ ou\\ 1\end{cases}\Rightarrow \cos x$$

$$=\cos\begin{cases}0+2k_1\pi\\ ou\\ \pi+2k_2\pi\end{cases}$$

$\Rightarrow \cos x=\cos 0+k\pi\Rightarrow x=0+k\pi$

$\mathcal{S}=\{\boldsymbol{0+k\pi}\ \ /\ \boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}\}$

$$\textbf{2)}\ 4\sin^2(x+\pi)=3\Rightarrow \sin^2(x+\pi)=\frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \sin(x+\pi)=\begin{cases}\dfrac{-\sqrt{3}}{2}\\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$$

$$\Rightarrow \sin(x+\pi)=\begin{cases}\sin\left(\dfrac{-\pi}{3}\right)\ ou\ \sin\left(\dfrac{-2\pi}{3}\right)\\ \sin\dfrac{\pi}{3}\ ou\ \sin\dfrac{2\pi}{3}\end{cases}$$

$$\Rightarrow x+\pi=\begin{cases}\dfrac{-\pi}{3}+2k_1\pi\ ou\ \dfrac{-2\pi}{3}+2k_2\pi\\ \dfrac{\pi}{3}+2k_3\pi\ ou\ \dfrac{2\pi}{3}+2k_4\pi\end{cases}$$

$$\Rightarrow x=\begin{cases}\dfrac{2\pi}{3}+2k_1\pi\ ou\ \dfrac{\pi}{3}+2k_2\pi\\ \dfrac{-2\pi}{3}+2k_3\pi\ ou\ \dfrac{-\pi}{3}+2k_4\pi\end{cases}$$

$\mathcal{S}=\left\{\boldsymbol{\frac{\pi}{3}+k_1\pi\ ou\ \frac{-\pi}{3}+k_2\pi\ /\ k_1,k_2}\in\mathbb{Z}\right\}$.

$$\textbf{3)}\ 9\tan^2\left(\frac{3\pi}{4}-5x\right)=3\Rightarrow \tan^2\left(\frac{3\pi}{4}-5x\right)=\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \tan\left(\frac{3\pi}{4}-5x\right)=\begin{cases}\dfrac{-1}{\sqrt{3}}\\ \dfrac{1}{\sqrt{3}}\end{cases}$$

$$\Rightarrow \tan\left(\frac{3\pi}{4}-5x\right)=\tan\begin{cases}\dfrac{-\pi}{6}\\ ou\\ \dfrac{5\pi}{6}\\ ou\\ \dfrac{\pi}{6}\\ ou\\ \dfrac{-5\pi}{6}\end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{3\pi}{4}-5x=\begin{cases}\dfrac{-\pi}{6}+2k_1\pi\\ ou\\ \dfrac{5\pi}{6}+2k_2\pi\\ ou\\ \dfrac{\pi}{6}+2k_3\pi\\ ou\\ \dfrac{-5\pi}{6}+2k_4\pi\end{cases}$$

$$\Rightarrow -5x=\begin{cases}\dfrac{-\pi}{6}-\dfrac{3\pi}{4}+2k_1\pi\\ ou\\ \dfrac{5\pi}{6}-\dfrac{3\pi}{4}+2k_2\pi\\ ou\\ \dfrac{\pi}{6}-\dfrac{3\pi}{4}+2k_3\pi\\ ou\\ \dfrac{-5\pi}{6}-\dfrac{3\pi}{4}+2k_4\pi\end{cases}$$

$$\Longrightarrow -5x=\begin{cases}-\dfrac{11\pi}{12}+2k_1\pi\\ ou\\ \dfrac{\pi}{12}+2k_2\pi\\ ou\\ -\dfrac{7\pi}{12}+2k_3\pi\\ ou\\ -\dfrac{19\pi}{12}+2k_4\pi\end{cases}$$

$$\Longrightarrow \mathcal{S}=\begin{cases}\dfrac{11\pi}{60}-\dfrac{2}{5}k_1\pi\\ ou\\ -\dfrac{\pi}{60}-\dfrac{2}{5}k_2\pi\\ ou\\ \dfrac{7\pi}{60}-\dfrac{2}{5}k_3\pi\\ ou\\ \dfrac{19\pi}{60}-\dfrac{2}{5}k_4\pi\end{cases}\ /\ k_1,k_2,k_3,k_4\in\mathbb{Z}$$

### 6°) Types $a\cos^2 x+b\cos x+c=0$ ; $a\sin^2 x+b\sin x+c=0$, $a\tan^2 x+b\tan x+c=0$ $(a\neq 0)$

**Exercice 5 :**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

**1)** $2\cos^2 x-5\cos x+3=0$

**2)** $\sin^2(x-3\pi)+2\sin(x-3\pi)-4=0$

**3)** $\tan^2\left(\frac{\pi}{3}-\frac{x}{4}\right)+\left(1-\sqrt{3}\right)\tan\left(\frac{\pi}{3}-\frac{x}{4}\right)-\sqrt{3}=0$

**Solution :**

**1)** $2\cos^2 x-5\cos x+3=0$

Procédons à un changement de variable en posant $X=\cos x$, l'équation devient :

$2X^2-5X+3=0$ ; on remarque que :

$a+b+c=2-5+3=0$

$\Longrightarrow X_1=\frac{3}{2}$ $ou$ $X_2=1$, $\quad \cos x=X_1\Longrightarrow \cos x=\frac{3}{2}$

(*Impossible car* $-1\leq \cos x\leq 1$)

$\cos x=X_2\Longrightarrow \cos x=1\Longrightarrow x=0+2k\pi$

$\Longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{S}=\{0+2k\pi/k\in\mathbb{Z}\}}$

**2)** $\sin^2(x-3\pi)+2\sin(x-3\pi)-4=0$

Posons $X=\sin(x-3\pi)$, l'équation devient :

$X^2+2X-4=0\Longrightarrow \Delta=4+16=20$

$\Longrightarrow \sqrt{\Delta}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

$X_1=\dfrac{-2-2\sqrt{5}}{2}=-1-\sqrt{5}$,

$X_2=\dfrac{-2+2\sqrt{5}}{2}=-1+\sqrt{5}$

(*Impossible car* ;$X_1,X_2\notin[-1;1]$)$\Longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{S}=\phi}$

**3)** $\tan^2\left(\frac{\pi}{3}-\frac{x}{4}\right)+\left(1-\sqrt{3}\right)\tan\left(\frac{\pi}{3}-\frac{x}{4}\right)-\sqrt{3}=0$

Posons $X=\tan\left(\frac{\pi}{3}-\frac{x}{4}\right)$, l'équation devient :

$X^2+\left(1-\sqrt{3}\right)X-\sqrt{3}=0$

$\Longrightarrow \Delta=\left(1-\sqrt{3}\right)^2+4\sqrt{3}=4+2\sqrt{3}$

$\Longrightarrow \sqrt{\Delta}=\sqrt{4+2\sqrt{3}}=1+\sqrt{3}$

$$\Longrightarrow\begin{cases}X_1=\dfrac{-1+\sqrt{3}-1-\sqrt{3}}{2}=-1\\ X_2=\dfrac{-1+\sqrt{3}+1+\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}\end{cases}$$

Si $X_1=-1\Longrightarrow \tan\left(\frac{\pi}{3}-\frac{x}{4}\right)=-1$

$$\Longrightarrow \tan\left(\frac{\pi}{3}-\frac{x}{4}\right)=\begin{cases}\tan\left(\dfrac{-\pi}{4}\right)\\ ou\\ \tan\dfrac{3\pi}{4}\end{cases}\Longrightarrow \frac{\pi}{3}-\frac{x}{4}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{-\pi}{4}+2k_1\pi\\ ou\\ \dfrac{3\pi}{4}+2k_2\pi\end{cases}$$

$$\Longrightarrow -\frac{x}{4}=\begin{cases}\dfrac{-\pi}{4}-\dfrac{\pi}{3}+2k_1\pi\\ ou\\ \dfrac{3\pi}{4}-\dfrac{\pi}{3}+2k_2\pi\end{cases}$$

$$\Longrightarrow -\frac{x}{4}=\begin{cases}-\dfrac{7\pi}{12}+2k_1\pi\\ ou\\ \dfrac{5\pi}{12}+2k_2\pi\end{cases}\Longrightarrow x=\begin{cases}\dfrac{28\pi}{3}-8k_1\pi\\ ou\\ -\dfrac{20\pi}{3}-8k_2\pi\end{cases}$$

Si $X_2=\sqrt{3}\Longrightarrow \tan\left(\frac{\pi}{3}-\frac{x}{4}\right)=\sqrt{3}$

$$\Longrightarrow \tan\left(\frac{\pi}{3}-\frac{x}{4}\right)=\begin{cases}\tan\dfrac{\pi}{3}\\ ou\\ \tan\left(\dfrac{-2\pi}{3}\right)\end{cases}\Longrightarrow \frac{\pi}{3}-\frac{x}{4}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{\pi}{3}+2k_3\pi\\ ou\\ \dfrac{-2\pi}{3}+2k_4\pi\end{cases}$$

$$\Longrightarrow -\frac{x}{4}=\begin{cases}\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{3}+2k_3\pi\\ ou\\ \dfrac{-2\pi}{3}-\dfrac{\pi}{3}+2k_4\pi\end{cases}$$

$$\Longrightarrow -\frac{x}{4}=\begin{cases}0+2k_3\pi\\ ou\\ -\pi+2k_4\pi\end{cases}\Longrightarrow x=\begin{cases}0-8k_3\pi\\ ou\\ 4\pi-8k_4\pi\end{cases}$$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{S}}=\begin{cases}\boldsymbol{\dfrac{28\pi}{3}-8k_1\pi}\\ \boldsymbol{ou}\\ \boldsymbol{-\dfrac{20\pi}{3}-8k_2\pi}\\ \boldsymbol{ou}\\ \boldsymbol{0-8k_3\pi}\\ \boldsymbol{ou}\\ \boldsymbol{\pi-8k_4\pi}\end{cases}\ \boldsymbol{/\ k_1,k_2,k_3,k_4\in\mathbb{Z}}$$

## 5. Inéquations trigonométriques

On se limitera aux inéquations simples de type : $\cos x\leq b$ ou $\cos ax\leq b$(ousinou $tan$).

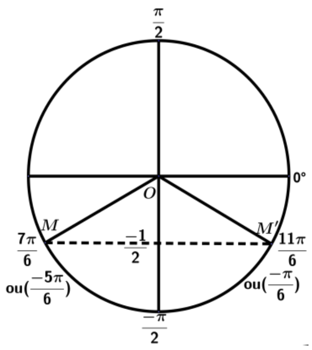
**Exemple 6 :**

Résoudre l'inéquation ( I ) : $\sin x > -\frac{1}{2}$ sur les intervalles suivants :

a) ] -π ; π] , b) [0 ; 2π[, c) ℝ.

**Réponse :**

Soit $M$ et $M'$ deux points du cercle trigonométrique ayant pour ordonnée $-\frac{1}{2}$. Les points images des solutions cherchées sont les points du cercle trigonométrique ayant une ordonnée strictement supérieure à $-\frac{1}{2}$, ils sont donc, les points de l'arc $\overset{\frown}{MM'}$, $M$ et $M'$ étant exclus.




**a)** ] -π ; π], $M$ et $M'$ sont les images respectives de $-\frac{5\pi}{6}$ *et* $-\frac{\pi}{6}$,

**b)** donc l'ensemble des solutions de ( I ) est $]-\pi\,;-\frac{5\pi}{6}] \cup ]-\frac{\pi}{6}\,;\pi]$ .

**c)** dans [0 ; 2π[, M et M' sont les images respectives de $\frac{7\pi}{6}$ *et* $\frac{11\pi}{6}$, donc l'ensemble des solutions de ( I ) est $[0\,;\frac{7\pi}{6}[\,\cup\,]\frac{11\pi}{6}\,;2\pi[$.

**d)** dans ℝ, l'ensemble des solutions de ( I ) est la réunion des intervalles de la forme : $\left]-\frac{\pi}{6}+k2\pi\,;\frac{7\pi}{6}+k2\pi\right[, k \in \mathbb{Z}$.

## A. Applications :

### Formules d'addition :

**Exemple 1 :**

Calcule $cos\frac{5\pi}{12}$ ; $sin\frac{5\pi}{12}$ *et* $\tan\frac{5\pi}{12}$, en remarquant que $\frac{5\pi}{12} = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$.

**Réponse :**

■ $\cos\frac{5\pi}{12} = \cos\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)$

$= \cos\frac{2\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{2\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}$

$= -\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)$

■ $\sin\frac{5\pi}{12} = \sin\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)$

$= \sin\frac{2\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} - \cos\frac{2\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}$

$\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{(-1)}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{\mathbf{2}}}{\mathbf{4}}(\sqrt{\mathbf{3}}+\mathbf{1})$

■ $\tan\frac{5\pi}{12} = \frac{\sin\frac{5\pi}{12}}{\cos\frac{5\pi}{12}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)}{\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = 2+\sqrt{3}$

**Exemple 2 :**

**1)** Démontrer que ; $2\sin a\cos b = \sin(a+b) + \sin(a-b)$, tels que $a$ et $b$ des réels quelconques.

**2)** En déduire que :

$A = 2\sin\frac{\pi}{7}\left(\cos\frac{\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} + \cos\frac{5\pi}{7}\right) = \sin\frac{6\pi}{7}$.

**3)** Démontrer que : $\cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} = \frac{1}{2}$.

**Réponse :**

**1°)** D'après les formules d'addition on a :

$\sin(a+b) = \sin a\cos b + \sin b\cos a$ ;

$\sin(a-b) = \sin a\cos b - \sin b\cos a$.

En additionnant ces deux égalités, on obtient :

$\sin(a+b) + \sin(a-b) = 2\sin a\cos b$

**2°)** On pose : $A = 2\sin\frac{\pi}{7}\left(\cos\frac{\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} + \cos\frac{5\pi}{7}\right)$.

$A = 2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7} + 2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7} + 2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{5\pi}{7}$,

En appliquant le résultat précèdent, on obtient :

$A = \sin\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7} - \sin\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{6\pi}{7} - \sin\frac{4\pi}{7}$

$= \sin\frac{6\pi}{7}$.

**3)** On a : $-\cos\frac{2\pi}{7} = -\cos\left(\pi - \frac{5\pi}{7}\right) = \cos\frac{5\pi}{7}$ ;

Donc : $\cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7}$

$= \cos\frac{\pi}{7} + \cos\frac{5\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} = \frac{\sin\frac{6\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}} = \frac{\sin\left(\pi - \frac{\pi}{7}\right)}{2\sin\frac{\pi}{7}}$.

Or, $\sin\left(\pi - \frac{\pi}{7}\right) = \sin\frac{\pi}{7}$.

Donc, $\cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} = \frac{1}{2}$

### Formules de duplication et linéarisation :

**Exemple 3 :**

En utilisant les formules de linéarisation, calculer $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

**Réponse :**

- $\cos^2\frac{\pi}{12} = \frac{1+cos\frac{\pi}{6}}{2} = \frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{4+2\sqrt{3}}{8} = \frac{(\sqrt{3}+1)^2}{8}$ ;
- $\sin^2\frac{\pi}{12} = \frac{1-cos\frac{\pi}{6}}{2} = \frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{4-2\sqrt{3}}{8} = \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{8}$ ;
- de plus, l'image de $\frac{\pi}{12}$ sur ( C) nous indique que $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$ sont des nombres réels positifs.

Donc : $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$ et $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$ .

## Résolution des équations trigonométriques :

### Exemple 4 :

Résoudre dans ℝ l'équation (E) : $cos2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

**Réponse :**

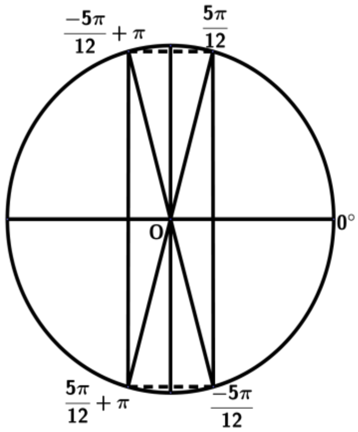
( E ) ⇔ cos2x = cos$\frac{5\pi}{6}$ ⇔ $\begin{cases} 2x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \ ; \ k \in \mathbb{Z} \\ 2x = -\frac{5\pi}{6} + k2\pi \ ; \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

Les solutions de l'équation (E) sont les nombres réels x de la forme :

x = $\frac{5\pi}{12} + k\pi \ ; \ k \in \mathbb{Z}$ ou

x = $-\frac{5\pi}{12} + k\pi \ ; \ k \in \mathbb{Z}$.

Les images des solutions sont les sommets d'un rectangle inscrit dans le cercle trigonométrique.




### Exemple 5 :

Résoudre dans ℝ l'équation (E) : sin(x - $\frac{\pi}{4}$) = $\frac{1}{2}$.

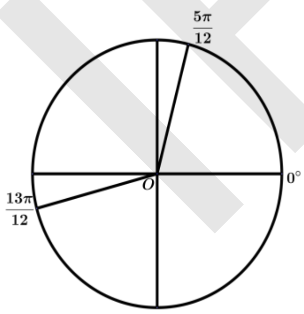
**Réponse :**

(E) ⇔sin(x - $\frac{\pi}{4}$) = sin$\frac{\pi}{6}$ ⇔

$\begin{cases} x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{6} + k2\pi \quad ; \ k \in \mathbb{Z} \\ x - \frac{\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{6} + k2\pi \ ; \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

Les solutions de l'équation (E) sont les nombres réels x de la forme :

$\begin{cases} x = \frac{5\pi}{12} + k2\pi \ ; \ k \in \mathbf{Z} \\ \quad ou \\ x = \frac{13\pi}{12} + k2\pi \ ; \ k \in \mathbf{Z}. \end{cases}$ ou




### Exemple 6 :

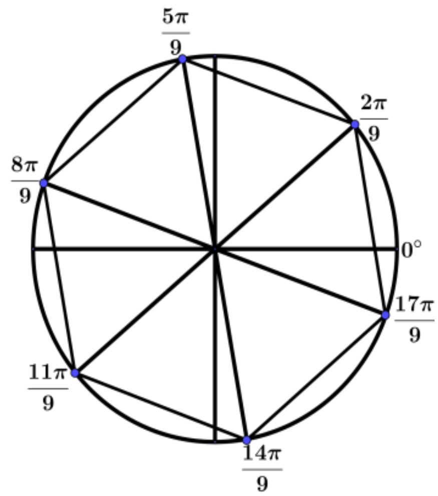
Résoudre dans ℝ l'équation (E) : tan3x = -$\sqrt{3}$.

**Réponse :**

( E ) ⇔tan3x = tan$\frac{2\pi}{3}$ ⇔3x = $\frac{2\pi}{3}$ + kπ ; k ∈ℤ.

Les solutions de l'équation (E) sont les nombres réels x de la forme : x = $\frac{2\pi}{9} + k\frac{\pi}{3} \ ; \ k \in \mathbb{Z}$

Les images des solutions sont les sommets d'un hexagone régulier inscrit dans le cercle trigonométrique.




### Exemple 7 :

Résoudre dansℝ les équations :

a)( E ) : $\frac{1}{2}$cosx - $\frac{\sqrt{3}}{2}$sinx = $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ;

b) ( H ) : $\sqrt{2}$ (cosx + sinx) = -1.

**Réponse :**

a) Dans l'équation ( E ), on remarque que $\frac{1}{2}$ et - $\frac{\sqrt{3}}{2}$ sont respectivement égaux à cos($\frac{-\pi}{3}$) et sin($\frac{-\pi}{3}$).

Donc : ( E ) ⇔ cos($\frac{-\pi}{3}$)cosx + sin($\frac{-\pi}{3}$)sinx = $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ⇔ cos($\frac{-\pi}{3}$- x) = cos$\frac{\pi}{4}$

$\begin{cases} \frac{-\pi}{3} - x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \ ; \ k \in Z \\ \frac{-\pi}{3} - x = \frac{-\pi}{4} + k2\pi \ ; \ k \in Z \end{cases}$ ⇔Les solutions de ( E ) sont les nombres réels x de la forme :

$x = -\frac{7\pi}{12}$+ k2π , k ∈ℤ ou x = $-\frac{\pi}{12}$+ k2π , k ∈ℤ.

b) Pour l'équation (H), il suffit de diviser les deux membres de l'équation par 2.

On a : ( H ) ⇔ $\frac{\sqrt{2}}{2}$cosx + $\frac{\sqrt{2}}{2}$sinx = -$\frac{1}{2}$

⇔cos($\frac{\pi}{4}$- x) = cos$\frac{2\pi}{3}$,⇔ $\begin{cases} \frac{\pi}{4} - x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \ ; \ k \in Z \\ \frac{\pi}{4} - x = \frac{-2\pi}{3} + k2\pi \ ; \ k \in Z \end{cases}$

⇔x ≡ $-\frac{5\pi}{12}$ [2π] ou x ≡ $\frac{11\pi}{12}$ [2π].

Les solutions de ( H ) sont les réels x tels que:

x = $-\frac{5\pi}{12}$ + k2π, k ∈ℤ ou x = $\frac{11\pi}{12}$ + k2π , k ∈ℤ.

## B. EXERCICES DIVERS

**1.** Calculer le sinus, le cosinus et la tangente de chacun des nombres réels suivants :

$$\frac{-5\pi}{2}\ ;\ -\frac{121\pi}{6}\ ;\ -\frac{1999\pi}{6}\ ;\ \frac{29\pi}{4}.$$

**2.** Démontrer que, pour tout nombre réel α, on a :

a) $\cos\alpha + \cos(\alpha + \frac{2\pi}{3}) + \cos(\alpha + \frac{4\pi}{3}) = 0$;

b) $-\sin\alpha + \sin(\alpha + \frac{2\pi}{3}) + \sin(\alpha + \frac{4\pi}{3}) = 0$;

**3.** Calculer en fonction de cosx et sinx, les expressions suivantes :

$A = \cos(\pi + x) + \cos(\pi - x) + \cos(-x)$ ;

$B = \sin(\pi + x) + \sin(\pi - x) + \sin(-x)$ ;

$C = \sin(\frac{\pi}{2} - x) + \text{cosn}(\frac{3\pi}{2} - x) + \cos(x - \frac{\pi}{2}) + \cos(x - \frac{3\pi}{2})$;

$D = \sin(\frac{\pi}{2} + x) + 2\sin(x + \frac{3\pi}{2}) + \sin(x + \frac{5\pi}{2})$.

**4.** Démontrer que pour tout nombre réel x :

$\sin x = \sin(\frac{\pi}{3} + x) - \sin(\frac{\pi}{3} - x)$ ;

$\cos x = \cos(\frac{\pi}{3} + x) + \cos(\frac{\pi}{3} - x)$ ;

**5.** En remarquant que: $\frac{\pi}{4} = 2 \times \frac{\pi}{8}$, démontrer que :

$\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ *et* $\sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

En remarquant que : $\frac{3\pi}{8} = \frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{8}$, calculer

$\cos\frac{3\pi}{8}$ *et* $\sin\frac{3\pi}{8}$.

**6.** 1) Ecrire cos3x en fonction de cosx, sin3x en fonction de sinx.

2) en déduire que : $\tan 3x = \tan x\frac{3-\tan^2 x}{1-3\tan^2 x}$.

**7.** 1) Calculer :

$A = \cos\frac{\pi}{12}\cos\frac{5\pi}{12} + \sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{5\pi}{12}$;

$B = \frac{\pi}{12}\cos\frac{5\pi}{12} - \sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{5\pi}{12}$.

2) En déduire que : $\sin\frac{\pi}{12}\sin\frac{5\pi}{12} = \cos\frac{\pi}{12}\cos\frac{5\pi}{12} = \frac{1}{4}$

**8.** En remarquant que l'on a : $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$,

Calculer $\cos\frac{\pi}{12}$ ; $\sin\frac{\pi}{12}$ *et* $\tan\frac{\pi}{12}$ .

**9.** Démontrer que, pour tous réels a, b et c, on a :

1) $\sin a\sin(b-c) + \sin b\sin(c-a) + \sin c\sin(a-b) = 0$

2) $\cos a\sin(b-c) + \cos b\sin(c-a) + \cos c\sin(a-b) = 0$

3) $\cos(a + b)\cos(a - b) = \cos^2 a - \sin^2 b$.

**10.** Démontrer que :

$$16\sin\frac{\pi}{9}\sin\frac{2\pi}{9}\sin\frac{3\pi}{9}\sin\frac{4\pi}{24} = 3$$

$$16\cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{3\pi}{9}\cos\frac{4\pi}{24} = 1$$

**11.** Résoudre les équations suivantes et représenter les images de leurs solutions sur le cercle trigonométrique.

$\sin(3x + \frac{\pi}{3}) = \sin(\frac{2\pi}{3} - x)$; $\sin 3x = \cos(x - \frac{\pi}{6})$;

c) $\sin(-x + \frac{3\pi}{2}) + \sin(2x + \frac{\pi}{3}) = 0$ ;

**12.** 1) Quels sont les réels x de [0 ; 2π[ vérifiant $\cos x = \frac{1}{2}$ ?

2) Même question pour x de]-π ; π ].

3) Quels sont les réels $x$ vérifiant $\cos x = \frac{1}{2}$ ?

**13.** 1) Quels sont les réels $x$ de [0 ; 2π[ vérifiant $\sin x = -\frac{1}{2}$ ?

2) Même question pour x de]-π ; π ].

**14.** Résoudre dans ℝ les équations suivantes et représenter les images de leurs solutions sur le cercle trigonométrique.

$3\cos x - \sqrt{3}\sin x + \sqrt{6} = 0$ ; $\cos 2x - \sin 2x = -1$;

$4\sin^2 x - 3 = 0$ ; $2\cos^2 x + \sqrt{3}\cos x - 3 = 0$ ;

**15.** Dans chacun des cas suivants, représenter les réels x qui satisfont les conditions proposées.

1) $\sin x \geq 0$ ; 2) $\cos x \geq 0$ ; 3) $\sin x \leq \frac{1}{3}$ ;

4) $\cos x < \frac{1}{4}$; 5) $\begin{cases} \sin x \geq \frac{1}{2} \\ \sin x \leq 0 \end{cases}$ ; 6) sinxcosx

**16.** Résoudre dans $D$ les équations suivantes :

1) $\tan(x + \frac{\pi}{4}) - \tan(2x + \frac{\pi}{8}) = 0$ ; D = ℝ ;

2) $3\tan^2 x - 1 = 0$ ; D = [-π ; π [ ;

3) $\tan^2 x + (1 + \sqrt{3})\tan x + \sqrt{3} = 0$ ; D = [0 ; 2π [.

**17.** 1) Résoudre dans ℝ l'équation ( E ) :

$\cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x = -1$.

2) Représenter ses solutions sur le cercle trigonométrique.

3) Donner les solutions de ( E ) appartenant à l'intervalle $]-\frac{3\pi}{2} ; 2\pi[$.

**18.** Résoudre dans ℝ l'équation ( E ) :

$\tan 2x + \tan(x - \frac{3\pi}{4}) = 0$

**19.** Résoudre dans $\left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right]$ l'inéquation

$$\sin 3x + 1 - \cos 2x - \sin x > 0$$

**20.** **1°)** Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$ ;

$\cos 5x = \cos x(16\cos^4 x - 20\cos^2 x + 5)$

Et $1 - \cos 5x = (1 - \cos x)(4\cos^2 x + 2\cos x - 1)^2$

**2°) a.** En déduire que $\cos\frac{2\pi}{5}$ est une solution de l'équation ; $4x^2 + 2x - 1 = 0$

**b.** Calculer $\cos\frac{2\pi}{5}$ ; $\cos\frac{\pi}{5}$ ; $\cos\frac{\pi}{30}$.

CHAPITRE 08

# Produit scalaire

## Cours

## Produit scalaire

### I. Les différentes expressions du produit scalaire dans le plan

**1) Expression à l'aide des normes et du cosinus de l'angle géométrique de deux vecteurs**

**Définition 1**

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs dans le plan ou dans l'espace.

On appelle produit scalaire de$\vec{u}$par $\vec{v}$, le nombre réel défini par ;

- $\boldsymbol{\vec{u}.\vec{v} = 0}$ **si** $\boldsymbol{\vec{u} = \vec{0}}$ **ou** $\boldsymbol{\vec{v} = \vec{0}}$ **;**
- $\boldsymbol{\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u};\ \vec{v})}$ **si** $\boldsymbol{\vec{u} \neq \vec{0}}$**et** $\boldsymbol{\vec{v} \neq \vec{0}}$**.**

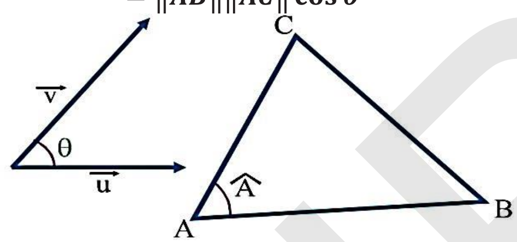
**Remarque**

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls, et soient $A$, $B$ et $C$ trois points du plan $\mathcal{P}$ tels que ;

$$\overrightarrow{AB} = \vec{u}, \qquad \overrightarrow{AC} = \vec{v}, \qquad (\vec{u}, \vec{v}) = \theta$$

On a le produit scalaire des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le nombre réel défini par :

$$\boldsymbol{\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}$$
$$\boldsymbol{= \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times \cos \widehat{BAC}}$$
$$\boldsymbol{= \|\overrightarrow{AB}\|\|\overrightarrow{AC}\| \cos \theta}$$




**2) Expression analytique dans un repère orthonormé du plan**

| Dans le plan |
| --- |
| Si : $\vec{u}\binom{x}{y}$ ; $\vec{v}\binom{x'}{y'}$ dans un *repère orthonormé* $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ ; alors ; $\vec{u}.\vec{v} = x.x' + y.y'$ |

**Remarque**

$\vec{u}.\vec{v}$se lit " $\vec{u}$scalaire$\vec{v}$"

**Cas particuliers**

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls du plan ou de l'espace ;

**1°** Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, il y a deux cas de figure ;

⍰ $\alpha = (\vec{u}, \vec{v}) = 0 \Longrightarrow$ $\vec{u}$ et $\vec{v}$ont même sens$\Longrightarrow \vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|$

Ou ;

⍰ $\alpha = (\vec{u}, \vec{v}) = \pi \Longrightarrow \vec{u}$ et $\vec{v}$ont sens contraires$\Longrightarrow \vec{u}.\vec{v} = -\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|$

**2°** Si $\vec{u} = \vec{0}$ou $\vec{v} = \vec{0}$, alors ; $\vec{u}.\vec{v} = 0$

**3°** *Si* $\vec{u} \perp \vec{v}$, alors ; $\alpha = (\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{\pi}{2} \Longrightarrow \vec{u}.\vec{v} = 0$.

**Conclusion :** $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v} = 0$

**Carré scalaire**

Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan ou de l'espace.

Le réel$\vec{u}.\vec{u}$ s'appelle le carré scalaire de $\vec{u}$ et se note $\vec{u}^2$

On a ;$\vec{u}^2 = \vec{u}.\vec{u} = \|\vec{u}\|^2$.

En particulier, pour tous points $A$ et $B$ du plan $\mathcal{P}$

$$\overrightarrow{AB}^2 = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB} = \|\overrightarrow{AB}\|^2 = AB^2$$

**Propriétés du produit scalaire**

Pour tout vecteur$\vec{u}$ dans le plan ou dans l'espace ;

▶$\vec{u}.\vec{0} = \vec{0}.\vec{u} = 0$.

▶Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans le plan ou dans l'espace ;

- $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$
- $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$
- $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v} = 0$

▶Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$du plan ou dans l'espace et tout nombres réels $k, \alpha, \beta$ ;

- $\vec{u}.(k\vec{v}) = (k\vec{u}).\vec{v} = k(\vec{u}.\vec{v})$
- $(\alpha\vec{u}).(\beta\vec{v}) = (\alpha\beta)(\vec{u}.\vec{v})$
- $\vec{u}.(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$
- $\vec{u}.(\alpha\vec{v} + \beta\vec{v}) = \alpha(\vec{u}.\vec{v}) + \beta(\vec{u}.\vec{v}) = (\alpha + \beta)(\vec{u}.\vec{v})$
- $\vec{u}.(\alpha\vec{v} + \beta\vec{w}) = \alpha(\vec{u}.\vec{v}) + \beta(\vec{u}.\vec{w})$
- $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$
- $(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$
- $(\vec{u} + \vec{v})(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2 = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$
- $(\alpha\vec{u})^2 = \alpha^2\|\vec{u}\|^2$
- $(-\vec{u})^2 = \vec{u}^2$

**Produit scalaire et norme**

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans le plan ou dans l'espace ;

$$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$$

**Conséquence sur le parallélogramme**

Soit $ABCD$ un parallélogramme du plan ou de l'espace ; $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

Si on pose ; $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$, on a ;

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\|^2 - \|\overrightarrow{AB}\|^2 - \|\overrightarrow{AD}\|^2\right)$$

$$\boldsymbol{\Longrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{AC}\|^2 - \|\overrightarrow{AB}\|^2 - \|\overrightarrow{AD}\|^2\right)}$$

**b) Expression avec des projetés orthogonaux**

En remplaçant l'un des vecteurs de $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ par son projeté orthogonal sur la droite portant l'autre,

Alors$\vec{u}.\vec{v}$est conservé.

- $\vec{u}.\vec{v} = \vec{u}.\overrightarrow{v'}$(avec$\overrightarrow{v'}$ le projeté orthogonal de $\vec{v}$sur la droite portant$\vec{u}$),
- $\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{u'}.\vec{v}$(avec$\overrightarrow{u'}$projeté orthogonal de $\vec{u}$sur la droite portant$\vec{v}$),

**Définition 2**

On appelle produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et on note $\vec{u}.\vec{v}$, le nombre réel ;$\boldsymbol{\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC'}}$

Où ; $\overrightarrow{AB}=\vec{u},\overrightarrow{AC}=\vec{v}$ et $C'$ est le projeté orthogonal de $C$ sur $(AB)$.

**Conséquence pratique**

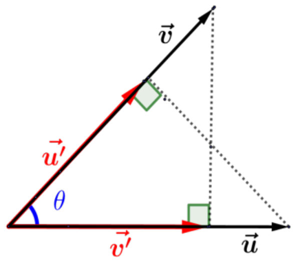
Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul et $\vec{v}$ un vecteur.

En posant $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=AC$.

En notant $C'$ le projeté orthogonal de $C$ sur $(AB)$. On a ; $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC'}$.

Par conséquent ;

- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB\times AC$ si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC'}$ sont de même sens.
- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-AB\times AC$ si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC'}$ sont de sens contraires
- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0$ si $C'=A$ ($\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AC}$ *sont orthogonaux*).

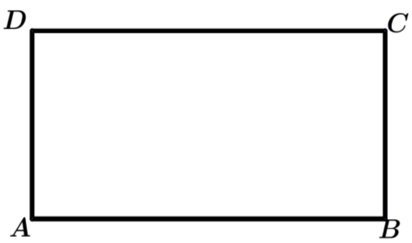



**Exemple**

$ABCD$ un rectangle dans le plan ou dans l'espace.

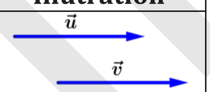
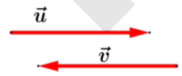
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}^2$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{AB}^2$




## III- Vecteurs colinéaires

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls dans le plan ou dans l'espace ;

| On a | Ssi | Illutration |
|---|---|---|
| **$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de même sens** | $\vec{u}.\vec{v}=\Vert u\Vert\Vert\vec{v}\Vert$ |  |
| **$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de sens contraires** | $\vec{u}.\vec{v}=-\Vert\vec{u}\Vert\Vert\vec{v}\Vert$ |  |
| **$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires** | $\Vert\vec{u}.\vec{v}\Vert=\Vert\vec{u}\Vert.\Vert\vec{v}\Vert$ | |

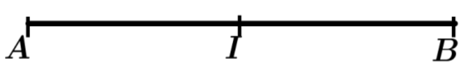
**Exemple**

$[AB]$ un segment de milieu $I$,

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AI}=\Vert\overrightarrow{AB}\Vert.\Vert\overrightarrow{AI}\Vert=AB\times AI=\dfrac{1}{2}AB^2=2AI^2$

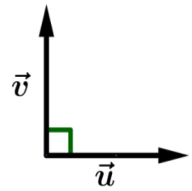
$\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB}=-\Vert\overrightarrow{IA}\Vert.\Vert\overrightarrow{IB}\Vert=-IA\times IB$

$=-IA^2=-IB^2=-\dfrac{AB^2}{4}$

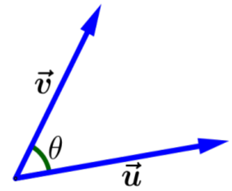
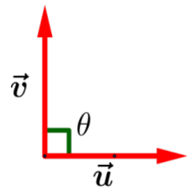
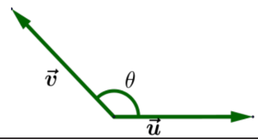



## IV- Vecteurs orthogonaux

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls dans le plan ou dans l'espace, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si, et seulement si $\vec{u}.\vec{v}=0$.




**En plus**

| On a | Ssi | Illutration |
|---|---|---|
| $\vec{u}.\vec{v}>0$ | **$\theta$ est aigu, $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$** |  |
| $\vec{u}.\vec{v}=0$ | **$\theta$ est droit, $\theta=\frac{\pi}{2}$** |  |
| $\vec{u}.\vec{v}<0$ | **$\theta$ est obtus, $\theta\in\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$** |  |

- Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs dans le plan ou dans l'espace

$$\vec{u}.\vec{v}=0\Leftrightarrow\begin{cases}\vec{u}=\vec{0}\\ ou\\ \vec{v}=\vec{0}\\ ou\\ \vec{u}\text{ et }\vec{v}\text{ sont orthogonaux}\end{cases}$$

## IV- Des applications analytiques

Dans cette partie, le plan est rapporté au repère othonormal$(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ , (l'espace est rapporté au repère orthonormal$(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$).

**1) Droite définie par l'un de ses points et l'un de ses vecteurs normaux dans le plan**

$(d)$est la droite passant par le point $A$ et de vecteur normal $\vec{n}(\vec{n}\neq\vec{0})\Leftrightarrow d=\{M\in\mathcal{P}/\overrightarrow{AM}.\vec{n}=\vec{0}\}$

$(d)$estla droite de vecteur normal $\vec{n}\binom{a}{b}(\vec{n}\neq\vec{0})\Leftrightarrow$ $(d)$ a une équation cartésienne de la forme : $ax+by+c=0$ ; avecc $\in\mathbb{R}$

$(d_1)$droite de vecteur normal $\vec{n}_1$

$(d_2)$droite de vecteur normal $\vec{n}_2$

$(d_1)\,/\!/\,(d_2)\Leftrightarrow\vec{n}_1$ est colinéaire à$\vec{n}_2$.

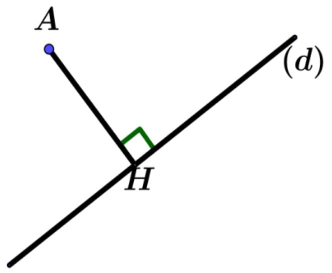
$(d_1)\perp(d_2)\Leftrightarrow\vec{n}_1.\vec{n}_2=0$.

**2) Distance d'un point à une droite dans un repère orthonormé du plan**

Dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. si, $(d)$ est une droite dont l'équation cartésienne est :$(d)$: $ax+by+c=0$. $\Omega$ un point de coordonnées A$(x_0\,,y_0)$, alors, la distance de A à (d) est $AH$, où $H$ est le projeté orthogonal de A sur (d).

Cette distance est donnée par la relation :

$$\mathcal{D}(\mathrm{A};\ d) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$




**Démonstration**

La distance de A à $(d)$ est notée ; $\mathcal{D}(\mathrm{A};\ d) = AH$

Le vecteur $\overrightarrow{AH}$ est colinéaire à $\vec{n}$.Donc il existe un réel $k$ tel que ; $\overrightarrow{AH} = k.\vec{n}$

$$d = \{M(x,y)\ /\ ax + by + c = 0\}$$
$$= \{M(x,y)\ /\ \overrightarrow{OM}.\vec{n} + c = 0\}$$

$$H \in (d) \Rightarrow \overrightarrow{OH}.\vec{n} + c = 0 \Rightarrow (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AH}).\vec{n} + c = 0$$
$$\Rightarrow (\overrightarrow{OA} + k\vec{n}).\vec{n} + c = 0 \Rightarrow \overrightarrow{OA}.\vec{n} + k\vec{n}^2 + c = 0$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{OA}.\vec{n} + k\vec{n}^2 + c = 0 \Rightarrow k\vec{n}^2 = -\overrightarrow{OA}.\vec{n} - c$$
$$\Rightarrow k = \frac{-\overrightarrow{OA}.\vec{n} - c}{\|\vec{n}\|^2}$$
$$\overrightarrow{AH} = k\vec{n} \Rightarrow \overrightarrow{AH} = \frac{-\overrightarrow{OA}.\vec{n} - c}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} \Rightarrow \|\overrightarrow{AH}\|$$
$$= \left\|\frac{-\overrightarrow{OA}.\vec{n} - c}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}\right\| = \frac{|-\overrightarrow{OA}.\vec{n} - c|}{\|\vec{n}\|^2}\|\vec{n}\|$$
$$\Rightarrow \|\overrightarrow{AH}\| = \mathrm{AH} = \frac{|\overrightarrow{OA}.\vec{n} + c|}{\|\vec{n}\|} \Rightarrow \boldsymbol{AH}$$
$$= \frac{|\boldsymbol{ax_0 + by_0 + c}|}{\sqrt{\boldsymbol{a^2 + b^2}}}$$

## Application

Dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$, on donne la droite $(\Delta)$ d'équation ;
$(\Delta) : 5x - 4y + 7 = 0$et le point $A(-3, 2\ )$

$$\boldsymbol{\mathcal{D}(\Delta;\ A)} = \frac{|\mathbf{5 \times -3 - 4 \times 2 + 7}|}{\sqrt{\mathbf{5^2 + (-4)^2}}} = \frac{\mathbf{16}}{\sqrt{\mathbf{41}}}$$

**3) Représentation paramétrique d'un cercle dans le plan**

Soit $\mathcal{C}_1$ un cercle de centre $O$ et de rayon $(R > 0)$,
$\mathcal{C}_1$est l'ensemble des points $M(x,y)$ du plan tels que :

$$\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t' \end{cases} \qquad (t \in [0; 2\pi[)$$

Ce système est la représentation paramétrique de $\mathcal{C}_1$

.

Soit $\mathcal{C}_2$un cercle de centre$\Omega(x_0, y_0)$ et de rayon$(R > 0)$.
$\mathcal{C}_2$est l'ensemble des points $M(x,y)$ dans le plan tels que :

$$\begin{cases} x = x_0 + R\cos t \\ y = y_0 + R\sin t' \end{cases} \qquad (t \in [0; 2\pi[)$$

Ce système est la représentation paramétrique de $\mathcal{C}_2$

.

**Le produit scalaire en géométrie analytique dans le plan**

**Définition**

Soit $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ une base orthonormée du plan vectoriel $\mathcal{V}$, et soit $\vec{u}_1\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ et $\vec{u}_2\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ deux vecteurs, alors le produit scalaire de $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ est le réel : $\vec{u}_1.\vec{u}_2 = x_1x_2 + y_1y_2$

**Remarque**

On dit que deux vecteurs sont orthogonaux ; si, et seulement si, leur produit scalaire est nul.
Dans le plan : $\vec{u}_1 \perp \vec{u}_2 \Leftrightarrow x_1x_2 + y_1y_2 = 0$.
Dans l'espace : $\vec{u}_1 \perp \vec{u}_2 \Leftrightarrow x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0$.

**Vecteur normal à une droite dans le plan.**

Soit $D$ une droite du plan et soit $\vec{u}$ un vecteur directeur de $D$. Un vecteur non nul $\overrightarrow{u'}$ est dit normal à $D$ ; si, et seulement si ; $\vec{u}.\overrightarrow{u'} = 0$.

**Remarque**

Dans un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$, si $D$ est une droite d'équation $ax + by + c = 0$, alors un vecteur normal à $D$ est $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

**Droites orthogonales**

Deux droites $D_1$ et $D_2$ de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont orthogonales si $\vec{u}_1.\vec{u}_2 = 0$.

**Droites perpendiculaires**

Deux droites $D_1$ et $D_2$ sont perpendiculaires si elles sont sécantes et orthogonales.

**Droites perpendiculaires à un plan**

Une droite $D$ est perpendiculaire à un plan $\mathcal{P}$ si un vecteur directeur de $D$ est normal à $\mathcal{P}$.

**rque 2**

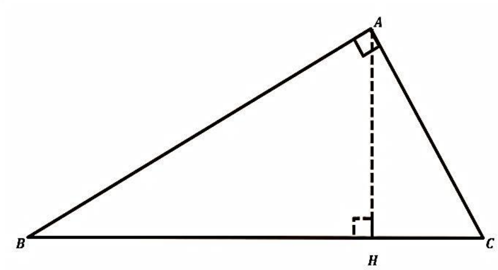
Si un plan $\mathcal{P}$ contient un point $\mathrm{A}(x_0, y_0, z_0)$ et admet $\vec{u}_1\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{pmatrix}$ et $\vec{u}_2\begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \\ \gamma_2 \end{pmatrix}$ pour vecteurs directeurs *($\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ non nuls et non colinéaires)*, $M(x,y,z)$, alors ;

$$M(x,y,z) \in \mathcal{P} \Longrightarrow \overrightarrow{AM} = t_1\vec{u}_1 + t_2\vec{u}_2$$
$$\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} = t_1\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{pmatrix} + t_2\begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} (t_1, t_2 \in \mathbb{R})$$
$$\begin{cases} x - x_0 = t_1\alpha_1 + t_2\alpha_2 \\ y - y_0 = t_1\beta_1 + t_2\beta_2 \\ z - z_0 = t_1\gamma_1 + t_2\gamma_2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{x = x_0 + t_1\alpha_1 + t_2\alpha_2} \\ \boldsymbol{y = y_0 + t_1\beta_1 + t_2\beta_2} \\ \boldsymbol{z = z_0 + t_1\gamma_1 + t_2\gamma_2} \end{cases}$$

Est une représentation paramétrique du plan $\mathcal{P}$

## V- Des relations métriques dans un triangle

**1) Relations caractéristiques du triangle rectangle**



Soit $ABC$ un triangle rectangle en $A$ et soit $H$ le projeté orthogonal de $A$sur $[BC]$,
Le triangle $ABC$ est rectangle en $A$ si, et seulement si l'une des propriétés suivantes est vérifiée :

$a$) $\boldsymbol{AB^2 = \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{BC}}$

$b$) $\boldsymbol{AC^2 = \overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CH}}$

$c$) $\boldsymbol{AH^2 = -\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{HC}}$

**Démonstration**

**a)**Montrons que$AB^2 = \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{BC}$ ; on a :

$$\begin{cases} \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BA} = AB^2 \boxed{1} \\ \quad et \\ \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{BC} \boxed{2} \end{cases}$$ De $\boxed{1}$et $\boxed{2}$ on a ; $\Rightarrow$

$\boldsymbol{AB^2 = \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{BC}}$

**b)** Montrons que $AC^2 = \overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CH}$**.** On a d'une part : $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CH}\boxed{1}$

Et d'autre part : $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CA} = CA^2 = AC^2\boxed{2}$.

De $\boxed{1}$et$\boxed{2}$on a :$\boldsymbol{AC^2 = \overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CH}}$ .

$c$) Montrons que $AH^2 = -\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{HC}$. D'après la propriété $\boldsymbol{a}$), $AB^2 = \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{BC}$,

D'autre part, $AB^2 = AH^2 + HB^2 + 2\underbrace{\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{HB}}_{=0}$

$\Rightarrow AB^2 = AH^2 + HB^2 \Rightarrow AH^2 + HB^2$
$= \overrightarrow{BH}.\left(\overrightarrow{BH} + \overrightarrow{HC}\right)$

$\Rightarrow AH^2 + HB^2 = \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{BH} + \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{HC} \Rightarrow AH^2 + HB^2$
$= HB^2 + \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{HC} \Rightarrow \boldsymbol{AH^2 = -\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{HC}}$

**Application**

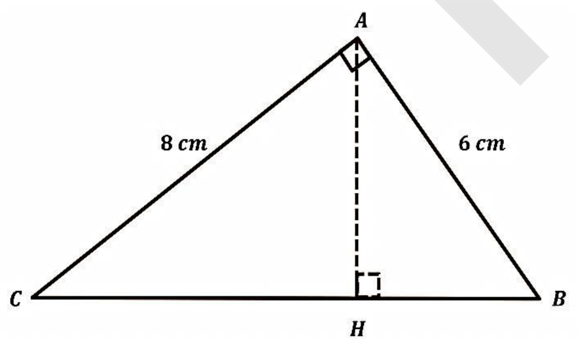
Soit $ABC$ un triangle rectangle en $A$ tel que ;
$AB = 6\ cm$, $AC = 8\ cm$, $H$ est le projeté orthogonal de $A$ sur $(BC)$.

**1°**Calculer $CH$, $BH$ et $AH$ ;

**2°** Calculer $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$ ;

**3°** Que vaut $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ et pourquoi ?

**Solution**




**1°/** Selon le théorème de Pythagore, $BC = 10\ cm$

$AB^2 = \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{BC} \Rightarrow AB^2 = BH.BC$ $(B, C$et$H$ étant alignés) $\Rightarrow 6^2 = BH \times 10 \Rightarrow BH = \frac{36}{10} \Rightarrow$
$\boldsymbol{BH = 3,6}$

$AC^2 = \overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CH} \Rightarrow AC^2 = CB.CH$ $(B, C$et$H$ étant alignés) $\Rightarrow 8^2 = 10 \times CH \Rightarrow CH = \frac{64}{10} \Rightarrow \boldsymbol{CH} =$
$\boldsymbol{6,4}$

$AH^2 = -\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{HC} \Rightarrow AH^2 = -HB.HC = BH.HC$
$(B, C$et$H$ étant alignés)

$\Rightarrow AH^2 = 3,6 \times 6,4 = 23,04 \Rightarrow AH = \sqrt{23,04}$
$\Rightarrow \boldsymbol{AH = 4,8}$

**2°**/$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = \|\overrightarrow{BA}\|.\|\overrightarrow{BC}\| \times \cos\hat{B} = 6 \times 10 \times \cos\hat{B}$

Or, on sait que ;

$$\cos\hat{B} = \frac{c.adjacent}{hypoténuse} = \frac{\overline{AH}}{\overline{BA}} = \frac{3,6}{6} = \frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = 6 \times 10 \times \frac{3}{5} = 60 \times 0,6 = 36$$

**b)** $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = \|\overrightarrow{CA}\|.\|\overrightarrow{CB}\| \times \cos\hat{C} = 8 \times 10 \times \cos\hat{C}$

Or, on sait que ;

$$\cos\hat{C} = \frac{c.adjacent}{hypoténuse} = \frac{\overline{CH}}{\overline{CA}} = \frac{6,4}{8} = \frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = 8 \times 10 \times \frac{4}{5} = 80 \times 0,8 = 64$$

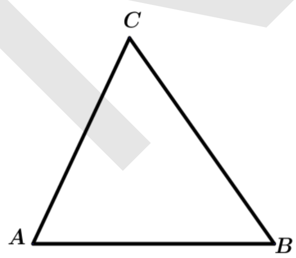
**3°**/ $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\|.\|\overrightarrow{AC}\| \times \cos\hat{A}$
$= 8 \times 10 \times \cos 90° = 80 \times 0 = 0$

**2) Des produits scalaires**

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2}$$

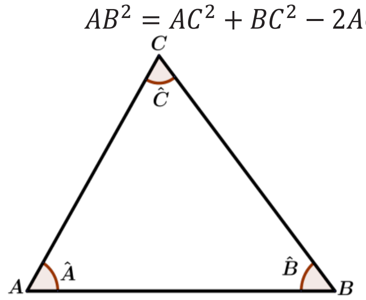
$$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2}$$

$$\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = \frac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2}$$




**3) Relations généralisées de Pythagore ou d'Alkachi**

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC \times \cos\hat{A}$$
$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB.BC \times \cos\hat{B}$$
$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC.BC \times \cos\hat{C}$$

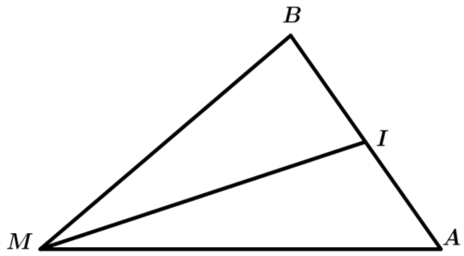



**4) Relations de la médiane**

$[AB]$un segment de milieu$I$, dans le plan (ou dans l'espace).

Pour tout point $M$ dans le plan ou dans l'espace :

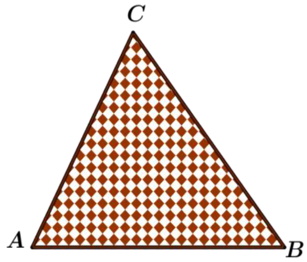
$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}$$
$$MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB}$$
$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4}$$
$$\mathcal{A}ire(MIA) = \mathcal{A}ire(MIB) = \frac{1}{2}(MAB)$$




### 5) Aire d'un triangle

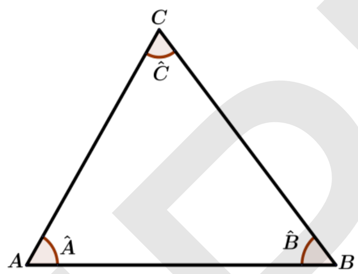
$ABC$ est un triangle :

$$\mathcal{A}ire(ABC) = \frac{1}{2}AB \times AC \times \sin\hat{A}$$
$$= \frac{1}{2}AB \times BC \times \sin\hat{B}$$
$$= \frac{1}{2}AC \times BC \times \sin\hat{C}$$




### 6) Formule des sinus

$$\frac{\sin\hat{A}}{BC} = \frac{\sin\hat{B}}{AC} = \frac{\sin\hat{C}}{AB}$$




### Cocyclicité et produit scalaire

### Puissance d'un point par rapport à un cercle

**Définition**

Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre $O$ et de rayon $R$, $M$ est un point quelconque du plan. On appelle puissance du point $M$ par rapport à $\mathcal{C}$, le nombre réel $OM^2 - R^2$ et on note $\wp(M/\mathcal{C}) = OM^2 - R^2$.

**Remarque**

$\wp(M/\mathcal{C}) = 0$ si et seulement si ; $M \in \mathcal{C}$.

**Propriété**

Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre $O$ et de rayon $R$, et soit $M$ un point quelconque du plan. Une droite $d_1$ passant par $M$ coupe $\mathcal{C}$ en $A$ et $B$. Une droite $d_2$ passant par $M$ coupe $\mathcal{C}$ en $C$ et $D$.

On a ; $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD} = \wp(M/\mathcal{C}) = OM^2 - R^2$.

**Démonstration**

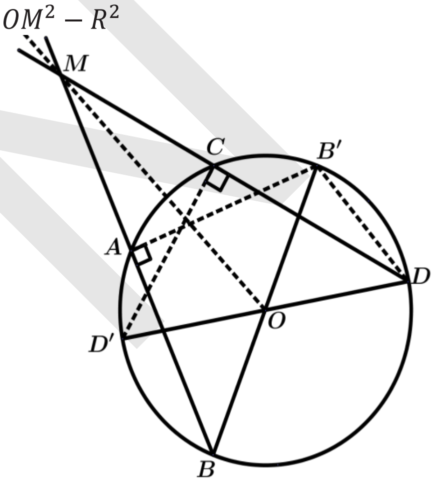
1) On a $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MB'}.\overrightarrow{MB}$ où $B'$ est le point diamétralement opposé à $B$ ($A$ est le projeté orthogonal de $B'$ sur la droite $(MB)$).

$$\Rightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MB'}.\overrightarrow{MB} = \left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB'}\right).\left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB}\right)$$
$$= MO^2 + \overrightarrow{MO}.\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB'}.\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB'}.\overrightarrow{OB}$$
$$= MO^2 + \overrightarrow{MO}.\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{MO}.\overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OB'}.\overrightarrow{OB}$$
$$= MO^2 + \overrightarrow{MO}.\underbrace{\left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB'}\right)}_{=\vec{0}} - OB'.OB$$
$$= MO^2 + \overrightarrow{MO}.\vec{0} - R \times R$$
$$\Rightarrow \boxed{\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MO^2 - R^2}\boxed{1}$$

2) De la même façon, on a $\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MD'}.\overrightarrow{MD}$ où $D'$ est le point diamétralement opposé à $D$ ($C$ est le projeté orthogonal de $D'$ sur la droite $(MD)$).

$$\Rightarrow \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MD'}.\overrightarrow{MD}$$
$$= \left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OD'}\right).\left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OD}\right)$$
$$= MO^2 + \overrightarrow{MO}.\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OD'}.\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OD'}.\overrightarrow{OD}$$
$$= MO^2 + \overrightarrow{MO}.\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{MO}.\overrightarrow{OD'} + \overrightarrow{OD'}.\overrightarrow{OD}$$
$$= MO^2 + \overrightarrow{MO}.\underbrace{\left(\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OD'}\right)}_{=\vec{0}} - OD'.OD$$
$$= MO^2 + \overrightarrow{MO}.\vec{0} - R \times R$$
$$\Rightarrow \boxed{\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD} = MO^2 - R^2}\boxed{2}$$

De $\boxed{1}$ et $\boxed{2}$ on a ; $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD} = \wp(M/\mathcal{C}) = OM^2 - R^2$




### Cocyclicité et produit scalaire

**Propriété**

$(AB)$ et $(CD)$ sont deux droites sécantes en un point $M$. Les points $A$, $B$, $C$ et $D$ sont cocycliques si, et seulement si ; $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD}$.

**Application**

$\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont deux cercles sécants en $A$ et $B$. $M$ est un point de la droite $(AB)$. Deux droites $\Delta$ est $\Delta'$ passant par $M$, l'un coupe le cercle $\mathcal{C}_1$ en $P$ et $Q$, et l'autre $\mathcal{C}_2$ en $P'$ et $Q'$.

Montrer que les points $P, Q, P'$ et $Q'$ sont cocycliques.

**Réponse**

On a d'une part ; $P, Q, A$ et $B$ sont cocycliques, alors ; $\overrightarrow{MP}.\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}\boxed{1}$.

D'autre part ; $A$, $B$, $P'$ et $Q'$ sont cocycliques, alors ; $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MP'}.\overrightarrow{MQ'}\boxed{2}$

De $\boxed{1}$ et $\boxed{2}$, on a ; $\overrightarrow{MP}.\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{MP'}.\overrightarrow{MQ'}$, d'où ; les points $P, Q, P'$ et $Q'$ sont cocycliques.





Math 6AS.indd 105 26/07/2024 10:42:16

## VII- Lignes de niveau dans le plan $\mathcal{P}$

$$f:\ \mathcal{P} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$M \longmapsto f(M)$$ ou

Soit $k$ un réel donné ;

- On désigne par $L_k$ l'ensemble des points $M$ du plan tels que :
  $f(M) = k$ ; $L_k$ est appelé la ligne de niveau $k$ de la fonction $f$.
- On désigne par $S_k$ l'ensemble des points $M$ de l'espace tels que :
  $f(M) = k$ ; $S_k$ est appelé la surface de niveau $k$ de la fonction $f$.

❖ **<u>Des fonctions usuelles</u>**

**1) $f(M) = \Omega M$ avec $\Omega$ un point donné**

| Si | alors |
|---|---|
| $k < 0$ | $L_k = \phi$ et $S_k = \phi$ |
| $k = 0$ | $L_k = \{\Omega\}$ et $S_k = \{\Omega\}$ |
| $k > 0$ | $L_k$ est le cercle de centre $\Omega$ et de rayon $k$. |

**2) $f(M) = \overrightarrow{AM}.\vec{u}$ avec $A$ un point donné et $\vec{u}$ un vecteur donné non nul**

$\forall k \in \mathbb{R}$ ; $L_k$ est une droite de vecteur normal $\vec{u}$ ; $S_k$ est le plan de vecteur normal $\vec{u}$ ;

**En plus**, avec $\vec{u} = BC$, $L_k$ est une droite perpendiculaire à $(BC)$. $S_k$ est le plan orthogonal à $(BC)$.

**3) $f(M) = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$ avec $A$ et $B$ deux points distincts données de milieu $I$.**

| | |
|---|---|
| ● Soit $L_k = \phi$<br>● Soit $L_k = \{I\}$<br>● Soit $L_k$ un cercle de centre $I$ | ● Soit $S_k = \phi$<br>● Soit $S_k = \{I\}$ |

**En plus** : $L_0$ est le cercle de diamètre $[AB]$. $S_0$ est la sphère de diamètre $[AB]$.

**4) $f(M) = \frac{MA}{MB}$ avec $A$ et $B$ deux points distincts données**

| Si | alors |
|---|---|
| $k < 0$ | $L_k = \phi$ et $S_k = \phi$ |
| $k = 0$ | $L_k = \{A\}$ et $S_k = \{A\}$ |
| $k = 1$ | $L_k$ est la médiatrice de $[AB]$. |
| $k \in \mathbb{R}_+^*$ | $L_k$ est le cercle de diamètre $[G_1G_2]$.<br>$S_k$ est la sphère de diamètre $[G_1G_2]$.<br>$G_1 = bar \begin{array}{\|c\|c\|}\hline A & B \\ \hline 1 & k \\ \hline\end{array}$ $G_2 = bar \begin{array}{\|c\|c\|}\hline A & B \\ \hline 1 & -k \\ \hline\end{array}$ |

## VIII- Fonction scalaire de Leibniz

● Soient $A$ et $B$ deux points du plan ou de l'espace, $\alpha$ et $\beta$ deux réels. On appelle **fonction scalaire de Leibniz** associée au système des deux points pondérés ; $S = \{(A,\alpha);\ (B,\beta)\}$, la fonction donnée par la relation : $\varphi(M) = \alpha MA^2 + \beta MB^2$.

● Soient $A, B$ et $C$ trois points du plan ou de l'espace, $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$ trois réels.

On appelle **fonction scalaire de Leibniz** associée au système des trois points pondérés ;

$S = \{(A,\alpha);\ (B,\beta);\ (C,\gamma)\}$, la fonction donnée par la relation : $\varphi(M) = \alpha MA^2 + \beta MB^2 + \gamma MC^2$.

● Soient $A$, $B$, $C$ et $D$ quatre points du plan ou de l'espace, $\alpha, \beta, \gamma$ et $\theta$ quatre réels. On appelle **fonction scalaire de Leibniz** associée au système des quatre points pondérés ; $S = \{(A,\alpha);\ (B,\beta);\ (C,\gamma);\ (D,\theta)\}$, la fonction donnée par la relation : $\varphi(M) = \alpha MA^2 + \beta MB^2 + \gamma MC^2 + \theta MD^2$.

| | | |
|---|---|---|
| La somme des masses du système est différente de zéro et $G$ est le barycentre du système | ● Soit $L_k = \phi$<br>● Soit $L_k = \{G\}$<br>● Soit $L_k$ un cercle de centre $G$ | |
| | | |
| La somme des masses du système est égale à zéro. | $\forall k \in \mathbb{R}$ ;<br>$L_k$ est une droite et $S_k$ est un plan ; chacun de vecteur normal $\vec{u}$ : avec<br>$\vec{u} = \alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB}$ si $\varphi(M) = \alpha\overrightarrow{MA}^2 + \beta\overrightarrow{MB}^2$<br>$\vec{u} = \alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC}$ si $\varphi(M) = \alpha\overrightarrow{MA}^2 + \beta\overrightarrow{MB}^2 + \gamma\overrightarrow{MC}^2$<br>$\vec{u} = \alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} + \theta\overrightarrow{MD}$ si $\varphi(M) = \alpha\overrightarrow{MA}^2 + \beta\overrightarrow{MB}^2 + \gamma\overrightarrow{MC}^2 + \theta\overrightarrow{MD}^2$<br>En plus, avec $I$ un point donné :<br>Pour tout point $M$ :<br>$\boldsymbol{\varphi}(M) = 2\overrightarrow{MI}.\vec{u} + \varphi(I)$ | |

**Fonction scalaire de Leibniz associée à un système de $n$ points pondérés**

**Définition**

Plus généralement, dans le plan ou dans l'espace, soit $S = \{(A_1,\alpha_1), (A_2,\alpha_2), (A_3,\alpha_3), \dots, (A_n,\alpha_n)\}$ un système de $n$ points pondérés, la fonction scalaire de Leibniz associée au système ou à la famille $S = \{(A_i,\alpha_i)_{1\le i\le n}\}$ est l'application $\varphi$ qui à tout point $M$ associe le réel :

$$\varphi(M) = \alpha_1\overrightarrow{MA_1}^2 + \alpha_2\overrightarrow{MA_2}^2 + \dots + \alpha_n\overrightarrow{MA_n}^2$$
$$= \sum_{i=1} \alpha_i MA_i^2$$
$$= \alpha_1\left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA_1}\right)^2 + \alpha_2\left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA_2}\right)^2 + \cdots$$
$$+ \alpha_n\left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA_n}\right)^2$$

$$= \alpha_1\left(\overrightarrow{MG}^2 + \overrightarrow{GA_1}^2 + 2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GA_1}\right)$$
$$+ \alpha_2\left(\overrightarrow{MG}^2 + \overrightarrow{GA_2}^2 + 2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GA_2}\right)$$
$$+ \cdots$$
$$+ \alpha_n\left(\overrightarrow{MG}^2 + \overrightarrow{GA_n}^2 + 2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GA_n}\right)$$
$$= (\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n)\overrightarrow{MG}^2$$
$$+ 2\overrightarrow{MG}.\underbrace{\left(\alpha_1\overrightarrow{GA_1} + \alpha_2\overrightarrow{GA_2} + \cdots + \alpha_n\overrightarrow{GA_n}\right)}_{=0}$$
$$+ \underbrace{\alpha_1\overrightarrow{GA_1}^2 + \alpha_2\overrightarrow{GA_2}^2 + \cdots + \alpha_n\overrightarrow{GA_n}^2}_{=\varphi(G)}$$
$$\Rightarrow \varphi(M) = (\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n)\overrightarrow{MG}^2 + \varphi(G)$$
$$\Rightarrow \boldsymbol{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MG}^2 + \varphi(G)}$$

Si $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = 0$, le système$S$ n'a pas de barycentre. Soit $O$ un point, on a pour tout $M$ ;

$$\varphi(M) = \alpha_1\overrightarrow{MA_1}^2 + \alpha_2\overrightarrow{MA_2}^2 + \cdots + \alpha_n\overrightarrow{MA_n}^2$$
$$= \alpha_1\left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA_1}\right)^2$$
$$+ \alpha_2\left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA_2}\right)^2 + \cdots$$
$$+ \alpha_n\left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA_n}\right)^2$$
$$= \underbrace{(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n)}_{=0}\overrightarrow{MO}^2$$
$$+ 2\overrightarrow{MO}.\underbrace{\left(\alpha_1\overrightarrow{OA_1} + \alpha_2\overrightarrow{OA_2} + \cdots + \alpha_n\overrightarrow{OA_n}\right)}_{=\vec{f}(O)}$$
$$+ \underbrace{\alpha_1\overrightarrow{OA_1}^2 + \alpha_2\overrightarrow{OA_2}^2 + \cdots + \alpha_n\overrightarrow{OA_n}^2}_{=\varphi(O)}$$

Donc, $\forall\, M, \varphi(M) = 2MO \times f(O) + \varphi(O)$, où $f(O)$ est la fonction vectorielle associée au même système.

**L'ensemble $\boldsymbol{\Sigma}$ des points $\boldsymbol{M}$ tels que $\boldsymbol{\varphi(M) = k}$**

Si$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i \neq 0$, le système admet un barycentre $G$ et on a $\forall M, \varphi(M) = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{MG}^2 + \varphi(G)$. Déterminons $\Sigma_k$ l'ensemble des points $M$ (du plan ou de l'espace) tels que $\varphi(M) = k$ où $k$ est un réel :

$$\mathrm{M} \in \Sigma_k \Rightarrow \varphi(M) = k \Rightarrow \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{MG}^2 + \varphi(G) = k$$
$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{MG}^2 = k - \varphi(G) \Rightarrow \overrightarrow{MG}^2 = \frac{k - \varphi(G)}{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i}$$

Si $\dfrac{k - \varphi(G)}{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i} > 0 \Rightarrow MG = \sqrt{\dfrac{k - \varphi(G)}{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i}}$

Donc, dans le plan, $\Sigma_k$ est le cercle de centre $G$ et de rayon $R = \sqrt{\frac{k-\varphi(G)}{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i}}$

Si $\dfrac{k - \varphi(G)}{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i} = 0 \Rightarrow MG^2 = 0 \Rightarrow MG = 0$
$$\Rightarrow M = G \Rightarrow \Sigma_k = \{G\}$$

Si $\dfrac{k - \varphi(G)}{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i} < 0 \Rightarrow \Sigma_k = \phi$

Dans le cas particulier de deux points, on retrouve le théorème de la médiane :

$$\begin{cases} MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \dfrac{AB^2}{2} \\ \left(\alpha_1 = 1 \text{ et} \alpha_2 = 1, (\alpha_1 + \alpha_2 \neq 0)\right) \\ MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{AB} \\ \left(\alpha_1 = 1 \text{ et} \alpha_2 = -1, (\alpha_1 + \alpha_2 = 0)\right) \end{cases} \quad où\ I = A * B$$

**Remarque**

Pour calculer $\varphi(G)$ :

On peut calculer $\overrightarrow{GA_1}^2$, $\overrightarrow{GA_2}^2$, … , $\overrightarrow{GA_n}^2$, puis calculer $\varphi(G) = \alpha_1\overrightarrow{GA_1}^2 + \alpha_2\overrightarrow{GA_2}^2 + \cdots + \alpha_n\overrightarrow{GA_n}^2$

On peut calculer $\varphi(A_1)$, $\varphi(A_2)$, … , $\varphi(A_n)$ puis appliquer la formule :

$$\varphi(G) = \frac{\alpha_1\varphi(A_1) + \alpha_2\varphi(A_2) + \cdots + \alpha_n\varphi(A_n)}{2\sum_{i=1}^{n}\alpha_i}$$

**Démonstration de cette relation**

$$\forall M, \varphi(M) = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{MG}^2 + \varphi(G)$$
$$\Rightarrow \text{pour } M = A_1, \varphi(A_1) = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{A_1G}^2 + \varphi(G)(\mathbf{1})$$
$$\Rightarrow \text{pour } M = A_2, \varphi(A_2) = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{A_2G}^2 + \varphi(G)\ (\mathbf{2}) \ldots$$
$$\Rightarrow \text{pour } M = A_n, \varphi(A_n) = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{A_nG}^2 + \varphi(G)\ (\boldsymbol{n})$$

En multipliant $(\mathbf{1})$, $(\mathbf{2})$, $(\ldots)$, $(\boldsymbol{n})$respectivement par $(\alpha_1)$, $(\alpha_2)$, $(\ldots)$, $(\alpha_n)$, on obtient :

$$\alpha_1\,\varphi(A_1) = \alpha_1\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{A_1G}^2 + \alpha_1\varphi(G)$$
$$\alpha_2\varphi(A_2) = \alpha_2\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{A_2G}^2 + \alpha_2\varphi(G)$$
$$\ldots$$
$$\alpha_n\varphi(A_n) = \alpha_n\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{A_nG}^2 + \alpha_n\varphi(G)$$

Puis en additionnant ces termes on obtient :

$$\alpha_1\,\varphi(A_1) + \alpha_2\,\varphi(A_2) + \cdots + \alpha_n\,\varphi(A_n)$$
$$= \alpha_n\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\underbrace{\left(\alpha_1\overrightarrow{A_nG}^2 + \alpha_2\overrightarrow{A_nG}^2 + \cdots + \alpha_n\overrightarrow{A_nG}^2\right)}_{=\varphi(G)}$$
$$+ \underbrace{(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n)}_{\sum\alpha_i}\varphi(G)$$
$$\Rightarrow \alpha_1\,\varphi(A_1) + \alpha_2\,\varphi(A_2) + \cdots + \alpha_n\,\varphi(A_n)$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\,\varphi(G) + \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\,\varphi(G)$$
$$\Rightarrow \alpha_1\,\varphi(A_1) + \alpha_2\,\varphi(A_2) + \cdots + \alpha_n\,\varphi(A_n)$$
$$= 2\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\,\varphi(G)$$
$$\boldsymbol{\varphi(G) = \frac{\alpha_1\,\varphi(A_1) + \alpha_2\,\varphi(A_2) + \cdots + \alpha_n\,\varphi(A_n)}{2\sum_{i=1}^{n}\alpha_i}}$$

**Exercice**

Dans un plan $\mathcal{P}$ de l'espace, on considère un triangle $ABC$ rectangle en $A$ tel que $AB = 4$et $AC = 3$.

**1°/** Déterminer et construire $\Gamma$ des points $M$ de $\mathcal{P}$ tel que :

$$2\overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2 + 3\overrightarrow{MC}^2 = -7$$

**2°/** Soit $k$ un nombre réel déterminer suivant les valeurs de $k$, l'ensemble des points $M$ de $\mathcal{P}$ tel que :

$$\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MC}^2 = k$$

**Solution**

**1°/** $M \in \mathcal{P} \Longrightarrow 2\overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2 + 3\overrightarrow{MC}^2 = -7$. On pose $\varphi(M) = 2\overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2 + 3\overrightarrow{MC}^2$. $2 - 1 + 3 = 4 \Longrightarrow$le système $2\overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2 + 3\overrightarrow{MC}^2$ admet un barycentre

Soit $G = bar$

| $A$ | $B$ | $C$ |
|---|---|---|
| 2 | −1 | 3 |

$$\forall M \in \mathcal{P}, \varphi(M) = 4\overrightarrow{MG}^2 + \varphi(G) \Longrightarrow \varphi(M) = -7$$

$$\Longrightarrow 4\overrightarrow{MG}^2 + \varphi(G) = -7 \Longrightarrow \boldsymbol{MG^2} = \frac{\boldsymbol{-7 - \varphi(G)}}{\boldsymbol{4}} \boxed{1}$$

$$\varphi(A) = -\overrightarrow{AB}^2 + 3\overrightarrow{AC}^2 = -(4)^2 + 3(3)^2 = 11$$

$$\varphi(B) = 2\overrightarrow{BA}^2 + 3\overrightarrow{BC}^2 = 2(4)^2 + 3(5)^2 = 107$$

$$\varphi(C) = 2\overrightarrow{CA}^2 - \overrightarrow{CB}^2 = 2(3)^2 - (5)^2 = -7$$

$$\text{Or } \varphi(G) = \frac{2\varphi(A) - \varphi(B) + 3\varphi(C)}{2 \times (2 - 1 + 3)}$$

$$= \frac{2 \times 11 - 107 + 3 \times -7}{2 \times 4} = \frac{-106}{8} \Longrightarrow \boldsymbol{\varphi(G)} = \frac{\boldsymbol{-53}}{\boldsymbol{4}} \boxed{2}$$

En remplaçant par $\boxed{2}$ dans $\boxed{1}$ on a :

$$\overrightarrow{MG}^2 = \frac{-7 - \left(\frac{-53}{4}\right)}{4} = \frac{-7 + \frac{53}{4}}{4} = \frac{\frac{-28+53}{4}}{4}$$

$$= \frac{-28 + \boldsymbol{53}}{\boldsymbol{16}} = \frac{\boldsymbol{25}}{16} \Longrightarrow \boldsymbol{MG} = \frac{\boldsymbol{5}}{\boldsymbol{4}}$$

$\Gamma$est le cercle de centre $G$ et de rayon $\frac{5}{4}$

**2°/** On pose $g(M) = \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MC}^2$.
$1 + 1 + 1 = 3 \neq 0$le système admet donc un barycentre

Soit $J = bar$

| $A$ | $B$ | $C$ |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |

$$\forall M, g(M) = 3\overrightarrow{MJ}^2 + g(J)$$

$$M \in \Gamma_k \Longrightarrow g(M) = k \Longrightarrow 3\overrightarrow{MJ}^2 + g(J) = k$$

$$\Longrightarrow 3\overrightarrow{MJ}^2 = k - g(J) \Longrightarrow \boldsymbol{\overrightarrow{MJ}^2} = \frac{\boldsymbol{k - g(J)}}{\boldsymbol{3}} \boxed{1}$$

$$g(A) = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}^2 = 4^2 + 3^2 = 25$$

$$g(B) = \overrightarrow{BA}^2 + \overrightarrow{BC}^2 = 5^2 + 4^2 = 41$$

$$g(C) = \overrightarrow{CA}^2 + \overrightarrow{CB}^2 = 5^2 + 3^2 = 34$$

$$g(J) = \frac{g(A) + g(B) + g(C)}{2(3)} = \frac{25 + 41 + 34}{6} = \frac{100}{6}$$

$$= \frac{50}{3}$$

En remplaçant dans $\boxed{1}$ $M \in \Gamma_k \Longrightarrow \overrightarrow{MJ}^2 = \dfrac{k - \frac{50}{3}}{3}$

Si $k - \dfrac{50}{3} > 0$

$\Longrightarrow \Gamma_k$ est le cercle de centre J et de rayon $\sqrt{\dfrac{k - \frac{50}{3}}{3}}$

Si $k - \dfrac{50}{3} = 0 \Longrightarrow \Gamma_k = \{J\}$

Si $k - \dfrac{50}{3} < 0 \Longrightarrow \Gamma_k = \phi$

L'ensemble $\Gamma_k$ des points $M$ tels que $\varphi(M) = k$lorsque$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 0$, dans ce cas le système $S = \{(A_1, \alpha_1), (A_2, \alpha_2), (A_3, \alpha_3), \dots, (A_n, \alpha_n)\}$n'a pas de barycentre et $O$ étant un point fixé, on a pour tout $M$, $\varphi(M) = 2\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{f(O)} + \varphi(O)$ où $f$ est la fonction vectorielle associée au même système. Donc en posant $\vec{u} = \overrightarrow{f(O)} \Longrightarrow \forall M, \varphi(M) = 2\overrightarrow{MO}.\vec{u} + \varphi(O)$

Donc, $M \in \Gamma_k \Longrightarrow \varphi(M) = k \Longrightarrow 2\overrightarrow{MO}.\vec{u} + \varphi(O) = k$

$$\Longrightarrow 2\overrightarrow{MO}.\vec{u} = k - \varphi(O) \Longrightarrow 2\overrightarrow{OM}.\vec{u}$$

$$= \varphi(O) - k \Longrightarrow \overrightarrow{OM}.\vec{u} = \frac{\varphi(O) - k}{2}$$

En posant $k' = \dfrac{\varphi(O) - k}{2} \Longrightarrow M \in \Gamma_k, \overrightarrow{OM}.\vec{u} = k \boxed{1}$.

**1)** Si $\vec{u} = \vec{0}$, *alors* $M \in \Gamma_k \Longrightarrow 0 = k'$.

Donc, dans ce cas :

**a)** Si $k' = 0$ la relation devient$0 = 0$, elle est vérifiée $\forall M$. Donc, dans le plan$\mathcal{P}$, on a$\Gamma_k = \mathcal{P}$, et dans l'espace $\mathcal{E}, \Gamma_k = \mathcal{E}$.

b) Si $k \neq 0$ $(avec\vec{u} = \vec{0})$, la relation est impossible et $\Gamma_k = \phi$.

**2)** Si $\vec{u} \neq 0$ alors :

**a)** Dans le plan$\mathcal{P}$, soit $D$ la droite passant par $O$ et de vecteur$\vec{u}$. Déterminons d'abord $D \cap \Gamma_k$

$$M \in D \cap \Gamma_k \Longrightarrow \begin{cases} M \in D \\ M \in \Gamma_k \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \exists t \in \mathbb{R} / \overrightarrow{OM} = t\vec{u} \\ et \\ \overrightarrow{OM}.\vec{u} = k' \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{OM} = t\vec{u} \\ et \\ t\vec{u}.\vec{u} = k' \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{OM} = t\vec{u} \\ et \\ tu^2 = k' \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{OM} = t\vec{u} \\ et \\ t = \dfrac{k'}{\|\vec{u}\|^2} \end{cases}$$

Donc, $D \cap \Gamma_k = \{H\}$avec $\overrightarrow{OH} = \left(\dfrac{k'}{\|\vec{u}\|^2}\right)\vec{u}\boxed{2}$.

Déterminons maintenant$\Gamma_k$ .

$M \in \Gamma_k \Longrightarrow \overrightarrow{OM}.\vec{u} = k'$. Or, $H \in \Gamma_k$, d'où$\overrightarrow{OH}.\vec{u} = k'$.

Donc$\overrightarrow{OM}.\vec{u} = k' \Longrightarrow \overrightarrow{OM}.\vec{u} = \overrightarrow{OH}.\vec{u}$

$$\Longrightarrow \overrightarrow{OM}.\vec{u} - \overrightarrow{OH}.\vec{u} = 0 \Longrightarrow (\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OH}).\vec{u} = 0$$

$$\Longrightarrow \overrightarrow{HM}.\vec{u} = 0$$

**a)** Donc, dans le plan, $\Gamma_k$ est donc la droite de vecteur normal$\vec{u}$ et passant par $H$ tq.

$$\overrightarrow{OH} = \left(\frac{k'}{\|\vec{u}\|^2}\right)\vec{u}$$

**b)** Dans l'espace, $\overrightarrow{HM}.\vec{u}=0 \Longrightarrow M$ appartient au plan de vecteur normal$\vec{u}$ et contenant$H$ tel que :

$$\overrightarrow{OH}=\left(\frac{k'}{\|\vec{u}\|^2}\right)\vec{u}$$

Donc, dans l'espace, $\Gamma_k$ est le plan de vecteur normal $\vec{u}$ et contenant$H$ tels que :

$$\overrightarrow{OH}=\left(\frac{k'}{\|\vec{u}\|^2}\right)\vec{u}$$

**Exercice**

Dans un plan $\mathcal{P}$ de l'espace, on considère un triangle équilatéral $ABC$ de côté $a$ $(a>0)$$J$ est le milieu de $[AC]$, $D$ est le symétrique de $B$ par rapport à $J$ et $G$ le centre de gravité de $ABC$.

**1)** Déterminer et construire l'ensemble $\Sigma$ des points $M$ de $\mathcal{P}$ tels que :$\boldsymbol{\Sigma_1}$: $\overrightarrow{MA}^2-2\overrightarrow{MB}^2+\overrightarrow{MC}^2=0$.

**2)** Déterminer les ensembles suivants :

$$\boldsymbol{\Sigma_2}:\ \overrightarrow{MA}^2-2\overrightarrow{MJ}^2+\overrightarrow{MC}^2=\frac{a^2}{2}$$

$$\boldsymbol{\Sigma_3}:\ \overrightarrow{MA}^2-2\overrightarrow{MJ}^2+\overrightarrow{MC}^2=a^2$$

**3)** Déterminer et construire l'ensemble $D$ des points $M$ tels que :**D** : $\overrightarrow{MA}^2-2\overrightarrow{MB}^2+\overrightarrow{MC}^2=-4a^2$.

**Solution**

**1)** Déterminons et construisons l'ensemble $\Sigma$ des points $M$ de $\mathcal{P}$ tels que :$\Sigma_1$ : $\overrightarrow{MA}^2-2\overrightarrow{MB}^2+\overrightarrow{MC}^2=0$.

Posons $\varphi_1(M)=\overrightarrow{MA}^2-2\overrightarrow{MB}^2+\overrightarrow{MC}^2$

$1-2+1=0$. Le système $\{(A,1),(B,-2),(C,1)\}$ n'a pas de barycentre

$$\varphi_1(M)=\left(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BA}\right)^2-2\overrightarrow{MB}^2+\left(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC}\right)^2$$
$$=2\overrightarrow{MB}.\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right)+\overrightarrow{BA}^2+\overrightarrow{BC}^2$$
$$=2\overrightarrow{MB}.2\overrightarrow{BJ}+2a^2=-4\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{BJ}+2a^2$$
$$M\in\Sigma_1\Longrightarrow\varphi_1(M)=0\Longrightarrow-4\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{BJ}+2a^2=0$$
$$\Longrightarrow 4\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{BJ}=2a^2\Longrightarrow\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{BJ}=\frac{1}{2}a^2$$

Or, $J=A*C$ et $A,B,C$ ne sont pas alignés d'où, $J\neq B$,

Donc, $\overrightarrow{BJ}=\vec{0}\Longrightarrow BJ=0.\Sigma_1$est la droite perpendiculaire à $(BJ)$ et passant par $H$ tel que :

$$\overrightarrow{BH}=\frac{k}{\|\overrightarrow{BJ}\|^2}\overrightarrow{BJ}=\left(\frac{\frac{1}{2}a^2}{\|\overrightarrow{BJ}\|^2}\right)\overrightarrow{BJ}$$

Or $J=A*C$ et le triangle $ABJ$ est rectangle en $J$ d'où,

$$\overrightarrow{BJ}^2=\overrightarrow{BA}^2+\overrightarrow{AJ}^2=a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2=\frac{3}{4}a^2$$

Donc

$$\overrightarrow{BH}=\left(\frac{\frac{1}{2}a^2}{\frac{3}{4}a^2}\right)\overrightarrow{BJ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BJ}$$

D'où, $H=bar$

| $B$ | $J$ |
|---|---|
| 1 | 2 |

Or, $J=bar$

| $A$ | $C$ |
|---|---|
| 1 | 1 |

D'où, $H=bar$

| $A$ | $B$ | $C$ |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |

$H$ est le centre de gravité de $ABC$ c'est-à-dire$H=G$. $\Sigma_1$ est la droite passant par $G$ et perpendiculaire à $(BJ)$.

**2) a)** Déterminons l'ensemble :

$$\boldsymbol{\Sigma_2}:\ \overrightarrow{MA}^2-2\overrightarrow{MJ}^2+\overrightarrow{MC}^2=\frac{a^2}{2}$$

Posons $\varphi_2(M)=\overrightarrow{MA}^2-2\overrightarrow{MJ}^2+\overrightarrow{MC}^2$

$1-2+1=0$. Le système $\{(A,1),(B,-2),(C,1)\}$ n'a pas de barycentre

$$\varphi_2(M)=\left(\overrightarrow{MJ}+\overrightarrow{JA}\right)^2-2\overrightarrow{MJ}^2+\left(\overrightarrow{MJ}+\overrightarrow{JC}\right)^2$$
$$=2\overrightarrow{MJ}.\left(\overrightarrow{JA}+\overrightarrow{JC}\right)+\frac{a^2}{2}=0+\frac{a^2}{2}$$
$$\forall M\in P,\qquad \varphi_2(M)=\frac{a^2}{2},$$
$$M\in\Sigma_2,\varphi_2(M)=\frac{a^2}{2}\Longrightarrow\frac{a^2}{2}=\frac{a^2}{2}$$

C'est vérifié $\forall M\in P\Longrightarrow\boldsymbol{\Sigma_2}=\boldsymbol{P}$

$$\boldsymbol{b)}\boldsymbol{\Sigma_2}:\ \overrightarrow{MA}^2-2\overrightarrow{MJ}^2+\overrightarrow{MC}^2=\frac{a^2}{2}$$

$$M\in\Sigma_3,\varphi_3(M)=a^2\Longrightarrow\frac{a^2}{2}=a^2\Longrightarrow\frac{a^2}{2}=0.$$

Impossible car $a>0\Longrightarrow\boldsymbol{\Sigma_3}=\boldsymbol{\phi}$

**3)** Déterminons et construisons l'ensemble $D$ des points $M$ tels que : **D** : $\overrightarrow{MA}^2-2\overrightarrow{MB}^2+\overrightarrow{MC}^2=-4a^2$

$$\Longrightarrow -4\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{BJ}+2a^2=-4a^2\Longrightarrow\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{BJ}=\frac{6}{4}a^2$$

Or, on a déjà vu que $BJ\neq 0$, d'où, $D$ est la droite passant par $K$ et perpendiculaire à $(BJ)$ tel que :

$$\overrightarrow{BK}=\frac{k}{\|\overrightarrow{BJ}\|^2}\overrightarrow{BJ}=\left(\frac{\frac{6}{4}a^2}{\frac{3}{4}a^2}\right)\overrightarrow{BJ}\Longrightarrow\overrightarrow{BK}=2\overrightarrow{BJ}$$

$K$ est le symétrique de $B$ par rapport à $J$ c'est-à-dire que $D$ est la droite passant par $D$ et perpendiculaire à $(BJ)$.

## Applications

**Orthogonalité de droites**

**Exemple 1**

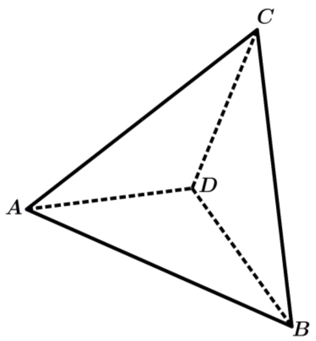
*ABCD un tétraèdre régulier d'arête a.*

**1)** Montrer que : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}=\dfrac{a^2}{2}$

et donner trois résultats similaires.

**2)** Montrer que les droites $(AC)$et $(BD)$.

sont orthogonales, donner deux résultats similaires.




**Solution**

1) Dans le triangle équilatéral $ABC$, on a ; $\hat{A}=\frac{\pi}{3}$

■ donc : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB.AC\times\cos\frac{\pi}{3}=a\times a\times\frac{1}{2}=\frac{a^2}{2}$

Dans le triangle équilatéral $ABD$, on a ; $\hat{A}=\frac{\pi}{3}$

■ donc : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=AB.AD\times\cos\frac{\pi}{3}=a\times a\times\frac{1}{2}$

$=\frac{a^2}{2}$

Dans le triangle équilatéral $ACD$, on a ; $\hat{A}=\frac{\pi}{3}$

■ donc : $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}=AC.AD\times\cos\frac{\pi}{3}=a\times a\times\frac{1}{2}=\frac{a^2}{2}$

Donc ; $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}=\frac{a^2}{2}$

**Les résultats similaires sont :**

$$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BD}=\frac{a^2}{2}$$

$$\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CD}=\frac{a^2}{2}$$

$$\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DC}=\frac{a^2}{2}$$

2) $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AC}.\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}\right)=\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}$

$=-\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}=\frac{-a^2}{2}+\frac{a^2}{2}=0$

Donc ; $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}=0\Leftrightarrow\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont orthogonaux $\Leftrightarrow$ les droites $(AC)$ et $(BD)$ sont orthogonales.

**Les résultats similaires sont :**

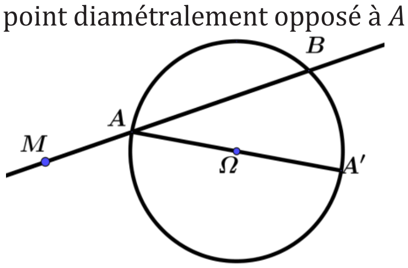
- les droites $(AB)$ et $(CD)$ sont orthogonales,
- les droites $(AD)$ et $(BC)$ sont orthogonales.

## Projection orthogonale et conservation d'un produit scalaire

### Exemple 2

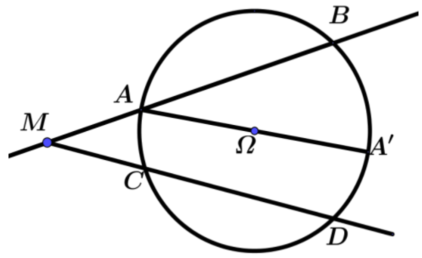
Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre $\Omega$ et de rayon $R$. Soit $M$ un point.

Une droite passant par $M$ coupe $\mathcal{C}$ en $A$ et $B$. Soit $A'$ le point diamétralement opposé à $A$ sur $\mathcal{C}$.




**1)** Montrer que le produit scalaire $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$ ne dépend pas des points $A$ et $B$.
(c'est la puissance du point $M$ par rapport au cercle $\mathcal{C}$).

**2)** En déduire que lorsqu'une autre droite passant par $M$ coupe $\mathcal{C}$ en $C$ et $D$, alors : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD}$.




**Solution**

**1)** Comme $[AA']$ est un diamètre de $\mathcal{C}$ et $B\in\mathcal{C}$, donc $BAA'$ est rectangle en $B$. Or, $M$, $A$, $B$ sont alignés.
Donc le triangle $BMA'$ est rectangle en $B$.

Donc ; $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MA'}$ (car $MB$ est le projeté orthogonal de $MA'$ sur la droite $(MA)$).

Or, $\Omega$ est le milieu de $[AA']$, d'où ; $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MA'}=M\Omega^2-\frac{AA'^2}{4}=M\Omega^2-\frac{(2R)^2}{4}=\Omega M^2-R^2$.

Donc, $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MA'}=\Omega M^2-R^2$.

D'où $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MA'}$ est indépendant des points $A$ et $B$.

**2)** Comme $\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD}=\Omega M^2-R^2$ (d'après 1), donc $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD}$.

## Lignes de niveau relatives aux fonctions scalaires

### Définitions

Soit $\varphi$ une application du plan $\mathcal{P}$ dans $\mathbb{R}$ et $k$ un réel donné, la ligne de niveau $k$ de $\varphi$ est ; $L_k=\{M\in\mathcal{P}\ /\ \varphi(M)=k\}$

Soit $\varphi$ une application de l'espace $\mathcal{E}$ dans $\mathbb{R}$ et $k$ un réel donné, la surface de niveau $k$ de $\varphi$ est ;
$S_k=\{M\in\mathcal{E}\ /\ \varphi(M)=k\}$.

Lignes et surface de niveau de la fonction scalaire de Leibniz $\varphi$ associée au système $S=\{(A_i;\ \alpha_i)_{1\le i\le n}\}$ est $\varphi(M)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i AM_i^2$

$\varphi(M)=k,\vec{v}=\overrightarrow{\varphi(O)}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{OA_\iota}$

**Premier cas**

Si $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=0,\qquad\varphi(M)=\varphi(O)+2\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{\varphi(O)}$
$=\varphi(O)+2\overrightarrow{MO}.\vec{v}=k$

| | | Plan $\mathcal{P}$ |
|---|---|---|
| $\vec{v}=\vec{0}$ | $k-\varphi(O)=0$ | $\mathcal{P}$ |
| | $k-\varphi(O)\neq0$ | $\phi$ |
| $\vec{v}\neq\vec{0}$ | | Une droite orthogonale à $(O,\vec{v})$ |





Math 6AS.indd 110 26/07/2024 10:42:26

**Deuxième cas**

$$\text{Si} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0, \qquad \varphi(M) = \varphi(G) + \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right) MG^2$$

$$= k;\ MG^2 = \frac{k-\varphi(G)}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i} \quad \text{où } G$$

$$= bar\{(A_i;\ \alpha_i)_{1 \le i \le n}\}$$

| | Plan $\mathcal{P}$ |
|---|---|
| $\frac{k-\varphi(G)}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i} < 0$ | $\boldsymbol{\phi}$ |
| $\frac{k-\varphi(G)}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i} = 0$ | $\{\boldsymbol{G}\}$ |
| $\frac{k-(G)}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i} > 0$ | **Le cercle de centre $\boldsymbol{G}$ et de rayon** $\sqrt{\frac{k-\varphi(G)}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i}}$ |

## Exercice 4

$ABC$ un triangle de centre de gravité$G$.On pose $AB = c$ ;$BC = a$ ; $CA = b$.

**1)** Déterminer et construire l'ensemble $E_1$ des points du plan tels que :$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \frac{3}{4}c^2$.

**2)** Déterminer et construire l'ensemble$E_2$des points du plan tels que : $MA^2 - MB^2 = a^2 - b^2$.

Que représente $E_2$ pour le triangle $ABC$

**3) a)**Déterminer et construire l'ensemble $E_3$ des points du plan tels que :

$MA^2 + MB^2 + MC^2 = b^2 + a^2$.

**b)**Lorsque $E_3$ contient les sommets du triangle $ABC$, quelle est la nature de ce triangle ?

## Solution

**1)**$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \frac{3}{4}c^2 \Rightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \frac{3}{4}AB^2$.

Soit $I$ le milieu de $[AB]$.

$$M \in E_1 \Rightarrow (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = \frac{3}{4}AB^2$$

$$\Rightarrow (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})(\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA}) = \frac{3}{4}AB^2 \Rightarrow MI^2 - IA^2$$

$$= \frac{3}{4}AB^2$$

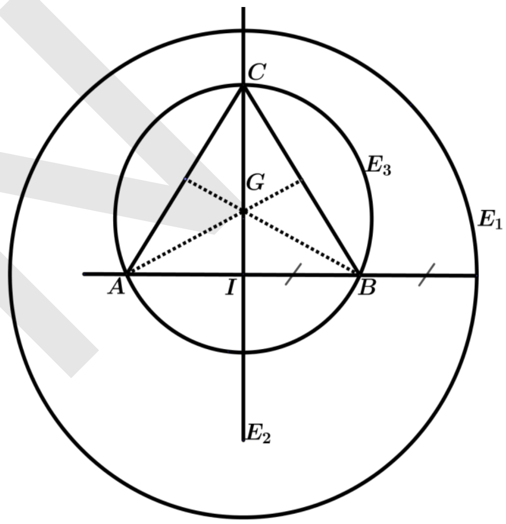
$$\Rightarrow MI^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}AB^2 \Rightarrow MI^2 - \frac{AB^2}{4} = \frac{3}{4}AB^2$$

$$\Rightarrow MI^2 = \frac{1}{4}AB^2 + \frac{3}{4}AB^2 = AB^2 \Rightarrow MI = AB = c$$

$E_1$est donc le cercle de centre $I$ et de rayon $r = AB = c$

**2)**On a :$MA^2 - MB^2 = b^2 - a^2$. Comme : $1 - 1 = 0$ ;

Donc $E_2$ est une droite de vecteur normal $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = -\overrightarrow{AB}$. d'où $E_2$ est une droite perpendiculaire à $(AB)$.Or,$CA^2 - CB^2 = b^2 - a^2$ , d'où;$C \in E_2$.




Donc ; $E_2$ est la perpendiculaire à $(AB)$ passant par $C$

Donc ; $E_2$ est la hauteur issue de $C$ dans le triangle $ABC$.

**3)**

**a)** $MA^2 + MB^2 + MC^2 = b^2 + a^2$

On a; $G = bar$

| $A$ | $B$ | $C$ |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |

Or ; $CA^2 + CB^2 + CC^2 = b^2 + a^2$ ; Donc ; $C \in E_3$.

Donc ; $E_3$est le cercle de centre $G$ passant par $C$.

**b)** Si ; $E_3$contient les sommets de $ABC$, alors $GA = GB = GC$,d'où $G$ est le centre du cercle circonscrit à $ABC$.

Or, $G$ est aussi centre de gravité de $ABC$,Donc, $ABC$ est un triangle équilatéral.

## B. EXERCICES DIVERS

**1.** ABCD rectangle de centre O, t.q : AB = 4 ; AD = 3.
Calculer les produits scalaires suivants :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\ ;\ \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DC}\ ;\ \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{AB}\ ;\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{DB}\ ;\ \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OC}.$$

**2.** ABC triangle équilatéral de centre O, t.q : AB = a ;
Calculer en fonction de a :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\ ;\ \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}\ ;\ \overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OA}\ ;\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA}.$$

**3.** 1) Montrer que pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ on a : $(\vec{u}+\vec{v})^2+(\vec{u}-\vec{v})^2=2(\vec{u}^2+\vec{v}^2)$
2) ABCD un parallélogramme, on pose : $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{AD}$.
a) Déterminer : $\vec{u}+\vec{v}$ et $\vec{u}-\vec{v}$.
b) En déduire que : $AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2$

**4.** ABC un triangle tel que: AB = 3 ; AC = 5 ; $\hat{A}=\frac{\pi}{3}$.
Calculer BC ;
2) I milieu de [AB] ; D est le symétrique de B par rapport à A. Calculer IC et CD.

**5.** Montrer qu'un triangle ABC est rectangle en C, si, et seulement si, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AC^2$.
2) soit ABC un triangle rectangle en C. Montrer que : $\cos\hat{A}=\frac{AC}{AB}$.

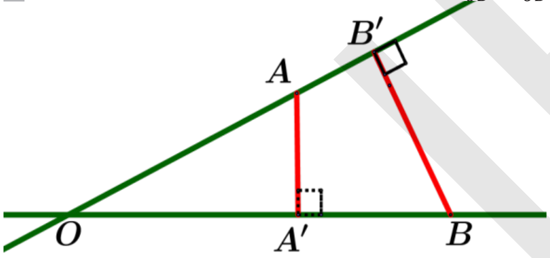
**6.** 1) ABC un triangle tel que :

$$\frac{AB}{BC}=\frac{\sqrt{2}}{2}\ et\ \hat{B}=\frac{\pi}{4}.$$

Montrer que : ABC est un triangle rectangle en A.
2) ABC est un triangle tel que : $\frac{AB}{BC}=\sqrt{2}\ et\ \hat{B}=\frac{\pi}{4}$
Montrer que : ABC est rectangle en C.

**7.** ABCD un carré de côté a (a> 0).
I ; J les milieux respectifs de [AB] et [BC]. Montrer que les droites (DI) et (AJ) sont perpendiculaires.

**8.** Montrer que sur la figure ci-contre on a : $\frac{OA}{OB}=\frac{OA'}{OB'}$




**9.** [AB] un segment de longueur a.
$f$: M ⟼ $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB}$
Déterminer et construire $L_k$ (ligne de niveau k de $f$)
Dans chacun des cas :
1) $k=\frac{1}{2}a^2$; 2) $k=-\frac{1}{3}a^2$; 3) $k=a^2$; 4) $k=-a^2$; 5) $k=0$.

**10.** L'espace est rapporté au RON $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath}\ ;\ \vec{k})$.
1) Donner une équation du plan P contenant le point A(1 ; 2 ;-1) et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$.2) P' le plan d'équation cartésienne : x + y + 2z + 3 = 0.
a) Quelle est la position relative des plans P et P'.
b) Déterminer la distance (A ; P'). Que représente cette distance pour les plans P et P'.3) a) Déterminer une représentation paramétrique de (d) passant par A et de vecteur directeur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$.b) Quelle est la position de (d) par rapport au plan P et P'.

**11.** L'espace est rapporté au repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath}\ ;\ \vec{k})$.1) Soit (d) la droite définie par : $\begin{cases}x=1+t\\y=t\\z=-2+3t\end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$.
1) Donner une caractérisation de (d).
2) P le plan orthogonal à (d) et contenant le point A(1 ; 0 ; 1).
Donner une équation cartésienne de P .

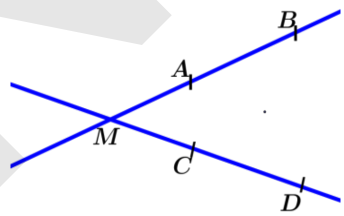
**12.** ABC un triangle tel que : AB = 2 ;
AC = 3 ; BC = 4.

G = bar

| A | B | C |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 |

1) Faire une figure.
2) Calculer : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\ ;\ \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}\ ;\ \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$.
3) Calculer : $GA^2$ ; $GB^2$ ; $GC^2$.
4) Pour tout point P du plan, on pose :
$f(M) = MA^2 + 2MB^2 + 3MC^2$.a) Calculer $f(G)$.
Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que : $f(M) = 41$.

**13.** (AB) et (CD) deux droites distincts passant par un point M, tels que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD}$, et M ≠ C.




Montrer que : les points A ; B ; C ; D sont cocycliques (appartiennent à un même cercle).

**14.** Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$.Soit (d) la droite d'équation $y=\frac{-1}{4}$ et F le point de coordonnées $(0\ ;\frac{1}{4})$. Soit P l'ensemble des points M du plan équidistant de (d) et F.
1) Donner une équation cartésienne simplifiée de P.
2) Etudier et représenter P .

**15.** ABC un triangle tel que : AB = 2 ; AC = 3 ;BC= 4.

G = bar

| A | B | C |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 |

D est le symétrique de B par rapport à C.I milieu de [AB].1) Faire une figure.2) Calculer : $\cos\hat{A}$ ; $\cos\hat{B}$ ; $\cos\hat{C}$.3) Calculer IC ; AD.
4) On pose : $f(M) = MA^2 + MB^2 + 2MC^2$.
$g(M) = MA^2 + MB^2 - 2MC^2$.
a) Calculer : $f(A)$ ; $f(B)$ ; $f(C)$ ; $f(D)$; $g(A)$ ; $g(B)$ ; $g(C)$ ; $g(D)$.b) Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que : $f(M) = 25$. c) Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que : $g(M) = 25$.
5)Déterminer et construire l'ensemble Γ des points M du plan tels que :

$$\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\|=\|\overrightarrow{BM}+2\overrightarrow{MC}\|$$

# CHAPITRE 09 Etude de fonction

## Cours

### I. Généralités sur les fonctions : Rappels

Soit $f$ une fonction de la variable réelle, $\mathcal{C}_f$ ou $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O\,;\,\overrightarrow{OI},\,\overrightarrow{OJ})$.

#### 1. Domaine de définition :

On appelle domaine de définition de $f$ l'ensemble noté $\mathcal{D}_f$ ou $\mathcal{D}$ : $\{x \in \mathbb{R}\ /\ f(x)$ existe$\}$.

**Exemple 1 :**

$$\boldsymbol{f} : x \mapsto \frac{4}{x(x-1)}, \qquad \mathcal{D}_f = \mathbb{R} - \{0{,}1\}$$

#### 2. Parité :

On dit que la fonction $\boldsymbol{f}$ est paire si ,

- $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à zéro
- Pour tout $x \in \mathcal{D}_f$; on a $f(-x) = f(x)$

**Exemple 2 :**

$f : x \mapsto x^2$ ;$\mathcal{D}_f = ]-\infty\,;\,0] \cup [0\,;\,+\infty[$;

$\forall\, x \in \mathcal{D}_f$ ; $(-x)^2 = (x)^2 = x^2$

$\Rightarrow f(-x) = f(x)$, donc; $f$ est paire.

On dit que la fonction $f$ est impaire si

- $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à zéro.
- Pour tout $x \in \mathcal{D}_f$ ; on a $f(-x) = -f(x)$

**Exemple 3 :**

$f : x \mapsto x^3$ ;$\mathcal{D}_f = ]-\infty\,;\,0] \cup [0\,;\,+\infty[$ ;

$\forall x \in \mathcal{D}_f$ ; $(-x)^3 = -x^3 \Longrightarrow f(-x) = -f(x)$ ;

Donc ; $f$ est impaire.

#### 3. Eléments de symétries :

**Axe de symétrie :**

Soit $f$ une fonction numérique ; $\mathcal{D}_f$ son domaine de définition $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $(\,O\,;\,I,\,J)$.

Pour démontrer que l'axe $\Delta$ d'équation : $x = a$ est un axe de symétrie de $\mathcal{C}_f$ on peut utiliser l'une des deux méthodes suivantes :

***Méthode 1 :***

Démontrer que :

$\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à la droite $'x = a$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a - x \in \mathcal{D}_f \\ f(2a-x) = f(x) \end{cases}$$

**Exemple 4 :**

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\,;\, x \longmapsto \frac{4}{x(x-4)}$;

La droite d'équation $\Delta : x = 2$ est axe de symétrie de la courbe représentative de $f$, car :

$$f(4-x) = \frac{4}{(4-x)(4-x-4)} = \frac{4}{-x(4-x)} = f(x)$$

***Méthode 2 :***

Démontrer que $f$ est paire dans le repère $(O'\,;\,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$ tel que $O'(a\,;\,0)$.

**Exemple 5 :**

$$\text{Soit} f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\,;\, x \longmapsto \frac{4}{x(x-4)};$$

On a : $y = \dfrac{4}{x(x-4)}$ ; soit : $X = x - 2, Y = y$.

Donc ; $Y = \dfrac{4}{(X-2)(X+2)}$

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\,;\, X \longmapsto \dfrac{4}{(X-2)(X+2)}$

La fonction $f$ est paire.

**Centre de symétrie :**

Pour démontrer que le point $\Omega(\,a\,;\,b)$ est centre de symétrie de la courbe $\mathcal{C}_f$ d'une fonction $f$, on peut utiliser l'une des deux méthodes suivantes :

***Méthode 1 :***

Démontrer que : $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à $\Omega$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a - x \in \mathcal{D}_f \\ f(2a-x) + f(x) = 2b \end{cases}$$

**Exemple 6 :**

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\,;\, x \longmapsto 2 + \dfrac{3}{x-1}$;

Le point $\Omega\ (1\,;\,2)$ est centre de symétrie, car

$$f(2-x) + f(x) = 2 + \frac{3}{2-x-1} + 2 + \frac{3}{x-1}$$
$$= 2 - \frac{3}{x-1} + 2 + \frac{3}{x-1} = 4$$

***Méthode 2 :***

Démontrer que $f$ est impaire dans le repère $(O'\,;\,\overrightarrow{OI},\,\overrightarrow{OJ})$ tel que $O'(a\,;\,b)$.

**Exemple 7 :**

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\,;\, x \longmapsto 2 + \dfrac{3}{x-1}$

Soit : $X = x - 1$ ; $Y = y - 2$ ;

Donc l'expression de $f$ dans ce nouveau repère est :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\,;\, x \longmapsto \frac{3}{X}$$

#### 4. Asymptotes :

**a. Asymptotes parallèles aux axes de repère :**

- Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$, on dit que la droite $x = x_0$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$; c'est une droite parallèle à$(Oy)$,

**Exemple 8 :**

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\,;\, x \longmapsto \frac{1}{x^2}$

On a : $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$, donc, la droite $x = 0$ est une asymptote à $\mathcal{C}_f$ parallèle à $(Oy)$,

- Si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = l$, on dit que la droite $y = l$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ ; c'est une droite parallèle à $(Ox)$.

**Exemple 9 :**

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\,;\, x \longmapsto 2 - \frac{1}{x}$

On a : $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(2 - \frac{1}{x}\right) = 2$, donc, la droite $y = 2$ est une asymptote à $\mathcal{C}_f$ parallèle à $(Ox)$,

**b. Asymptotes obliques :**

Lorsqu'elle existe, une fonction affine :

$x \longmapsto ax + b$ ; telle que :

$\lim\limits_{x \to \mp\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$, on dit que la droite d'équation : $y = ax + b$ est une asymptote oblique à$\mathcal{C}_f$ .

**Exemple 10 :**

Soit $f$ : $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ; $x \longmapsto x + 1 - \frac{1}{x-3}$

On a : $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x-3} = 0$, donc, la droite d'équation $y = x + 1$ est une asymptote oblique à$\mathcal{C}_f$.

## II. Plan d'étude d'une fonction donnée :

- Déterminer l'ensemble de définition de la fonction à étudier, s'il n'est pas précisé,
- Etudier la parité éventuelle de la fonction donnée,
- Etudier la périodicité éventuelle de la fonction donnée,
- Etudier la dérivabilité de $f$ sur $\mathcal{D}_f$ , calculer $f'(x)$ pour tout $x$ de $\mathcal{D}_f$,
- A partir du signe de $f'(x)$, déduire le sens de variation de la fonction,
- Etudier les limites aux bornes de $\mathcal{D}_f$,
- Dresser le tableau de variation,
- Représenter, les asymptotes s'ils existent et les tangentes pour une représentation nette et soigneuse.

### Exemples d'étude de fonctions :
### Etude d'une fonction polynôme :

Soit $f$ : $x \longmapsto -x^3 + 6x^2 - 9x + 4$

■ Domaine de définition : la fonction $f$ est un polynôme ; donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$;

■ Limites aux bornes :

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = +\infty$,

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = -\infty$;

■Dérivabilité : $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, par définition, sa dérivée est :

$f'$: $x \longmapsto -3x^2 + 12x - 9$ ;

■ Sens de variation dd $f(x)$ ; soit $f'(x) = 0$ ;

$-3x^2 + 12x - 9 = 0 \Leftrightarrow -3(x^2 - 4x + 3) = 0$

$\Leftrightarrow -3(x-3)(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 3$ ou $x = 1$

$\forall x \in ]-\infty; 1] \cup [3; +\infty[$ : $f'(x) \leq 0$ d'où, $f$ est décroissante sur cet intervalle,

$\forall x \in [1; 3]$ : $f'(x) \geq 0$d'où, $f$ est croissante sur cet intervalle,

■Calcul de l'image de certains points :

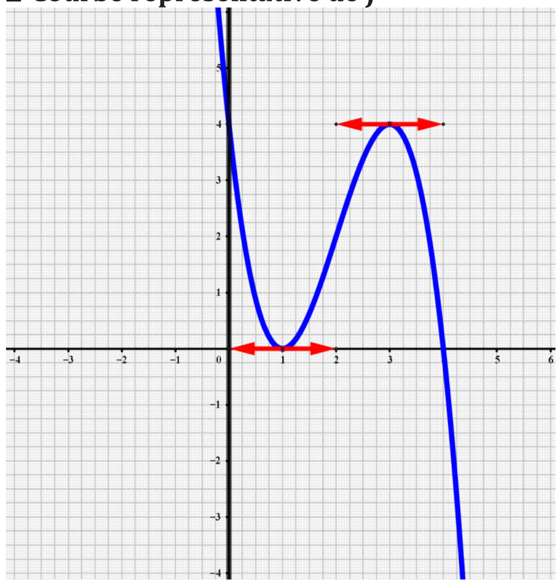
$f(1) = -1^3 + 6 \times 1^2 - 9 \times 1 + 4 = 10 - 10 = 0$ ;

$f(3) = -3^3 + 6 \times 3^2 - 9 \times 3 + 4 = 58 - 54 = 4$ .

■**Tableau de variation**

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $0$ | ↗ | $4$ | ↘ | $-\infty$ |

■ **Courbe représentative de $f$**



### Etude d'une function homographique

Soit $f$ : $x \longmapsto \dfrac{x+1}{x+2}$

■Domaine de définition : la fonction $f$ est une fonction homographique (rationnelle) ;

Donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} - \{-2\}$;

■ Limites aux bornes :

$\lim\limits_{x \to \mp\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \mp\infty} \dfrac{x}{x} = 1$,

$\lim\limits_{x \to (-2)^-} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to (-2)^+} f(x) = -\infty$;

■ Asymptotes : il y a deux asymptotes : $x = -2$ (A.V) ; $y = 1$ (A.H)

■ Dérivabilité : $f$ est dérivable sur $\mathbb{R} - \{-2\}$,.

par définition, sa dérivée est $f$ : $x \longmapsto \dfrac{1}{(x+2)^2}$

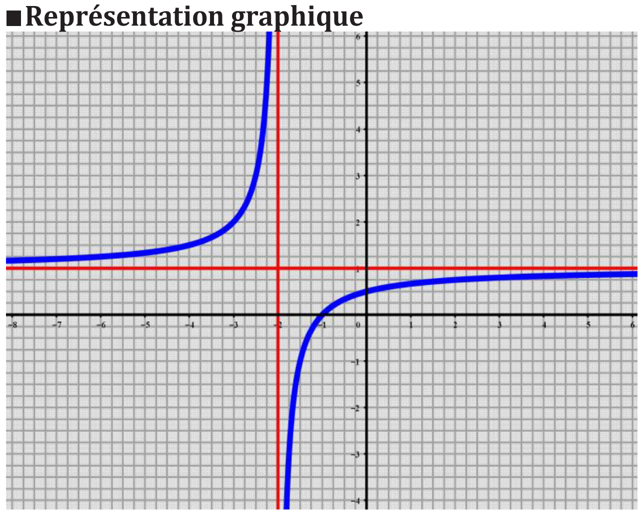
■ Sens de variation : de $f(x)$ ; $\forall x \in \mathcal{D}_f$, $f'(x) > 0$, donc $f$ est strictement croissante sur $\mathcal{D}_f$.

■ Calcul de l'image de certains points : $f(0) = \frac{1}{2}$.

■**Tableau de variation**

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $1$ | ↗ | $+\infty$ ‖ $-\infty$ | ↗ | $1$ |

■**Représentation graphique**







Math 6AS.indd 114 26/07/2024 10:42:31

**Etude de la fonction** $g : x \longmapsto \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} + \frac{2}{x+1}$

■Domaine de définition : $\mathcal{D}_g = \mathbb{R} - \{-1\}$.

■ Limites aux bornes :

$\lim\limits_{x \to (-1)^-} g(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to (-1)^+} g(x) = +\infty$;

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

■ Asymptotes : il y a deux asymptotes :

$x = -1\ (AV)\ et\ y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} (AO)$ ;

car $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{2}{x+1} = 0$

■Dérivabilité : comme $g$est une fonction rationnelle ; elle est continue et dérivable sur son domaine de définition.

La dérivée est la fonction : $g' : x \to \frac{(x-1)(x+3)}{2(x+1)^2}$

■Sens de variation :

Soit $g'(x) = 0$ ; donc $x = -3$ ou $x = 1$, d'où :

$\forall\ x \in ]-\infty\ ;\ -3] \cup [1\ ;\ +\infty[,\ g'(x) \geq 0$ ; donc $g$ est croissante sur ces intervalles ;

$\forall\ x \in [-3;\ -1[ \cup ]-1;\ 1]$ ;$g'(x) \leq 0$ ; d'où ,$g$ est décroissante sur ces intervalles.

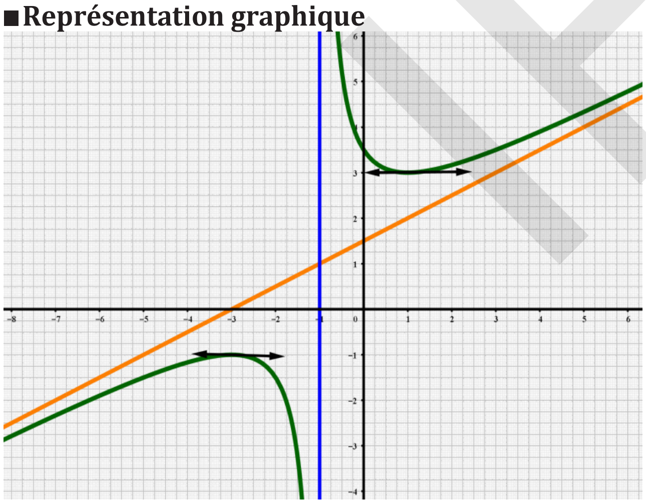
■Calcul de l'image de certains points :

$$g(-3) = \frac{1}{2}(-3) + \frac{3}{2} - \frac{2}{2} = -1\ ;\ g(1) = 3.$$

■**Tableau de variation**

| $x$ | $-\infty$ | | $-3$ | | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $-1$ | ↘ | $-\infty$ ‖ $+\infty$ | ↘ | $3$ | ↗ | $+\infty$ |

■**Représentation graphique**



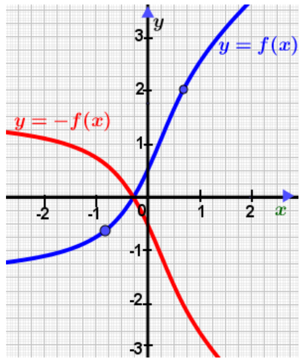
## III. Fonctions associées :

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\ ;\ \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$. Soit $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative d'une fonction $f$, $a$ et $b$ deux réels.

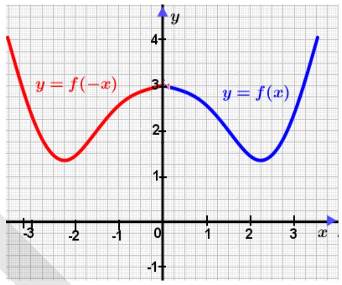
Les fonctions : $x \longmapsto -f(x)$ ; $x \longmapsto f(-x)$ ; $x \longmapsto |f(x)|$ ; $x \longmapsto f(x-a)$ ; $x \longmapsto f(x) + b$ ;
$x \longmapsto f(x-a) + b$ ; sont dites fonctions associées à $f$et leurs courbes se déduisent de celle de $f$.

● **Fonctions :** $x \longmapsto -f(x)$ ; $x \longmapsto f(-x)$

La courbe de la fonction $x \longmapsto -f(x)$ se déduit de celle de la fonction $f$ par la symétrie orthogonale d'axe $(OI)$.

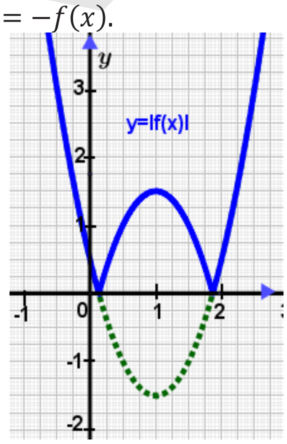



La courbe de la fonction $x \longmapsto f(-x)$ se déduit de celle de la fonction $f$ par la symétrie orthogonale d'axe $(OJ)$.



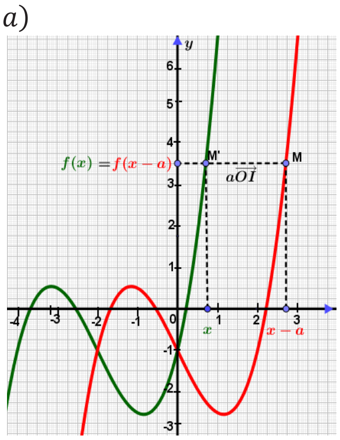

● **Fonction :** $x \longmapsto |f(x)|$

La courbe de cette fonction est la réunion des deux parties des courbes d'équations respectives :
$y = f(x)$ et $y = -f(x)$.



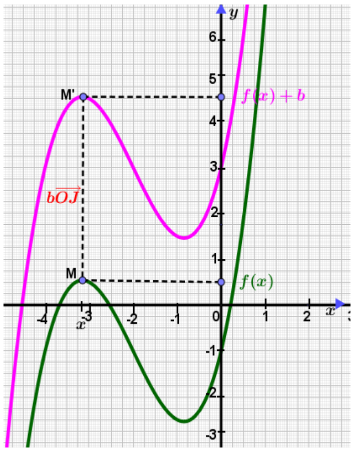

● **Fonction :** $x \longmapsto f(x-a)$

La courbe de cette fonction se déduit de celle de la fonction $f$ par la translation de vecteur $a.\overrightarrow{OI}$.



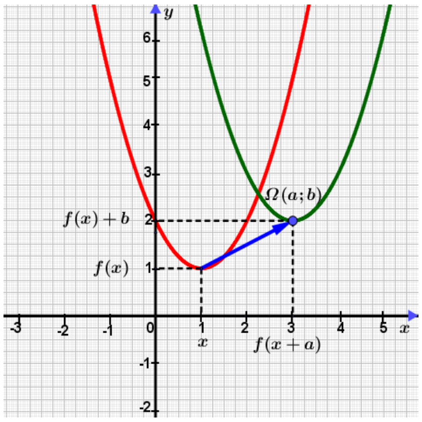

● **Fonction :** $x \longmapsto f(x) + b$

La courbe de cette fonctionse déduit de celle de la fonction $f$ par la translation de vecteur $b.\overrightarrow{OJ}$




● **Fonction :** $x \mapsto f(x-a)+b$

La courbe de cette fonction se déduit de celle de la fonction $f$ par la translation de vecteur $\vec{u}\binom{a}{b}$.




**Exemple 11 :**

Soit la fonction $f$ définie par : $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$

1°/ Dresser le tableau de variation de $f$ ;

2°/ Déterminer les intersections de $\mathcal{C}_f$ avec les axes de coordonnées ;

3°/ Dans un repère $(O\ ;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$, dresser la courbe $\mathcal{C}_f$.

**Réponse :**

$\mathcal{D}_f=\,]-\infty;\,-1[\,\cup\,]-1;1[\,\cup\,]1;\,+\infty[$

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{x^2+1}{x^2-1}=\dfrac{2}{0^+}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to-1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{x^2+1}{x^2-1}=\dfrac{2}{0^-}=-\infty\end{cases}$$

$\Rightarrow \boldsymbol{x=-1}.\,(\boldsymbol{AV})$

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x^2+1}{x^2-1}=\dfrac{2}{0^-}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x^2+1}{x^2-1}=\dfrac{2}{0^+}=+\infty\end{cases}$$

$\Rightarrow \boldsymbol{x=1}.\,(\boldsymbol{AV})$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+1}{x^2-1}=1$$

$\Rightarrow \boldsymbol{y=1}.\,(\boldsymbol{AH})$

$$f'(x)=\frac{2x(x^2-1)-2x(x^2+1)}{(x^2-1)^2}=\frac{-4x}{(x^2-1)^2}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow\frac{-4x}{(x^2-1)^2}=0\Rightarrow-4x=0\Rightarrow x=0$$

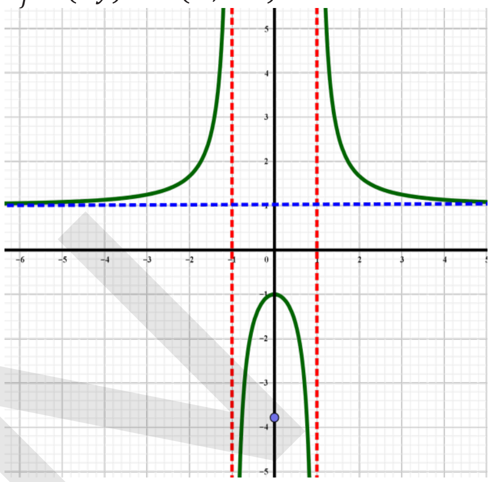
$f(0)=-1$

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | ‖ | $-$ | |
| $f(x)$ | $1$ ↗ | | $+\infty$ ‖ $-\infty$ | ↗ | $-1$ | ↘ | $-\infty$ ‖ $+\infty$ | ↘ | $1$ |

2°) Intersection avec les axes de coordonnées :

► $\mathcal{C}_f\cap(Ox)\Rightarrow f(x)=0\Rightarrow\frac{x^2+1}{x^2-1}=0\Rightarrow x^2+1=0$ *(Impossible)* donc, pas d'intersection.

► $\mathcal{C}_f\cap(Oy)\Rightarrow f(0)=\dfrac{0^2+1}{0^2-1}=\dfrac{1}{-1}=-1\Rightarrow$ $\mathcal{C}_f\cap(Oy)=A(0\ ;\ -1)$.



**Exemple 12 :**

On considère la fonction $f$ définie par :

$$f(x)=\frac{x^2+ax+b}{x-1}$$

1°) Déterminer les réels $a$ et $b$ sachant que $\mathcal{C}_f$ passe par $A(3\,;5)$ et admet en ce point une tangente parallèle à $(Ox)$ ;

2°) Dresser le TV de $f$ ;

3°) construire $\mathcal{C}_f$ et ses asymptotes.

**Réponse :**

1°) Déterminons les réels $a$ et $b$ :

$\mathcal{C}_f$ passe par $A(3\ ;\ 5)\Rightarrow f(3)=5$.

$$\Rightarrow\frac{3^2+3a+b}{3-1}=5\Rightarrow\boldsymbol{3a+b=1}\ \boxed{1}$$

$\mathcal{C}_f$ admet en $A$ une tangente parallèle à $(Ox)\Rightarrow$ $f'(3)=0$.

$$f'(x)=\frac{(2x+a)(x-1)-(x^2+ax+b)}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{2x^2-2x+ax-a-x^2-ax-b}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{x^2-2x-a-b}{(x-1)^2}$$

$$f'(3)=\frac{3^2-2\times3-a-b}{(3-1)^2}=0$$

$$\Rightarrow\frac{3-a-b}{4}=0\Rightarrow\boldsymbol{a+b=3}\boxed{2}$$

$$\begin{cases}\boldsymbol{3a+b=1}\boxed{1}\\ \boldsymbol{a+b=3}\boxed{2}\end{cases}\Rightarrow\boldsymbol{a=-1}\text{ et }\boldsymbol{b=4}.$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{f(x)=\frac{x^2-x+4}{x-1}}$$

2°) $\mathcal{D}_f=]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to-\infty} x=-\infty,$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to+\infty} x=+\infty$$

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x^2-x+4}{x-1}=\dfrac{4}{0^-}=-\infty\\[2mm] \lim\limits_{x\to1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x^2-x+4}{x-1}=\dfrac{4}{0^+}=+\infty\end{cases}$$

$\Rightarrow \boldsymbol{x=1}$. (***AV***)

$$f'(x)=\frac{(2x-1)(x-1)-(x^2-x+4)}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{2x^2-3x+1-x^2+x-4}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow\frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}=0\Rightarrow x^2-2x-3=0$$

$\Rightarrow (x-3)(x+1)=0$

$x=-3$ ou $x=-1$ ; $f(-1)=-3$ et $f(3)=5$.

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $-3$ | ↘ | $-\infty$ ‖ $+\infty$ | ↘ | $5$ | ↗ | $+\infty$ |

**3°)** En changeant d'écriture, on peut écrire :

$$f(x)=x+\frac{4}{x-1}$$

Comme $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{4}{x-1}=0\Rightarrow\Delta$: $\boldsymbol{y=x}$ est ***AO*** à $\boldsymbol{\mathcal{C}_f}$

Intersection avec les axes de coordonnées :

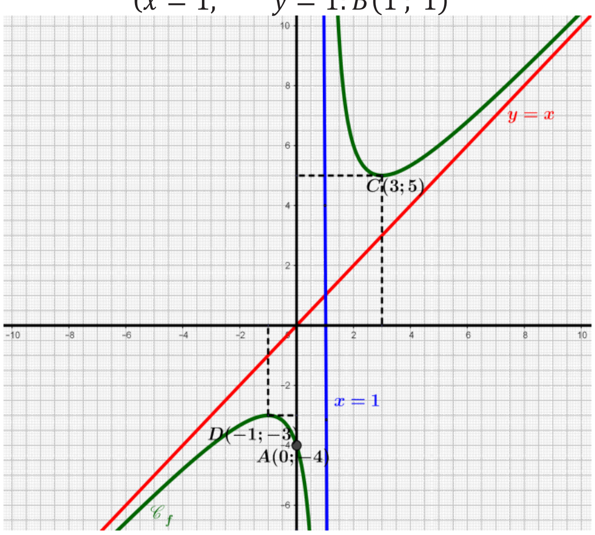
$\boldsymbol{\mathcal{C}_f\cap(Ox)}$ **:** $f(x)=0\Rightarrow x^2-x+4=0$

$\Rightarrow \Delta=1-16=-15<0$

pas de solution, donc pas d'intersection.

$\boldsymbol{\mathcal{C}_f\cap(Oy)}$ **:** $f(0)=\frac{0^2-0+4}{0-1}=-4$, donc $\mathcal{C}_f$ coupe $(Oy)$ au point $A(0\,;\,-4)$.

$$\Delta: y=x\Rightarrow\begin{cases}x=0, & y=0: O(0\,;\,0)\\ x=1, & y=1: B(1\,;\,1)\end{cases}$$




## Exercice 1 :

Soit la fonction $f$ définie par : $f(x)=\frac{2x^2-7x+5}{x-3}$

1°) Dresser le tableau de variation de $f$ ;

2°) Déterminer les intersections de $\mathcal{C}_f$ avec les axes de coordonnées puis construire $\mathcal{C}_f$ et ses asymptotes ;

3°) Résoudre graphiquement l'équation $f(x)=m$, tel que $m$ est un paramètre réel.

**Solution :**

**1°)** $f(x)=\dfrac{2x^2-7x+5}{x-3}$

$\Rightarrow \mathcal{D}_f=\mathbb{R}-\{3\}=]-\infty;3[\cup]3;+\infty[$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2}{x}=\lim_{x\to-\infty}2x=-\infty,$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{x}=\lim_{x\to+\infty}2x=+\infty$$

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to3^-}\dfrac{2x^2-7x+5}{x-3}=\dfrac{2}{0^-}=-\infty\\[2mm] \lim\limits_{x\to3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to3^+}\dfrac{2x^2-7x+5}{x-3}=\dfrac{2}{0^+}=+\infty\end{cases}$$

$\Rightarrow \boldsymbol{x=3}$ (***AV***)

$$f'(x)=\frac{(4x-7)(x-3)-(2x^2-7x+5)}{(x-3)^2}$$

$$=\frac{4x^2-12x-7x+21-2x^2+7x-5}{(x-3)^2}$$

$$=\frac{2x^2-12x+16}{(x-3)^2},$$

$f'(x)=0\Rightarrow 2x^2-12x+16=0$

$\Delta=16\Rightarrow\begin{cases}x_1=4\\ x_2=2\end{cases},\quad f(2)=1,\quad f(4)=9.$

| $x$ | $-\infty$ | | $2$ | | $3$ | | $4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $1$ | ↘ | $-\infty$ ‖ $+\infty$ | ↘ | $9$ | ↗ | $+\infty$ |

$$f(x)=2x-1+\frac{2}{x-3}$$

Comme $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2}{x-3}=0\Rightarrow\boldsymbol{y=2x-1}$ est $(AO)$

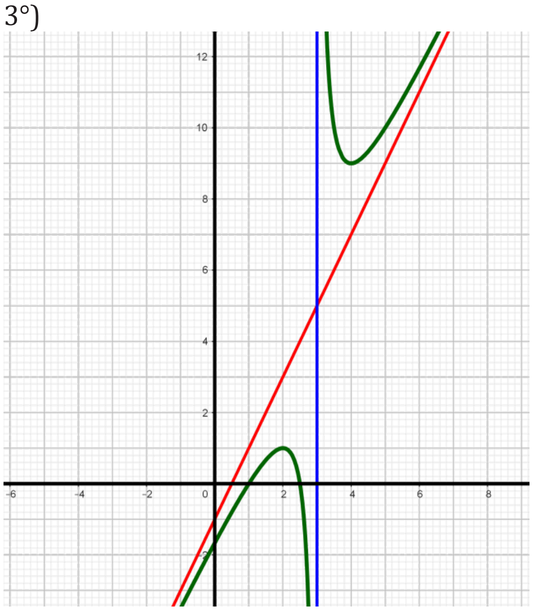
2°) $\boldsymbol{\mathcal{C}_f\cap(Ox)}$ **:** $f(x)=0\Rightarrow 2x^2-7x+5=0$

$$2-7+5=0\Rightarrow\begin{cases}x_1=1\\ x_2=\dfrac{5}{2}\end{cases}\Rightarrow A(1;0),\quad B\left(\frac{5}{2};0\right).$$

$\boldsymbol{\mathcal{C}_f\cap(Oy)}$ **:** $f(0)=\frac{-5}{3}$, donc $\mathcal{C}_f$ coupe $(Oy)$ au point $A\left(0\,;\,\frac{-5}{3}\right)$.

$$\Delta: y=2x-1\Rightarrow\begin{cases}x=0, & y=-1: O(0\,;0)\\ x=1, & y=1: B(1\,;1)\end{cases}$$

3°)



- $\forall m \in ]-\infty; 1[ \cup ]9; +\infty[ \Longrightarrow f(x) = m$ admet deux
- Si $m \in \{1; 4\} \Longrightarrow f(x) = m$ admet une solution.
- Si $m \in ]1; 9[ \Longrightarrow f(x) = m$ n'admet pas de solution.

## Extrémums :

### Définition :

Soit $f$ une fonction dérivable sur un intervalle $I$ et $x_0 \in I$. Si $f'$ s'annule en $x_0$ en changeant de signe, alors $f$ admet un extrémum au point $x_0$.

Si $f'$ change du négatif au positif cet extrémum est un minimum.

Si $f'$ change du positif au négatif cet extrémum est un maximum.

### Remarque 1 :

Au niveau d'un extrémum, la courbe représentative d'une fonction $f$ admet une tangente horizontale.

## Bijection :

### Définition :

Si $f$ est une fonction continue et strictement monotone *(C-à-d. strictement décroissante ou strictement croissante)* sur un intervalle $I$, on dit alors que $f$ réalise une bijection de $I$ sur un intervalle $J = f(I)$.

### Exemple 13 :

Soit la fonction $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$

Montrer que $f$ réalise des bijections sur chacun des intervalles $]-\infty; 0]$, $[0; 2]$ et $[2; +\infty[$.

En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet trois solutions $\alpha, \beta$ et $\gamma$ sur $\mathbb{R}$.

**Réponse :**

$\mathcal{D}_f = ]-\infty; +\infty[ = \mathbb{R}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$,

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$

$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$ ;

$f'(x) = 0 \Longrightarrow x = 0$ ou $x = 2$

| $x$ | $-\infty$ | $\alpha$ | $0$ | $\beta$ | $2$ | $\gamma$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ ↗ | $0$ ↗ | $3$ ↘ | $0$ ↘ | $-1$ ↗ | $0$ ↗ | $+\infty$ |

- Comme $f$ est continue et strictement croissante de l'intervalle $I_1 = ]-\infty; 0[$ sur l'intervalle $J_1 = ]-\infty; 3[$, $f$ réalise donc une bijection $g_1$ de $I_1$ sur $J_1$.
- Comme $f$ est continue et strictement croissante de l'intervalle $I_2 = ]0; 2[$ sur l'intervalle $J_2 = ]3; -1[$, $f$ réalise donc une bijection $g_2$ de $I_2$ sur $J_2$.
- Comme $f$ est continue et strictement croissante de l'intervalle $I_3 = ]2; +\infty[$ sur l'intervalle $J_3 = ]-1 ; +\infty[$, $f$ réalise donc une bijection $g_3$ de $I_3$ sur $J_3$.

Comme $0 \in J_1$, il existe donc $\alpha \in I_1$ tel que $f(\alpha) = 0$, et comme $0 \in J_2$, il existe donc $\beta \in I_2$ tel que $f(\beta) = 0$ et comme $0 \in J_3$, il existe donc $\gamma \in I_3$ tel que $f(\gamma) = 0$

L'équation $f(x) = 0$ admet donc trois solutions $\alpha, \beta$ et $\gamma$.

### Exercice 2 :

Soit la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{2x^2-3x}{x^2-3x+3}$

1°) Dresser le tableau de variation de $f$ ;

2°) Résoudre l'équation $f(x) = 0$ en interprétant les résultats ;

3°) Construire $\mathcal{C}_f$ ;

4°) Soit la fonction $g(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$.

Montrer que . $f''(x) = \dfrac{6g(x)}{(x^2-3x+3)^2}$ ;

5°) Etudier $g(x)$ et montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet 3 solutions $\alpha, \beta, \gamma$ ;

6°) Soit $A, B, C$ les points de $\mathcal{C}_f$ d'abscisses respectifs : $\alpha, \beta, \gamma$.

a) Montrer que $A, B$ et $C$ sont alignés ;

b) Etudier les signes de $f''(x)$ ;

c) Que représente $A, B, C$ pour $\mathcal{C}_f$ ?

**Solution :**

**1°)** $f(x) = \dfrac{2x^2-3x}{x^2-3x+3}$

$f(x)$ existe si $x^2 - 3x + 3 \neq 0 \Longrightarrow \Delta = -3 < 0 \Longrightarrow \mathcal{D}_f = ]-\infty; +\infty[$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x^2}{x^2} = 2 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2}{x^2} = 2 \end{cases} \Longrightarrow \boldsymbol{y = 2}\ \ AH$$

$f'(x) = \dfrac{-3x^2 + 12x - 9}{(x^2-3x+3)^2}$, $\quad f'(x) = 0$

$\Longrightarrow -3x^2 + 12x - 9 = 0 \Longrightarrow x_1 = 1$ et $x_2 = 3$

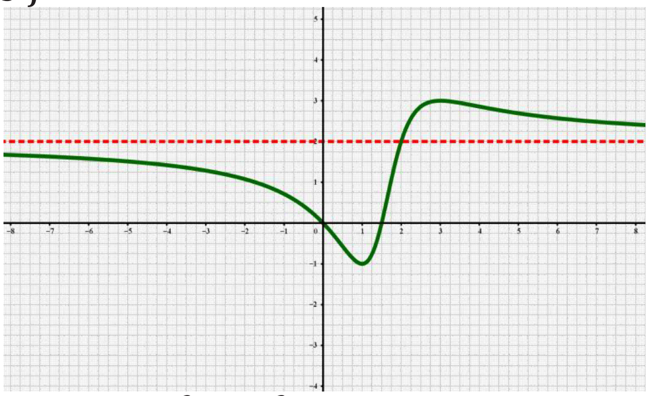
| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $2$ | ↘ | $-1$ | ↗ | $3$ | ↘ | $2$ |

**2°)** $f(x) = 0 \Longrightarrow 2x^2 - 3x = 0 \Longrightarrow x(2x-3) = 0$

$\Longrightarrow x = 0$ ou $x = \dfrac{3}{2} \Longrightarrow O(0; 0)$ et $A\left(\dfrac{3}{2}; 0\right)$ sont les

points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec $(Ox)$.
$f(x) = 2 \Longrightarrow 2x^2 - 3x = 2(x^2 - 3x + 3)$
$\Longrightarrow 2x^2 - 3x = 2x^2 - 6x + 6 \Longrightarrow 3x = 6 \Longrightarrow x = 2$
$\Longrightarrow B(2; 2)$ est le point d'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec $(Oy)$.

**3°)**



**4°)** $f''(x) = \dfrac{6x^3 - 36x^2 + 54x - 18}{(x^2 - 3x + 3)^3}$
$= \dfrac{6(x^3 - 6x^2 + 9x - 3)}{(x^2 - 3x + 3)^3}$
On sait que $g(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$

$$\Longrightarrow f''(x) = \frac{6g(x)}{(x^2 - 3x + 3)^3}$$

**5°)** $\mathcal{D}_g = ]-\infty; +\infty[$
$\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$
$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$
$g'(x) = -3x^2 + 12x - 9, \quad g'(x) = 0$
$\Longrightarrow -3x^2 + 12x - 9 = 0 \Longrightarrow x = 1$ et $x = 3$

| $x$ | $-\infty$ | $\alpha$ | $1$ | $\beta$ | $3$ | $\gamma$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | $-\infty$ ↗ | $0$ ↗ | $1$ ↘ | $0$ ↘ | $-3$ ↗ | $0$ ↗ | $+\infty$ |

Les signes de $g$

| $x$ | $-\infty$ | | $\alpha$ | | $1$ | | $\beta$ | | $2$ | | $\gamma$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | \| | $+$ | $0$ | $-$ | \| | $-$ | $0$ | $+$ | |

**6°) a)** Soit $A(\alpha\,; f(\alpha)),\ B(\beta\,; f(\beta)),\ C(\gamma\,;\ f(\gamma))$
On a $g(\alpha) = 0 \Longrightarrow \alpha^3 - 6\alpha^2 + 9\alpha - 3 = 0$
$\Longrightarrow \alpha^3 - 6\alpha^2 + 9\alpha - 3 + (2\alpha^2 - 3\alpha)$
$= 0 + 2\alpha^2 - 3\alpha$
$\Longrightarrow \alpha^3 - 4\alpha^2 + 6\alpha - 3 = 2\alpha^2 - 3\alpha$
$\Longrightarrow \dfrac{\alpha^3 - 4\alpha^2 + 6\alpha - 3}{\alpha^2 - 3\alpha + 3} = \dfrac{2\alpha^2 - 3\alpha}{\alpha^2 - 3\alpha + 3} = f(\alpha)$
$\Longrightarrow \dfrac{2\alpha^2 - 3\alpha}{\alpha^2 - 3\alpha + 3} = \alpha - 1 \Longrightarrow f(\alpha) = \alpha - 1$
De la même façon on obtient :
$f(\beta) = \beta - 1$ et $f(\gamma) = \gamma - 1$. On a les points :
$A(\alpha\,; \alpha - 1),\ B(\beta;\ \beta - 1),\ C(\gamma;\ \gamma - 1)$.
$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}\beta - \alpha\\ \beta - \alpha\end{pmatrix} = (\beta - \alpha)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$,
$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}\gamma - \alpha\\ \gamma - \alpha\end{pmatrix} = (\gamma - \alpha)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires à un même vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, alors ils sont colinéaires entre eux. D'où ; les points $A$, $B$ et $C$ sont alignés.
La droite $(D)$ contenant les points $A, B$ et $C$ est dirigée par le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, son équation est de la forme $x - y + c = 0$ et comme elle contient le point $C(\alpha;\ \alpha - 1)$, on a $\alpha - (\alpha - 1) + c = 0 \Longrightarrow c = -1$
D'où ; $(D)\colon x - y - 1 = 0$
**b)** $f''(x) = 0 \Longrightarrow 6g(x) = 0$ *(le dénominateur étant positif)*, $\Longrightarrow x = \alpha$ *ou* $x = \beta$ *ou* $x = \gamma$.
$\forall x \in ]-\infty;\ \alpha[ \cup ]\beta;\ \gamma[ \Longrightarrow f''(x) < 0$
$\forall x \in ]\alpha;\ \beta[ \cup ]\gamma;\ +\infty[ \Longrightarrow f''(x) > 0$
**c)** $f''$ s'annule en changeant de signe aux points $A$, $B$ et $C$, ces points sont donc des points d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}_f$.

**Remarque 2 :**

1°) Si une fonction $f$ réalise une bijection d'un intervalle $I$ sur un intervalle $J = f(I)$, alors elle admet une fonction *(bijection)* réciproque notée $f^{-1}$ de $J$ sur $I$ et la courbe $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ se déduit de $\mathcal{C}_f$ par la symétrie orthogonale d'axe la première bissectrice $(\Delta\colon y = x)$.
2°) Si $f$ est croissante, alors $f^{-1}$ l'est aussi. Si $f$ est décroissante, alors $f^{-1}$ l'est aussi.
3°) Si $f^{-1}$ est dérivable au point d'abscisse $y$, alors ;

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'\big(f^{-1}(y)\big)}$$

4°) $(f \circ g)(x) = f'\big(g(x)\big) \times g'(x)$

**Exemple 14 :**

Soit la fonction $f$ définie par : $f(x) = -1 + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$
1°) Etudier la dérivabilité de $f$ au point d'abscisse 0 ;
2°) Dresser TV de $f$ ;
3°) a)Montrer que $f$ réalise une bijection de l'intervalle $I = ]-1; 1[$ sur un intervalle $J$ à déterminer ;
b) Construire $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ dans le même repère ;
4°) Montrer que $f^{-1}$ est dérivable au point $B$ d'abscisse $-1$ et calculer $(f^{-1})'(-1)$ ;
5°) Expliciter $f^{-1}(x)$.

**Réponse :**

**1°)** Dérivabilité de $f$ au point d'abscisse 0 :

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{-1 + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + 1}{x}$$
$$= \lim_{x \to 0} \frac{x}{x\sqrt{1 - x^2}} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = 1$$

D'où, $f$ est dérivable au point d'abscisse 0 et $f'(0) = 1$.
**2°)** Tableau de variation de $f$ :
$f$ est définie si $1 - x^2 > 0$.

$$1-x^2=0 \Rightarrow (1-x)(1+x)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ ou \\ x=1 \end{cases}$$

| $x$ | $-\infty$ | $-1$ | | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $1-x^2$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ |

$\Rightarrow \mathcal{D}_f = ]-1\,;1[$,

$\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to-1^+} -1+\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} = -\infty \Rightarrow \boldsymbol{x}$
$= \boldsymbol{-1}\ AV.$

$\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to1^-} -1+\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} = +\infty \Rightarrow \boldsymbol{x=1}\ AV$

$$f'(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}+x\times\frac{2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2} = \frac{1-x^2+x^2}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

$f'(x) = \dfrac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} > 0, \forall x\in ]-1;1[ \Rightarrow f \nearrow$

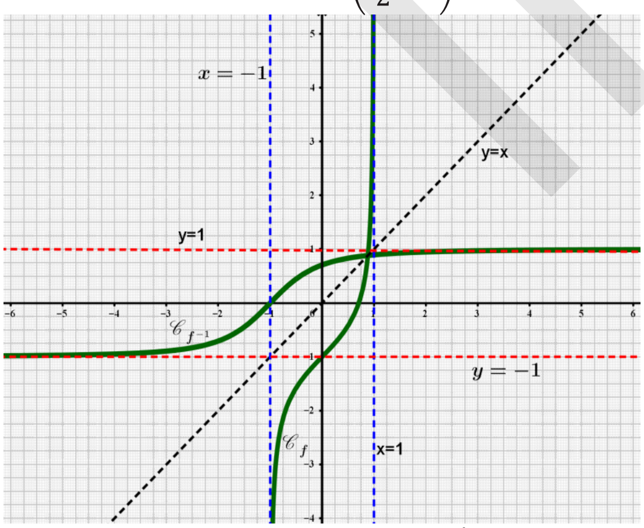
| $x$ | $-1$ | | $1$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

**3°) a)** Comme $f$ est continue et strictement croissante de $]-1;1[$ sur $]-\infty;\,+\infty[$, $f$ réalise donc une bijection de l'intervalle $I=]-1;1[$ sur un intervalle $J=]-\infty;\,+\infty[$.

**c)** $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ dans le même repère :

$\mathcal{C}_f \cap (Oy) \Rightarrow f(0)=-1 \Rightarrow A(0;\,-1)$

$\mathcal{C}_f \cap (Ox) \Rightarrow f(x)=0 \Rightarrow B\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2};\,0\right)$




**4°)** Dérivabilité de $f^{-1}$ en $-1$ et $(f^{-1})'(-1)$ :

On a $f$ est dérivable en $0 \Rightarrow f^{-1}$ est dérivable en $-1$

$\Rightarrow (f^{-1})'(-1) = \dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(-1)\right)} = \dfrac{1}{f'(0)}$

$= \dfrac{1}{1} = 1 \Rightarrow \boldsymbol{(f^{-1})'(-1) = 1}$

**5°/** Explicitons $f^{-1}(x)$ :

$f(x) = y = -1+\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow y+1$

$= \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow (y+1)^2 = \left(\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2$

$\Rightarrow (y+1)^2 = \dfrac{x^2}{1-x^2} \Rightarrow (y+1)^2(1-x^2) = x^2$

$\Rightarrow (y+1)^2 - (y+1)^2x^2 = x^2$

$\Rightarrow x^2 + (y+1)^2x^2 = (y+1)^2$

$\Rightarrow x^2(1+(y+1)^2) = (y+1)^2$

$\Rightarrow x^2 = \dfrac{(y+1)^2}{1+(y+1)^2} \Rightarrow x = \sqrt{\dfrac{(y+1)^2}{1+(y+1)^2}}$

$\Rightarrow x = \dfrac{\sqrt{(y+1)^2}}{\sqrt{1+(y+1)^2}} \Rightarrow x = \dfrac{y+1}{\sqrt{1+(y+1)^2}}$

$\Rightarrow x = \dfrac{y+1}{\sqrt{y^2+2y+2}} \Rightarrow \boldsymbol{f^{-1}(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}}$

**Exercice 3 :**

On pose $f(x) = x^2-4x+3$

**1°)** Etudier la dérivabilité de $f$ et tracer sa courbe $C$ représentative dans un repère orthonormé$(O;\,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

**2°)** Soit $g$ la restriction de $f$ sur l'intervalle$[2;\,+\infty[$,

**a)** Montrer que $g$ admet une fonction réciproque $g^{-1}$ définie sur intervalle $J$ que l'on déterminera.

**b)** Déterminer le domaine $D$ de dérivabilité de $g^{-1}$.

**c)** Donner l'expression de $g^{-1}(x)$.

**d)** Calculer de deux façons $(g^{-1})'(x)$pour $x\in D$.

**e)** Tracer la courbe $C'$ de $g^{-1}$ dans le repère$(O;\,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

**Solution :**

**1°)** $\mathcal{D}_f = ]-\infty;\,+\infty[ = \mathbb{R}$.

$f$est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ (*car polynôme*).

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^2-4x+3$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = \lim\limits_{x\to-\infty} (-\infty)^2 = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2-4x+3$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = \lim\limits_{x\to+\infty} (+\infty)^2 = +\infty$

$f'(x) = 2x-4,\qquad f'(x)=0 \Rightarrow 2x-4=0$

$\Rightarrow x=2,\qquad f(2)=-1$

**Tableau de variations**

| $x$ | $-\infty$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $-1$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2-4x+3}{x}$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$

D'où, $C$ admet une $BP//(y'Oy)$ au voisinage de $-\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-4x+3}{x}$

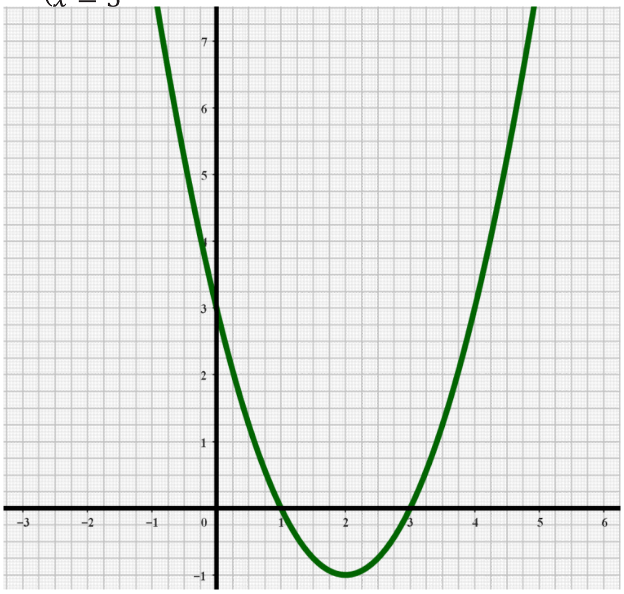
$= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$

D'où, $C$ admet une $BP//(y'Oy)$ au voisinage de $+\infty$.

Intersection avec les axes de coordonnées

$f(0) = 3 \Rightarrow C\cap(y'Oy) = A(0;\,3),\qquad f(x)=0$

$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ ou \\ x = 3 \end{cases} \Rightarrow C \cap (x'Ox) = \begin{cases} B(1;0) \\ C(3;0) \end{cases}$



**2°/a)**

| $x$ | $2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $g'(x)$ | $0$ $+$ | |
| $g(x)$ | $-1$ $\nearrow$ | $+\infty$ |

Comme $g$ est continue et strictement monotone sur l'intervalle $I = [2;\ +\infty[$ elle réalise une bijection de $I$ sur l'intervalle $J = g(I) = [-1;\ +\infty[$

**b)** Comme $g'(2) = 0$, la fonction $g^{-1}$ n'est pas dérivable en $g(2) = -1$. Et comme $g$ est dérivable et comme sa dérivée ne s'annule pas sur l'intervalle ouvert $]2;\ +\infty[$, la fonction $g^{-1}$ est dérivable sur l'intervalle :

$$g(]2;\ +\infty[) = ]-1;\ +\infty[$$

Le domaine de dérivabilité de $g^{-1}$ est donc l'intervalle ouvert $D = ]-1;\ +\infty[$.

**c)** $g^{-1}(x) = y \Rightarrow g(y) = x, \begin{cases} f(y) = x \\ y \in ]2;\ +\infty[ \end{cases}$

$f(y) = x \Rightarrow y^2 - 4y + 3 = x \Rightarrow y^2 - 4y + 4 = x + 1$

$\Rightarrow (y-2)^2 = x + 1 \Rightarrow y = 2 - \sqrt{x+1}$ ou $y = 2 + \sqrt{x+1}$. Or, $y \in ]2;\ +\infty[$ c'est-à-dire que $y > 2$

D'où, l'expression retenue est $y = 2 + \sqrt{x+1}$

$$\boldsymbol{g^{-1}(x) = 2 + \sqrt{x+1}}$$

**d)** Calcul de $(g^{-1})'(x)$ pour $x \in D$

**Méthode 1 :**

Dérivation de l'expression de $g^{-1}(x)$ on a ;

$g^{-1}(x) = 2 + \sqrt{x+1}, \qquad (g^{-1})'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$

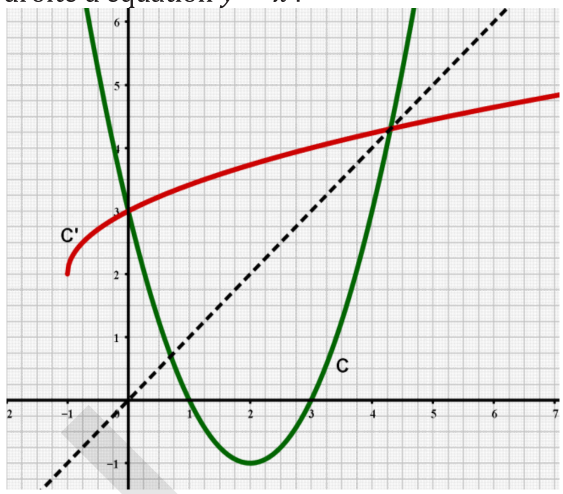
**Méthode 2 :**

Formule de la dérivée de fonction de la fonction réciproque :

$\forall x \in J, \qquad (g^{-1})'(x) = \dfrac{1}{g'(g^{-1}(x))}$

$= \dfrac{1}{2g^{-1}(x) - 4} = \dfrac{1}{4 + 2\sqrt{x+1} - 4} = \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$

**e)** La courbe $C'$ de $g^{-1}$ dans le repère $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est la symétrique de celle $C$ de $g$ par rapport à la droite d'équation $y = x$ :




## Exercice 4 :

Soit $f$ la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{4-2x}{\sqrt{4x-x^2}}$

1°) Etudier les variations de $f$ et tracer sa courbe représentative $C$ dans un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

2°) a) Montrer que $f$ admet une fonction réciproque $f^{-1}$ définie sur un intervalle $J$ à préciser.

b) Montrer que $f^{-1}$ est dérivable sur $J$.

c) Donner l'expression de $f^{-1}(x)$.

d) Calculer $(f^{-1})(x)$sur $J$.

e) Tracer la courbe représentative $C'$ de $f^{-1}$avec $C$ dans le même repère.

3°) a) Montrer que le point $A(2, 0)$ est un centre de symétrie de $C$.

b) En déduire que $C'$ admet un centre de symétrie à préciser.

**Solution :**

**1°)** $f$ est définie si $4x - x^2 > 0$; $4x - x^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ ou \\ x = 4 \end{cases}$

| $x$ | $-\infty$ $\quad$ $0$ $\quad$ $\quad$ $4$ $\quad$ $+\infty$ |
|---|---|
| $4x - x^2$ | $-$ $\quad$ $0$ $\quad$ $+$ $\quad$ $0$ $\quad$ $-$ |

$\mathcal{D}_f = ]0; 4[$ ; $f$est continue et dérivable sur $\mathcal{D}_f$

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{4-2x}{\sqrt{4x-x^2}} = \dfrac{4}{0^+} = +\infty,$

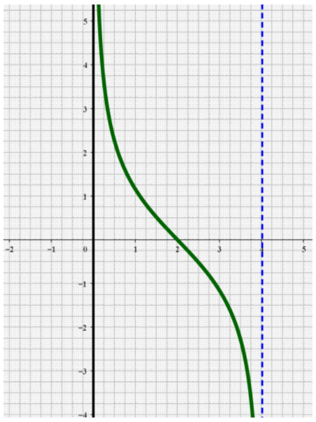
$\lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 4^-} \dfrac{4-2x}{\sqrt{4x-x^2}} = \dfrac{-4}{0^+} = -\infty$

$f'(x) = \dfrac{-2\sqrt{4x-x^2} - \frac{(4-2x)^2}{2\sqrt{4x-x^2}}}{4x-x^2}$

$$= \frac{-4(4x - x^2) - (4 - 2x)^2}{2(4x - x^2)\sqrt{4x - x^2}}$$
$$= \frac{-16x + 4x^2 - 16 + 16x - 4x^2}{2(4x - x^2)\sqrt{4x - x^2}}$$
$$= \frac{-8}{(4x - x^2)\sqrt{4x - x^2}} < 0, \qquad \forall x \in ]0;4[$$

| $x$ | $0$ | | $4$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

**Asymptotes :**
$x = 0\ (A.V)$ *et* $x = 4\ (A.V)$ ; $0 \notin \mathcal{D}_f \Rightarrow C \cap$
$(y'Oy) = \phi$
$f(x) = 0 \Rightarrow x = 2\ (\in \mathcal{D}_f) \Rightarrow C \cap (x'Ox) = A(2;0)$



**2°) a)** Comme $f$ est continue et strictement monotone sur l'intervalle $I = ]0;4[$, elle admet donc une fonction réciproque $f^{-1}$ définie sur $J = f(I) = \mathbb{R}$.

**b)** Comme $f$ est dérivable sur $I$, et comme ;
$\forall x \in ]0;4[, f'(x) \neq 0$, la fonction $f^{-1}$ est donc dérivable sur $f(]0;4[) = J = \mathbb{R}$.

**c)** $f^{-1}(x) = y \Rightarrow x = f(y)$
$$\frac{4 - 2y}{\sqrt{4y - y^2}} = x \Rightarrow \frac{(4 - 2y)^2}{4y - y^2} = x^2$$
$$\Rightarrow 16 - 16y + 4y^2 = x^2(4y - y^2)$$
$$\Rightarrow (x^2 + 4)y^2 - 4(x^2 + 4)y = -16$$
$$\Rightarrow (x^2 + 4)(y^2 - 4y) = -16 \Rightarrow y^2 - 4y = \frac{-16}{x^2 + 4}$$
$$\Rightarrow y^2 - 4y + 4 = \frac{-16}{x^2 + 4} + 4 \Rightarrow (y - 2)^2$$
$$= \frac{-16 + 4x^2 + 16}{x^2 + 4} = \frac{4x^2}{x^2 + 4} \Rightarrow (y - 2)^2 = \frac{4x^2}{x^2 + 4}$$
$$\Rightarrow y - 2 = -\frac{2x}{\sqrt{x^2 + 4}} \Rightarrow y = 2 - \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 4}}$$

*D'où,* $\quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \boldsymbol{f^{-1}(x) = 2 - \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 4}}}$

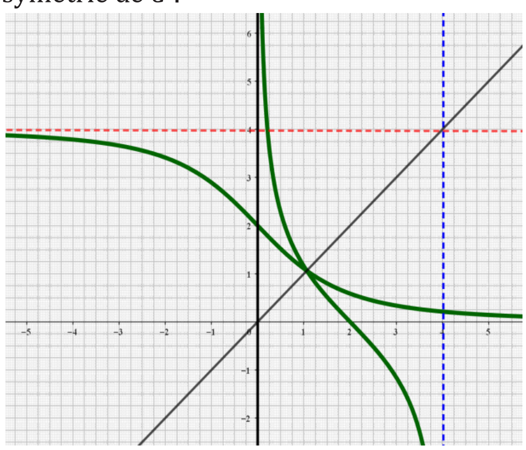
**d)** Comme $f^{-1}(x) = 2 - \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 4}}$, on a donc ;

$$(f^{-1})'(x) = -\frac{2\sqrt{x^2 + 4} - \frac{4x^2}{2\sqrt{x^2+4}}}{\left(\sqrt{x^2 + 4}\right)^2}$$
$$= -\frac{\frac{4x^2 + 16 - 4x^2}{2\sqrt{x^2+4}}}{x^2 + 4}$$
$$= \frac{-16}{2(x^2 + 4)\left(\sqrt{x^2 + 4}\right)}$$

$$\boldsymbol{(f^{-1})'(x) = \frac{-8}{(x^2 + 4)\left(\sqrt{x^2 + 4}\right)}}$$

**3°)** Montrons que le point $A(2;0)$ est un centre de symétrie de la courbe $C$ de $f$. Pour cela, on doit avoir ;
$$\forall x \in \mathcal{D}_f, \begin{cases} 2a - x \in \mathcal{D}_f \\ f(x) + f(2a - x) = 2b \end{cases} (a;b) = (2;0)$$
$x \in \mathcal{D}_f \Rightarrow 0 < x < 4 \Rightarrow -4 < -x < 0$
$\Rightarrow 4 - 4 < 4 - x < 4 + 0 \Rightarrow 0 < 4 - x < 4$
Donc, $\forall x \in \mathcal{D}_f,\ 2a - x = 4 - x \in \mathcal{D}_f \boxed{1}$
$f(x) + f(2a - x) = f(x) + f(4 - x)$
$$= \frac{4 - 2x}{\sqrt{4x - x^2}} + \frac{4 - 2(4 - x)}{\sqrt{4(4 - x) - (4 - x)^2}}$$
$$= \frac{4 - 2x}{\sqrt{4x - x^2}} + \frac{4 - 8 - 2x}{\sqrt{16 - 4x - 16 + 8x - x^2}}$$
$$= \frac{4 - 2x}{\sqrt{4x - x^2}} + \frac{-4 - 2x}{\sqrt{4x - x^2}} = \frac{4 - 2x - 4 - 2x}{\sqrt{4x - x^2}}$$
$$= \frac{0}{\sqrt{4x - x^2}} = 0 = 2 \times 0 = 2b$$
Donc, $\forall x \in \mathcal{D}_f,\ f(x) + f(2a - x) = 2b \boxed{2}$
Donc, de $\boxed{1}$ et $\boxed{2}$, le point $A(2\,;0)$ est le centre de symétrie de la courbe $C$ de $f$.

**b)** Comme $A(2\,;0)$ est centre de symétrie de $C$, son symétrique $A'(0;2)$ par rapport à la droite $y = x$ dans le repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est le centre de symétrie de $C'$.



## IV. Fonctions trigonométriques :

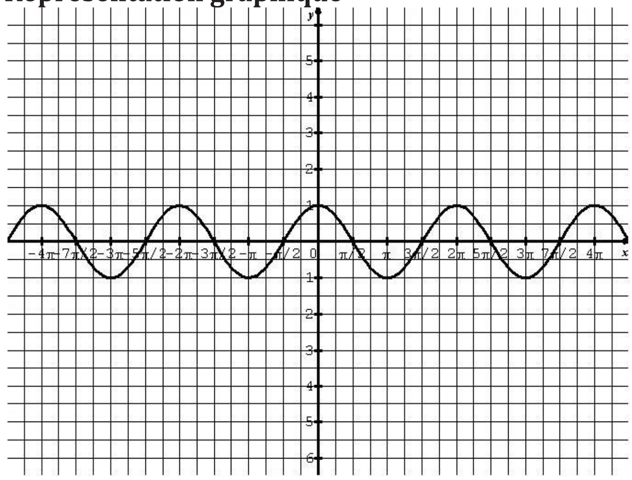
**Etude de la fonction $f: x \mapsto \sin x$**
- Domaine de définition est $\mathbb{R}$ ;
- Périodicité ; elle est périodique de période $2\pi$

● Parité : elle est impaire.
Donc, il suffit de réduire l'intervalle d'étude à $[0\ ;\ \pi]$.
● Dérivée : cette fonction est dérivable et par conséquent continue, sur cet ensemble.
Sa dérivée est la fonction $f':x \longmapsto \cos x$
● Sens de variation ; $\forall\, x \in \left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$ ; $\cos x \geq 0$ ; d'où $f'(x) \geq 0$ ; donc $f$ est croissante sur cet intervalle ; $\forall\, x \in [\frac{\pi}{2}\ ;\ \pi]$ ; $\cos x \leq 0$ ; d'où $f'(x) \leq 0$, donc $f$ est décroissante sur cet intervalle.

**Tableau de variation**

| $x$ | $0$ | | $\frac{\pi}{2}$ | | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $0$ | ↗ | $1$ | ↘ | $0$ |

**Représentation graphique**

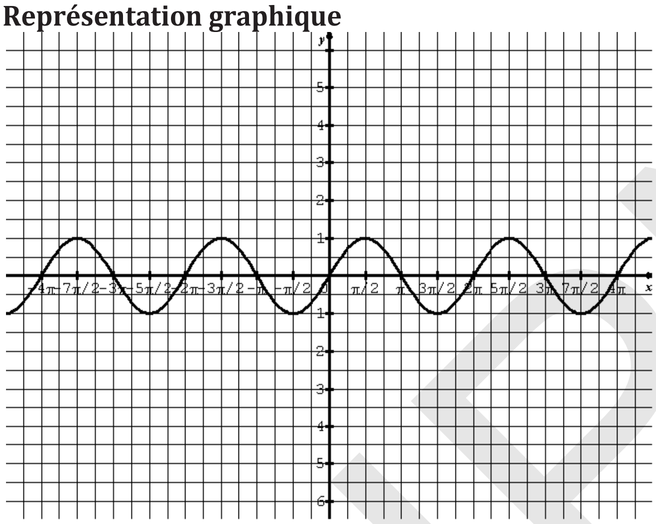


**Etude de la fonction $f : x \longmapsto \cos x$**
● Domaine de définition est $\mathbb{R}$ ;
● Périodicité ; elle est périodique de période $2\pi$
● Parité : elle est paire.
Donc, il suffit de réduire l'intervalle d'étude à $[0\ ;\ \pi]$.
● Dérivée : cette fonction est dérivable et par conséquent continue, sur cet intervalle .
Sa dérivée est la fonction $f' : x \longmapsto -\sin x$
● Sens de variation ; $\forall\, x \in [0\ ;\ \pi]$ ; $-\sin x\ \leq 0$ ; d'où $f'(x) \leq 0$ ; donc $f$ est décroissante sur cet intervalle.

**Tableau de variation**

| $x$ | $0$ | | $\frac{\pi}{2}$ | | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| -sin(x) | | $-$ | $-1$ | $-$ | |
| cos(x) | $1$ | ↘ | $0$ | ↘ | $-1$ |

**Représentation graphique**

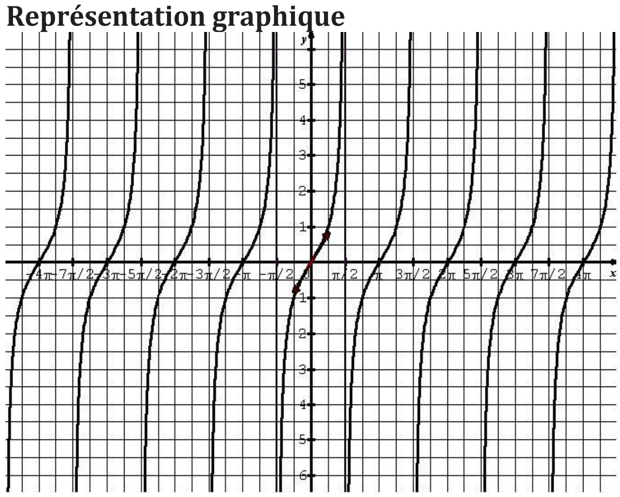


**Etude de la fonction $f : x \longmapsto \tan x$**
● Domaine de définition est $\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi ; k \in \mathbb{Z}\right\}$ ;
● Périodicité ; elle est périodique de période $\pi$ ;
● Parité : elle est impaire.
Donc il suffit de réduire l'intervalle d'étude à l'intervalle : $[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\ [$.
● Limites aux bornes : $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty$ ;
● Dérivée : cette fonction est dérivable et par conséquent continue, sur cet intervalle.
Sa dérivée est la fonction $f'$ : $x \longmapsto 1 + \tan^2 x$.
● Sens de variation ; $\forall x \in [0\ ;\ \frac{\pi}{2}\ [$ ; $1\ + \tan^2 x \geq 0$ ; d'où $f'(x) \geq 0$ ; donc $f$ est croissante sur cet intervalle.

**Tableau de variation**

| $x$ | $0$ | | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|
| $1 + \tan^2(x)$ | | $+$ | |
| $\tan(x)$ | $0$ | ↗ | $+\infty$ |

**Représentation graphique**



**Etude de la fonction $f$ : x$\mapsto \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$**
● Domaine de définition est $\mathbb{R}$ ;

● Périodicité ; elle est périodique de période $4\pi$ ; car, $f(x+4\pi) = \sin\left(\frac{x}{2} + 2\pi + \frac{\pi}{4}\right) = f(x)$ ;

● On peut réduire l'étude à l'intervalle $[-2\pi\,;\ 2\pi]$

● Dérivée et sens de variation : cette fonction est dérivable et par conséquent continue, sur cet intervalle.

Sa dérivée est la fonction ; $f' : x \longmapsto \frac{1}{2}\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$.

Soit $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2} \\ ou \\ \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \end{cases}$

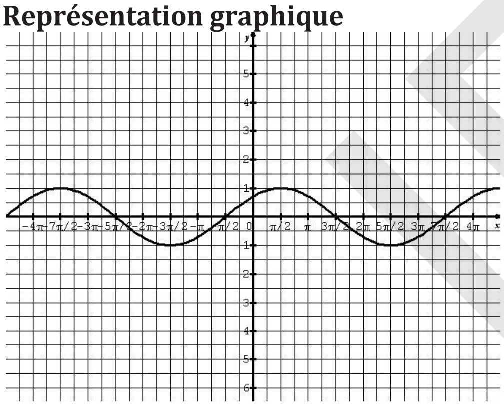
$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{3\pi}{2} \\ ou \\ x = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

La fonction $f$ est croissante sur $\left[-\frac{3\pi}{2}\,;\ \frac{\pi}{2}\right]$ ; décroissante sur $\left[-2\pi\,;\ \frac{-3\pi}{2}\right]$ et sur $\left[\frac{\pi}{2}\,;\ 2\pi\right]$.

**Tableau de variation**

| $x$ | $-2\pi$ | | $\frac{-3\pi}{2}$ | | $\frac{\pi}{2}$ | | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\searrow$ $0$ | $-1$ | $\nearrow$ | $1$ | $\searrow$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ |

**Représentation graphique**



**Etude de la fonction $f : x \longmapsto 2\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$**

● Domaine de définition est $\mathbb{R}$ ;

● Périodicité ; elle est périodique de période $4\pi$ ; car $f(x+4\pi) = 2\cos\left(\frac{x}{2} + 2\pi + \frac{\pi}{4}\right) = f(x)$,

On peut réduire l'étude à l'intervalle $[-2\pi;\ 2\pi]$

● Dérivée et sens de variation : cette fonction est dérivable et par conséquent continue, sur cet intervalle.

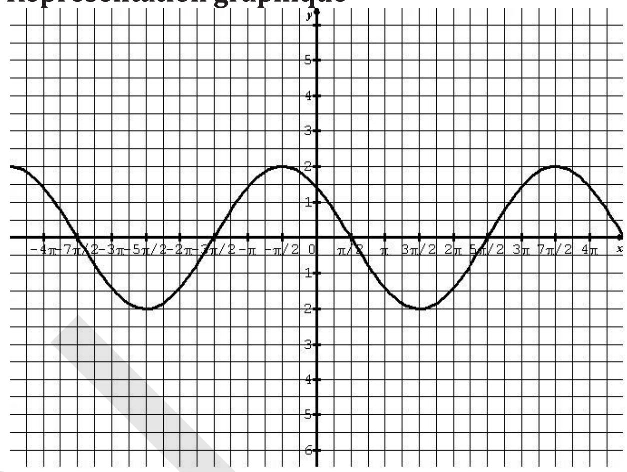
Sa dérivée est la fonction $f : x \longmapsto -\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$ ; Soit $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} = 0$ ou $\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} = \pi$; donc ; les valeurs de $x$ dans l'intervalle d'étude sont : $\left\{-\frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2}\right\}$.

La fonction $f$ est donc, croissante sur $\left[-2\pi;\ -\frac{\pi}{2}\right]$ et sur $\left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$; décroissante sur $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ ;

**Tableau de variation**

| $x$ | $-2\pi$ | | $\frac{-\pi}{2}$ | | $\frac{3\pi}{2}$ | | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\sqrt{2}$ | $\nearrow$ | $2$ | $\searrow$ | $-2$ | $\nearrow$ | $\sqrt{2}$ |

**Représentation graphique**



**Exercice 5 :**

On désigne par $C$ la courbe représentative de la fonction $g(x) = \sin x$ (*de réciproque* $g^{-1}$) définie sur l'intervalle $I = \left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$.

**1°)** Etudier les variation de $g$ et tracer sa courbe $C$ dans un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

**2°) a)** Montrer que $g$ admet une fonction réciproque $g^{-1}$ définie sur un intervalle $J$ que l'on déterminera.

**b)** Déterminer le domaine de dérivabilité de $g^{-1}$.

**c)** Calculer $(g^{-1})'(x)$ pour $x \in D$.

**d)** Calculer $g^{-1}(0)$, $g^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$, $g^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $g^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $g^{-1}(1)$.

**e)** Tracer la courbe $C'$ de $g^{-1}$ dans le repère $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

**Solution :**

**1°)** $g(x) = \sin x, x \in \left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$ ; $g$ est continue et dérivable sur $I = \left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$

$$\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}} g(x) = \lim_{x \to -\frac{\pi}{2}} \sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1,$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} g(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \sin x = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

$g'(x) = \cos x$

$\cos x = 0 \Longrightarrow x = 0 + k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$

$k = 0 \Longrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} \in I,\qquad k = 1 \Longrightarrow x = \dfrac{3\pi}{2} > \dfrac{\pi}{2}.$

$k = -1 \Longrightarrow x = -\dfrac{\pi}{2} \in I, k = -2 \Longrightarrow x = \dfrac{-3\pi}{2} < -\dfrac{\pi}{2}.$

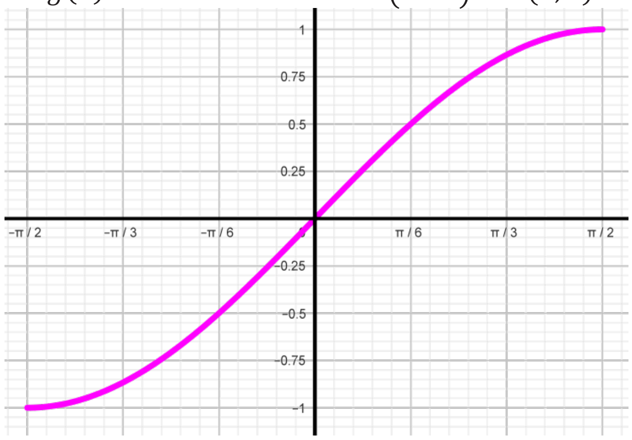


Math 6AS.indd 124 26/07/2024 10:42:43

| $x$ | $-\dfrac{\pi}{2}$ | | $0$ | | $\dfrac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | | $+$ | |
| $g(x)$ | $-1$ | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $1$ |

$g(0) = \sin 0 = 0 \Longrightarrow C \cap (y'Oy) = A(0;\ 0),$

$g(x) = 0 \Longrightarrow x = 0 \quad \Longrightarrow C \cap (x'Ox) = A(0; 0)$




**2°/ a)** Comme $g$ est continue et strictement monotone sur l'intervalle$I = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, $g(x)$ admet donc une fonction réciproque $g^{-1}$ définie sur $J = g(I) \Longrightarrow g\left(\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]\right) = [-1;\ 1]$.

La fonction $g^{-1}$: $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1;\ 1]$

$x \longmapsto g^{-1}(x)$

est noté ; $\boldsymbol{g^{-1}(x) = \arcsin x}$

**b)** Comme $g'\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$et $g'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, la fonction $g^{-1}$ n'est dons pas dérivable en $g\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$ et en $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, et comme sa dérivée ne s'annule pas sur l'intervalle ouvert $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, la fonction réciproque $(g^{-1})$ de $J$ est dérivable sur l'intervalle $g\left(\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[\right) = ]-1;\ 1[$.

Le domaine de dérivabilité de $g^{-1}$ est donc ; $J = ]-1;\ 1[$

**c)** $\forall x \in J, \left(g^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{g'(y)}$, avec $g(x) = y$,

d'où $\left(g^{-1}\right)'(y) = \dfrac{1}{\cos y}$

or, $y = \sin x$ et $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ et $\cos x > 0, \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$. Donc , $\forall x \in ]-1;\ 1[, \left(g^{-1}\right)'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

**d)** $g^{-1}(0) = y \Longrightarrow g(y) = 0 \Longrightarrow \begin{cases} \sin 0 = 0 \\ y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$

$\Longrightarrow g^{-1}(0) = 0.\ g^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = y \Longrightarrow g(y) = \frac{1}{2}$

$\Longrightarrow \begin{cases} \sin y = \frac{1}{2} \\ y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \end{cases} \Longrightarrow g^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$.

$g^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = y \Longrightarrow g(y) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Longrightarrow \begin{cases} \sin y = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ y \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right] \end{cases}$

$\Longrightarrow g^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{\pi}{4}$.

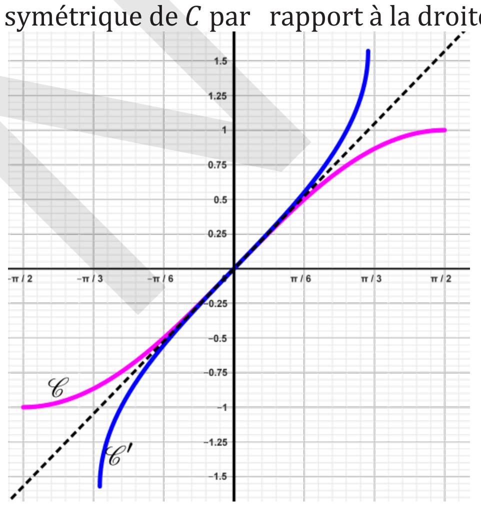
$g^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = y \Longrightarrow g(y) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Longrightarrow \begin{cases} \sin y = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ y \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right] \end{cases}$

$\Longrightarrow g^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$.

$g^{-1}(1) = y \Longrightarrow g(y) = 1 \Longrightarrow \begin{cases} \sin y = 1 \\ y \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right] \end{cases}$

$\Longrightarrow g^{-1}(1) = \dfrac{\pi}{2}$

**e)** La courbe $C'$ de $g^{-1}$ dans le repère $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, est la symétrique de $C$ par rapport à la droite $y = x$.




## Exercice 6 :

On considère la fonction $h$ définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ par ; $h(x) = \tan x$.

**1°)** Etudier les variations de $h$ et tracer sa courbe $C_h$ dans un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

**2°) a)** Montrer que $h$ admet une fonction réciproque $h^{-1}$ définie sur un intervalle $J$ que l'on déterminera.

**b)** Montrer que $h^{-1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $\left(h^{-1}\right)'(x)$.

**c)** Tracer la courbe représentative $C_{h^{-1}}$ de $h^{-1}$ avec $C_h$ dans le même repère.

**3°)** Donner une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction ▯ définie par ; $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

**Solution :**

**1°)** $h(x) = \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}, x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right[$.

Comme $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ on a $\cos x \neq 0$, la fonction $h$ est définie, continue et dérivable $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$

$$\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}} h(x) = \lim_{x \to -\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{-1}{0^+} = -\infty,$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} h(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$h'(x) = 1 + \tan^2 x > 0, \qquad \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$$

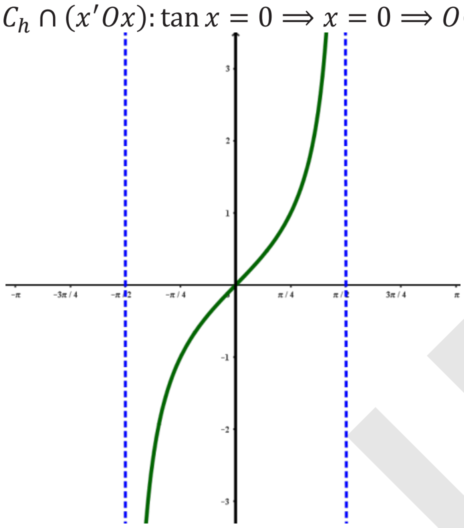
**Tableau de variations de *h***

| $x$ | $\frac{-\pi}{2}$ | | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|
| $h'(x)$ | | $+$ | |
| $h(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $+\infty$ |

$y = -\frac{\pi}{2}(A.V)$ et $y = \frac{\pi}{2}(A.V)$

$C_h \cap (y'Oy)$: $\tan 0 = 0 \Rightarrow O(0;0)$,

$C_h \cap (x'Ox)$: $\tan x = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow O(0;0)$



**2°) a)** Comme $h$ est continue et strictement monotone sur l'intervalle $I = \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, elle admet donc une fonction réciproque $h^{-1}$ définie sur l'intervalle $J = h(I) = ]-\infty; +\infty[ = \mathbb{R}$.

**b)** Comme $h$ est dérivable et comme sa dérivée ne s'annule pas sur $I$, la fonction $h^{-1}$ est donc dérivable sur $J = h(I) = \mathbb{R}$ et ;

$$\forall x \in \mathbb{R}, \left(h^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{h'(y)} \quad (avec\ h(x) = y)$$

C'est-à-dire que ;

$\tan x = y$ or, $h'(x) = 1 + \tan^2 x = 1 + y^2$

D'où ; $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \left(h^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

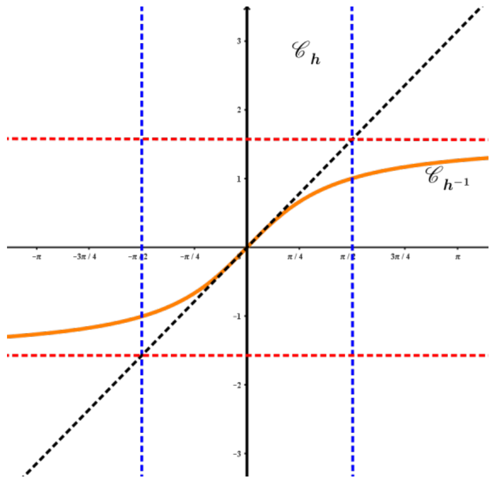
**c)** Dans le même repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, la courbe $C_{h^{-1}}$ de $h^{-1}$ est la symétrique de $C_h$ par rapport à la droite $y = x$.

**3°)** Comme $\forall x \in \mathbb{R}, \quad (h^{-1})'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction

$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ est la fonction ;

$$F(x) = h^{-1}(x) = \arctan x.$$




## Eléments de symétrie d'une courbe :

**Exemple 1 :**

Soit $f$ la fonction définie par ; $f : x \mapsto \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1}$.

Démontrer que la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$ est l'axe de symétrie de la courbe représentative de cette fonction.

**Réponse :**

Il suffit de démontrer que : $f(1-x) = f(x)$.

On a : $f(1-x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{1-(1-x)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} = f(x)$ ;

donc la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$ est l'axe de symétrie de la courbe représentative de la fonction

$$f : x \mapsto \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1}$$

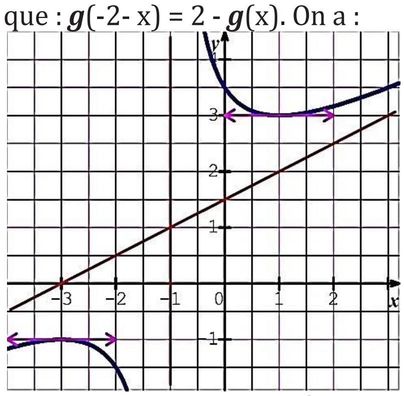
**Exemple 2 :**

Voici une partie de la courbe représentative de la fonction ; $g : x \mapsto \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} + \frac{2}{x+1}$

Cette courbe admet-elle un centre de symétrie ? si oui, lequel ? démontrer.

**Réponse :**

D'après la courbe, le point de concours des asymptotes est le centre de symétrie pour cette courbe, il s'agit du point de coordonnées (-1 ; 1).Il suffit de démontrer que : $g(-2-x) = 2 - g(x)$. On a :




$$\forall x \in D_g, g(-2-x) = \frac{-2-x}{2} + \frac{3}{2} + \frac{2}{-2-x+1}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{x}{2} - \frac{2}{x+1} = 2 - \left(\frac{x}{2} + \frac{3}{2} + \frac{2}{x+1}\right) = 2 - g(x)$$

d'où le point de coordonnées ( -1 ; 1) est le centre de symétrie pour la courbe donnée.

## Etude de fonctions :

**Exemple 1 :** Etudier la fonction $f : x \longmapsto 2x^2 - 3x + 1$.

**Réponse :**

● Domaine de définition : $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ ; limites bornes :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x^2 = +\infty \; ; \; \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$$

● Dérivabilité : comme ***f*** est une fonction polynôme ; elle est continue et dérivable sur son domaine de définition. La dérivée est la fonction : $f' : x \mapsto 4x - 3$; Soit $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{4}$

● Sens de variation: $\forall$ x $\in ]-\infty ; \frac{3}{4}]$ ; $f'(x) \leq 0$, d'où $f$ est décroissante ; $\forall$ x $\in [\frac{3}{4} ; +\infty[$ ; $f'(x) \geq 0$, d'où $f$ est croissante ;

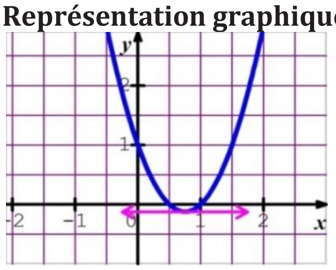
● Calcul de l'image de certains points :

$f(\frac{3}{4}) = 2(\frac{3}{4})^2 - 3\frac{3}{4} + 1 = \frac{-1}{8} = -0{,}125$

**Tableau de variation**

| x | +∞ | $\frac{3}{4}$ | +∞ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | - | 0 | + |
| $f(x)$ | +∞ ↘ | -0,125 | ↗ +∞ |

**Représentation graphique**




**Exemple 2 :**

Soit $g$ la fonction définie par : $g(x) = \frac{2x^2+2x-1}{2x-1}$

**a)** Déterminer les nombres réels $a'$ ; $b'$ et $c'$ tels que : $\forall x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$ ; $g(x) = a'x + b' + \frac{c'}{2x-1}$.

**b)** Etudier la fonction $g$ et tracer sa courbe représentative.

**Réponse :**

$$g(x) = a'x + b' + \frac{c'}{2x-1}$$

$$\Leftrightarrow g(x) = \frac{(a'x+b')(2x-1) + c'}{2x-1}$$

$$\Leftrightarrow g(x) = \frac{2a'x^2 - a'x + 2b'x - b' + c'}{2x-1}$$

$$\Leftrightarrow g(x) = \frac{2a'x^2 - (a' - 2b')x - (b' - c')}{2x-1}$$

Par identification des deux écritures, on trouve

$\begin{cases} 2a' = 2 \\ 2b' = 2 \\ c' - b' = -1 \end{cases}$ ; l'équation (1) donne $a' = 1$ ;

l'équation **(2)** donne b' = $\frac{3}{2}$ ; l'équation (3) donne c = $\frac{1}{2}$. Donc, les réels cherchés sont : a' = 1; b' = $\frac{3}{2}$ ; c' = $\frac{1}{2}$, et par conséquent, $\boldsymbol{g}(x) = x + \frac{3}{2} + \frac{1}{2(2x-1)}$.

● **Domaine de définition :** $\mathcal{D}_g = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

● **Limites aux bornes** $\lim_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$ ; $\lim_{x \to (\frac{1}{2})^-} g(x) = -\infty$ ; $\lim_{x \to (\frac{1}{2})^+} g(x) = +\infty$; $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ ● Il y a deux asymptotes : x= $\frac{1}{2}$ (A.V) ; y = x + $\frac{3}{2}$ (A.O) ( car $\lim_{x \mapsto \pm\infty} \frac{1}{2(2x-1)} = 0$).

● Dérivabilité : comme ***g*** est une fonction rationnelle ; elle est continue et dérivable sur son domaine de définition.La dérivée est la fonction : $g' : x \mapsto 1 + \frac{-2}{2(2x-1)^2}$ d'où $g' : x \mapsto \frac{4x(x-1)}{(2x-1)^2}$;

Soit $g'(x) = 0 \Leftrightarrow$ x= 0 ou x = 1.

● Sens de variation : $\forall x \in ]-\infty ; 0] \cup [1 ; +\infty[$ ; $\boldsymbol{g}'(x) \geq 0$ d'où ***g*** est croissante ;

$\forall$ x $\in$ [0 ; 1] ; $\boldsymbol{g}'(x) \leq 0$ d'où ***g*** est décroissante.

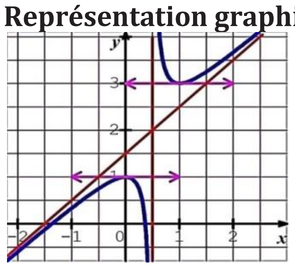
● Calcul de l'image de certains points :

$\boldsymbol{g}(0) = 0 + \frac{3}{2} + \frac{1}{2(-1)} = 1$ ; $\boldsymbol{g}(1) = 1 + \frac{3}{2} + \frac{1}{2(+1)} = 3$.

**Tableau de variation**

| x | +∞ | 0 | | $\frac{1}{2}$ | | 1 | +∞ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | + | 0 | - | ‖ | - | 0 | + |
| $g(x)$ | -∞ ↗ | 1 | ↘ -∞ | ‖ | +∞ ↘ | 3 | ↗ +∞ |

**Représentation graphique**




**Fonction associées**

**Exemple 3 :**

Déduire de la courbe représentative de la fonction sinus, la courbe représentative des fonctions suivantes : a) $x \mapsto \sin(x + \frac{5\pi}{3})$; b) $x \mapsto \cos(-x + \frac{5\pi}{6})$.

**Réponse :**

a) $x \mapsto \sin(x + \frac{5\pi}{3})$ ; la courbe cherchée est l'image de la courbe de : $x \mapsto \sin x$ ; par : $t_{-\frac{5\pi}{3}\vec{\imath}}$.

b) $x \mapsto \cos(-x + \frac{5\pi}{6})$ ; la courbe cherchée est l'image de la courbe de : $x \mapsto \sin x$ ; par : $t_{\frac{\pi}{3}\vec{\imath}}$

## B.EXERCICES DIVERS

**1.** Le repère (O ; I ; J) est orthogonal.
a) Tracer la courbe représentative de la fonction $x \mapsto x^2 - 6x + 5$.
b) En déduire la courbe représentative de la fonction : $x \mapsto |x^2 - 6x + 5|$

**2.** Etudier et représenter les fonctions suivantes
a) $f(x) = 1 - \frac{1}{x-2}$ ; b) $f(x) = \frac{2x+1}{3x+2}$ ; c) $f(x) = x - 2 - \frac{2}{x+3}$

**3.** Le repère (O ; I ; J) est orthonormé.
Soit la fonction $f : x \mapsto \cos 2x$.
Etudier $f$ et construire sa courbe représentative $C_f$.
b) Déduire de $C_f$, la courbe représentative des fonctions suivantes :

$$f_1 : x \mapsto \cos(2x + \frac{\pi}{4}) \text{ ; b) } f_2 : x \mapsto \cos(2x + \frac{\pi}{4}) + 1$$

**4.** Déterminer les réels a ; b et c pour que la courbe d'équation $y = \frac{ax+b}{x+c}$. ait le point Ω(-1 ; 2) comme centre de symétrie ; admet , au point d'abscisse 1, une tangente parallèle à la droite d'équation y = -x. Construire cette courbe.

**5.** Soit $f$ la fonction définie sur [1 ; +∞[ par ; $f(x) = \frac{x}{2} - 1 + \frac{2}{x}$.
$C_f$ désignera la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormal ( O ; $\vec{i}$ ; $\vec{j}$).
1) a) Déterminer la limite de $f$ en + ∞ .
b) Etudier le sens de variation de $f$.
c) Dresser le tableau de variation de $f$.
2) Etudier la position relative de $C_f$ par rapport à la droite Δ d'équation $y = \frac{x}{2} - 1$.
3) Tracer $_f$ et Δ

**6.** Soit $f$ la fonction définie sur [-3 ; 4[ par ;
$f(x) = \frac{x(2x-1)}{2x^2-2x+5}$.
1) $C_f$ désigne la courbe représentative de $f$ dans le plan muni d'un repère orthogonal (O ; $\vec{i}$ ; $\vec{j}$).
Déterminer le sens de variation de $f$.
2) Montrer que $A(\frac{1}{2} ; 0)$ est centre de symétrie de $C_f$.
3) Tracer $C_f$ la courbe représentative de $f$.

**7.** Soit $f$ la fonction définie sur ℝ -{0 ; 4}par $f(x) = \frac{4}{x(x-4)}$.
Etudier, puis tracer la courbe représentative de $f$.

**8.** Soit h la fonction définie sur ℝ -{1}par $h(x) = \frac{3x+1}{-x+1}$.
On pose H sa courbe représentative dans un repère orthonormé ( O ; $\vec{i}$ ; $\vec{j}$).
1) Etudier les limites de h aux bornes de son ensemble de définition.Préciser les asymptotes à H.
2) Etudier les variations de h et faire le tableau de variation.
3) Représenter ( H) et ses asymptotes. Démontrer que le point A(1 ;-3) est centre de symétrie pour ( H ).

**9.** Soit $f$ la fonction définie sur par $f(x) = x + \frac{1}{x}$.
On note Γ sa courbe représentative dans un repère (O ; $\vec{i}$ ; $\vec{j}$).1) Démontrer que $f$ est impaire.
2) a) Déterminer $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$. Interpréter, graphiquement le résultat.
b) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ , démontrer que la droite Δ : d'équation y = x est asymptote à Γ au voisinage de +∞.
3) Etudier les variations de $f$ sur ]0 ; +∞[ et faire son tableau de variation. Représenter Δ et Γ .

**10.** Soit f la fonction définie sur [0 ; +∞[ par $f(x) = \frac{4}{x^2+3}$. On note C sa courbe dans un repère (O ; $\vec{i}$ ; $\vec{j}$).
Démontrer que l'axe des abscisses est asymptote à (C ), étudier les variations de $f$ et faire son tableau de variation.

**11.** Soit $f(x) = \frac{2-x}{2x+3}$
a. Etudier les variations de f et tracer sa courbe (C).
b. On considère la fonction g de P vers P : $g(x) = \frac{2-|x|}{2|x|+3}$ dont la courbe est (C').
c. Etudier la parité de g ;
d. En déduire de ce qui précède la courbe (C').de g.

**12.** Soit $f(x) = \frac{3x^2+ax+b}{x^2+1}$
a. Déterminer les réels a et b pour que la courbe (C) de f soit tangente au point d'abscisse 0 à la droite de l'équation $y = 4x + 3$ et étudier les points de variations de f.
b. Démontrer que le point I(0,3) est centre de symétrie de (C).
c. Tracer (C) et sa tangente en I.
d. En déduire la courbe (C'). de la fonction g(x)= -f(x).
e. Discuter graphiquement suivant les valeurs du paramètre a le nombre de solutions de l'équation : $x^2 - (7 + a)x + 10 + a = 0$

**13.** Soit la fonction $f_m(x) = \frac{x^2-(m+2)x+2m+2}{x-1}$ m étant un paramètre réel, et soit $(C_m)$ la courbe de $f_m$
a- Démontrer que toutes les courbes $(C_m)$ passent par un point fixe A et déterminer les coordonnées de A.
b- Etudier la fonction $f_0$.
c- On suppose $m \neq 0$. Etudier les variations de $f_m$ suivant les valeurs de m.
d- Déterminer en fonction de m les nombres réels a, b et c tels que : $f_m(x) = ax + b + \frac{c}{x-1}$ et en déduire une équation de l'asymptote à $(C_m)$ au voisinage de ∞.
e- Démontrer que $B(1; -m - 1)$ est un centre de symétrie de $(C_m)$.
f- Construire les courbes $(C_4)$ et $(C_{-4})$ sur le même dessin.

CHAPITRE 10

# Suites numériques

## Cours

### I. Généralités sur les suites :

### 1) Définitions relatives aux suites :

#### a) Définition :

On appelle suite numérique, toute fonction $\mathcal{U}$ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ ; (*c'est-à-dire toute application d'une partie* $\mathbb{E}$ *de* $\mathbb{N}$ *dans* $\mathbb{R}$).

$$\begin{aligned} \mathcal{U} :\ & \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & n \longmapsto \mathcal{U}(n) \end{aligned}$$

#### b) Notion et vocabulaire :

La suite $\mathcal{U}$ est notée $(\mathcal{U}_n)$.

Si $\mathbb{E}$ désigne l'ensemble de définition d'une suite numérique $(\mathcal{U}_n)$, on a les notations suivantes ;

**Notations fonctionnelle :**

$$\begin{aligned} \mathcal{U} :\ & \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & n \longmapsto \mathcal{U}(n) \end{aligned}$$

**Notation indicielle :**

$(\mathcal{U}_n)_{n\in\mathbb{E}}$; ou plus simplement $(\mathcal{U}_n)$.

▶ L'image de $n$ par la fonction $\mathcal{U}$ c'est-à-dire $\mathcal{U}(n)$est appelé terme d'indice $n$ ou terme général de la suite et est noté $\mathcal{U}_n$ et on le lit « $\mathcal{U}$ indice $n$ ».

▶ le n^ième terme est appelé terme de rang $n$.

**Exemple 1:**

■ Soit$(\mathcal{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\mathcal{U}_n = \dfrac{2n+1}{n+2}$.

Cette suite est déterminée par une formule explicite (*en fonction de* $n$), le terme général de cette suite est $\frac{2n+1}{n+2}$, le premier terme est $\mathcal{U}_0 = \frac{1}{2}$, le 15^ème terme ou terme de rang 15 est $\mathcal{U}_n = \frac{2\times14+1}{14+2} = \frac{29}{16}$.

■ Soit $(\mathcal{V}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de terme général $\mathcal{V}_n = \sqrt{n^2-1}$. Cette suite est déterminée par une formule explicite, le premier terme est $\mathcal{V}_1 = 0$ ; le 3*ème* terme est $\mathcal{V}_3 = n \longmapsto \mathcal{V}_n = \frac{1}{n}$

**3°)** $$\begin{aligned} \mathcal{W} :\ & \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & n \longmapsto \mathcal{W}_n = \sqrt{2n-9} \end{aligned}$$

$\mathcal{U}$ est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$

$\mathcal{V}$ est une application de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{R}$

$\mathcal{W}$ est une application de $\mathbb{N} \setminus \{0; 1; 2; 3; 4\}$ dans $\mathbb{R}$.

**Exemple 2 :**

Soit la suite $(\mathcal{U}_n)$ définie par : $\mathcal{U}_n = 2n^2 - 3$.

Calculer , $\mathcal{U}_2, \mathcal{U}_5$

**Réponse :**

$\mathcal{U}_0 = 2(0)^2 - 3 = 2\times0 - 3 = -3$,

$\mathcal{U}_2 = 2(2)^2 - 3 = 2\times4 - 3 = 5$

$\mathcal{U}_5 = 2(5)^2 - 3 = 2\times25 - 3 = 47$

**Exemple 3 :**

On donne les suites ;

**1°)**$\mathcal{U}_n = \dfrac{1}{n}$ ; **2°)**$\mathcal{V}_n = \dfrac{n+1}{n+2}$;

**3°)**$\mathcal{W}_n = \sqrt{3n-7}$; **4°)**$\mathcal{X}_n = 2n^2 - 3$

Calculer les 6 premiers termes de chacune de ces suites

**Réponse :**

**1°)** $\mathcal{U}_1 = \dfrac{1}{1} = 1$, $\mathcal{U}_2 = \dfrac{1}{2}$, $\mathcal{U}_3 = \dfrac{1}{3}$,

$\mathcal{U}_4 = \dfrac{1}{4}$, $\mathcal{U}_5 = \dfrac{1}{5}$, $\mathcal{U}_6 = \dfrac{1}{6}$

**2°)** $\mathcal{V}_0 = \dfrac{0+1}{0+2} = \dfrac{1}{2}$, $\mathcal{V}_1 = \dfrac{1+1}{1+2} = \dfrac{2}{3}$,

$\mathcal{V}_2 = \dfrac{2+1}{2+2} = \dfrac{3}{4}$, $\mathcal{V}_3 = \dfrac{3+1}{3+2} = \dfrac{4}{5}$;

$\mathcal{V}_4 = \dfrac{4+1}{4+2} = \dfrac{5}{6}$, $\mathcal{V}_5 = \dfrac{5+1}{5+2} = \dfrac{6}{7}$

**3°)** $\mathcal{W}_3 = \sqrt{3\times3-7} = \sqrt{2}, \mathcal{W}_4 = \sqrt{3\times4-7} = \sqrt{5}$,

$\mathcal{W}_5 = \sqrt{3\times5-7} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$\mathcal{W}_6 = \sqrt{3\times6-7} = \sqrt{11}$,

$\mathcal{W}_7 = \sqrt{3\times7-7} = \sqrt{14}$,

$\mathcal{W}_8 = \sqrt{3\times8-7} = \sqrt{17}$.

**4°)** $\mathcal{X}_0 = 2\times0^2 - 3 = -3, \mathcal{X}_1 = 2\times1^2 - 3 = -1$,

$\mathcal{X}_2 = 2\times2^2 - 3 = 5$, $\mathcal{X}_3 = 2\times3^2 - 3 = 1$,

$\mathcal{X}_4 = 2\times4^2 - 3 = 29$, $\mathcal{X}_5 = 2\times5^2 - 3 = 47$

#### b) Détermination d'une suite numérique :

En général, une suite numérique $(\mathcal{U}_n)$ est déterminée par l'une des deux formes suivantes :

- Ou bien une formule explicite permettant de calculer $\mathcal{U}_n$ en fonction de $n$, $\mathcal{U}_n = f(n)$.

**Exemple 4 :** $\mathcal{U}_n = \sqrt{n^2+3}$ ; $\mathcal{V}_n = n^3 - 5$

- Ou bien le premier terme et une formule de récurrence exprimant $\mathcal{U}_n$ en fonction de $\mathcal{U}_{n-1}$.
- Ou bien les deux premiers termes et une formule de récurrence entre $\mathcal{U}_n, \mathcal{U}_{n+1}, \mathcal{U}_{n+2}$.

**Exemple 5 :**

$\mathcal{U}_{n+1} = \mathcal{U}_n + 3$ ; $\mathcal{U}_{n+2} = 4\mathcal{U}_{n+1} - 2$

**Exemple 6 :**

Soit la suite numérique définie par ;

$$\begin{cases} \mathcal{U}_0 = 1 \\ \mathcal{U}_{n+1} = 2\mathcal{U}_n + 4 \end{cases}$$

Calculer les termes $\mathcal{U}_1$; $\mathcal{U}_2$; $\mathcal{U}_3$; $\mathcal{U}_4$

**Réponse :**

$\mathcal{U}_1 = 2\mathcal{U}_0 + 4 = 2\times1 + 4 = 6$,

$\mathcal{U}_2 = 2\mathcal{U}_1 + 4 = 2\times6 + 4 = 16$

$\mathcal{U}_3 = 2\mathcal{U}_2 + 4 = 2\times16 + 4 = 36$,

$\mathcal{U}_4 = 2\mathcal{U}_3 + 4 = 2\times36 + 4 = 76$

**Exemple 7 :**

$(\mathcal{V}_n)$ est la suite définie par : $\begin{cases} \mathcal{V}_0 = 3 \\ \mathcal{V}_{n+1} = 2\mathcal{V}_n + 2 \end{cases}$

Calculer $\mathcal{V}_2, \mathcal{V}_4, \mathcal{V}_7$

**Réponse :**

$\mathcal{V}_1 = 2\mathcal{V}_0 + 2 = 2\times3 + 2 = 8$,

$\mathcal{V}_2 = 2\mathcal{V}_1 + 2 = 2\times8 + 2 = 18$,

$\mathcal{V}_3 = 2\mathcal{V}_2 + 2 = 2\times18 + 2 = 38$,

$\mathcal{V}_4 = 2\mathcal{V}_3 + 2 = 2 \times 38 + 2 = 78,$
$\mathcal{V}_5 = 2\mathcal{V}_4 + 2 = 2 \times 78 + 2 = 158,$
$\mathcal{V}_6 = 2\mathcal{V}_5 + 2 = 2 \times 158 + 2 = 318,$
$\mathcal{V}_7 = 2\mathcal{V}_6 + 2 = 2 \times 318 + 2 = 638.$

**Exemple 8 :**
Soient $(\mathcal{U}_n)$ et $(\mathcal{V}_n)$ deux suites définies par :

$$\mathcal{U}_n = n^2 - 2n + 1 \quad \text{et} \quad \begin{cases} \mathcal{V}_0 = \dfrac{1}{2} \\ \mathcal{V}_{n+1} = \mathcal{V}_n + 5. \end{cases}$$

Calculer $\mathcal{U}_2, \mathcal{U}_5, \mathcal{U}_{12}, \mathcal{V}_2, \mathcal{V}_3$ *et* $\mathcal{V}_5$

**Réponse :**
$\mathcal{U}_2 = 2^2 - 2 \times 2 + 1 = 1,$
$\mathcal{U}_5 = 5^2 - 2 \times 5 + 1 = 16,$
$\mathcal{U}_{12} = 12^2 - 2 \times 12 + 1 = 121,$

$$\mathcal{V}_1 = \mathcal{V}_0 + 5 = \frac{1}{2} + 5 = \frac{11}{2},$$
$$\mathcal{V}_2 = \mathcal{V}_1 + 5 = \frac{11}{2} + 5 = \frac{21}{2},$$
$$\mathcal{V}_3 = \mathcal{V}_2 + 5 = \frac{21}{2} + 5 = \frac{31}{2},$$
$$\mathcal{V}_4 = \mathcal{V}_3 + 5 = \frac{31}{2} + 5 = \frac{41}{2},$$
$$\mathcal{V}_5 = \mathcal{V}_4 + 5 = \frac{41}{2} + 5 = \frac{51}{2}$$

**Exemple 9 :**
On considère la suite numérique définie par :

$$\begin{cases} \mathcal{U}_0 = 2 \\ \mathcal{U}_{n+1} = \dfrac{\mathcal{U}_n + 1}{\mathcal{U}_n}. \end{cases}$$

Calculer les termes $\mathcal{U}_1$; $\mathcal{U}_2$ ; $\mathcal{U}_3$.

**Réponse :**

$$\mathcal{U}_1 = \frac{\mathcal{U}_0 + 1}{\mathcal{U}_0} = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2},$$
$$\mathcal{U}_2 = \frac{\mathcal{U}_1 + 1}{\mathcal{U}_1} = \frac{\frac{3}{2} + 1}{\frac{3}{2}} = \frac{5}{3},$$
$$\mathcal{U}_3 = \frac{\mathcal{U}_2 + 1}{\mathcal{U}_2} = \frac{\frac{5}{3} + 1}{\frac{5}{3}} = \frac{8}{5}$$

**Exemple 10 :**
Soit la suite numérique définie par :

$$\begin{cases} \mathcal{V}_1 = -3 \\ \mathcal{V}_{n+1} = 3\mathcal{V}_n + 1 \end{cases}.$$ Calculer les termes $\mathcal{V}_2$; $\mathcal{V}_3$; $\mathcal{V}_4$

**Réponse :**
$\mathcal{V}_2 = 3\mathcal{V}_1 + 1 = 3 \times -3 + 1 = -8,$
$\mathcal{V}_3 = 3\mathcal{V}_2 + 1 = 3 \times -8 + 1 = -23$
$\mathcal{V}_4 = 3\mathcal{V}_3 + 1 = 3 \times -23 + 1 = -68$

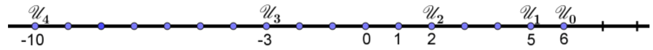
## 2) Représentations graphiques d'une suite numérique :

Une suite numérique est une fonction, donc elle peut être représentée dans le plan muni d'un repère, il est également possible de représenter les termes d'une suite sur un axe.

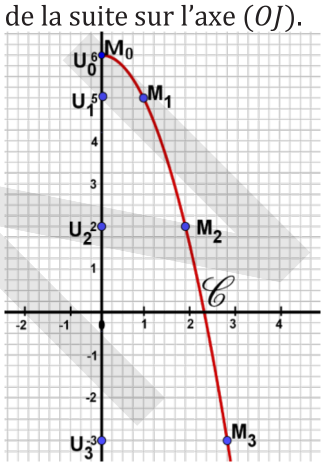
### a) Représentation graphique d'une suite définie par une formule explicite :

**Exemple 11 :**
Soit $(\mathcal{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de terme général :$\mathcal{U}_n = 6 - n^2$.

**Représentation de cette suite sur un axe :**
$\mathcal{U}_0 = 6$ ;$\mathcal{U}_1 = 5$ ;$\mathcal{U}_2 = 2$ ;$\mathcal{U}_3 = -3$ ;$\mathcal{U}_4 = -10$ ;




▪ **Représentation dans le plan :**
Le plan est muni du repère $(O\,;\,I\,;\,J)$.
Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction $f : x \longmapsto 6 - x^2$. Pour tout entier naturel$n$, on désigne par $M_n$ le point de coordonnées $(n\,;\,f(n))$.
L'ensemble des points $M_n$ est une représentation graphique de la suite $(\mathcal{U}_n)$ dans le plan.
Lorsqu'on projette les points $M_n$ sur l'axe des ordonnées, on obtient une représentation des points de la suite sur l'axe $(OJ)$.



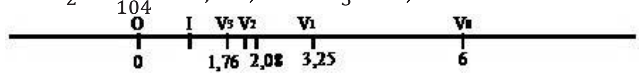

### b) Représentation graphique d'une suite définie par une formule de récurrence :

Soit la suite $(\mathcal{V}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la suite définie par :

$$\begin{cases} \mathcal{V}_0 = 6 \\ \mathcal{V}_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(\mathcal{V}_n + \dfrac{3}{\mathcal{V}_n}\right) \ ; \ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

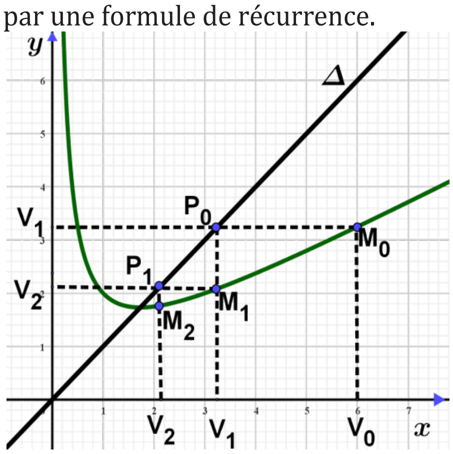
▪ **Représentation de cette suite sur un axe :**

$\mathcal{V}_0 = 6$ ; $\qquad \mathcal{V}_1 = \frac{13}{4} = 3{,}25$ ;
$\mathcal{V}_2 = \frac{217}{104} = 2{,}08$ ; $\qquad \mathcal{V}_3 = 1{,}76$




▪ **Représentation de cette suite dans le plan :**
Le plan est muni du repère orthonormé $(O\,;\,I\,;\,J)$.
Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction $f : x \longmapsto \frac{1}{2}\left(x + \frac{3}{x}\right)$ et $\Delta$ la droite d'équation $y = x$.
**Construction** de $\mathcal{V}_1$ :
Soit $M_0$ le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse $\mathcal{V}_0 = 6$ ; l'ordonnée de $M_0$ est $\mathcal{V}_1 = g(\mathcal{V}_0)$. Soit $P_0$ le point de $\Delta$ d'ordonnée $\mathcal{V}_1$ ; l'abscisse de $P_0$ est $\mathcal{V}_1$.
**Construction** de $V_2$ :
Soit $M_1$ le point d'abscisse $\mathcal{V}_2$ ; l'ordonnée de $M_1$est $\mathcal{V}_2 = g(\mathcal{V}_1)$. Soit $P_1$ le point de $\Delta$ d'ordonnée $\mathcal{V}_2$ ; l'abscisse de $P_1$est $\mathcal{V}_2$.

Cette méthode permet une construction de proche en proche sur l'axe $(OI)$ des termes d'une suite définie par une formule de récurrence.




## 3) Propriétés d'une suite numérique :

### a) Suite majorée, Suite minorée, Suite bornée :

**Définition :**

Soit $\mathcal{U}$ une application d'une partie $\mathbb{I}$ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ ;

■ On dit que la suite $(\mathcal{U}_n)$ est majorée, s'il existe un réel $M$ tel que ; $\forall n \in \mathbb{I}$, $\mathcal{U}_n \leq M$. On dit alors que la suite est majorée par $M$.

**Exemple 12 :**

$$\mathcal{U}_n = 1 - \frac{2}{n+1}, or -\frac{2}{n+1} < 0 \Longrightarrow \mathcal{U}_n < 1, n \in \mathbb{N}$$

■ On dit que la suite $(\mathcal{U}_n)$ est minorée, s'il existe un réel $m$ tel que ; $\forall n \in \mathbb{I}$, $\mathcal{U}_n \geq m$. On dit alors que la suite est minorée par $m$.

**Exemple 13 :**

$$\mathcal{V}_n = 2 + \frac{3}{n}, puisue\ \frac{3}{n} > 0 \Longrightarrow \mathcal{V}_n > 2, \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

■ On dit qu'une suite $(\mathcal{U}_n)$ est bornée si elle est à la fois majorée et minorée.

**Exemple 14 :**

$\mathcal{W}_n = (-1)^n, \forall n \in \mathbb{N}, -1 \leq \mathcal{W}_n \leq 1$

**Exemple 15 :**

- $\mathcal{U}(n)$ est la suite des naturels, c'est-à-dire que pour tout naturel $n$ ; $\mathcal{U}_n = n$ ;$(\mathcal{U}_n)$ est une suite minorée par 0, car pour tout $n$, $\mathcal{U}_n \geq 0$ ; $(\mathcal{U}_n)$ n'est pas majorée.
- $(\mathcal{V}_n)$est la suite telle que pour tout naturels n ; $\mathcal{V}_n = \frac{n+1}{n+2}$

$(\mathcal{V}_n)$ est une suite majorée par 1, car pour tout naturel $n$, $0 < n+1 < n+2$, donc : $0 < \frac{n+1}{n+2} < 1$,

d'où $(\mathcal{V}_n)$est minorée par 0 et majorée par 1.

$(\mathcal{V}_n)$ est donc une suite bornée : pour tout naturel $n$, on a : $0 < \mathcal{V}_n < 1$.

**Remarque 1 :**

■ Une suite est positive si elle est minorée par 0.

■ Une suite est négative si elle est majorée par 0.

**Exemple 16 :**

Soit la suite $(\mathcal{U}_n)$ définie par : $\mathcal{U}_n = \frac{5n+3}{n+1}$

Cette suite est minorée par 3 et majorée par 5, elle est donc bornée et ; $\forall n \in \mathbb{N}$, $3 \leq \mathcal{U}_n \leq 5$

### b) Sens de variation d'une suite :(monotonie d'une suite)

Soit $\mathcal{U}$ une application d'une partie $\mathbb{I}$ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$

On dit que $(\mathcal{U}_n)$ est croissante (*resp. décroissante*) si $\forall p \in \mathbb{I}, \forall q \in \mathbb{I}$ ;

$p > q \Longrightarrow \mathcal{U}_p \geq \mathcal{U}_q$ (*resp.* $p > q \Longrightarrow \mathcal{U}_p \leq \mathcal{U}_q$).

On dit qu'une suite est monotone si elle est croissante, ou si elle est décroissante.

On dit qu'une suite n'est pas monotone si elle n'est ni croissante, ni décroissante.

**Remarque 2 :**

Soit $\mathcal{U}$ une application d'une partie $\mathbb{I}$ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$

On dit que $(\mathcal{U}_n)$ est strictement croissante (*resp. strictement décroissante*) si $\forall p \in \mathbb{I}, \forall q \in \mathbb{I}$ ;

$p > q \Longrightarrow \mathcal{U}_p > \mathcal{U}_q$ (*resp.*$p > q \Longrightarrow \mathcal{U}_p < \mathcal{U}_q$).

On dit qu'une suite est constante si tous ses termes sont égaux. C'est-à-dire s'il existe une constante $c$ telle que ; $\forall n \in \mathbb{I}, \mathcal{U}_n = \mathcal{U}_{n+1} = c$.

Soit $a$ un entier naturel, et soit $(\mathcal{U}_n)$ une suite définie pour $n \geq a$

$(\mathcal{U}_n)$est croissante $\Leftrightarrow \forall n \geq a \mathcal{U}_{n+1} - \mathcal{U}_n \geq 0$.

$(\mathcal{U}_n)$est décroissante $\Leftrightarrow \forall n \geq a \mathcal{U}_{n+1} - \mathcal{U}_n \leq 0$.

$(\mathcal{U}_n)$est constante $\Leftrightarrow \forall n \geq a \mathcal{U}_{n+1} - \mathcal{U}_n = 0$.

$(\mathcal{U}_n)$ est strictement croissante $\Leftrightarrow \forall n \geq a$,

$$\mathcal{U}_{n+1} - \mathcal{U}_n > 0.$$

$(\mathcal{U}_n)$ est strictement décroissante $\Leftrightarrow \forall n \geq a$,

$$\mathcal{U}_{n+1} - \mathcal{U}_n < 0.$$

**Remarque 3 :**

Pour étudier le sens de variation d'une suite $(\mathcal{U}_n)$, il y a trois méthodes principales :

■ On étudie directement le signe de$\mathcal{U}_{n+1} - \mathcal{U}_n$:

■ Si pour tout naturel $n$, on a $\mathcal{U}_{n+1} - \mathcal{U}_n \geq 0$, alors $\mathcal{U}_{n+1} \geq \mathcal{U}_n$ et la suite $(\mathcal{U}_n)$ est croissante.

■ Si pour tout naturel $n$, on a $\mathcal{U}_{n+1} - \mathcal{U}_n \leq 0$, alors $\mathcal{U}_{n+1} \leq \mathcal{U}_n$ et la suite $(\mathcal{U}_n)$ est décroissante.

■ Si le signe de $\mathcal{U}_{n+1} - \mathcal{U}_n$ n'est pas constant, alors la suite $(\mathcal{U}_n)$ n'est ni, croissante, ni décroissante.

■ Lorsque la suite$(\mathcal{U}_n)$ est définie explicitement par $\mathcal{U}_n = f(n)$ ; Il suffit que la fonction numérique $f$ à variable réelle soit croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$ pour que $(\mathcal{U}_n)$ soit croissante. Il suffit que $f$ soit décroissante sur $[0\ ;\ +\infty[$ pour que $(\mathcal{U}_n)$ soit décroissante.

En effet, pour tout naturel $n$, on a évidement : $n + 1 \geq n \geq 0$ et par conséquent dans le cas où$f$ est croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$ : $f(n+1) \geq f(n)$ c'est-à-dire $\mathcal{U}_{n+1} \geq \mathcal{U}_n$, donc $(\mathcal{U}_n)$ est croissante et dans le cas où $f$est décroissante sur $[0\ ;\ +\infty[$, $f(n+1) \leq f(n)$ c'est-à-dire $\mathcal{U}_{n+1} \leq \mathcal{U}_n$, donc $(\mathcal{U}_n)$ est décroissante.

Lorsque la suite $(\mathcal{U}_n)$ est à termes strictement positifs, on compare le quotient $\frac{\mathcal{U}_{n+1}}{\mathcal{U}_n}$ à 1.

■ Si $\frac{\mathcal{U}_{n+1}}{\mathcal{U}_n} \geq 1$, alors $\mathcal{U}_{n+1} \geq \mathcal{U}_n$, donc $(\mathcal{U}_n)$ est croissante ;

■ Si $\frac{\mathcal{U}_{n+1}}{\mathcal{U}_n} \leq 1$, alors $\mathcal{U}_{n+1} \leq \mathcal{U}_n$, donc $(\mathcal{U}_n)$ est décroissante ;

**Exemple 17 :**

Etudier la monotonie des deux suites $(\mathcal{U}_n)$ et $(\mathcal{V}_n)$ définies par : $\mathcal{U}_n = n^2 + 2$ et $\mathcal{V}_{n-1} = -2n + 5$

**Réponse :**

$\mathcal{U}_{n+1} = (n+1)^2 + 2 = n^2 + 2n + 3$

$\mathcal{U}_{n+1} - \mathcal{U}_n = n^2 + 2n + 3 - n^2 - 2 = 2n + 1 > 0.$

D'où, $(\mathcal{U}_n)$ est croissante.

$\mathcal{V}_{n-1} = -2n + 5,$

$\mathcal{V}_n = -2(n+1) + 5 = -2n - 2 + 5 = -2n + 3$

$\mathcal{V}_n - \mathcal{V}_{n-1} = -2n + 3 - (-2n + 5)$

$= -2n + 3 + 2n - 5 = -2 < 0.$

D'où, $(\mathcal{V}_n)$ est décroissante.

**Exercice 1 :**

Etudier la monotonie de chacune des suites suivantes ;

**1°)** $\mathcal{U}_n = 3n + 1 \ \forall n \in \mathbb{N},$

**2°)** $\mathcal{V}_n = \frac{1}{n} \ \forall n \in \mathbb{N}^*,$

**3°)** $\mathcal{W}_n = n^2 - 6n + 5 \ \forall n \in \mathbb{N}$

**Solution :**

**1°)** $\mathcal{U}_n = 3n + 1$ et $\mathcal{U}_{n+1} = 3(n+1) + 1$

$\mathcal{U}_{n+1} - \mathcal{U}_n = [3(n+1) + 1] - (3n + 1)$

$= 3 > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$

D'où, $(\mathcal{U}_n)$ est strictement croissante.

**2°)** $\mathcal{V}_n = \frac{1}{n}$ et $\mathcal{V}_{n+1} = \frac{1}{n+1},$

$\mathcal{V}_{n+1} - \mathcal{V}_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{-1}{n^2 + n} < 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$

D'où, $(\mathcal{V}_n)$ est strictement décroissante.

**3°)** $\mathcal{W}_n = n^2 - 6n + 5 = (n-1)(n-5)$

Et $\mathcal{W}_{n+1} = (n+1)^2 - 6(n+1) + 5$

$= (n+1)(n+1-6) + 5 = (n+1)(n-5) + 5$

$\mathcal{W}_{n+1} - \mathcal{W}_n = [(n+1)(n-5) + 5] - (n^2 - 6n + 5)$

$= (n-1)(n-5) + 5 - n^2 + 6n - 5$

$= (n+1)(n-5) - n^2 + 6n$

$= n^2 - 5n + n - 5 - n^2 + 6n = 2n - 5.$

Donc $\mathcal{W}_{n+1} - \mathcal{W}_n = 2n - 5.$

● Si $n \in \{0; 1; 2\}$ alors $2n - 5 < 0$

● $\forall n \geq 3$ alors $2n - 5 > 0$. D'où, la suite $(\mathcal{W}_n)$ n'est pas monotone.

**Exemple 18 :**

■ $(\mathcal{U}_n)$est la suite définie pour tout entier naturel $n$par$\mathcal{U}_n = n^2$.

Pour tout naturel $n$:

$\mathcal{U}_{n+1} - \mathcal{U}_n = (n + 1)^2 - n^2 = 2n + 1 \geq 0.$

Donc, $(\mathcal{U}_n)$est une suite croissante.

On peut dire aussi que l'on a :$\mathcal{U}_n = f(n)$où $f$ est la fonction :$x \longmapsto x^2$

Or, $f$est croissante sur$[0\,;+\infty[$.Donc, la suite $(\mathcal{U}_n)$ est croissante.

■ $(\mathcal{W}_n)$est la suite telle que pour tout entier naturel $n$ : $\mathcal{W}_n = (-1)^n$;

$\mathcal{W}_0 = 1$ ; $\mathcal{W}_1 = -1$ ; $\mathcal{W}_2 = 1,$ $\mathcal{W}_3 = -1$...

$(\mathcal{W}_n)$ est une suite qui n'est pas croissante car $\mathcal{W}_2 > \mathcal{W}_3$ ; et $(\mathcal{W}_n)$ n'est pas décroissante car $\mathcal{W}_1 < \mathcal{W}_2$.

■ Soit $(\mathcal{U}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de terme général $\frac{1}{n(n+1)}$.

On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathcal{U}_{n+1} - \mathcal{U}_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)} - \frac{1}{n(n+1)}$$

$$= \frac{-2}{n(n+1)(n+2)}$$

Donc ; $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{U}_{n+1} - \mathcal{U}_n < 0$ ; la suite $(\mathcal{U}_n)$ est décroissante.

## II. Suites arithmétiques, géométriques :

### 1) Suites arithmétiques :

#### a) Définition :

Soit $a$ un entier naturel et soit $(\mathcal{U}_n)$ une suite définie pour tout $n \geq a$.

Dire qu'une suite $(\mathcal{U}_n)$ est arithmétique signifie qu'il existe un réel $r$, tel que, $\forall n \geq a$ ; on a

$\mathcal{U}_{n+1} = \mathcal{U}_n + r$ $(\mathcal{U}_{n+1} - \mathcal{U}_n = r)$; $r$ est appelé la raison de la suite $(\mathcal{U}_n)$.

**Exemple 19 :**

■ La suite $(\mathcal{U}_n)$ des naturels est une suite arithmétique de raison 1. $\mathcal{U}_0 = 0$ ; $\mathcal{U}_1 = 1$ ; $\mathcal{U}_2 = 2$ ;

■ La suite $(\mathcal{V}_n)$ des naturels pairs est une suite arithmétique de raison 2. $\mathcal{V}_0 = 0$ ; $\mathcal{V}_1 = 2$ ; $\mathcal{V}_2 = 4$ ; ...

■ La suite$(\mathcal{W}_n)$ des naturels impairs est une suite arithmétique de raison 2.$\mathcal{W}_0 = 1$;$\mathcal{W}_1 = 3$; $\mathcal{W}_2 = 5$;...

■ La suite $(\mathcal{X})$ telle que : pour tout naturel $n$, $\mathcal{X}_n = 4 - 3n$ est une suite arithmétique de raison $-3$. En effet, pour tout naturel $n$,

$\mathcal{X}_{n+1} - \mathcal{X}_n = \big(4 - 3(n+1)\big) - (4 - 3n) = -3,$ et par conséquent, $\mathcal{X}_{n+1} = \mathcal{X}_n - 3$.

**Remarque 2 :**

■ Pour démontrer qu'une suite donnée est arithmétique, il suffit de montrer que pour tout naturel $n$, le réel :$\mathcal{U}_{n+1} - \mathcal{U}_n$ est constant (*c.-à-d. ne dépend pas de* $n$).

■ Soit $(\mathcal{U}_n)$ une suite arithmétique de raison $r$.

♦ Si $r > 0$, alors la suite $(\mathcal{U}_n)$ est croissante

♦ Si $r < 0$, alors la suite $(\mathcal{U}_n)$ est décroissante.

♦ Si $r = 0$, alors la suite $(\mathcal{U}_n)$ est constante.

#### b) Expression explicite du terme général d'une suite arithmétique :

Soit $(\mathcal{U}_n)$ une suite arithmétique de raison $r$ et de premier terme$\mathcal{U}_a$,

**On admet la propriété suivante** :

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathcal{U}_n = \mathcal{U}_a + (n - a)r$

Si $a = 0$, on a ; $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{U}_n = \mathcal{U}_0 + nr$

Si $a = 1$, on a ; $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{U}_n = \mathcal{U}_1 + (n - 1)r$

**Remarque 3 :**
On déduit de cette propriété que pour tous naturels, n et k, on a : $\mathcal{U}_n = \mathcal{U}_k + (n-k)r$.
En particulier, si $(\mathcal{U}_n)$ a pour premier terme $\mathcal{U}_1$, le terme général est : $\mathcal{U}_n = \mathcal{U}_1 + (n-1)r$.

**Exemple 20 :**
■ Soit $(\mathcal{U}_n)$ la suite des entiers naturels impairs, le premier terme de cette suite est $\mathcal{U}_1 = 1$ ;
la raison $r = 2$ ; on a : $\mathcal{U}_n = \mathcal{U}_1 + (n-1)r$
$\mathcal{U}_n = \mathcal{U}_1 + (n-1) \times 2 = 2n - 1$.
■ Soit $(\mathcal{U}_n)$ la suite arithmétique de raison $-3$, tel que $\mathcal{U}_3 = 7$. On applique : $\mathcal{U}_n = \mathcal{U}_k + (n-k)r$ ; on a,
$\mathcal{U}_{100} = \mathcal{U}_3 + (100-3)(-3) = 7 + (97)(-3)$
$= -284$

**Exercice 2 :**
Calculer le 17ème terme $\mathcal{U}_{17}$ d'une suite arithmétique dont le premier terme est $\mathcal{U}_1 = 13$, et la raison $r = 5$.

**Solution :**
$\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathcal{U}_{17} = \mathcal{U}_1 + (17-1) \times r$
$= 13 + (17-1) \times 5 = 93$, $\mathcal{U}_{17} = 93$

**Exercice 3 :**
$(\mathcal{U}_n)$ est une suite arithmétique de raison $r = -3$ et de premier terme $\mathcal{U}_0 = 25$.
Calculer le 36ème terme de la suite $(\mathcal{U}_n)$.

**Solution :**
$\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathcal{U}_{36} = \mathcal{U}_0 + (36-1) \times r$
$= 25 + (36-1) \times -3 = -80 = -80$

**Exercice 4 :**
$(\mathcal{U}_n)$ est une suite arithmétique telle que ; $\mathcal{U}_7 = -12$ et $\mathcal{U}_{10} = 3$. Calculer sa raison et son premier terme.

**Solution :**
$$\begin{cases} \mathcal{U}_0 + 7r = \mathcal{U}_7 \\ \mathcal{U}_0 + 10r = \mathcal{U}_{10} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathcal{U}_0 + 7r = -12 : L_1 \\ \mathcal{U}_0 + 10r = 3 : L_2 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \mathcal{U}_0 + 7r = -12 : L_1 \\ 3r = 15 : L_2 - L_1 \end{cases} \Rightarrow r = 5$$
On remplace dans $L_1$, on a ; $\mathcal{U}_0 + 7 \times 5 = -12 \Rightarrow \mathcal{U}_0 = -47$.

**Exemple 21 :**
Soit la suite $(\mathcal{U}_n)$ définie par : $\mathcal{U}_n = -3n + 5$.
Montrer que $(\mathcal{U}_n)$ est arithmétique.

**Réponse :**
$\mathcal{U}_{n+1} - \mathcal{U}_n = -3(n+1) + 5 - (-3n+5)$
$= -3n - 3 + 5 + 3n - 5 = -3$
$\mathcal{U}_{n+1} - \mathcal{U}_n = -3 \Rightarrow r = -3$

**Conclusion :**
Une suite $\mathcal{U}$ est croissante si $r > 0$, elle est décroissante si $r < 0$.

**Exemple 22 :**
La suite $(\mathcal{U}_n)$ est arithmétique tels que : $\mathcal{U}_{10} = 53$, $\mathcal{U}_7 = 38$
**1-** Calculer sa raison r.
**2-** Exprimer $\mathcal{U}_n$ en fonction de $n$, puis en déduire $\mathcal{U}_{n-1}$ et $\mathcal{U}_{n-2}$.

**Réponse :**
1°) On a ; $\mathcal{U}_n = \mathcal{U}_p + (n-p)r$
$\mathcal{U}_{10} = \mathcal{U}_7 + (10-7)r \Rightarrow 53 = 38 + (10-7)r$
$\Rightarrow (10-7)r = 53 - 38 \Rightarrow 3r = 15 \Rightarrow r = 5$
2°) On a ; $\mathcal{U}_n = \mathcal{U}_p + (n-p)r$
$\mathcal{U}_n = \mathcal{U}_{10} + (n-10) \times 5 = 53 + (n-10) \times 5$
$= 53 + 5n - 50 \Rightarrow \mathcal{U}_n = 3 + 5n$.
$\mathcal{U}_n = 3 + 5n \Rightarrow \mathcal{U}_{n-1} = 3 + 5(n-1)$
$\Rightarrow \mathcal{U}_{n-1} = -2 + 5n$
$\mathcal{U}_n = 3 + 5n \Rightarrow \mathcal{U}_{n+2} = 3 + 5(n+2)$
$\Rightarrow \mathcal{U}_{n+2} = 13 + 5n$

**Remarque 4 :**
Soit $(\mathcal{U}_n)$ une suite arithmétique définie sur une partie $A$ de $\mathbb{N}$ et de raison $r$, alors : $\forall n \in A$,
$$\mathcal{U}_n = \frac{\mathcal{U}_{n-1} + \mathcal{U}_{n+1}}{2} \Rightarrow 2\mathcal{U}_n = \mathcal{U}_{n-1} + \mathcal{U}_{n+1}$$

### c) Somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique :

**Propriété :**
Si $\mathcal{S}$ est une somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique $(\mathcal{U}_n)$, alors : $\mathcal{S} = \frac{NT \times (PT + DT)}{2}$
$NT$ =Nombre de Termes, $PT$ =Premier Terme,
$DT$ =Dernier Terme

**Cas particuliers :**
$$\mathcal{S} = \mathcal{U}_0 + \mathcal{U}_1 + \cdots + \mathcal{U}_n = \frac{(n+1)(\mathcal{U}_0 + \mathcal{U}_n)}{2},$$
si le 1er terme est $\mathcal{U}_0$.
$$\mathcal{S} = \mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2 + \cdots + \mathcal{U}_n = \frac{n(\mathcal{U}_0 + \mathcal{U}_n)}{2},$$
si le 1er terme est $\mathcal{U}_1$.

**Démonstration :**
Soit $(\mathcal{U}_n)$ une suite arithmétique de raison $r$, on pose :
$S_n = \mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2 + \mathcal{U}_3 + \cdots + \mathcal{U}_n$ **(1)**
$S_n = \mathcal{U}_n + \cdots + \mathcal{U}_3 + \mathcal{U}_2 + \mathcal{U}_1$ **(2)**
Alors, (1) + (2)
$\Rightarrow 2S_n = (\mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_n) + (\mathcal{U}_2 + \mathcal{U}_{n-1}) + (\mathcal{U}_3 + \mathcal{U}_{n-2}) + \cdots + (\mathcal{U}_{n-1} + \mathcal{U}_2) + (\mathcal{U}_n + \mathcal{U}_1)$
Or,
$\mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_n = \mathcal{U}_1 + (\mathcal{U}_1 + (n-1)r) = 2\mathcal{U}_1 + (n-1)r$
$\mathcal{U}_2 + \mathcal{U}_{n-1} = (\mathcal{U}_1 + r) + (\mathcal{U}_1 + (n-2)r)$
$= 2\mathcal{U}_1 + (n-1)r$
...
$\mathcal{U}_k + \mathcal{U}_{n-k} = (\mathcal{U}_1 + (k-1)r) + (\mathcal{U}_1 + (n-k)r)$
$= 2\mathcal{U}_1 + (n-1)r$
...
$\mathcal{U}_{n-1} + \mathcal{U}_2 = (\mathcal{U}_1 + (n-2)r) + (\mathcal{U}_1 + r)$
$= 2\mathcal{U}_1 + (n-1)r$
$\mathcal{U}_n + \mathcal{U}_1 = (\mathcal{U}_1 + (n-1)r) + \mathcal{U}_1 = 2\mathcal{U}_1 + (n-1)r$
On a donc ; $\mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_n = \mathcal{U}_2 + \mathcal{U}_{n-1} = \cdots = \mathcal{U}_{n-1} + \mathcal{U}_2 = \mathcal{U}_n + \mathcal{U}_1 = 2\mathcal{U}_1 + (n-1)r$
Donc ; $2S_n = \underbrace{(\mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_n) + (\mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_n) + \cdots + (\mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_n)}_{n\ fois}$
$= n(\mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_n) \Rightarrow \boldsymbol{S_n = \frac{n}{2}(\mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_n)}$.

**Remarque 5 :**

Pour une suite arithmétique de raison $r$ :

Si on pose $S_n = \mathcal{U}_0 + \mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2 + \cdots + \mathcal{U}_{n-1}$. alors ;

$S_n = \frac{n}{2}(\mathcal{U}_0 + \mathcal{U}_{n-1}) = \frac{n}{2}(2u_0 + (n-1)r)$

Si on pose $S_n = \mathcal{U}_0 + \mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2 + \cdots + \mathcal{U}_n$. On a alors ;

$S_n = \frac{n+1}{2}(\mathcal{U}_0 + \mathcal{U}_n) = \frac{n+1}{2}(2\mathcal{U}_0 + nr)$

Plus généralement. Si on pose $S = \mathcal{U}_p + \mathcal{U}_{p+1} + \mathcal{U}_{p+2} + \cdots + \mathcal{U}_q$, avec $p < q$. On a alors ;

$$S = \frac{q-p+1}{2}(\mathcal{U}_p + \mathcal{U}_q)$$

**Exemple 23 :**

■ La somme des n premiers nombres entiers naturels non nuls est : $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

■ La somme des n premiers nombres impairs est :

$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = \frac{n(1+(2n-1))}{2} = n^2$.

■ La somme des n premiers nombres pairs non nuls est : $2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = \frac{n(2n+2)}{2} = n(n+1)$.

**Exercice 5 :**

Dans chacun des cas suivants, préciser si la suite est arithmétique.

**1°)** $\mathcal{U}_n = 5n + 2 \forall n \in \mathbb{N}$; **2°)** $\mathcal{V}_n = \frac{1}{n}\ \forall \in \mathbb{N}^*$;

**3°)** $\mathcal{W}_n = n^2\ \forall n \in \mathbb{N}$

**Solution :**

**1°)** $\mathcal{U}_n = 5n + 2$ , $\mathcal{U}_{n+1} = 5(n+1) + 2$

$\mathcal{U}_{n+1} - \mathcal{U}_n = [5(n+1) + 2] - (5n + 2)$

$= 5(n+1) + 2 - 5n - 2 = 5n + 5 - 5n$

$= 5 > 0, \forall n \in \mathbb{N}$

D'où, $(\mathcal{U}_n)$ est une suite arithmétique de raison 5.

**2°)** $\mathcal{V}_n = \frac{1}{n}$ , $\mathcal{V}_{n+1} = \frac{1}{n+1}$,

$\mathcal{V}_{n+1} - \mathcal{V}_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{-1}{n^2+n}$

La suite $(\mathcal{V}_n)$ n'est donc pas arithmétique.

**3°)** $\mathcal{W}_n = n^2, \mathcal{W}_{n+1} = (n+1)^2, \mathcal{W}_{n+1} - \mathcal{W}_n$

$= (n+1)^2 - n^2 = (n+1-n)(n+1+n) = 2n+1$

La suite $(\mathcal{W}_n)$ n'est donc pas arithmétique.

**Exercice 6 :**

Soit $(\mathcal{U}_n)$ une suite arithmétique de raison $r = 7$ et de premier terme $\mathcal{U}_0 = -11$.

Calculer la somme $S = \mathcal{U}_0 + \mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2 + \cdots + \mathcal{U}_{23}$

**Solution :**

$S = \mathcal{U}_0 + \mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2 + \mathcal{U}_3 + \cdots + \mathcal{U}_{23}$

$= \frac{23+1}{2}(2\mathcal{U}_0 + nr) = 12(2 \times -11 + 23 \times 7)$

$= 12(-22 + 161) = 12 \times 139 = 1\,668$

$\Longrightarrow \boldsymbol{S = 1\,668}$

**Exercice 7 :**

Calculer la somme $S = 2 + 5 + 8 + \cdots + 2012$.

**Solution :**

$S$ est une somme de la suite arithmétique $(\mathcal{U}_n)$ de raison $r = 3$ et de premier terme $\mathcal{U}_1 = 2$.

Déterminons le rang du terme $\mathcal{U}_n = 2012$ et de nombre de termes $n - 1 + 1 = n$, d'où ;

$\mathcal{U}_n = \mathcal{U}_1 + (n-1)r = 2 + 3(n-1) = 2012 \Longrightarrow n = 671$

$= 8^2 - 50 = 64 - 50 = 14 \Longrightarrow \mathcal{U}_2\mathcal{U}_4 = \frac{14}{2} = 7$

$\Longrightarrow \begin{cases} \mathcal{U}_2 + \mathcal{U}_4 = 8 \\ \mathcal{U}_2\mathcal{U}_4 = 7 \end{cases}$

Il s'agit d'un système homogène. Sa solution est celle de l'équation ;

$X^2 - 8X + 7 = 0 \Longrightarrow a + b + c = 1 - 8 + 7 = 0$

$\Longrightarrow \begin{cases} X_1 = 1 \\ X_2 = 7 \end{cases}$

▶ Si $\mathcal{U}_2 = X_1 = 1$, alors $\mathcal{U}_4 = X_2 = 7$ et on a ; $\mathcal{U}_2 = 1, \mathcal{U}_3 = 4, \mathcal{U}_4 = 7$

La suite $(\mathcal{U}_n)$ est alors une suite arithmétique croissante de raison$r = 3$.

▶ Si $\mathcal{U}_2 = X_2 = 7$, alors $\mathcal{U}_4 = X_1 = 1$ et on a ;$\mathcal{U}_2 = 7, \mathcal{U}_3 = 4, \mathcal{U}_4 = 1$

La suite $(\mathcal{U}_n)$ est alors une suite arithmétique décroissante de raison $r = -3$

**2°)** Considérons que $(\mathcal{U}_n)$ est croissante, sa raison est donc $r = 3$ ;

$\mathcal{U}_n = \mathcal{U}_2 + (n-2) \times 3 = 1 + 3n - 6 = 3n - 5$

$\Longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{U}_n = 3n - 5}$

**3°)** Calculer

$S_n = \mathcal{U}_2 + \mathcal{U}_3 + \cdots + \mathcal{U}_{n+1} = \frac{n}{2}(1 + 3(n+1) - 5)$

$= \frac{n}{2}(1 + 3n + 3 - 5) \Longrightarrow \boldsymbol{S_n = \frac{n}{2}(3n-1)}$

$S_n' = \mathcal{U}_4 + \mathcal{U}_5 + \cdots + \mathcal{U}_{n-1}$

$= \frac{n-4}{2}(7 + 3(n-1) - 5)$

$= \frac{n-4}{2}(7 + 3n - 3 - 5) \Longrightarrow \boldsymbol{S_n' = \frac{n-4}{2}(3n-1)}$.

## 2) Suites géométriques :

### a) Définition :

Soit $a$ un entier naturel et soit $(\mathcal{U}_n)$ une suite définie pour $n \geq a$. On dit que la suite $(\mathcal{U}_n)$ est une suite géométrique s'il existe un réel $q$ telle que ;

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{U}_{n+1} = q\mathcal{U}_n$. On dit que $q$ est la raison de la suite$(\mathcal{U}_n)$

**Exemple 24 :**

■ La suite des puissances de 2 est une suite géométrique de raison 2.

$\mathcal{U}_0 = 2^0 = 1$; $\mathcal{U}_1 = 2^1 = 2$ ; $\mathcal{U}_2 = 2^2 = 4$ ; $\mathcal{U}_3 = 2^3 = 8$ ; ...

■ Une suite constante est une suite géométrique de raison 1 ; $\mathcal{U}_0 = k$ ; $\mathcal{U}_1 = k$ ; $\mathcal{U}_2 = k$ ;...

■ La suite $(\mathcal{V}_n)$ telle que pour tout natureln, $\mathcal{V}_n = 3\left(\frac{1}{2}\right)^n$ est une suite géométrique de raison$\frac{1}{2}$.

En effet, pour tout naturel $n$, on a :

$\mathcal{V}_{n+1} = 3\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 3 \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

$= \frac{1}{2}\left[3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right] = \frac{1}{2}\mathcal{V}_n$

**Remarque 5 :**

Pour démontrer qu'une suite$(\mathcal{U}_n)$ donnée de termes non nuls est géométrique, il suffit de démontrer que le réel $\frac{\mathcal{U}_{n+1}}{\mathcal{U}_n}$ est une constante indépendante de $n$, alors si $\frac{\mathcal{U}_{n+1}}{\mathcal{U}_n} = q$, on a évidemment$\mathcal{U}_{n+1} = q\mathcal{U}_n$ et $q$ est la raison de cette suite géométrique.

**Exercice 8 :**

Dans chacun des cas suivants, préciser si la suite est géométrique et donner sa raison.

**1°)**$\mathcal{U}_n = 5 \times 2^n \ \forall n \in \mathbb{N}$,

**2°)**$\mathcal{V}_n = \frac{1}{n} \ \forall n \in \mathbb{N}^*$,

**3°)**$\mathcal{W}_n = n^2 \ \forall n \in \mathbb{N}$

**Solution :**

**1°)**$\mathcal{U}_n = 5 \times 2^n \ et \ \mathcal{U}_{n+1} = 5 \times 2^{(n+1)}$

$$\mathcal{U}_{n+1} \div \mathcal{U}_n = 5 \times 2^{(n+1)} \div 5 \times 2^n = \frac{5 \times 2^{(n+1)}}{5 \times 2^n}$$

$$= \frac{5 \times 2^n \times 2}{5 \times 2^n \times 1} = 2, \qquad \forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{\mathcal{U}_{n+1} = 2\mathcal{U}_n}$$

La suite $(\mathcal{U}_n)$ est donc géométrique de raison 2.

**2°)**$\mathcal{V}_n = \frac{1}{n} \ et \ \mathcal{V}_{n+1} = \frac{1}{n+1}$

$$\mathcal{V}_{n+1} \div \mathcal{V}_n = \frac{1}{n+1} \div \frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} \times \frac{n}{1} = \frac{n}{n+1},$$

$$\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^*, \frac{\boldsymbol{\mathcal{V}_{n+1}}}{\boldsymbol{\mathcal{V}_n}} = \frac{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{n+1}}$$

$\mathcal{V}_{n+1} \div \mathcal{V}_n$ n'est pas constant, car, ça dépend de la valeur de $n$.

La suite $(\mathcal{V}_n)$ n'est donc pas géométrique.

**3°)** $\mathcal{W}_n = n^2 \ et \ \mathcal{W}_{n+1} = (n+1)^2$,

$$\frac{\mathcal{W}_{n+1}}{\mathcal{W}_n} = \frac{(n+1)^2}{n^2} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2$$

$\mathcal{W}_{n+1} \div \mathcal{W}_n$n'est pas constant, car, ça dépend de la valeur de $n$. La suite $(\mathcal{W}_n)$ n'est donc pas géométrique.

## b) Expression explicite du terme général d'une suite géométrique :

**Situation :**

On suppose que le taux d'accroissement annuel de la population d'un pays donné est constant et égal à 1%.

On note $\mathcal{U}_0$ la population au début de 2012.

$\mathcal{U}_1$est la population au bout d'une année,

$\mathcal{U}_2$ est la population au bout de deux années,

$\mathcal{U}_3$ est la population au bout de trois années,...

$\mathcal{U}_n$est la population au bout de $n$ années.

**1°)** Calculer $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \mathcal{U}_3$ en fonction de $\mathcal{U}_0$.

**2°) a)** Exprimer $\mathcal{U}_{n+1}$ en fonction de $\mathcal{U}_n$

**b)** Quelle est la nature de la suite $(\mathcal{U}_n)$ ?

**3°)** Exprimer $\mathcal{U}_n$ en fonction de $\mathcal{U}_0$et $n$.

**Solution :**

**1°)**$\mathcal{U}_1 = \mathcal{U}_0 + \frac{1}{100}\mathcal{U}_0 = \frac{101}{100}\mathcal{U}_0 \Rightarrow \boldsymbol{\mathcal{U}_1 = \frac{101}{100}\mathcal{U}_0}$

$$\mathcal{U}_2 = \mathcal{U}_1 + \frac{1}{100}\mathcal{U}_1 = \frac{101}{100}\mathcal{U}_0 + \frac{1}{100} \times \frac{101}{100}\mathcal{U}_0$$

$$= \left(\frac{101}{100} + \frac{101}{10\,000}\right)\mathcal{U}_0$$

$$= \left(\frac{10\,100}{10\,000} + \frac{101}{10\,000}\right)\mathcal{U}_0$$

$$= \left(\frac{10\,201}{10\,000}\right)\mathcal{U}_0 = \left(\frac{101}{100}\right)^2 \mathcal{U}_0$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\mathcal{U}_2 = \left(\frac{101}{100}\right)^2 \mathcal{U}_0}$$

$$\mathcal{U}_3 = \mathcal{U}_2 + \frac{1}{100}\mathcal{U}_2 = \left(\frac{101}{100}\right)^2 \mathcal{U}_0 + \frac{1}{100} \times \left(\frac{101}{100}\right)^2 \mathcal{U}_0$$

$$= \left(\frac{10\,201}{10\,000}\right)\mathcal{U}_0 + \left(\frac{10\,201}{1\,000\,000}\right)\mathcal{U}_0$$

$$= \left[\left(\frac{1\,020\,100}{1\,000\,000}\right) + \left(\frac{10\,201}{1\,000\,000}\right)\right]\mathcal{U}_0$$

$$= \left(\frac{1\,030\,301}{1\,000\,000}\right)\mathcal{U}_0$$

$$= \left(\frac{101}{100}\right)^3 \mathcal{U}_0 \Rightarrow \boldsymbol{\mathcal{U}_3 = \left(\frac{101}{100}\right)^3 \mathcal{U}_0}$$

**2°) a)**$\mathcal{U}_{n+1} = \mathcal{U}_n + \frac{1}{100}\mathcal{U}_n = \frac{101}{100}\mathcal{U}_n$

**b)** Comme $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{U}_{n+1} = \frac{101}{100}\mathcal{U}_n$. La suite$(\mathcal{U}_n)$ est donc géométrique de raison $q = \frac{101}{100}$.

**3°)** Comme$(\mathcal{U}_n)$ est géométrique de raison $q = \frac{101}{100}$

$$\frac{\mathcal{U}_1}{\mathcal{U}_0} = \frac{101}{100}, \frac{\mathcal{U}_2}{\mathcal{U}_1} = \frac{101}{100}, \frac{\mathcal{U}_3}{\mathcal{U}_2} = \frac{101}{100}, \dots, \frac{\mathcal{U}_n}{\mathcal{U}_{n-1}} = \frac{101}{100}$$

En multipliant membre à membre toutes les égalités, on a ;

$$\frac{\mathcal{U}_1}{\mathcal{U}_0} \times \frac{\mathcal{U}_2}{\mathcal{U}_1} \times \frac{\mathcal{U}_3}{\mathcal{U}_2} \times \dots \times \frac{\mathcal{U}_n}{\mathcal{U}_{n-1}}$$

$$= \underbrace{\frac{101}{100} \times \frac{101}{100} \times \frac{101}{100} \times \dots \times \frac{101}{100}}_{n \ fois} \Rightarrow \frac{\mathcal{U}_n}{\mathcal{U}_0} = \left(\frac{101}{100}\right)^n$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \ \boldsymbol{\mathcal{U}_n = \left(\frac{101}{100}\right)^n \mathcal{U}_0}.$$

**Propriété :**

Soit $(\mathcal{U}_n)$ une suite géométrique de raison non nulle $q$ et de premier terme $\mathcal{U}_0$, alors ; $\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{\mathcal{U}_n = \mathcal{U}_0 \times q^n}$

Soit $(\mathcal{U}_n)$ une suite géométrique de raison $q$ et de premier terme $\mathcal{U}_1$, alors ; $\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{\mathcal{U}_n = \mathcal{U}_1 \times q^{n-1}}$

Plus généralement, soit $(\mathcal{U}_n)$ une suite géométrique de raison $q$ et de premier terme $\mathcal{U}_p$, alors ;

$$\forall \boldsymbol{n \geq p}, \qquad \boldsymbol{\mathcal{U}_n = \mathcal{U}_p \times q^{n-p}}$$

**Remarque 6 :**

On déduit de cette propriété que pour tous nombres entiers naturels $n$et $k$, on a : $\mathcal{U}_n = \mathcal{U}_k q^{n-k}$.

En particulier, si une suite $(\mathcal{U}_n)$ a pour premier terme $\mathcal{U}_1$, le terme général est : $\mathcal{U}_n = \mathcal{U}_1 q^{n-1}$.

**Exemple 25 :**

■ Soit la suite géométrique$(\mathcal{U}_n)$ de premier terme $\mathcal{U}_1 = 3$ et de raison $q = 2$, on a :

$\mathcal{U}_{10} = \mathcal{U}_1 q^{10-1} = 3 \times 2^9$.

■ Soit la suite géométrique $(\mathcal{U}_n)$ de raison $-\frac{1}{2}$, et telle que $\mathcal{U}_5 = 9$; On a :

$\mathcal{U}_{100} = \mathcal{U}_5 q^{100-5} = 9 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{95}$.

**c) Somme partielle des termes consécutifs d'une suite géométrique :**

**Propriété :**

Si $\mathcal{S}$ est une somme de termes consécutifs d'une suite géométrique $(\mathcal{U}_n)$ de raison $q$ différent de 1, alors :

■ $S = PT \times \frac{1-q^{NT}}{1-q}$,

$PT$ =Premier Terme, $NT$ =Nombre de Termes.

■ Cas particuliers ;

Si le 1er terme est $\mathcal{U}_0$;

$$S = \mathcal{U}_0 + \mathcal{U}_1 + \cdots + \mathcal{U}_n = \mathcal{U}_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Si le 1er terme est $\mathcal{U}_1$;

$$S = \mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2 + \cdots + \mathcal{U}_n = \mathcal{U}_1 \frac{1-q^{n}}{1-q}$$

**Démonstration :**

Soit $(\mathcal{U}_n)$ une suite géométrique de raison $q$ et de premier terme $\mathcal{U}_0$, on pose ;

$S_n = \mathcal{U}_0 + \mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_3 + \cdots + \mathcal{U}_{n-1}$

$= \mathcal{U}_0 + q.\mathcal{U}_0 + q^2.\mathcal{U}_0 + q^3.\mathcal{U}_0 + \cdots + q^{n-1}.\mathcal{U}_0 \mathbf{(1)}$

Si $q = 1$, alors la suite $(\mathcal{U}_n)$ est constante et on a ;

$S_n = \mathcal{U}_0 + 1 \times \mathcal{U}_0 + 1 \times \mathcal{U}_0 + 1 \times \mathcal{U}_0 + \cdots + 1 \times \mathcal{U}_0$

$= \mathcal{U}_0 + \mathcal{U}_0 + \mathcal{U}_0 + \mathcal{U}_0 + \cdots + \mathcal{U}_0 = n\,\mathcal{U}_0$

Si $q \neq 1$, alors en multipliant les deux membres de l'égalité par $q$ on a ;

$qS_n = q.\mathcal{U}_0 + q^2.\mathcal{U}_0 + q^3.\mathcal{U}_0 + q^4.\mathcal{U}_0 + \cdots$
$+ q^n.\mathcal{U}_0 \mathbf{(2)}$

Donc, $\mathbf{(1)} - \mathbf{(2)} \Longrightarrow$

$S_n - qS = [\mathcal{U}_0 + q.\mathcal{U}_0 + q^2.\mathcal{U}_0 + \cdots + q^{n-1}.\mathcal{U}_0]$
$-[q.\mathcal{U}_0 + q^2.\mathcal{U}_0 + q^3.\mathcal{U}_0 + \cdots + q^n.\mathcal{U}_0]$
$= \mathcal{U}_0 + q.\mathcal{U}_0 + q^2.\mathcal{U}_0 + \cdots + q^{n-1}.\mathcal{U}_0$
$-q.\mathcal{U}_0 - q^2.\mathcal{U}_0 - q^3.\mathcal{U}_0 - \cdots - q^n.\mathcal{U}_0$
$= \mathcal{U}_0 + (q.\mathcal{U}_0 - q.\mathcal{U}_0) + (q^2.\mathcal{U}_0 - q^2.\mathcal{U}_0) + \cdots$
$+(q^3.\mathcal{U}_0 - q^3.\mathcal{U}_0) - \cdots$
$+(q^{n-1}.\mathcal{U}_0 - q^{n-1}.\mathcal{U}_0) - q^n.\mathcal{U}_0$
$\Longrightarrow S_n - qS_n = \mathcal{U}_0 - q^n.\mathcal{U}_0 \Longrightarrow (1-q)S_n$
$= (1-q^n)\mathcal{U}_0 \Longrightarrow S_n = \boldsymbol{\mathcal{U}_0}\left(\frac{\mathbf{1-q^n}}{\mathbf{1-q}}\right)$

**Remarque 7 :**

Pour une suite géométrique de raison $q$ ;

Si on pose $S_n = \mathcal{U}_0 + \mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_3 + \cdots + \mathcal{U}_n$ .

Alors si $q = 1$, on a ;

$S_n = \underbrace{\mathcal{U}_0 + \mathcal{U}_0 + \mathcal{U}_0 + \cdots + \mathcal{U}_0}_{n-0+1\,fois}$ ; donc, dans ce cas,

$\boldsymbol{S_n = (n+1)\mathcal{U}_0}$

Si $q \neq 1$, on a ;

$S_n = \mathcal{U}_0 + \mathcal{U}_0.q + \mathcal{U}_0.q^2 + \cdots + \mathcal{U}_0.q^n \mathbf{(3)}$

$q.S_n = \mathcal{U}_0.q + \mathcal{U}_0.q^2 + \mathcal{U}_0.q^3 + \cdots + \mathcal{U}_0.q^n \mathbf{(4)}$

De(3) − (4) $\Longrightarrow S_n - qS_n = \mathcal{U}_0 - q^{n+1}.\mathcal{U}_0$

$\Longrightarrow (1-q)S_n = (1-q^{n+1})\mathcal{U}_0$

$\Longrightarrow S_n = \boldsymbol{\mathcal{U}_0}\left(\frac{\mathbf{1-q^{n+1}}}{\mathbf{1-q}}\right)$

De même si on pose ;

$S_n = \mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2 + \mathcal{U}_3 + \cdots + \mathcal{U}_n$ ; Alors ; si$q = 1$, on a $\Longrightarrow \boldsymbol{S_n = n.\mathcal{U}_1}$si $q \neq 1$ ; $\Longrightarrow \boldsymbol{S_n = \mathcal{U}_1}\left(\frac{\mathbf{1-q^n}}{\mathbf{1-q}}\right)$

Plus généralement, si pour une suite géométrique on pose ;

$S_n = \mathcal{U}_p + \mathcal{U}_{p+1} + \mathcal{U}_{p+2} + \cdots + \mathcal{U}_n$. Avec$n > p$, alors;

Si $q = 1$, on a;$\Longrightarrow \boldsymbol{S_n = (n-p+1)\mathcal{U}_p}$

Si $q \neq 1$, on a ; $\Longrightarrow \boldsymbol{S_n = \mathcal{U}_p}\left(\frac{\mathbf{1-q^{n-p+1}}}{\mathbf{1-q}}\right)$

**Exemple 26 :**

■Soit $(\mathcal{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} \mathcal{U}_0 = 2 \\ \mathcal{U}_{n+1} = \frac{1}{3}\mathcal{U}_n, \ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$(\mathcal{U}_n)$est la suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de 1er terme $\mathcal{U}_n = 2$ ; on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathcal{U}_{n+1} = 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n = 2 \times \frac{1}{3^n}$$

La somme des 20 premiers termes de cette suite est :

$$\mathcal{U}_0 + \mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2 + \cdots + \mathcal{U}_{19} = 2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{3^2} + \cdots + \frac{2}{3^{19}}$$

$$= \mathcal{U}_0 \times \frac{(1-q^{20})}{1-q} = 2 \times \frac{\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{20}\right)}{1-\frac{1}{3}}$$

■Soit$(\mathcal{U}_n)$ la suite géométrique de premier terme $\mathcal{U}_1 = 3$ et de raison $q = 2$.

La somme des n premiers termes de cette suite est :

$$\mathcal{S} = \mathcal{U}_1 \times \frac{(1-q^{20})}{1-q} = 3 \times \frac{(1-2^n)}{1-2} = 3(2^n - 1)$$

**Exercice 9 :**

$(\mathcal{U}_n)$ est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$, et de premier terme $\mathcal{U}_0 = 3\,072$.

Calculer $S_{10} = \mathcal{U}_0 + \mathcal{U}_2 + \mathcal{U}_3 + \cdots + \mathcal{U}_9$

**Solution :**

$$S_{10} = 3\,072 \times \left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{9-0+1}}{1-\frac{1}{2}}\right)$$

$$= 3\,072 \times \left(\frac{1-\left(\frac{1}{1\,024}\right)}{1-\frac{1}{2}}\right)$$

$$= 3\,072 \times \left(\frac{\left(\frac{1\,023}{1\,024}\right)}{\frac{1}{2}}\right) = 3\,072 \times \left(\frac{1\,023}{512}\right)$$

$$= \frac{3\,072 \times 1\,023}{512} \Longrightarrow \boldsymbol{S_{10} = 6 \times 1\,023 = 6\,138}.$$

**Exercice 10 :**

Calculer $S_n = 1 + 3 + 9 + 27 + 81 + \cdots + 6\,561$.

**Solution :**

$S_n$ est la somme des $n$ premiers termes d'une suite géométrique $(\mathcal{U}_n)$ de raison $q = 3$ et de premier terme $\mathcal{U}_1 = 1$, et de dernier terme $\mathcal{U}_n = 6\,561$

Déterminons $n$, on a ;

$$\mathcal{U}_1 \times q^{n-1} = \mathcal{U}_n \Rightarrow q^{n-1} = \frac{\mathcal{U}_n}{\mathcal{U}_1}$$

$$\Rightarrow 3^{n-1} = 6\,561 \Rightarrow n-1 = 8 \Rightarrow n = 9$$

$$S_n = \mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2 + \mathcal{U}_3 + \cdots + \mathcal{U}_9 = 1 \times \frac{1-3^{9-1+1}}{1-3}$$

$$= \frac{1-3^{10}}{-2} = \frac{1-3^{10}}{-2} \Rightarrow \boldsymbol{S_n = 9\,841}.$$

**Exercice 11 :**

Calculer la somme ; $S = 8 - 16 + 32 - 64 + \cdots + 8\,192$.

**Solution :**

$S$ est la somme partielle des termes des rangs 3 à $n$ d'une suite géométrique $(\mathcal{U}_n)$, de raison $q = -2$, de premier terme $\mathcal{U}_0 = -1$ et de dernier terme $\mathcal{U}_n = 8\,192$.

$(-1)(-2)^n = 8\,192 \Rightarrow n = 13$

$$\Rightarrow S_n = \mathcal{U}_p\left(\frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}\right)$$

$$\Rightarrow S_n = 8 \times \left(\frac{1-(-2)^{13-3+1}}{1-(-2)}\right)$$

$$\Rightarrow S_n = 8 \times \left(\frac{1-(-2)^{11}}{1-(-2)}\right) = 8 \times \frac{1+2048}{1+2}$$

$$= 8 \times \frac{2049}{3} = 8 \times 683 \Rightarrow \boldsymbol{S_n = 5\,464}$$

**Exercice 12 :**

Soit $(\mathcal{U}_n)$ la suite numérique définie par :

$$\begin{cases} \mathcal{U}_0 = 12 \\ \forall n \in \mathbb{N};\ \mathcal{U}_{n+1} = \frac{1}{2}\mathcal{U}_n + 5 \end{cases}$$

**1°)** Calculer $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$ et $\mathcal{U}_3$,

**2°)** Soit $(\mathcal{V}_n)$ la suite numérique définie par : $\forall n \in \mathbb{N};\ \mathcal{V}_n = \mathcal{U}_n - 10$

**a)** Calculer $\mathcal{V}_0, \mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2$ et $\mathcal{V}_3$.

**b)** Montrer que $(\mathcal{V}_n)$ est une suite géométrique dont on déterminera la raison,

**c)** Exprimer $\mathcal{V}_n$ puis $\mathcal{U}_n$ en fonction de $n$,

**d)** $\forall n \in \mathbb{N}$, on pose;

$S_n = \mathcal{V}_0 + \mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 + \cdots + \mathcal{V}_{n-1}$,

$S_n' = \mathcal{U}_0 + \mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2 + \cdots + \mathcal{U}_{n-1}$

Exprimer $S_n$ et $S_n'$ en fonction de $n$.

**Solution :**

**1°)** $\mathcal{U}_1 = \frac{1}{2}\mathcal{U}_0 + 5 = \frac{1}{2} \times 12 + 5 = 6 + 5 = 11$,

$$\mathcal{U}_2 = \frac{1}{2}\mathcal{U}_1 + 5 = \frac{1}{2} \times 11 + 5 = \frac{11}{2} + 5 = \frac{21}{2}$$

$$\mathcal{U}_3 = \frac{1}{2}\mathcal{U}_2 + 5 = \frac{1}{2} \times \frac{21}{2} + 5 = \frac{21}{4} + 5 = \frac{41}{4}$$

**2°) a)** $\mathcal{V}_0 = \mathcal{U}_0 - 10 = 12 - 10 = 2$,

$\mathcal{V}_1 = \mathcal{U}_1 - 10 = 11 - 10 = 1$

$$\mathcal{V}_2 = \mathcal{U}_2 - 10 = \frac{21}{2} - 10 = \frac{1}{2},$$

$$\mathcal{V}_3 = \mathcal{U}_3 - 10 = \frac{41}{4} - 10 = \frac{1}{4}$$

**b)** On a;

$$\frac{\mathcal{V}_1}{\mathcal{V}_0} = \frac{1}{2}, \quad \frac{\mathcal{V}_2}{\mathcal{V}_1} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}, \frac{\mathcal{V}_3}{\mathcal{V}_2} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \mathcal{V}_1 = \frac{1}{2}\mathcal{V}_0,$$

$$\mathcal{V}_2 = \frac{1}{2}\mathcal{V}_1, \quad \mathcal{V}_3 = \frac{1}{2}\mathcal{V}_2$$

Dans le cas général, on a ; $\mathcal{V}_n = \mathcal{U}_n - 10$

$$\mathcal{V}_{n+1} = \mathcal{U}_{n+1} - 10 = \left(\frac{1}{2}\mathcal{U}_n + 5\right) - 10$$

$$= \frac{1}{2}\mathcal{U}_n + 5 - 10 = \frac{1}{2}\mathcal{U}_n - 5 = \frac{1}{2}(\mathcal{U}_n - 10)$$

$$= \frac{1}{2}(\mathcal{V}_n) \Rightarrow \boldsymbol{\mathcal{V}_{n+1} = \frac{1}{2}\mathcal{V}_n}$$

$(\mathcal{V}_n)$est donc une suite géométrique de raison$q = \frac{1}{2}$

**c)** Comme $(\mathcal{V}_n)$ est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et de premier terme $\mathcal{U}_0 = 2$, on a donc ; $\forall n \in \mathbb{N}; \mathcal{V}_n = \mathcal{V}_0 \times q^n \Rightarrow \boldsymbol{\mathcal{V}_n = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n}$. On a encore ;$\forall n \in \mathbb{N}; \mathcal{V}_n = 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

Or; $\forall n \in \mathbb{N}; \mathcal{V}_n = \mathcal{U}_n - 10$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}; \mathcal{U}_n = \mathcal{V}_n + 10$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}; \boldsymbol{\mathcal{U}_n = 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 10}$$

**d)** Comme $(\mathcal{V}_n)$ est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et de premier terme $\mathcal{U}_0 = 2$, on a donc

$$S_n = \mathcal{V}_0\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right) = 2 \times \left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}\right)$$

$$= 2 \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}} = 4\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{S_n = 4\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)} \forall n \in \mathbb{N}$$

Or, $\forall n \in \mathbb{N}$, on a ; $\mathcal{U}_n = \mathcal{V}_n + 10$

$S_n' = (\mathcal{V}_0 + 10) + (\mathcal{V}_1 + 10) + \cdots (\mathcal{V}_n + 10)$

$\Rightarrow S_n' = S_n + 10n$

Donc ;$\boldsymbol{S_n' = 4\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) + 10n}\ \forall n \in \mathbb{N}$

**Exercice 13 :**

Soit $(\mathcal{U}_n)$ une suite géométrique définie par :

$$\begin{cases} \mathcal{U}_0 = \frac{1}{2} \\ \mathcal{U}_{n+1} = \frac{2}{3}\mathcal{U}_n + 2 \end{cases}$$

**1°)** Calculer $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$et $\mathcal{U}_3$.

**2°)** On pose $\mathcal{V}_n = \mathcal{U}_n - 6$.

Calculer $\mathcal{V}_0, \mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \mathcal{V}_3$, puis montrer que la suite $(\mathcal{V}_n)$ est géométrique.

**Solution :**

**1°)** $\mathcal{U}_1 = \frac{2}{3}\mathcal{U}_0 + 2 = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} + 2 = \frac{14}{6} \Rightarrow \boldsymbol{\mathcal{U}_1 = \frac{7}{3}}$,

$$\mathcal{U}_2 = \frac{2}{3}\mathcal{U}_1 + 2 = \frac{2}{3} \times \frac{7}{3} + 2 = \frac{32}{9} \Rightarrow \boldsymbol{\mathcal{U}_2 = \frac{32}{9}}$$

$$\mathcal{U}_3 = \frac{2}{3}\mathcal{U}_2 + 2 = \frac{2}{3}\times\frac{32}{9} + 2 = \frac{118}{27} \Rightarrow \boldsymbol{\mathcal{U}_3 = \frac{118}{27}}$$

**2°)** $\mathcal{V}_0 = \mathcal{U}_0 - 6 = \frac{1}{2} - 6 \Rightarrow \boldsymbol{\mathcal{V}_0 = \frac{-11}{2}}$,

$$\mathcal{V}_1 = \mathcal{U}_1 - 6 = \frac{7}{3} - 6 \Rightarrow \boldsymbol{\mathcal{V}_1 = \frac{-11}{3}}$$

$$\mathcal{V}_2 = \mathcal{U}_2 - 6 = \frac{32}{9} - 6 \Rightarrow \boldsymbol{\mathcal{V}_2 = \frac{-22}{9}}$$

$$\mathcal{V}_3 = \mathcal{U}_3 - 6 = \frac{118}{27} - 6 \Rightarrow \boldsymbol{\mathcal{V}_3 = \frac{-44}{27}}$$

$$\mathcal{V}_{n+1} = \mathcal{U}_{n+1} - 6 = \left(\frac{2}{3}\mathcal{U}_n + 2\right) - 6 = \frac{2}{3}\mathcal{U}_n + 2 - 6$$

$$= \frac{2}{3}\mathcal{U}_n - 4 = \frac{2}{3}\mathcal{U}_n - \frac{2}{3}\times 4 \times \frac{3}{2}$$

$$= \frac{2}{3}\mathcal{U}_n - \frac{2}{3}\times\frac{12}{2} = \frac{2}{3}\mathcal{U}_n - \frac{2}{3}\times 6 = \frac{2}{3}(\mathcal{U}_n - 6)$$

$$= \frac{2}{3}\mathcal{V}_n$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\mathcal{V}_{n+1} = \frac{2}{3}\mathcal{V}_n}$$

La suite($\mathcal{V}_n$)est donc géométrique de raison$q = \frac{2}{3}$.

## Exercice 14 :

Soit ($\mathcal{U}_n$) et ($\mathcal{V}_n$) deux suites géométriques définies par :

$$\mathcal{U}_0 = 3 \text{ et } \mathcal{V}_0 = 1 \; et \; \begin{cases} \mathcal{U}_{n+1} = \dfrac{3\mathcal{U}_n + 2\mathcal{V}_n}{5} \\ \mathcal{V}_{n+1} = \dfrac{2\mathcal{U}_n + 3\mathcal{V}_n}{5} \end{cases}$$

**1°)** Calculer $\mathcal{U}_1$ et $\mathcal{V}_1$.

**2°)** On pose $\mathcal{W}_n = \mathcal{U}_n - \mathcal{V}_n$.

**a)** Montrer que ($\mathcal{W}_n$) est géométrique.

**b)** Exprimer $\mathcal{W}_n$ en fonction de $n$.

**3°)** Etudier la monotonie de ($\mathcal{U}_n$)et ($\mathcal{V}_n$).

**4°)** On pose $\mathcal{Y}_n = \mathcal{U}_n + \mathcal{V}_n$. Montrer que ($\mathcal{Y}_n$) est constante.

## Solution :

**1°)** $\mathcal{U}_1 = \frac{3\mathcal{U}_0+2\mathcal{V}_0}{5} = \frac{3\times3+2\times1}{5} = \frac{11}{5} \Rightarrow \boldsymbol{\mathcal{U}_1 = \frac{11}{5}}$

$$\mathcal{V}_1 = \frac{2\mathcal{U}_0 + 3\mathcal{V}_0}{5} = \frac{2\times3+3\times1}{5} = \frac{9}{5} \Rightarrow \boldsymbol{\mathcal{V}_1 = \frac{9}{5}}$$

**2°) a)** $\mathcal{W}_{n+1} = \mathcal{U}_{n+1} - \mathcal{V}_{n+1} = \frac{3\mathcal{U}_n+2\mathcal{V}_n}{5} - \frac{2\mathcal{U}_n+3\mathcal{V}_n}{5}$

$$= \frac{3\mathcal{U}_n + 2\mathcal{V}_n - 2\mathcal{U}_n - 3\mathcal{V}_n}{5} = \frac{\mathcal{U}_n - \mathcal{V}_n}{5} = \frac{1}{5}(\mathcal{U}_n - \mathcal{V}_n)$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\mathcal{W}_{n+1} = \frac{1}{5}\mathcal{W}_n}$$

($\mathcal{W}_n$) est donc géométrique de raison $q = \frac{1}{5}$

**b)** On a $\mathcal{W}_0 = \mathcal{U}_0 - \mathcal{V}_0 = 3 - 1 = 2$,

$$\mathcal{W}_n = \mathcal{W}_0 q^n = 2\times\left(\frac{1}{5}\right)^n \Rightarrow \boldsymbol{\mathcal{W}_n = 2\left(\frac{1}{5}\right)^n}$$

**3°)** $\mathcal{U}_{n+1} = \frac{3\mathcal{U}_n+2\mathcal{V}_n}{5}$

Calculons $\mathcal{U}_{n+1} - \mathcal{U}_n = \dfrac{3\mathcal{U}_n + 2\mathcal{V}_n}{5} - \mathcal{U}_n$

$$= \frac{3\mathcal{U}_n + 2\mathcal{V}_n - 5\mathcal{U}_n}{5} = \frac{-2\mathcal{U}_n + 2\mathcal{V}_n}{5} = \frac{-2(\mathcal{U}_n - \mathcal{V}_n)}{5}$$

$$= \frac{-2}{5}(\mathcal{U}_n - \mathcal{V}_n) = \frac{-2}{5}\mathcal{W}_n = \frac{-2}{5}\times 2\times\left(\frac{1}{5}\right)^n < 0$$

Donc, ($\mathcal{U}_n$) est décroissante.

$\mathcal{V}_{n+1} = \frac{2\mathcal{U}_n+3\mathcal{V}_n}{5}$, Calculons$\mathcal{V}_{n+1} - \mathcal{V}_n = \frac{2\mathcal{U}_n+3\mathcal{V}_n}{5} - \mathcal{V}_n$

$$= \frac{2\mathcal{U}_n + 3\mathcal{V}_n - 5\mathcal{V}_n}{5} = \frac{2\mathcal{U}_n - 2\mathcal{V}_n}{5} = \frac{2(\mathcal{U}_n - \mathcal{V}_n)}{5}$$

$$= \frac{2}{5}(\mathcal{U}_n - \mathcal{V}_n) = \frac{2}{5}\mathcal{W}_n = \frac{2}{5}\times 2\times\left(\frac{1}{5}\right)^n > 0$$

Donc, ($\mathcal{V}_n$) est croissante.

**4°)** $\mathcal{U}_{n+1} = \frac{3\mathcal{U}_n+2\mathcal{V}_n}{5}$, $\mathcal{V}_{n+1} = \frac{2\mathcal{U}_n+3\mathcal{V}_n}{5}$

Calculons $\mathcal{Y}_{n+1} - \mathcal{Y}_n = (\mathcal{U}_{n+1} + \mathcal{V}_{n+1}) - (\mathcal{U}_n + \mathcal{V}_n)$

$$= \left(\frac{3\mathcal{U}_n + 2\mathcal{V}_n}{5} + \frac{2\mathcal{U}_n + 3\mathcal{V}_n}{5}\right) - (\mathcal{U}_n + \mathcal{V}_n)$$

$$= \frac{3\mathcal{U}_n + 2\mathcal{V}_n + 2\mathcal{U}_n + 3\mathcal{V}_n}{5} - \mathcal{U}_n - \mathcal{V}_n$$

$$= \frac{5\mathcal{U}_n + 5\mathcal{V}_n - 5\mathcal{U}_n - 5\mathcal{V}_n}{5} = 0$$

D'où, la suite ($\mathcal{Y}_n$) est constante.

## Exemple 27 :

Soit ($\mathcal{U}_n$) la suite définie par $\begin{cases} \mathcal{U}_0 = 2 \\ \mathcal{U}_{n+1} = \frac{2}{5}\mathcal{U}_n - 3 \end{cases}$

**1°)** Calculer $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \mathcal{U}_3$.

**2°)** On pose $\mathcal{V}_n = \mathcal{U}_n + 5$ :

**a)** Montrer que ($\mathcal{V}_n$) est géométrique ;

**b)** Exprimer $\mathcal{V}_n$ et $\mathcal{U}_n$ en fonction de $n$ ;

**3°)** Calculer en fonction de$n$;

$$S_n = \mathcal{V}_0 + \mathcal{V}_1 + \cdots + \mathcal{V}_n, S_n' = \mathcal{V}_2 + \mathcal{V}_3 + \cdots + \mathcal{V}_{n+1}$$

## Réponse:

**1°)** $\mathcal{U}_1 = \frac{2}{5}\mathcal{U}_1 - 3 = \frac{2}{5}\times 2 - 3 = \frac{4}{5} - 3 = \frac{-11}{5}$

$$\mathcal{U}_2 = \frac{2}{5}\mathcal{U}_1 - 3 = \frac{2}{5}\times\left(\frac{-11}{5}\right) - 3 = \frac{-22}{25} - 3 = \frac{-97}{25}$$

$$\mathcal{U}_3 = \frac{2}{5}\mathcal{U}_2 - 3 = \frac{2}{5}\times\left(\frac{-97}{25}\right) - 3 = \frac{-194}{125} - 3$$

$$= \frac{-569}{125}$$

**2°) a)** Montrons que ($\mathcal{V}_n$) est géométrique :

$$\mathcal{V}_{n+1} = \mathcal{U}_{n+1} + 5 = \left(\frac{2}{5}\mathcal{U}_n - 3\right) + 5$$

$$= \frac{2}{5}\mathcal{U}_n - 3 + 5 = \frac{2}{5}\mathcal{U}_n + \frac{2}{5}\times 2\times\frac{5}{2}$$

$$= \frac{2}{5}\left(\mathcal{U}_n + 2\times\frac{5}{2}\right) = \frac{2}{5}(\mathcal{U}_n + 5) = \frac{2}{5}\mathcal{V}_n$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\mathcal{V}_{n+1} = \frac{2}{5}\mathcal{V}_n}$$

D'où, la suite($\mathcal{V}_n$) est géométrique de raison $q = \frac{2}{5}$.

**b)** Exprimons $\mathcal{V}_n$ et $\mathcal{U}_n$ en fonction de n : $\mathcal{V}_0 = \mathcal{U}_0 + 5 = 2 + 5 = 7$ ; $\mathcal{V}_n = \mathcal{V}_0\left(\frac{2}{5}\right)^2 \Rightarrow \boldsymbol{\mathcal{V}_n = 7\left(\frac{2}{5}\right)^2}$,

$$\mathcal{V}_n = \mathcal{U}_n + 5 \Rightarrow \mathcal{U}_n = \mathcal{V}_n - 5 \Rightarrow \boldsymbol{\mathcal{U}_n = 7\left(\frac{2}{5}\right)^2 - 5}$$

**3°)** Calculons les sommes partielles $S_n$ et $S_n'$ en fonction de $n$ :

$$S_n = \mathcal{V}_0 + \mathcal{V}_1 + \cdots + \mathcal{V}_n = \mathcal{V}_0\left(\frac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{5}}\right)$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{S_n} = \frac{\mathbf{35}}{\mathbf{3}}\left(\mathbf{1}-\left(\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{5}}\right)^{n+1}\right)$$

$$S_n' = \mathcal{V}_2 + \mathcal{V}_3 + \cdots + \mathcal{V}_{n+1} = \mathcal{V}_2\left(\frac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1-1-2}}{1-\frac{2}{5}}\right)$$

$$= S_n' = \frac{5}{3}\times\frac{28}{25}\left(1-\left(\frac{2}{5}\right)^{n-2}\right)$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{S_n'} = \frac{\mathbf{140}}{\mathbf{75}}\left(\mathbf{1}-\left(\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{5}}\right)^{n-2}\right)$$

**Propriété :**

Si $(\mathcal{U}_n)$ est une suite géométrique, alors : $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{U}_n^2 = \mathcal{U}_{n-1} \times \mathcal{U}_{n+1}$$

**Démonstration :**

$(\mathcal{U}_n)$ est géométrique, $\Rightarrow \mathcal{U}_{n-1} = \mathcal{U}_0 \times q^{n-1}$ et $\mathcal{U}_{n+1} = \mathcal{U}_0 \times q^{n+1}$, on a alors :

$\mathcal{U}_{n-1} \times \mathcal{U}_{n+1} = \mathcal{U}_0 \times q^{n-1} \times \mathcal{U}_0 \times q^{n+1}$
$= {\mathcal{U}_0}^2 \times q^{n-1+n+1} = {\mathcal{U}_0}^2 \times q^{2n} = (\mathcal{U}_0 \times q^n)^2 = {\mathcal{U}_n}^2$. Donc, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{U}_n^2 = \mathcal{U}_{n-1} \times \mathcal{U}_{n+1}$.

## III. Limite d'une suite :

### 1) Limite finie :

**Définition :**

Soit $a$ un entier naturel, et soit $(\mathcal{U}_n)$ une suite définie pour $n \geq a$. On dit que $(\mathcal{U}_n)$ tend vers un réel $l$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$, si tout intervalle ouvert non vide de centre $l$ contient tous les termes de la suite $(\mathcal{U}_n)$ à partir d'un certain rang. On note alors ; $\lim\limits_{n\to+\infty} \boldsymbol{\mathcal{U}_n} = \boldsymbol{l}$

#### a) Convergence d'une suite :

**Définition :**

On dit d'une suite $(\mathcal{U}_n)$, qui admet une limite finie $l$, qu'elle est convergente et qu'elle converge vers le réel $l$.

Une suite qui n'est pas convergente est dite divergente.

On admet le résultat suivant :

**Propriété :**

Soit $(\mathcal{U}_n)$ une suite numérique définie par : $\mathcal{U}_n = f(n)$ ; où $f$ est une fonction numérique.

Si $f$ a une limite en $+\infty$, alors $(\mathcal{U}_n)$ a une limite et on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathcal{U}_n = \lim\limits_{n\to+\infty} f(n)$.

**Remarque 8 :**

■ On admet que si une suite a une limite, cette limite est unique.

■ Si la fonction $f$ n'a pas de limite en $+\infty$, on ne peut rien conclure sur l'éventuelle limite de $(\mathcal{U}_n)$.

**Exemple 28 :**

■ Soit $(\mathcal{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de terme général $\left(\frac{2n+1}{n+2}\right)$ et $f$ la fonction définie par $f(x) = \frac{2x+1}{x+2}$.

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -2$ ; donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathcal{U}_n = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -2$.

■ Soit $(\mathcal{V}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de terme général : $\sin(\pi n)$ et $g$ la fonction définie par $g(x) = \sin(\pi x)$.

la fonction $g$ n'a pas de limite en $+\infty$, par contre la suite $(\mathcal{V}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite constante, dont tous les termes sont nuls ; elle a pour limite 0.

■ Soit $(\mathcal{W}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de terme général $\sqrt{n^4+3n^2+1}$ et $h$ la fonction définie par :

$h(x) = \sqrt{x^4+3x^2+1}$.

On a ; $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$ ; $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathcal{W}_n = +\infty$.

### 2) Suites de références de limite 0 :

**Définition :**

Les suites $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$; $\left(\frac{1}{n}\right)$; $\left(\frac{1}{n^2}\right)$; $\left(\frac{1}{n^3}\right)$;

$\frac{1}{n^\alpha}(\alpha > 0)$; $\frac{1}{\sqrt{n}}$; $a^n(|a| < 1)$

sont appelées suites de référence de limite 0 ou convergentes vers 0.

**Exemple 29 :**

Calculer les limites en $+\infty$ des suites suivantes :

**1°)** $\mathcal{U}_n = \frac{1}{n^3}$, **2°)** $\mathcal{V}_n = \frac{1}{\sqrt{n+5}}$, **3°)** $\mathcal{W}_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

**Réponse :**

**1°)** $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathcal{U}_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^3} = 0$,

**2°)** $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathcal{V}_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n+5}} = 0$,

**3°)** $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathcal{W}_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$

**Remarque 9 :**

■ Si $\mathcal{U}_n = \frac{\beta}{n^\alpha}(\alpha > 0)$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathcal{U}_n = 0$

■ Si $\mathcal{U}_n = \frac{\beta}{\sqrt{n}}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathcal{U}_n = 0$

■ Si $\mathcal{U}_n = \beta a^n(|a| < 1)$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathcal{U}_n = 0$

**Exemple 30 :**

Soit $(\mathcal{U}_n)$ la suite définie par : $\mathcal{U}_n = \frac{-5}{n^4}$ ; alors :

$\lim\limits_{n\to+\infty} \mathcal{U}_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{-5}{n^4} = 0$

**Exemple 31 :**

Soit $(\mathcal{U}_n)$ la suite définie par : $\begin{cases} \mathcal{U}_0 = 1 \\ \mathcal{U}_{n+1} = \frac{3}{4}\mathcal{U}_n + 2 \end{cases}$

**1°)** Calculer $\mathcal{U}_1$ ;

**2°)** On pose $\mathcal{V}_n = \mathcal{U}_n - 8$ :

**a)** Montrer que $(\mathcal{V}_n)$ est géométrique ;

**b)** Exprimer $\mathcal{V}_n$ en fonction de $n$ et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathcal{V}_n$

**Réponse :**

**1°)** Calculons $\mathcal{U}_1$ :

$\mathcal{U}_1 = \frac{3}{4}\mathcal{U}_0 + 2 = \frac{3}{4}\times 1 + 2 = \frac{11}{4}$

**2°) a)** Montrons que$(\mathcal{V}_n)$ est géométrique :

$\mathcal{V}_n = \mathcal{U}_n - 8 \Longrightarrow \mathcal{V}_{n+1} = \mathcal{U}_{n+1} - 8$

$\Longrightarrow \mathcal{V}_{n+1} = \frac{3}{4}\mathcal{U}_n + 2 - 8 = \frac{3}{4}\mathcal{U}_n - 6$

$= \frac{3}{4}\mathcal{U}_n - \frac{3}{4} \times 6 \times \frac{4}{3} = \frac{3}{4}\left(\mathcal{U}_n - 6 \times \frac{4}{3}\right)$

$= \frac{3}{4}(\mathcal{U}_n - 8) = \frac{3}{4}\mathcal{V}_n \Rightarrow \boldsymbol{\mathcal{V}_{n+1} = \frac{3}{4}\mathcal{V}_n}$

D'où, la suite $(\mathcal{V}_n)$ est géométrique de raison $q = \frac{3}{4}$.

**b)** Exprimons $\mathcal{V}_n$ en fonction de $n$ :

$$\mathcal{V}_0 = \mathcal{U}_0 - 8 = 1 - 8 \Longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{V}_0 = -7},$$

$$\mathcal{V}_n = \mathcal{V}_0 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n \Rightarrow \boldsymbol{\mathcal{V}_n = -7 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n}$$

Calculons $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathcal{V}_n$ : $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathcal{V}_n = \lim\limits_{n\to+\infty} -7 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$

$\left(car\ \frac{3}{4} < 1\right)$, $\quad \boldsymbol{\lim\limits_{n\to+\infty} \mathcal{V}_n = 0}$

**Remarque 10 :**

Toute suite géométrique de raison $q$ tel que $|q| < 1$, a pour limite 0 en $+\infty$.

**Exemple 32 :**

- La suite$(\mathcal{U}_n)$ définie par $\mathcal{U}_n = \frac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, tend vers 0 lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

## 3) Limite infinie :

**Définition :**

▶ Soit $a$ un entier naturel, et soit $(\mathcal{U}_n)$ une suite définie pour $n \geq a$.

▶On dit que $(\mathcal{U}_n)$ tend vers $+\infty$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$, si pour tout réel $A$ strictement positif, tous les termes de la suite $(\mathcal{U}_n)$ sont strictement supérieur à $A$, à partir d'un certain rang.

On note alors ; $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to+\infty} \mathcal{U}_n = +\infty}$

▶On dit que $(\mathcal{U}_n)$ tend vers $-\infty$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$, si pour tout réel $A$ strictement positif, tous les termes de la suite $(\mathcal{U}_n)$ sont strictement supérieurs à $-A$, à partir d'un certain rang.

On note alors ; $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to+\infty} \mathcal{U}_n = -\infty}$

**Suites de référence pour la limite ∞ :**

**Définition :**

Les suites : $(\sqrt{n})$ ; $(n)$ ; $(n^2)$ ; $(n^3)$ ; $n^\alpha(\alpha > 0)$ ; $a^n(a > 1)$

sont appelées suites de référence pour la limite ∞ et on écrit :

$\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty, \quad \lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty,$

$\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty, \quad \lim\limits_{n\to+\infty} n^3 = +\infty,$

$\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha = +\infty, \quad \lim\limits_{n\to+\infty} a^n = +\infty$

**Exemple 33 :**

Calculer les limites des suites suivantes en $+\infty$

▶$\mathcal{U}_n = 5n + 3$ ▶$\mathcal{V}_n = -3n^2 + 2n - 7$

▶$\mathcal{W}_n = \sqrt{7n - 1}$ ▶$\mathcal{X}_n = -17(3)^n$

**Réponse :**

▶ $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathcal{U}_n = \lim\limits_{n\to+\infty} (5n + 3) = \lim\limits_{n\to+\infty} 5n = +\infty$

▶ $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathcal{V}_n = \lim\limits_{n\to+\infty} (-3n^2 + 2n - 7) = \lim\limits_{n\to+\infty} -3n^2 = -3 \times +\infty = -\infty$

▶ $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathcal{W}_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{7n - 1} = +\infty$

▶ $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathcal{X}_n = \lim\limits_{n\to+\infty} -17(3)^n = -17 \times +\infty = -\infty$

## c) Suite convergente et suite divergente :

**Suite convergente :**

**Définition :**

Soit $a$ un entier naturel, et soit$(\mathcal{U}_n)$ une suite définie $n \geq a$

On dit que $(\mathcal{U}_n)$ est convergente si elle admet une limite finie $l$ (*un nombre réel*) en $+\infty$. On dit alors qu'elle converge vers $l$.

On dit qu'une suite $(\mathcal{U}_n)$ est divergente si elle n'est pas convergente ; c'est-à-dire si sa limite est infinie, ou si elle n'a pas de limite.

**Remarque 11 :**

**1°)** Toute suite arithmétique $(\mathcal{U}_n)$ de raison $r$ est divergente et diverge vers $+\infty$ si $r > 0$ et vers $-\infty$ si $r < 0$.

**2°)** Soit $(\mathcal{U}_n)$ une suite géométrique de raison $q$.

■ Si $q \in ]-\infty; -1]$, $(\mathcal{U}_n)$ n'a pas de limite et est divergente.

■ Si $q \in ]-1; 1[$, $(\mathcal{U}_n)$ est convergente vers 0.

■ Si $q \in ]1; +\infty[$, $(u_n)$ est divergente vers $+\infty$ si $\mathcal{U}_0 > 0$ et vers $-\infty$ si $\mathcal{U}_0 < 0$.

**Exemple 34 :**

**1°)**$\mathcal{V}_n = 2n + 1, \forall n \in \mathbb{N}$, **2°)**$\mathcal{W}_n = 2 - 3n, \forall n \in \mathbb{N}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \mathcal{V}_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathcal{W}_n = -\infty$.

**Remarque 12 :**

Une suite $(\alpha_n)$ définie peut ne pas avoir de limite. Par exemple, la suite $(\alpha_n)$ définie par ;

$\alpha_n = (-2)^n, \forall n \in \mathbb{N}$ n'a pas de limite

**Exercice 15 :**

On considère les suites $(\mathcal{U}_n)$ et $(\mathcal{V}_n)$ définies par :

$$\begin{cases} \mathcal{U}_0 = 3 \\ \mathcal{U}_{n+1} = \dfrac{3\mathcal{U}_n + 2\mathcal{V}_n}{5} \end{cases}, \quad \begin{cases} \mathcal{V}_0 = 2 \\ \mathcal{V}_{n+1} = \dfrac{2\mathcal{U}_n + 3\mathcal{V}_n}{5} \end{cases}$$

**1°)** Calculer $\mathcal{U}_1$ et $\mathcal{V}_1$ ;

**2°) a)** On pose $\mathcal{W}_n = \mathcal{U}_n - \mathcal{V}_n$, montrer que la suite $(\mathcal{W}_n)$ est géométrique, puis en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathcal{W}_n$.

**b)** Calculer $S_n = \mathcal{W}_0 + \mathcal{W}_1 + \cdots + \mathcal{W}_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

**3°) a)** On pose $\mathcal{X}_n = \mathcal{U}_n + \mathcal{V}_n$, montrer que $(\mathcal{X}_n)$ est constante.

**b)** Exprimer $\mathcal{X}_n$ en fonction de $n$.

**4°)** Calculer les sommes partielles :

$S_n' = \mathcal{X}_0 + \mathcal{X}_1 + \cdots + \mathcal{X}_n$

$S_n'' = \mathcal{U}_0 + \mathcal{U}_1 + \cdots + \mathcal{U}_n$

$S_n''' = \mathcal{V}_0 + \mathcal{V}_1 + \cdots + \mathcal{V}_n$

**Solution :**

**1°)** Calculons $\mathcal{U}_1$ et $\mathcal{V}_1$ ;

$$\mathcal{U}_1 = \frac{3\mathcal{U}_0 + 2\mathcal{V}_0}{5} = \frac{3 \times 3 + 2 \times 2}{5} = \frac{13}{5}$$

$$\mathcal{V}_1 = \frac{2\mathcal{U}_0 + 3\mathcal{V}_0}{5} = \frac{2 \times 3 + 3 \times 2}{5} = \frac{12}{5}$$

**2°) a)** Montrons que la suite $(\mathcal{W}_n)$ telle que, $\mathcal{W}_n = \mathcal{U}_n - \mathcal{V}_n$est géométrique.

$$\mathcal{W}_{n+1} = \mathcal{U}_{n+1} - \mathcal{V}_{n+1} = \frac{3\mathcal{U}_n + 2\mathcal{V}_n}{5} - \frac{2\mathcal{U}_n + 3\mathcal{V}_n}{5}$$
$$= \frac{3\mathcal{U}_n + 2\mathcal{V}_n - 2\mathcal{U}_n - 3\mathcal{V}_n}{5} = \frac{\mathcal{U}_n - \mathcal{V}_n}{5}$$
$$= \frac{1}{5}(\mathcal{U}_n - \mathcal{V}_n) \Rightarrow \boldsymbol{\mathcal{W}_{n+1} = \frac{1}{5}\mathcal{W}_n}$$

D'où, la suite $(\mathcal{W}_n)$ est géométrique de raison $q = \frac{1}{5}$.

Déduisons-en $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathcal{W}_n$.

$\mathcal{W}_0 = \mathcal{U}_0 - \mathcal{V}_0 = 3 - 2 = 1,$

$$\mathcal{W}_n = 1 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n = \left(\frac{1}{5}\right)^n \left(\frac{1}{5} < 1\right) \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \mathcal{W}_n = 0$$

**b)** Calculons $S_n = \mathcal{W}_0 + \mathcal{W}_1 + \cdots + \mathcal{W}_n$

$$S_n = 1 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}}{\frac{4}{5}}$$
$$= \frac{5}{4}\left(1 - \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}\right) \Rightarrow \boldsymbol{S_n = \frac{5}{4} - \frac{5}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}}.$$
$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{5}{4} - \frac{5}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1} \Rightarrow \boldsymbol{\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{5}{4}}$$

**3°) a)** Montrons que $\mathcal{X}_n = \mathcal{U}_n + \mathcal{V}_n$ est constante :

$$\mathcal{X}_{n+1} - \mathcal{X}_n = \mathcal{U}_{n+1} + \mathcal{V}_{n+1} - (\mathcal{U}_n + \mathcal{V}_n)$$
$$= \mathcal{U}_{n+1} + \mathcal{V}_{n+1} - \mathcal{U}_n - \mathcal{V}_n$$
$$= \frac{3\mathcal{U}_n + 2\mathcal{V}_n}{5} + \frac{2\mathcal{U}_n + 3\mathcal{V}_n}{5} - (\mathcal{U}_n + \mathcal{V}_n)$$
$$= \frac{3\mathcal{U}_n + 2\mathcal{V}_n + 2\mathcal{U}_n + 3\mathcal{V}_n}{5} - (\mathcal{U}_n + \mathcal{V}_n)$$
$$= \frac{5\mathcal{U}_n + 5\mathcal{V}_n}{5} - (\mathcal{U}_n + \mathcal{V}_n)$$
$$= \frac{5(\mathcal{U}_n + \mathcal{V}_n)}{5} - (\mathcal{U}_n + \mathcal{V}_n)$$
$$= (\mathcal{U}_n + \mathcal{V}_n) - (\mathcal{U}_n + \mathcal{V}_n)$$

$= \mathcal{U}_n + \mathcal{V}_n - \mathcal{U}_n - \mathcal{V}_n = 0 \Rightarrow \mathcal{X}_{n+1} - \mathcal{X}_n = 0,$ d'où, la suite $(\mathcal{X}_n)$ est constante.

**b)** Exprimons $\mathcal{X}_n$ en fonction de $n$ : $\mathcal{X}_n = 3 + 2 = 5$

**4°)** Calculons les sommes partielles :

$$\begin{cases} \mathcal{X}_n = \mathcal{U}_n + \mathcal{V}_n = 5 \\ \mathcal{W}_n = \mathcal{U}_n - \mathcal{V}_n = \left(\frac{1}{5}\right)^n \end{cases} \Rightarrow 2\mathcal{U}_n = 5 + \left(\frac{1}{5}\right)^n$$
$$\Rightarrow \mathcal{U}_n = \frac{5 + \left(\frac{1}{5}\right)^n}{2} \Rightarrow \boldsymbol{\mathcal{U}_n = 2\left(5 + \left(\frac{1}{5}\right)^n\right)}$$
$$\begin{cases} \mathcal{X}_n = \mathcal{U}_n + \mathcal{V}_n = 5 \\ \mathcal{W}_n = \mathcal{U}_n - \mathcal{V}_n = \left(\frac{1}{5}\right)^n \end{cases} \Rightarrow 2\mathcal{V}_n = 5 - \left(\frac{1}{5}\right)^n$$
$$\Rightarrow \mathcal{V}_n = \frac{5 - \left(\frac{1}{5}\right)^n}{2} \Rightarrow \boldsymbol{\mathcal{U}_n = 2\left(5 - \left(\frac{1}{5}\right)^n\right)}$$

$S_n^{'} = \mathcal{X}_0 + \mathcal{X}_1 + \cdots + \mathcal{X}_n \Rightarrow \boldsymbol{S_n^{'} = 5(n+1)}$

$S_n^{''} = \mathcal{U}_0 + \mathcal{U}_1 + \cdots + \mathcal{U}_n,$

$S_n^{'''} = \mathcal{V}_0 + \mathcal{V}_1 + \cdots + \mathcal{V}_n$

$\mathcal{X}_n = \mathcal{U}_n + \mathcal{V}_n \Rightarrow S_n^{'} = S_n^{''} + S_n^{'''} = 5(n+1)$

$$\mathcal{W}_n = \mathcal{U}_n - \mathcal{V}_n \Rightarrow S_n = S_n^{''} - S_n^{'''} = \frac{5}{4} - \frac{5}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} S_n^{''} + S_n^{'''} = 5(n+1) \\ S_n^{''} - S_n^{'''} = \frac{5}{4} - \frac{5}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1} \end{cases}$$
$$\Rightarrow 2S_n^{''} = 5(n+1) + \frac{5}{4} - \frac{5}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}$$
$$\Rightarrow \boldsymbol{S_n^{''} = \frac{1}{2}\left[5(n+1) + \frac{5}{4} - \frac{5}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}\right]}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} S_n^{''} + S_n^{'''} = 5(n+1) \\ S_n^{''} - S_n^{'''} = \frac{5}{4} - \frac{5}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1} \end{cases}$$
$$\Rightarrow 2S_n^{'''} = 5(n+1) - \frac{5}{4} + \frac{5}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}$$
$$\Rightarrow \boldsymbol{S_n^{'''} = \frac{1}{2}\left[5(n+1) - \frac{5}{4} + \frac{5}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}\right]}$$

## Exercice 16 :

Soit $(\mathcal{U}_n)$ une suite définie par :

$$\begin{cases} \mathcal{U}_0 = 2 \\ \mathcal{U}_n - 2\mathcal{U}_{n+1} = 2n + 3 \end{cases}$$

**1°)** Calculer $\mathcal{U}_1$ et $\mathcal{U}_2$ ;

**2°)** On pose pour tout $n$, $\mathcal{V}_n = \mathcal{U}_n + 2n - 1$

**a)** Montrer que $(\mathcal{V}_n)$ est géométrique et en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathcal{V}_n$et $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathcal{U}_n$.

**b)** Calculer :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \mathcal{V}_k = \mathcal{V}_0 + \mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 + \cdots + \mathcal{V}_n \text{ et } \lim_{n\to+\infty} S_n$$
$$S_n^{'} = \sum_{k=0}^{n} \mathcal{U}_k = \mathcal{U}_0 + \mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2 + \cdots + \mathcal{U}_n \text{ et } \lim_{n\to+\infty} S_n^{'}$$

### Solution :

**1°)** Calculons $\mathcal{U}_1$ et $\mathcal{U}_2$ :

$$\mathcal{U}_n - 2\mathcal{U}_{n+1} = 2n + 3 \Rightarrow \mathcal{U}_{n+1} = \frac{\mathcal{U}_n - 2n - 3}{2}$$
$$\mathcal{U}_1 = \frac{\mathcal{U}_0 - 2\times 0 - 3}{2} = \frac{2-3}{2} \Rightarrow \mathcal{U}_1 = \frac{-1}{2},$$
$$\mathcal{U}_2 = \frac{\mathcal{U}_1 - 2\times 1 - 3}{2} = \frac{\frac{-1}{2} - 2 - 3}{2} \Rightarrow \mathcal{U}_2 = \frac{-11}{4}$$

**2°)**$\mathcal{V}_n = \mathcal{U}_n + 2n - 1$

**a)** Montrons que $(\mathcal{V}_n)$est géométrique :

$$\mathcal{V}_{n+1} = \mathcal{U}_{n+1} + 2(n+1) - 1$$
$$= \frac{\mathcal{U}_n - 2n - 3}{2} + 2(n+1) - 1$$
$$= \frac{\mathcal{U}_n - 2n - 3 + 4(n+1) - 2}{2}$$
$$= \frac{\mathcal{U}_n - 2n - 3 + 4n + 4 - 2}{2} = \frac{\mathcal{U}_n + 2n - 1}{2}$$
$$= \frac{1}{2}(\mathcal{U}_n + 2n - 1) = \frac{1}{2}\mathcal{V}_n \Rightarrow \boldsymbol{\mathcal{V}_{n+1} = \frac{1}{2}\mathcal{V}_n}$$

D'où, $(\mathcal{V}_n)$ est géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$,

$$\mathcal{V}_n = 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \Rightarrow \boldsymbol{\lim_{n\to+\infty} \mathcal{V}_n = 0}$$
$$\mathcal{V}_n = \mathcal{U}_n + 2n - 1 \Rightarrow \mathcal{U}_n = \mathcal{V}_n - 2n + 1$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\mathcal{U}_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n - 2n + 1}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \mathcal{U}_n = \lim_{n\to+\infty}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n - 2n + 1\right]$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n - \lim_{n\to+\infty}(2n+1) = 0 - \infty = -\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \mathcal{U}_n = -\infty$$

**b)** Calculons :

▶ $S_n = \sum_{k=0}^{n} \mathcal{V}_k = \mathcal{V}_0 + \mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 + \cdots + \mathcal{V}_n$

$$\Rightarrow S_n = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{S_n = 2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)}$$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} 2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left(2-2\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) = 2 - \lim_{n\to+\infty} 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$$= 2 - 0 = 2 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \boldsymbol{S_n = 2}$$

▶ $S'_n = \sum_{k=0}^{n} \mathcal{U}_k = \mathcal{U}_0 + \mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2 + \cdots + \mathcal{U}_n$

$$\Rightarrow S'_n = 2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) - \sum_{k=0}^{n}(2k-1)$$

$$= 2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) - \left[2\frac{n(n+1)}{2} - (n+1)\right]$$

$$= 2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) - [n(n+1)-(n+1)]$$

$$= 2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) - [(n-1)(n+1)]$$

$$\lim_{n\to+\infty} S'_n = \lim_{n\to+\infty} 2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) - [(n-1)(n+1)]$$

$$= 2 - \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \lim_{n\to+\infty}[(n-1)(n+1)]$$

$$= 2 - 0 - \infty = -\infty \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} S'_n = -\infty$$

**Théorème de la convergence monotone :**

Toute suite croissante et majorée est convergente
Toute suite décroissante et minorée est convergente

**Exemple 37 :**

Montrer que les suites suivantes sont convergentes :

$$\mathcal{U}_n = \frac{n^2-3n+2}{n^2-3}, \quad \mathcal{V}_n = \frac{7n-2}{3n+1},$$

$$\mathcal{W}_n = \frac{-3n^2+2n+1}{n^2-5n}, \quad \mathcal{X}_n = \frac{3n+2}{n^2-5n+3}$$

**Réponse :**

$$\lim_{n\to+\infty} \mathcal{U}_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2-3n+2}{n^2-3}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2\left(1-\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}\right)}{n^2\left(1-\frac{3}{n^2}\right)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}{1-\frac{3}{n^2}} = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \boldsymbol{\mathcal{U}_n = 1}$$

Donc, $(\mathcal{U}_n)$ est convergente.

$$\lim_{n\to+\infty} \mathcal{V}_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{7n-2}{3n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n\left(7-\frac{2}{n}\right)}{n\left(3+\frac{1}{n}\right)}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{7-\frac{2}{n}}{3+\frac{1}{n}} = \frac{7}{3} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \boldsymbol{\mathcal{V}_n = \frac{7}{3}}$$

Donc, $(\mathcal{V}_n)$ est convergente.

$$\lim_{n\to+\infty} \mathcal{W}_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{-3n^2+2n+1}{n^2-5n}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2\left(-3+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(1-\frac{5}{n}\right)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{-3+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{1-\frac{5}{n}}$$

$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \boldsymbol{\mathcal{W}_n = -3}$**.** Donc, $(\mathcal{W}_n)$ est convergente.

$$\lim_{n\to+\infty} \mathcal{X}_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{3n+2}{n^2-5n+3} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n\left(3+\frac{2}{n}\right)}{n\left(n-5+\frac{3}{n}\right)}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{3+\frac{2}{n}}{n-5+\frac{3}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3}{n-5} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \boldsymbol{\mathcal{X}_n = 0}.$$

Donc, $(\mathcal{X}_n)$ est convergente.

**Exemple 38 :**

Soit $(\mathcal{U}_n)$ la suite définie par ;

$$\begin{cases} \mathcal{U}_0 = 11 \\ et \\ \forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{U}_{n+1} = \frac{4}{5}\mathcal{U}_n + 2 \end{cases}$$

**1°)** Calculer $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \mathcal{U}_3$.

**2°)** Montrer par récurrence que,$\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{U}_n > 10$.

**3°)** Déterminer le sens de variation de $(\mathcal{U}_n)$.

**4°)** En déduire que $(\mathcal{U}_n)$ est convergente puis déterminer sa limite.

**5°)** On considère la suite $(\mathcal{V}_n)$ définie par :
$\mathcal{V}_n = \mathcal{U}_n - 10, \forall n \in \mathbb{N}$.

**a)** Montrer que $(\mathcal{V}_n)$ est une suite géométrique, dont on déterminera la raison, et le premier terme.

**b)** Exprimer $\mathcal{V}_n$ puis $\mathcal{U}_n$ en fonction de $n$.

**c)** Calculer $S_n$ et $S_n^{'}$ en posant :
$\forall n \in \mathbb{N}^*$ ; $S_n = \mathcal{V}_0 + \mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 + \cdots + \mathcal{V}_{n-1}$,
$S_n^{'} = \mathcal{U}_0 + \mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2 + \cdots + \mathcal{U}_{n-1}$.
Exprimer $S_n$ puis $S_n^{'}$ en fonction de $n$.

**Réponse :**

**1°)** on a ; $\begin{cases} \mathcal{U}_0 = 11 \\ \quad et \\ \forall n \in \mathbb{N}, \ \mathcal{U}_{n+1} = \frac{4}{5}\mathcal{U}_n + 2 \end{cases}$

$$\mathcal{U}_1 = \frac{4}{5}\mathcal{U}_0 + 2 = \frac{4}{5} \times 11 + 2 = \frac{54}{5},$$

$$\mathcal{U}_2 = \frac{4}{5}\mathcal{U}_1 + 2 = \frac{4}{5} \times \frac{54}{5} + 2 = \frac{266}{25}$$

$$\mathcal{U}_3 = \frac{4}{5}\mathcal{U}_2 + 2 = \frac{4}{5} \times \frac{266}{25} + 2 = \frac{1\,314}{125}$$

**2°)** Montrer par récurrence que ;$\forall n \in \mathbb{N}, \ \mathcal{U}_n > 10$

**Initialisation**

Pour $n = 0$, on a ; $\mathcal{U}_0 = 11 > 10$. La propriété est vraie pour $n = 0$.

**Transmission**

On suppose $\mathcal{U}_n > 10 \Longrightarrow \frac{4}{5}\mathcal{U}_n > 10 \times \frac{4}{5} \Longrightarrow \frac{4}{5}\mathcal{U}_n > 8$

$\Longrightarrow \dfrac{4}{5}\mathcal{U}_n + 2 > 8 + 2 \Longrightarrow \mathcal{U}_{n+1} > 10.$

Donc, $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{U}_n > 10$

**3°)** $\mathcal{U}_{n+1} - \mathcal{U}_n = \frac{4}{5}\mathcal{U}_n + 2 - \mathcal{U}_n = \frac{-1}{5}\mathcal{U}_n + 2$

Or,$\mathcal{U}_n > 10$d'où ;$\frac{-1}{5}\mathcal{U}_n < -2 \Longrightarrow \frac{-1}{5}\mathcal{U}_n + 2 < 0$

$\Longrightarrow \mathcal{U}_{n+1} - \mathcal{U}_n < 0$. La suite$(\mathcal{U}_n)$ est décroissante.

**4°)** On a montré en **2°)** que la suite $(\mathcal{U}_n)$ est minorée par 10, et on a montré en **3°)** qu'elle est décroissante, d'où, $(\mathcal{U}_n)$ est convergente. Soit $l$ sa limite, alors ;

$l = \dfrac{4}{5}l + 2 \Longrightarrow \dfrac{1}{5}l = 2 \Longrightarrow l = 10 \Longrightarrow \boldsymbol{\lim\limits_{n \to +\infty} \mathcal{U}_n = 10}$

**5°) a)**$\mathcal{V}_n = \mathcal{U}_n - 10, \forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{V}_{n+1} = \mathcal{U}_{n+1} - 10$

$= \dfrac{4}{5}\mathcal{U}_n + 2 - 10 = \dfrac{4}{5}\mathcal{U}_n - 8 = \dfrac{4}{5}(\mathcal{U}_n - 10) = \dfrac{4}{5}\mathcal{V}_n.$

Donc, on a ; $\mathcal{V}_{n+1} = \frac{4}{5}\mathcal{V}_n$

D'où, la suite$(\mathcal{V}_n)$ est géométrique et de raison$q = \frac{4}{5}$, et de premier terme $\mathcal{V}_0 = \mathcal{U}_0 - 10 = 11 - 10 = 1.$

**b)** Comme $(\mathcal{V}_n)$ est une suite géométrique de raison ; $q = \frac{4}{5}$ et de premier terme $\mathcal{V}_0 = 1$, donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{V}_n = \mathcal{V}_0 \times q^n \Longrightarrow \mathcal{V}_n = 1 \times \left(\frac{4}{5}\right)^n = \boldsymbol{\left(\frac{4}{5}\right)^n}$$

D'autre part $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{V}_n = \mathcal{U}_n - 10 \Rightarrow \mathcal{U}_n = \mathcal{V}_n + 10.$

$$\boldsymbol{\mathcal{U}_n = \left(\frac{4}{5}\right)^n + 10.}$$

**c)**$S_n = \mathcal{V}_0 + \mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 + \cdots + \mathcal{V}_{n-1}$

Or, $(\mathcal{V}_n)$ est une suite géométrique de raison$q = \frac{4}{5}$.

$$\Longrightarrow S_n = \mathcal{V}_0 \frac{1 - q^{n-1+0+1}}{1-q} = 1\,\frac{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1+0+1}}{1 - \frac{4}{5}}$$

$$= \frac{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^n}{\frac{1}{5}} = 5\left(1 - \left(\frac{4}{5}\right)^n\right) \Longrightarrow S_n = 5 - 5\left(\frac{4}{5}\right)^n$$

$S'_n = \mathcal{U}_0 + \mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2 + \cdots + \mathcal{U}_{n-1}$

$= (\mathcal{V}_0 + 10) + (\mathcal{V}_1 + 10) + (\mathcal{V}_2 + 10) + \cdots$

$+(\mathcal{V}_n + 10) + (\mathcal{V}_{n-1} + 10)$

$$= \left(\underbrace{\mathcal{V}_0 + \mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 + \cdots + \mathcal{V}_n + \mathcal{V}_{n-1}}_{S_n}\right)$$

$$+ \left(\underbrace{10 + 10 + 10 + \cdots + 10 + 10}_{n\ fois}\right)$$

$$= S_n + 10n = 5\left(1 - \left(\frac{4}{5}\right)^n\right) + 10n$$

$$\boldsymbol{S'_n = 5\left(1 - \left(\frac{4}{5}\right)^n\right) + 10n}$$

**Exemple 39 :**

On considère la suite ;

$$\begin{cases} \mathcal{U}_0 = \sqrt{6} \\ et \\ \forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{U}_{n+1} = \sqrt{6 + \mathcal{U}_n} \end{cases}$$

**1°)** Etudier le signe de $f(x) = 6 + x - x^2$.

**2°)** Calculer $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \mathcal{U}_3$.

**3°)** Montrer par récurrence que ;
$\forall n \in \mathbb{N}, 0 < \mathcal{U}_n < 3$

**4°)** Montrer par récurrence que ; $\forall n \in \mathbb{N}, {\mathcal{U}_{n+1}}^2 - {\mathcal{U}_n}^2 > 0$. Puis montrer que$(\mathcal{U}_n)$ est croissante.

**5°)** En déduire que $(\mathcal{U}_n)$ est convergente, puis déterminer sa limite.

**Réponse :**

**1°)**$f(x) = 6 + x - x^2,\ 6 + x - x^2 = 0$

$\Longrightarrow \Delta = 1^2 - 4 \times (-1) \times 6 = 25$

$x_1 = \dfrac{-1+5}{-2} = -2\,, \qquad x_2 = \dfrac{-1-5}{-2} = 3$

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | $-$ | $\mathbf{0}$ | $+$ | $\mathbf{0}$ | $-$ | |

**2°)**On a $\begin{cases} \mathcal{U}_0 = \sqrt{6} \\ et \\ \forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{U}_{n+1} = \sqrt{6 + \mathcal{U}_n} \end{cases}$,

$$\mathcal{U}_1 = \sqrt{6 + \mathcal{U}_0} = \sqrt{6 + \sqrt{6}},$$

$$\mathcal{U}_2 = \sqrt{6 + \mathcal{U}_1} = \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6}}},$$

$$\mathcal{U}_3 = \sqrt{6 + \mathcal{U}_2} = \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6}}}}$$

**3°)** Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < \mathcal{U}_n < 3$

**Initialisation**

Pour $n = 0$, on a; $\mathcal{U}_0 = \sqrt{6} \in ]0; 3[$. La propriété est donc vraie pour $n = 0$.

**Transmission**

On suppose que la propriété est vraie pour $n$. C'est-à-dire que $0 < \mathcal{U}_n < 3$, montrons que $0 < \mathcal{U}_{n+1} < 3$

On a d'après l'hypothèse de récurrence ;

$0 < \mathcal{U}_n < 3 \Longrightarrow 6 < 6 + \mathcal{U}_n < 9$

$\Longrightarrow \sqrt{6} < \sqrt{6 + \mathcal{U}_n} < 3 \Longrightarrow 0 < \sqrt{6 + \mathcal{U}_n} < 3$

$\Longrightarrow 0 < \mathcal{U}_{n+1} < 3$

La propriété est donc vraie pour $n+1$. D'où ; $\forall n \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{0 < \mathcal{U}_n} < 3$

**4°)** $\forall n \in \mathbb{N}, {\mathcal{U}_{n+1}}^2 - {\mathcal{U}_n}^2 = \left(\sqrt{6 + \mathcal{U}_n}\right)^2 - {\mathcal{U}_n}^2$
$= 6 + \mathcal{U}_n - {\mathcal{U}_n}^2 = f(\mathcal{U}_n)$

Or, $\forall x \in ]-2, 3[ \Longrightarrow f(x) > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{U}_n \in ]0; 3[$ et $]0; 3[ \subset ]-2, 3[$. D'où, $\forall n \in \mathbb{N}, f(\mathcal{U}_n) \in ]0; 3[$,

donc ; $\forall n \in \mathbb{N}, {\mathcal{U}_{n+1}}^2 - {\mathcal{U}_n}^2 > 0$.

D'où ; $\forall n \in \mathbb{N}, {\mathcal{U}_{n+1}}^2 > {\mathcal{U}_n}^2$

Or,$\forall k \in \mathbb{N}, \mathcal{U}_k > 0 \Rightarrow \mathcal{U}_{n+1} > \mathcal{U}_n \Rightarrow \mathcal{U}_{n+1} - \mathcal{U}_n > 0$.

D'où, la suite est croissante.

**5°)** On a montré en **4°)** que la suite est croissante, et en 3 qu'elle est majorée par 3 est comme elle est croissante et majorée, elle est donc convergente, soit $l$ sa limite. Alors ; $l = \sqrt{6 + l} \Longrightarrow l^2 - l - 6 = 0$

$\Longrightarrow l = -2$ ou $l = 3$ or $l > 0 \Longrightarrow l = 3$

$\Longrightarrow \boldsymbol{\lim\limits_{n \to +\infty} \mathcal{U}_n = 3}$

**Remarque 13 :**
Comme $\forall n \in \mathbb{N}$, on a $0 < \mathcal{U}_n < 3$, et comme $(\mathcal{U}_n)$ admet une limite finie $l$, on a alors ; $0 \leq l \leq 3$.

**Limite d'une suite géométrique**

Soit $(\mathcal{U}_n)$ une suite géométrique de raison $q$ et de premier terme $\mathcal{U}_a, \forall n \geq a, \mathcal{U}_n = \mathcal{U}_a \times q^{n-a}$.

▶ Si $q = 1$, alors $(\mathcal{U}_n)$ est constante et converge vers son premier terme $\mathcal{U}_a$.

▶ Si $-1 < q < 1$, alors $(\mathcal{U}_n)$ converge vers 0, car ;
$$\lim_{n \to +\infty} \mathcal{U}_n = \lim_{n \to +\infty} \mathcal{U}_a \times q^{n-a}$$

▶ Si $q > 1$, et si $\mathcal{U}_a > 0$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathcal{U}_n = +\infty$

▶ Si $q > 1$, et si $\mathcal{U}_a < 0$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathcal{U}_n = -\infty$

▶ Si $q \leq -1$, et si $\mathcal{U}_a \neq 0$, alors $(\mathcal{U}_n)$ n'a pas de limite.

**Exercice 17 :**
On considère la suite $(\mathcal{U}_n)$ définie par ;
$$\begin{cases} \mathcal{U}_0 = 12 \\ et \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathcal{U}_{n+1} = \dfrac{2}{5}\mathcal{U}_n + 6 \end{cases}$$

**1°)** Calculer $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \mathcal{U}_3$.

**2°)** Montrer par récurrence que ; $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{U}_n > 10$.

**3°)** Déterminer le sens de variation de $(\mathcal{U}_n)$.

**4°)** En déduire que $(\mathcal{U}_n)$ est convergente, puis déterminer sa limite.

**5°)** On pose ; $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{V}_n = \mathcal{U}_n - 10$,

**a)** Montrer que $(\mathcal{V}_n)$ est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.

**b)** Exprimer $\mathcal{V}_n$ puis $\mathcal{U}_n$ en fonction de $n$.

**c)** Déterminer la limite de $(\mathcal{V}_n)$ puis retrouver celle de $(\mathcal{U}_n)$.

**Solution :**

**1°)** On a ; $\begin{cases} \mathcal{U}_0 = 12 \\ et \\ \forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{U}_{n+1} = \frac{2}{5}\mathcal{U}_n + 6 \end{cases}$

$$\mathcal{U}_1 = \frac{2}{5}\mathcal{U}_0 + 6 = \frac{2}{5} \times 12 + 6 = \frac{54}{5},$$
$$\mathcal{U}_2 = \frac{2}{5}\mathcal{U}_1 + 6 = \frac{2}{5} \times \frac{54}{5} + 6 = \frac{258}{25}$$
$$\mathcal{U}_3 = \frac{2}{5}\mathcal{U}_2 + 6 = \frac{2}{5} \times \frac{258}{25} + 6 = \frac{1\,266}{125}$$

**2°)** Montrons par récurrence que ; $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{U}_n > 10$.

**Initialisation**

$\mathcal{U}_0 = 12 > 10$. C'est donc vrai pour $n = 0$.

**Transmission**

On suppose que c'est vrai pour un entier naturel $n$.
C'est-à-dire que ;$\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{U}_{n+1} > 10$.

On a ;$\mathcal{U}_n > 10 \Rightarrow 2\mathcal{U}_n > 20 \Rightarrow \frac{2\mathcal{U}_n}{5} > 4$
$$\Rightarrow \frac{2\mathcal{U}_n}{5} + 6 > 10 \Rightarrow \mathcal{U}_{n+1} > 10$$
D'où, $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{U}_n > 10$, la propriété est donc vraie pour tout entier naturel $n$.

**3°)** $\mathcal{U}_{n+1} - \mathcal{U}_n = \frac{2\mathcal{U}_n}{5} + 6 - \mathcal{U}_n = \frac{-3\mathcal{U}_n}{5} + 6$.

Or,$\mathcal{U}_n > 10 \Rightarrow \frac{-3\mathcal{U}_n}{5} > -6 \Rightarrow \frac{-3\mathcal{U}_n}{5} + 6 < 0$

$\mathcal{U}_{n+1} - \mathcal{U}_n < 0$, $(\mathcal{U}_n)$ est donc décroissante.

**4°)** Comme $(\mathcal{U}_n)$ est décroissante et minorée par 10, elle est donc convergente soit $l$ sa limite, alors ;
$$l = \frac{2}{5}l + 6 \Rightarrow \frac{3}{5}l = 6 \Rightarrow l = 10 \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \boldsymbol{\mathcal{U}_n = 10}$$

**5°) a)** $\mathcal{V}_n = \mathcal{U}_n - 10 \Rightarrow \mathcal{V}_{n+1} = \mathcal{U}_{n+1} - 10$
$$= \frac{2}{5}\mathcal{U}_n + 6 - 10 = \frac{2}{5}\mathcal{U}_n - 4 = \frac{2}{5}(\mathcal{U}_n - 10)$$
$\Rightarrow \boldsymbol{\mathcal{V}_{n+1} = \frac{2}{5}\mathcal{V}_n}$. Donc,$\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{V}_{n+1} = \frac{2}{5}\mathcal{V}_n$.

D'où,$(\mathcal{V}_n)$ est une suite géométrique de raison $q = \frac{2}{5}$, et de premier terme ;$\mathcal{V}_0 = \mathcal{U}_0 - 10 = 12 - 10 = 2$

**b)** $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{V}_n = \mathcal{V}_0 q^n = 2 \times \left(\frac{2}{5}\right)^n = 2\left(\frac{2}{5}\right)^n$.

Or,$\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{V}_n = \mathcal{U}_n - 10$
$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{U}_n = \mathcal{V}_n + 10 = 2\left(\frac{2}{5}\right)^n + 10$$

**c)** Comme$(\mathcal{V}_n)$ est une suite géométrique de raison $q = \frac{2}{5}$ et $-1 < q < 1$

On a donc, $\lim\limits_{n \to +\infty} \boldsymbol{\mathcal{V}_n = 0}$, d'où,

$\lim\limits_{n \to +\infty} \mathcal{U}_n = \log_{n \to +\infty} \mathcal{V}_n + 10 = 0 + 10 = 10$,

$\lim\limits_{n \to +\infty} \boldsymbol{\mathcal{U}_n = 10}$

C'est la même limite déterminée en **4°).**

**Exercice 18 :**
Calculer les limites suivantes :
$$\mathcal{U}_n = \frac{1}{n}\sqrt{n+2}\,; \quad \mathcal{V}_n = \frac{\sqrt{n+3}}{n+5}\,; \mathcal{W}_n = \sqrt{n} - \sqrt{n+1}$$

**Solution :**

▶ $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathcal{U}_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n}\sqrt{n+2}$
$$= \frac{1}{+\infty}\sqrt{+\infty + 2} = 0 \times +\infty \ (F.I)$$
$$\lim_{n \to +\infty} \mathcal{U}_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{\sqrt{n+2}}{n} = \lim_{n \to +\infty} \sqrt{\frac{n+2}{n^2}}$$
$$= \lim_{n \to +\infty} \sqrt{\frac{n}{n^2} + \frac{2}{n^2}} = \lim_{n \to +\infty} \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}} = \sqrt{0+0} = 0$$
$$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \boldsymbol{\mathcal{U}_n = 0.}$$

▶ $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathcal{V}_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\sqrt{n+3}}{n+5} = \frac{\sqrt{+\infty}}{+\infty} = \frac{+\infty}{+\infty} \ (F.I)$
$$\lim_{n \to +\infty} \mathcal{V}_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{\sqrt{n+3}}{n+5} = \lim_{n \to +\infty} \frac{\sqrt{n\left(1+\frac{3}{n}\right)}}{n\left(1+\frac{5}{n}\right)}$$
$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{\sqrt{n} \times \sqrt{1+\frac{3}{n}}}{\left(\sqrt{n}\right)^2 \times \left(1+\frac{5}{n}\right)} = \lim_{n \to +\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{3}{n}}}{\sqrt{n}\left(1+\frac{5}{n}\right)}$$
$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{+\infty}} = \frac{1}{+\infty} = 0 \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \boldsymbol{\mathcal{V}_n = 0}$$

▶ $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathcal{W}_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\sqrt{n} - \sqrt{n+1}\right)$
$$= \lim_{n \to +\infty} \sqrt{n} - \lim_{n \to +\infty} \sqrt{n+1} = \sqrt{+\infty} - \sqrt{+\infty}$$
$$= +\infty - +\infty \ (F.I)$$
$$\lim_{n \to +\infty} \mathcal{W}_n = \lim_{n \to +\infty} \left(\sqrt{n} - \sqrt{n+1}\right)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{(\sqrt{n}-\sqrt{n+1})(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})}{(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})}$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n-(n+1)}{(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n-n-1}{(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})}$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{-1}{(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})} = \frac{-1}{+\infty} = 0 \Longrightarrow \boldsymbol{\lim_{n\to+\infty} \mathcal{W}_n = 0}$$

### 4) Opérations et limites :

Soit $(\mathcal{U}_n)$ et$(\mathcal{V}_n)$ deux suites définies pour $n \geq a$ (où $a$ est un entier naturel donné).

●S'il existe deux réels$l_1$ et $l_2$ tels que ;

$\lim\limits_{n\to+\infty} \mathcal{U}_n = l_1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathcal{V}_n = l_2$ ,alors ;

$\lim\limits_{n\to+\infty} (\mathcal{U}_n + \mathcal{V}_n) = l_1 + l_2,$

$\lim\limits_{n\to+\infty} (\mathcal{U}_n - \mathcal{V}_n) = l_1 - l_2$

$\lim\limits_{n\to+\infty} (\mathcal{U}_n \times \mathcal{V}_n) = l_1 \times l_2,$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{\mathcal{U}_n}{\mathcal{V}_n}\right) = \frac{l_1}{l_2}$ si$l_2 \neq 0$

● Si $\lambda$ est une constante réelle, alors ;

$\lim\limits_{n\to+\infty} (\lambda\mathcal{U}_n) = \lambda l_1$et $\lim\limits_{n\to+\infty} (\lambda\mathcal{V}_n) = \lambda l_2$

Si $l_1 = l_2 = 0$ alors pour $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{\mathcal{U}_n}{\mathcal{V}_n}\right)$, on ne peut pas conclure, car c'est une forme indéterminée (F. I).

●Si $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathcal{U}_n = l(l \in \mathbb{R})$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathcal{V}_n = +\infty$,alors,

$\lim\limits_{n\to+\infty} (\mathcal{U}_n + \mathcal{V}_n) = l + (+\infty) = +\infty,$

$\lim\limits_{n\to+\infty} (\mathcal{U}_n - \mathcal{V}_n) = l - (+\infty) = -\infty$

$\lim\limits_{n\to+\infty} (\mathcal{V}_n - \mathcal{U}_n) = (+\infty) - l = +\infty,$

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\mathcal{U}_n}{\mathcal{V}_n}\right) = \frac{l}{+\infty} = 0$$

Pour $\lim\limits_{n\to+\infty} (\mathcal{U}_n \times \mathcal{V}_n)$, alors ça dépend de $l$ ;

Si $l > 0$ alors, $\lim\limits_{n\to+\infty} (\mathcal{U}_n \times \mathcal{V}_n) = +\infty$

Si $l < 0$ alors, $\lim\limits_{n\to+\infty} (\mathcal{U}_n \times \mathcal{V}_n) = -\infty$

Si $l = 0$ alors, on ne peut pas conclure, car c'est une forme indéterminée (F.I).

Pour $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{\mathcal{U}_n}{\mathcal{V}_n}\right)$, ça dépend de $l$.

Si $l = 0^+$ (c.-à-d. si $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathcal{U}_n = 0$ et $\mathcal{U}_n > 0$) ou si $l > 0$, alors, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{\mathcal{V}_n}{\mathcal{U}_n}\right) = +\infty$

Si $l = 0^-$ (c.-à-d. si $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathcal{U}_n = 0$ et $\mathcal{U}_n < 0$) ou si $l < 0$, alors, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{\mathcal{V}_n}{\mathcal{U}_n}\right) = -\infty$

● Si $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathcal{U}_n = l(l \in \mathbb{R})$et $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathcal{V}_n = -\infty$

alors ; $\lim\limits_{n\to+\infty} (\mathcal{U}_n + \mathcal{V}_n) = -\infty,$

$\lim\limits_{n\to+\infty} (\mathcal{V}_n - \mathcal{U}_n) = -\infty,$

$\lim\limits_{n\to+\infty} (\mathcal{U}_n - \mathcal{V}_n) = +\infty,$ $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{\mathcal{U}_n}{\mathcal{V}_n}\right) = 0$

Pour $\lim\limits_{n\to+\infty} (\mathcal{U}_n \times \mathcal{V}_n)$, ça dépend de $l$ ;

Si $l > 0$, alors ; $\lim\limits_{n\to+\infty} (\mathcal{U}_n \times \mathcal{V}_n) = -\infty$

Si $l < 0$, alors ; $\lim\limits_{n\to+\infty} (\mathcal{U}_n \times \mathcal{V}_n) = +\infty$

Si $l = 0$, alors on ne peut conclure, on dit que c'est une forme indéterminée (F.I).

Pour $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{\mathcal{V}_n}{\mathcal{U}_n}\right)$, ça dépend de $l$.

Si $l = 0^+$ ou si $l > 0$, alors ; $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{\mathcal{V}_n}{\mathcal{U}_n}\right) = -\infty$

Si $l = 0^-$ ou si $l < 0$, alors ; $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{\mathcal{V}_n}{\mathcal{U}_n}\right) = +\infty$

●Si $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathcal{U}_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathcal{V}_n = +\infty$, alors ;

$\lim\limits_{n\to+\infty} (\mathcal{U}_n + \mathcal{V}_n) = +\infty,$ $\lim\limits_{n\to+\infty} (\mathcal{U}_n \times \mathcal{V}_n) = +\infty$

Pour $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{\mathcal{U}_n}{\mathcal{V}_n}\right)$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{\mathcal{V}_n}{\mathcal{U}_n}\right)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (\mathcal{U}_n - \mathcal{V}_n)$, on ne peut pas conclure, car c'est une forme indéterminée (F.I).

● Si $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathcal{U}_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathcal{V}_n = -\infty$

alors ; $\lim\limits_{n\to+\infty} (\mathcal{U}_n - \mathcal{V}_n) = +\infty,$

$\lim\limits_{n\to+\infty} (\mathcal{V}_n - \mathcal{U}_n) = -\infty,$

$\lim\limits_{n\to+\infty} (\mathcal{U}_n \times \mathcal{V}_n) = -\infty$

Pour $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{\mathcal{U}_n}{\mathcal{V}_n}\right)$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{\mathcal{V}_n}{\mathcal{U}_n}\right)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (\mathcal{U}_n + \mathcal{V}_n)$, on ne peut pas conclure, car c'est une forme indéterminée (F.I).

● Si $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathcal{U}_n = -\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathcal{V}_n = -\infty$

alors ; $\lim\limits_{n\to+\infty} (\mathcal{U}_n + \mathcal{V}_n) = -\infty,$

$\lim\limits_{n\to+\infty} (\mathcal{U}_n \times \mathcal{V}_n) = +\infty$

Pour $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{\mathcal{U}_n}{\mathcal{V}_n}\right)$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{\mathcal{V}_n}{\mathcal{U}_n}\right)$ $\lim\limits_{n\to+\infty} (\mathcal{U}_n - \mathcal{V}_n)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (\mathcal{V}_n - \mathcal{U}_n)$, on ne peut pas conclure, car c'est une forme indéterminée (F.I).

**Conclusion :**

Les formes indéterminées sont au nombre de quatre ;

**1°**$)(+\infty) + (-\infty)$ **2°**) $0 \times \infty$ **3°**$)\frac{0}{0}$ **4°**$)\frac{\infty}{\infty}$

### Tableaux récapitulatifs :

$(\mathcal{U}_n)$ ; $(\mathcal{V}_n)$ sont des suites réelles ; $l$ et $l'$ sont des réels :

**Somme :**

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Si $(\mathcal{U}_n)$ a pour limite | $l$ | $l$ | $l$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
| Si $(\mathcal{V}_n)$ a pour limite | $l'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ |
| Alors $(\mathcal{U}_n + \mathcal{V}_n)$ a pour limite | $l + l'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | |

**Produit :**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Si $(\mathcal{U}_n)$ a pour limite | $l$ | $l$ | $l$ | $\pm\infty$ | $\pm\infty$ |
| Si $(\mathcal{V}_n)$ a pour limite | $l'$ | $\pm\infty$ | 0 | $\pm\infty$ | 0 |
| Alors $(\mathcal{U}_n \times \mathcal{V}_n)$ a pour limite | $l \times l'$ | $\pm\infty$ | 0 | $\pm\infty$ | |

**Quotient :**

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Si $(\mathcal{U}_n)$ a pour limite | $l$ | $l$ | $l$ | $\infty$ | 0 | 0 | $\infty$ | 0 | $\infty$ |
| Si $(\mathcal{V}_n)$ a pour limite | $l'\neq 0$ | $\infty$ | 0 | $l'$ | $l'$ | $\infty$ | $l'$ | 0 | $\infty$ |
| Alors $\left(\frac{\mathcal{U}_n}{\mathcal{V}_n}\right)$ a pour limite | $\frac{l}{l'}$ | 0 | $\infty$ | $\infty$ | 0 | 0 | $\infty$ | $\boxtimes$ | $\boxtimes$ |

**Remarque 14 :**

Soit $(\mathcal{U}_n)$ une (fonction) suite définie par une relation de la forme $\mathcal{U}_n = f(x)$ où $f$ est une fonction.

Si $f$ est une fonction polynôme, alors la limite de $(\mathcal{U}_n)$ est celle de terme de plus haut degré.

Si $f$ est une fonction rationnelle, alors la limite de $(\mathcal{U}_n)$ est celle du rapport des termes du plus haut degré du numérateur et du dénominateur lorsque tend vers $+\infty$.

**Exemple 40 :**

Déterminer les limites des suites suivantes ;

**1°)** $\mathcal{U}_n = 2n^3 - 3n^2 + 5n - 2,$

**2°)** $\mathcal{V}_n = -3n^4 + 5n^3 - 2n^2 + 4n + 1,$

**3°)** $\mathcal{W}_n = \dfrac{3n^2+4n+2}{2n^2-3n+5},$

**4°)** $\mathcal{T}_n = \dfrac{2n^3-4n^2+5n-1}{3n^2-6n+5}$

**5°)** $\mathcal{X}_n = \dfrac{4n^2-4n+2}{3n^3-2n^2+n+1}$

**6°)** $\mathcal{Y}_n = \dfrac{-8n^3+3n^2-4n+7}{5n^2+2n-6}$

**Réponse :**

**1°)** $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathcal{U}_n = \lim\limits_{n\to+\infty} (2n^3 - 3n^2 + 5n - 2)$

$= \lim\limits_{n\to+\infty} (2n^3) = +\infty$

**2°)** $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathcal{V}_n = \lim\limits_{n\to+\infty} (-3n^4 + 5n^3 - 2n^2 + 4n + 1)$

$= \lim\limits_{n\to+\infty} (-3n^4) = -\infty$

**3°)** $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathcal{W}_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{3n^2+4n+2}{2n^2-3n+5}\right)$

$= \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{3n^2}{2n^2}\right) = \dfrac{3}{2}$

**4°)** $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathcal{T}_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{2n^3-4n^2+5n-1}{3n^2-6n+5}\right)$

$= \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{2n^3}{3n^2}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{2}{3}n\right) = +\infty$

**5°)** $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathcal{X}_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{4n^2-4n+2}{3n^3-2n^2+n+1}\right)$

$= \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{4n^2}{3n^3}\right) = \dfrac{4}{3} \times \dfrac{1}{x} = \dfrac{4}{3} \times 0 = 0$

**6°)** $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathcal{Y}_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{-8n^3+3n^2-4n+7}{5n^2+2n-6}\right)$

$= \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{-8n^3}{5n^2}\right) = \dfrac{-8}{5}n = \dfrac{-8}{5} \times +\infty = +\infty$

**Remarque 15 :**

**1)** Si $\mathcal{U}_n = f(x)$ si $f$ est la racine carrée d'une fonction polynôme dont le coefficient du terme de plus haut degré est positif, alors la limite $(\mathcal{U}_n)$ est celle de la racine carrée du terme de plus haut degré lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

**2)** Si $\mathcal{U}_n = f(x)$ où $f$ est la somme de la racine carrée d'une fonction polynôme et d'une autre fonction, et s'il y a une forme indéterminée, on peut alors multiplier et diviser par l'expression conjuguée.

**Exemple 41 :**

Déterminer les limites des suites ;

**1°)**$\mathcal{U}_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n},$ **2°)**$\mathcal{V}_n = \sqrt{n^2+2} - n,$

**3°)**$\mathcal{W}_n = \sqrt{4n^2-5n+1} - 2n$

**4°)**$\mathcal{X}_n = \sqrt{2n^2+3n+1} - \sqrt{n^2+n+1},$

**5°)**$\mathcal{Y}_n = \sqrt{n^2+4n+3}$

**Réponse :**

**1°)** $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathcal{U}_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$

$= \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n+1}\right) - \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n}\right)$

$= (+\infty) - (+\infty)\ (F.I)$

On multiplie par le conjugué ;

$\lim\limits_{n\to+\infty} \mathcal{U}_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right)$

$= \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right)$

$= \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right) \Rightarrow \boldsymbol{\lim\limits_{n\to+\infty} \mathcal{U}_n = 0}$

**2°)** $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathcal{V}_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n^2+2} - n\right)$

$= \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n^2+2}\right) - \lim\limits_{n\to+\infty} (n)$

$= (+\infty) - (+\infty)\ (F.I)$

On multiplie par le conjugué ;

$\lim\limits_{n\to+\infty} \mathcal{V}_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{\left(\sqrt{n^2+2}-n\right)\left(\sqrt{n^2+2}+n\right)}{\sqrt{n^2+2}+n}\right)$

$= \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{n^2+2-n^2}{\sqrt{n^2+2}+n}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{2}{\sqrt{n^2+2}+n}\right)$

$\Rightarrow \boldsymbol{\lim\limits_{n\to+\infty} \mathcal{V}_n = 0}$

**3°)** $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathcal{W}_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt{4n^2-5n+1} - 2n\right)$

$= \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt{4n^2-5n+1}\right) - \lim\limits_{n\to+\infty} (2n)$

$= (+\infty) - (+\infty)\ (F.I)$

On multiplie par le conjugué ;

$\lim\limits_{n\to+\infty} \mathcal{W}_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{4n^2-5n+1-4n^2}{\sqrt{4n^2-5n+1}+2n}\right)$

$= \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{-5n+1}{\sqrt{4n^2-5n+1}+2n}\right)$

$= \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n}\left(\dfrac{-5+\frac{1}{n}}{\sqrt{4-\frac{5}{n}+\frac{1}{n^2}}+2}\right) = \dfrac{-5+0}{\sqrt{4}+2} = \dfrac{-5}{4}$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \mathcal{W}_n = \dfrac{-5}{4}$

**4°)** $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathcal{X}_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt{2n^2+3n+1} - \sqrt{n^2+n+1}\right)$

$= \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt{2n^2+3n+1}\right) - \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n^2+n+1}\right)$

$= (+\infty) - (+\infty)\ (F.I)$

On multiplie par le conjugué ;

$$\lim_{n\to+\infty} \mathcal{X}_n = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2n^2+3n+1-n^2-n-1}{\sqrt{2n^2+3n+1}-\sqrt{n^2+n+1}}\right)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n^2-2n}{\sqrt{2n^2+3n+1}-\sqrt{n^2+n+1}}\right)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n}\left(\frac{1-\frac{2}{n}}{\sqrt{2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}-\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}}\right)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n\times 1}{\sqrt{2}+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{+\infty\times 1}{\sqrt{2}+1} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \mathcal{X}_n = +\infty$$

**5°)** $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathcal{Y}_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n^2+4n+3}\right)$

$= \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n^2}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} n \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \mathcal{Y}_n = +\infty$

**Théorèmes de la comparaison :**

$(\mathcal{U}_n)$ ; $(\mathcal{V}_n)$et$(\mathcal{W}_n)$ sont des suites ; $l$est un réel.

♦ Si, à partir d'un certain rang : $\mathcal{U}_n \geq \mathcal{V}_n$ et si, $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathcal{V}_n = +\infty$ ; alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathcal{U}_n = +\infty$.

♦ Si, à partir d'un certain rang : $\mathcal{U}_n \leq \mathcal{V}_n$ et si, $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathcal{V}_n = -\infty$ ; alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathcal{U}_n = -\infty$.

♦ Si, à partir d'un certain rang : $|\mathcal{U}_n - l| \leq \mathcal{V}_n$ et si, $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathcal{V}_n = 0$ ; alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathcal{U}_n = l$.

**Théorème de gendarmes :**

Soit $(\mathcal{U}_n), (\mathcal{V}_n)$ et $(\mathcal{W}_n)$ trois suites numériques définies pour un entier naturel $n \geq a$.

Si, à partir d'un certain rang, on a: $\mathcal{V}_n \leq \mathcal{U}_n \leq \mathcal{W}_n$ et si $(\mathcal{V}_n)$ et $(\mathcal{W}_n)$ convergent vers une limite $l$, alors $(\mathcal{U}_n)$ converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathcal{U}_n = l$.

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathcal{V}_n = +\infty$ et si $(\mathcal{U}_n) \geq (\mathcal{V}_n)$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathcal{U}_n = +\infty$.

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathcal{W}_n = -\infty$ et si $(\mathcal{U}_n) \leq (\mathcal{W}_n)$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathcal{U}_n = -\infty$.

**Exemple 42 :**

On pose $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{U}_n = \frac{\sin n}{n}$. En encadrant $(\mathcal{U}_n)$ par deux suites convenables, déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathcal{U}_n$.

**Réponse :**

On a ; $\forall n \in \mathbb{N}, -1 \leq \sin n \leq 1$

$$\Rightarrow \frac{-1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{-1}{n} \leq \mathcal{U}_n \leq \frac{1}{n}$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-1}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

D'où, d'après le théorème du gendarme ;

$\lim\limits_{n\to+\infty} \mathcal{U}_n = 0$

**Représentation d'une suite définie par ;**

$$\mathcal{U}_{n+1} = f(\mathcal{U}_n)$$

Soit $(\mathcal{U}_n)$ une suite définie par la donnée de son premier terme $\mathcal{U}_0$, et une relation de récurrence ; $\mathcal{U}_{n+1} = f(\mathcal{U}_n)$où, $f$ est une fonction numérique. Alors pour représenter certains termes de $(\mathcal{U}_n)$,sur l'axe des abscisses, soit $\mathcal{C}$ la courbe de $f$ dans un repère $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$ et soit $\Delta$ la première bissectrice, c'est-à-dire la droite d'équation $\Delta$: $y = x$. Soit $A_n$ le point de l'axe des abscisses d'abscisse $\mathcal{U}_n$, soit $B_n$ le point de la courbe $\mathcal{C}$ d'abscisse $\mathcal{U}_n$, et soit $C_n$ le projeté de $B_n$ sur $\Delta$ parallèlement à $(Ox)$. Alors le projeté de $C_n$ sur $(Ox)$ parallèlement à$(Oy)$ est le point $A_{n+1}$d'abscisse $\mathcal{U}_{n+1}$.

**Exemple 43 :**

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{2x+3}{x+2}$

**1°)** Déterminer $\mathcal{D}_f$.

**2°)** Montrer que $\forall x \in \mathcal{D}_f, f(x) = 2 - \frac{1}{x+2}$.

**3°)** A l'aide d'un changement convenable d'origine, représenter la courbe $\mathcal{C}_f$ de $f$ et la droite $\Delta$ d'équation $y = x$ dans le repère $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$.

**4°)** On pose : $\begin{cases} \mathcal{U}_0 = 0 \\ et \\ \forall n \in \mathbb{N};\ \mathcal{U}_{n+1} = f(\mathcal{U}_n) \end{cases}$

Représenter sur l'axe des abscisses et un repère $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$ les termes $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$ et $\mathcal{U}_3$.

**Réponse :**

**1°)** $f$ est définie pour $x+2 \neq 0 \Rightarrow x \neq -2$ ; $\boldsymbol{\mathcal{D}_f} = \mathbb{R}\setminus\{-2\}$

**2°)** $f(x) = \frac{2x+3}{x+2} = \frac{2x+3+1-1}{x+2} = \frac{2(x+2)}{x+2} - \frac{1}{x+2}$

$$= 2 - \frac{1}{x+2}$$

On a donc, $\forall x \in \mathcal{D}_f = \mathbb{R}\setminus\{-2\}, f(x) = 2 - \frac{1}{x+2}$

**3°)** Soit g la fonction définie par : $g(x) = \dfrac{-1}{x}$, alors ; $f(x-2) = 2 + g(x)$

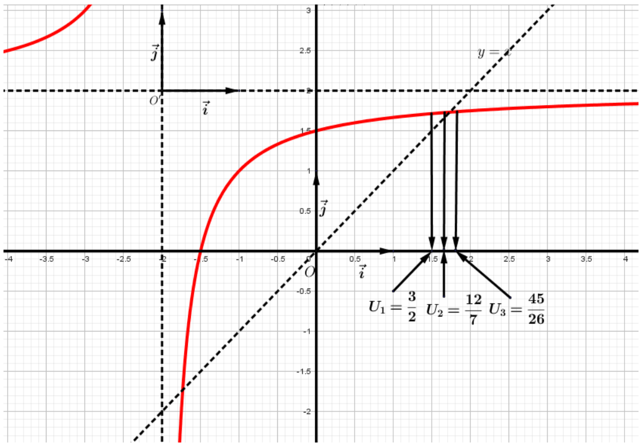
La courbe $\mathcal{C}_f$ de $f$ est l'image de la courbe $\mathcal{C}_g$ de $g$ par la translation de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}$ d'où ;

$$t(M) = M' \Rightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{u}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}x'-x\\y'-y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}x' = x-2\\y' = y+2\end{cases}$$

On a $O(0;0)$, on pose $O' = t(O)$ alors $O'(-2;2)$.

Il suffit donc de représenter $\mathcal{C}_g$ dans le repère $(O';\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$ pour obtenir $\mathcal{C}_f$ dans le repère $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$.




**Exercice 19 :**

$(\mathcal{U}_n)$ est la suite définie dans l'exemple précédent.

**1°)** Calculer $\mathcal{U}_1$; $\mathcal{U}_2$ et $\mathcal{U}_3$

**2°) a)** Montrer par récurrence que ;$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{U}_n \geq 0$

**b)** Montrer par récurrence que ; $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{U}_n \leq \sqrt{3}$

(On pourra utiliser le fait que $f(x) = 2 - \frac{1}{x+2}$)

**c)** Etudier le sens de variation de $(\mathcal{U}_n)$.

**d)** En déduire qu'elle est convergente, puis déterminer sa limite $l$.

**e)** Vérifier que $l$ est l'abscisse $x_0$ du point d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et $\Delta$ dans le repère $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$, avec $x_0 \in [0;\ \sqrt{3}]$.

**Solution**

**1°)** On a ;$\begin{cases} \mathcal{U}_0 = 0 \\ \mathcal{U}_{n+1} = f(\mathcal{U}_n) = \frac{2\mathcal{U}_n+3}{\mathcal{U}_n+2} \end{cases}$

$$\mathcal{U}_1 = \frac{2\times 0+3}{0+2} \Longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{U}_1 = \frac{3}{2}},$$

$$\mathcal{U}_2 = \frac{2\times\frac{3}{2}+3}{\frac{3}{2}+2} = \frac{3+3}{\frac{3+4}{2}} = \frac{6}{\frac{7}{2}} \Longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{U}_2 = \frac{12}{7}}$$

$$\mathcal{U}_3 = \frac{2\times\frac{12}{7}+3}{\frac{12}{7}+2} = \frac{\frac{24+21}{7}}{\frac{12+14}{7}} \Longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{U}_3 = \frac{45}{26}}$$

**2°)a)** Montrons par récurrence que ;$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{U}_n \geq 0$

**Initialisation**

On a $\mathcal{U}_0 = 0$, donc ; $\mathcal{U}_0 \geq 0$

**Transmission**

On suppose que $\mathcal{U}_n \geq 0$. Alors$\begin{cases} 2\mathcal{U}_n + 3 \geq 0 \\ \mathcal{U}_n + 2 \geq 0 \end{cases}$d'où ;

$\frac{2\mathcal{U}_n+3}{\mathcal{U}_n+2} \geq 0$, D'où ; $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{U}_n \geq 0$

**b)** Montrons par récurrence que ; $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{U}_n \leq \sqrt{3}$

**Initialisation**

On a $\mathcal{U}_0 = 0$ donc ; $\mathcal{U}_0 = 0 < \sqrt{3}$. Donc ; $\mathcal{U}_0 \leq \sqrt{3}$

**Transmission**

On suppose que $\mathcal{U}_n \leq \sqrt{3}$. On a déjà prouvé que $\mathcal{U}_n \geq 0$. Donc ; $0 \leq \mathcal{U}_n \leq \sqrt{3}$

D'où ; $2 \leq \mathcal{U}_n + 2 \leq 2 + \sqrt{3}$.

D'où ; $\frac{-1}{2} \leq \frac{-1}{\mathcal{U}_n+2} \leq \frac{-1}{2+\sqrt{3}}$

D'où ;$2 - \frac{1}{2} \leq 2 - \frac{1}{\mathcal{U}_n+2} \leq 2 - \frac{1}{2+\sqrt{3}}$

D'où ;$\frac{3}{2} \leq \mathcal{U}_{n+1} \leq \frac{3+2\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$

D'où ; $\frac{3}{2} \leq \mathcal{U}_{n+1} \leq \sqrt{3}$. Donc ; $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{U}_n \leq \sqrt{3}$

**c)** $\mathcal{U}_{n+1} - \mathcal{U}_n = \frac{2\mathcal{U}_n+3}{\mathcal{U}_n+2} - \mathcal{U}_n = \frac{2\mathcal{U}_n+3-\mathcal{U}_n^2-2\mathcal{U}_n}{\mathcal{U}_n+2}$

$= \frac{3-\mathcal{U}_n^2}{\mathcal{U}_n+2} \Longrightarrow \mathcal{U}_{n+1} - \mathcal{U}_n = \frac{3-\mathcal{U}_n^2}{\mathcal{U}_n+2}\ \boxed{1}$

Or ;$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{U}_n \geq 0$.D'où ;$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{U}_n + 2 > 0\ \boxed{2}$

D'autre part, on a déjà ;

$0 \leq \mathcal{U}_n \leq \sqrt{3} \Longrightarrow 0 \leq \mathcal{U}_n^2 \leq 3$

$\Longrightarrow 3 \geq 3 - \mathcal{U}_n^2 \geq 0 \Longrightarrow 3 - \mathcal{U}_n^2 \geq 0\ \boxed{3}$

De $\boxed{1}$ ;$\boxed{2}$ et $\boxed{3}$ on a ; $\frac{3-\mathcal{U}_n^2}{\mathcal{U}_n+2} \geq 0 \Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}$,

$\mathcal{U}_{n+1} - \mathcal{U}_n \geq 0$. La suite $(\mathcal{U}_n)$est donc croissante

**d)** Comme $(\mathcal{U}_n)$ est croissante et majorée par $\sqrt{3}$, elle est donc convergente vers sa limite $l$.

Alors ; $\begin{cases} l = f(l) \\ \quad et \\ l = \frac{2l+3}{l+2} \end{cases} \Longrightarrow l(l+2) = 2l+3$

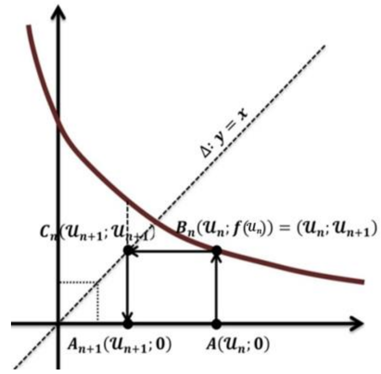
$\Longrightarrow l^2 + 2l = 2l + 3 \Longrightarrow l = -\sqrt{3}\ ou\ l = \sqrt{3}$

$l = \sqrt{3}$ donc ; $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathcal{U}_n = \sqrt{3}$.

**e)** Les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et $\Delta$ sont les solution de l'équation $f(x) = x$.

Elles sont donc $\sqrt{3}$ et $-\sqrt{3}$ ; or $-\sqrt{3} \notin [0;\ \sqrt{3}]$.

D'où l'abscisse retenue est $\sqrt{3}$.




## 5. Suites adjacentes :

**Définition :**

Soit $a$ un entier naturel, et soit $(\mathcal{U}_n)$ et $(\mathcal{V}_n)$ deux suites définies pour $n \geq a$.

On dit que $(\mathcal{U}_n)$ et $(\mathcal{V}_n)$ sont adjacentes si l'une est croissante et l'autre est décroissante, et la limite de leur différence est égale à 0.

**Propriété fondamentale :**

Si deux suites sont adjacentes, alors elles sont convergentes et ont même limite.

**Exercice 20**

On considère les suites $(\mathcal{U}_n)$ et $(\mathcal{V}_n)$ définies par ;

$$\begin{cases} \mathcal{U}_0 = 1, \quad \mathcal{V}_0 = 12 \\ \forall n \in \mathbb{N}\ ona\ ; \\ \mathcal{U}_{n+1} = \dfrac{\mathcal{U}_n + 2\mathcal{V}_n}{3}\ et \mathcal{V}_{n+1} = \dfrac{\mathcal{U}_n + 3\mathcal{V}_n}{4} \end{cases}$$

**1°)** Calculer $\mathcal{U}_1,\ \mathcal{U}_2,\ \mathcal{V}_1,\ \mathcal{V}_2$.

**2°)** On pose $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{W}_n = \mathcal{V}_n - \mathcal{U}_n$ ;

**a)** Montrer que $(\mathcal{W}_n)$est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premierterme.

**b)** Exprimer $\mathcal{W}_n$ en fonction de $n$.

**c)** En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} (\mathcal{V}_n - \mathcal{U}_n)$.

**d)** Montrer que $(\mathcal{U}_n)$ est croissante et que $(\mathcal{V}_n)$ est décroissante.

**e)** En déduire que $(\mathcal{U}_n)$ et $(\mathcal{V}_n)$ sont adjacentes.

**f)** Que peut-on en déduire ?

**3°/** On pose $\forall n \in \mathbb{N}, t_n = 3\mathcal{U}_n + 8\mathcal{V}_n$

**a)** Montrer que $(t_n)$est constante et calculer la valeur de $t_n$.

**b)** Exprimer $\mathcal{U}_n$ et $\mathcal{V}_n$ en fonction de $n$.

**c)** En déduire la limite de $(\mathcal{U}_n)$ et $(\mathcal{V}_n)$.

**Solution :**

**1°)** On a ; $\begin{cases} \mathcal{U}_0 = 1,\ \mathcal{V}_0 = 12 \\ \forall n \in \mathbb{N}\ ona\ ; \\ \mathcal{U}_{n+1} = \frac{\mathcal{U}_n + 2\mathcal{V}_n}{3}\ et\ \mathcal{V}_{n+1} = \frac{\mathcal{U}_n + 3\mathcal{V}_n}{4} \end{cases}$

Donc ;

$\mathcal{U}_1 = \dfrac{\mathcal{U}_0 + 2\mathcal{V}_0}{3} = \dfrac{1 + 2 \times 12}{3} = \dfrac{25}{3}$,

$\mathcal{V}_1 = \dfrac{\mathcal{U}_0 + 3\mathcal{V}_0}{4} = \dfrac{1 + 3 \times 12}{4} = \dfrac{37}{4}$,

$\mathcal{U}_2 = \dfrac{\mathcal{U}_1 + 2\mathcal{V}_1}{3} = \dfrac{\frac{25}{3} + 2 \times \frac{37}{4}}{3} = \dfrac{161}{18}$,

$\mathcal{V}_2 = \dfrac{\mathcal{U}_1 + 3\mathcal{V}_1}{4} = \dfrac{\frac{25}{3} + 3 \times \frac{37}{4}}{4} = \dfrac{433}{48}$

**2°/ a)**$\mathcal{W}_n = \mathcal{V}_n - \mathcal{U}_n \Rightarrow \mathcal{W}_{n+1} = \mathcal{V}_{n+1} - \mathcal{U}_{n+1}$

$= \dfrac{\mathcal{U}_n + 3\mathcal{V}_n}{4} - \dfrac{\mathcal{U}_n + 2\mathcal{V}_n}{3}$

$= \frac{3\mathcal{U}_n + 9\mathcal{V}_n - 4\mathcal{U}_n - 8\mathcal{V}_n}{12} = \frac{\mathcal{V}_n - \mathcal{U}_n}{12} = \frac{1}{12}(\mathcal{V}_n - \mathcal{U}_n)$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \quad \boldsymbol{\mathcal{W}_{n+1} = \dfrac{1}{12}\ \mathcal{W}_n}$

**b)**$(\mathcal{W}_n)$ est donc une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{12}$ et le premier terme $\mathcal{W}_0 = 12 - 1 = 11$.

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \boldsymbol{\mathcal{W}_n = \mathcal{W}_0 \times q^n = 11 \times \left(\dfrac{1}{12}\right)^n}$

**c)** $\lim\limits_{n \to +\infty} (\mathcal{V}_n - \mathcal{U}_n) = \lim\limits_{n \to +\infty} \mathcal{W}_n$.

Or ; $(\mathcal{W}_n)$ est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{12}$ avec $-1 \leq \frac{1}{2} \leq 1$, d'où ; $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathcal{W}_n = 0$.

Donc, $\lim\limits_{n \to +\infty} (\mathcal{V}_n - \mathcal{U}_n) = 0$

**d)**$\mathcal{U}_{n+1} - \mathcal{U}_n = \frac{\mathcal{U}_n + 2\mathcal{V}_n}{3} - \mathcal{U}_n = \frac{\mathcal{U}_n + 2\mathcal{V}_n - 3\mathcal{U}_n}{3}$

$= \frac{2}{3}(\mathcal{V}_n - \mathcal{U}_n) = \frac{2}{3}\mathcal{W}_n$. $(\mathcal{U}_n)$est croissante.

$\mathcal{V}_{n+1} - \mathcal{V}_n = \mathcal{V}_{n+1} = \dfrac{\mathcal{U}_n + 3\mathcal{V}_n}{4} - \mathcal{V}_n$

$= \dfrac{\mathcal{U}_n + 3\mathcal{V}_n - 4\mathcal{V}_n}{4} = -\dfrac{1}{4}(\mathcal{U}_n - \mathcal{V}_n) = -\dfrac{1}{4}\mathcal{W}_n$

$(\mathcal{V}_n)$ est décroissante.

**e)** On a trouvé en **b)**que $\lim\limits_{n \to +\infty} (\mathcal{V}_n - \mathcal{U}_n) = 0$, et en **c)** que $(\mathcal{U}_n)$ est croissante, et que $(\mathcal{V}_n)$ est décroissante, d'où ; $(\mathcal{U}_n)$ et $(\mathcal{V}_n)$ sont adjacentes.

**f)** On en déduit que $(\mathcal{U}_n)$ et $(\mathcal{V}_n)$ convergent vers un même réel.

**3°) a)** $t_n = 3\mathcal{U}_n + 8\mathcal{V}_n \Rightarrow \ t_{n+1} = 3\mathcal{U}_{n+1} + 8\mathcal{V}_{n+1}$

$= 3 \times \dfrac{\mathcal{U}_n + 2\mathcal{V}_n}{3} + 8 \times \dfrac{\mathcal{U}_n + 3\mathcal{V}_n}{4}$

$= \mathcal{U}_n + 2\mathcal{V}_n + 2\mathcal{U}_n + 6\mathcal{V}_n = 3\mathcal{V}_n + 8\mathcal{V}_n = \ t_n$,

$\forall n \in \mathbb{N}, t_{n+1} = t_n$D'où ; $(t_n)$ est constante, et ;

On a donc ; $\forall n \in \mathbb{N},\ t_n = t_0 = 3 \times 1 + 8 \times 12 = 99$

b) On a donc ; $\forall n \in \mathbb{N},\ \begin{cases} \mathcal{V}_n - \mathcal{U}_n = \mathcal{W}_n \\ 3\mathcal{U}_n + 8\mathcal{V}_n = t_n \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} 3\mathcal{V}_n - 3\mathcal{U}_n = 33\left(\dfrac{1}{12}\right)^n & \boxed{1} \\ 8\mathcal{V}_n + 3\mathcal{U}_n = 99 & \boxed{2} \end{cases}$ ; $\boxed{1} + \boxed{2} \Rightarrow$

$11\mathcal{V}_n = 99 + 33\left(\dfrac{1}{12}\right)^n \Rightarrow \boldsymbol{\mathcal{V}_n = 9 + 3\left(\dfrac{1}{12}\right)^n}$

$\mathcal{U}_n = 9 + 3\left(\dfrac{1}{12}\right)^n - 11\left(\dfrac{1}{12}\right)^n = 9 - 8\left(\dfrac{1}{12}\right)^n$,

$\boldsymbol{\mathcal{U}_n = 9 - 8\left(\dfrac{1}{12}\right)^n}$

**c)** $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathcal{U}_n = \lim\left[9 - 8\left(\dfrac{1}{12}\right)^n\right] = 9 - 0 = 9.$

$\lim\limits_{n \to +\infty} \mathcal{V}_n = \lim\left[9 + 3\left(\dfrac{1}{12}\right)^n\right] = 9 + 0 = 9.$

## Suite dominante :

**Définition :**

On dit qu'une suite $(\mathcal{V}_n)$ domine la suite $(\mathcal{U}_n)$, si :$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{U}_n < \mathcal{V}_n$

**Exemple 44 :**

On considère les deux suites $(\mathcal{U}_n)$et$(\mathcal{V}_n)$ définies par :

$\begin{cases} \mathcal{U}_0 = 1 \\ \mathcal{U}_{n+1} = \dfrac{2\mathcal{U}_n\mathcal{V}_n}{\mathcal{U}_n + \mathcal{V}_n} \end{cases}$, $\begin{cases} \mathcal{V}_0 = 2 \\ \mathcal{V}_{n+1} = \dfrac{\mathcal{U}_n + \mathcal{V}_n}{2} \end{cases}$

Montrer par récurrence que $(\mathcal{V}_n)$ domine $(\mathcal{U}_n)$.

**Réponse :**

**Initialisation**

On a$\mathcal{U}_0 = 1 < \mathcal{V}_0 = 2,\ \mathcal{U}_1 = \frac{2\mathcal{U}_0\mathcal{V}_0}{\mathcal{U}_0 + \mathcal{V}_0} = \frac{2 \times 1 \times 2}{1+2} = \frac{4}{3}$,

$\mathcal{V}_1 = \dfrac{\mathcal{U}_0 + \mathcal{V}_0}{2} = \dfrac{1 + 2}{2} = \dfrac{3}{2} \Rightarrow \mathcal{U}_1 < \mathcal{V}_1$

La propriété est donc vraie pour $\mathcal{U}_0,\ \mathcal{V}_0$et $\mathcal{U}_1,\ \mathcal{V}_1$.

**Transmission**

Supposons qu'elle est vraie pour $\mathcal{U}_n$ et $\mathcal{V}_n$ (*c'est-à-dire que*$\mathcal{U}_n < \mathcal{V}_n$) et montrons qu'elle est vraie pour $\mathcal{U}_{n+1}$ et $\mathcal{V}_{n+1}$.

$\mathcal{U}_n < \mathcal{V}_n \Rightarrow 2\mathcal{U}_n < \mathcal{U}_n + \mathcal{V}_n$

$\Rightarrow \boldsymbol{2\mathcal{U}_n\mathcal{V}_n < (\mathcal{U}_n + \mathcal{V}_n)\mathcal{V}_n}\boxed{1}$

$\mathcal{U}_n < \mathcal{V}_n \Rightarrow \mathcal{U}_n + \mathcal{V}_n < 2\mathcal{V}_n \Rightarrow \dfrac{1}{\mathcal{U}_n + \mathcal{V}_n} < \dfrac{1}{2\mathcal{V}_n}$

$$\Rightarrow \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{\mathcal{U}_n + \mathcal{V}_n}} < \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2\mathcal{V}_n}} \boxed{2}$$

$$\Rightarrow 2\mathcal{U}_n\mathcal{V}_n \times \frac{1}{\mathcal{U}_n + \mathcal{V}_n} < (\mathcal{U}_n + \mathcal{V}_n)\mathcal{V}_n \times \frac{1}{2\mathcal{V}_n}$$

$$\Rightarrow \frac{2\mathcal{U}_n\mathcal{V}_n}{\mathcal{U}_n + \mathcal{V}_n} < \frac{(\mathcal{U}_n + \mathcal{V}_n)\mathcal{V}_n}{2\mathcal{V}_n}$$

$$\Rightarrow \frac{2\mathcal{U}_n\mathcal{V}_n}{\mathcal{U}_n + \mathcal{V}_n} < \frac{\mathcal{U}_n + \mathcal{V}_n}{2} \Rightarrow \mathcal{U}_{n+1} < \mathcal{V}_{n+1}.$$

La suite $(\mathcal{V}_n)$ domine donc la suite $(\mathcal{U}_n)$.

## La démonstration par récurrence

**Définition :**

Soit $a$ un entier naturel et soit $p$ une propriété vraie pour $a$ et définie pour $n \geq a$. Si cette propriété vraie pour $a$est vraie pour un entier $n+1$, dès qu'elle est vraie pour $n \geq a$, alors cette propriété est vraie $\forall n \geq a$.

$$\begin{pmatrix} p(a) \\ et \\ \forall n \geq a,\ p(n) \Rightarrow p(n+1) \end{pmatrix} \Rightarrow \forall n \geq a, p(n)$$

Démontrer une propriété par récurrence, revient à montrer que cette propriété est vraie pour une valeur donnée (*initiation*) $n_0$. Puis supposer qu'elle est vraie pour $n \geq n_0$ et monter qu'elle est vraie pour $n+1$ (*transmission*).

**Exemple 45 :**

Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 1+2+3+4+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

**Initialisation**

$$n = 1 \Rightarrow \frac{1(1+1)}{2} = \frac{2}{2} = 1,$$

$$n = 2 \Rightarrow \frac{2(2+1)}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

**Transmission**

Supposons que cette propriété est vraie pour $n$ et montrons qu'elle est vraie pour $n+1$.

$$1+2+3+4+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\Rightarrow (1+2+3+4+\cdots+n) + (n+1)$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2}$$

La propriété est donc vraie pour $n+1$ et : $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$1+2+3+4+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

**Exemple 46 :**

Soit$(\mathcal{U}_n)$ la suite définie par :

$$\begin{cases} \mathcal{U}_1 = \frac{5}{2} \\ \mathcal{U}_{n+1} = 3 - \frac{n}{2(n+1)}(3 - \mathcal{U}_n) \end{cases}$$

**1°)**Calculer $\mathcal{U}_2,\ \mathcal{U}_3$,

**2°)** Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{U}_n < 3$,

**3°) a)** Justifier que :$\mathcal{U}_{n+1} - \mathcal{U}_n = \frac{n+2}{2(n+1)}(3 - \mathcal{U}_n)$

**b)** En déduire le sens de variation de $(\mathcal{U}_n)$.

**4°)** On pose $\mathcal{V}_n = n(3 - \mathcal{U}_n), \forall n > 1$,

**a)** Montrer que $(\mathcal{V}_n)$ est géométrique ;

**b)** Exprimer $\mathcal{V}_n$ et $\mathcal{U}_n$ en fonction de $n$.

**Réponse :**

**1°)**Calculons $\mathcal{U}_2,\ \mathcal{U}_3$ :

$$\mathcal{U}_2 = 3 - \frac{1}{2(1+1)}\left(3 - \frac{5}{2}\right) = 3 - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{24-1}{8} = \frac{23}{8} \Rightarrow \boldsymbol{\mathcal{U}_2 = \frac{23}{8}}$$

$$\mathcal{U}_3 = 3 - \frac{2}{2(2+1)}\left(3 - \frac{23}{8}\right) = 3 - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{8}\right)$$

$$= \frac{72-1}{24} = \frac{71}{24} \Rightarrow \boldsymbol{\mathcal{U}_3 = \frac{71}{24}}$$

**2°)** Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{U}_n < 3$ :

**Initialisation**

$$\mathcal{U}_1 = \frac{5}{2} < 3, \qquad \mathcal{U}_2 = \frac{23}{8} < 3, \qquad \mathcal{U}_3 = \frac{71}{24} < 3$$

**Transmission**

Supposons que cette propriété $(\mathcal{U}_n < 3)$ est vraie pour $n$ et montrons qu'elle est vraie pour $n+1$.

$$\mathcal{U}_n < 3 \Rightarrow -\mathcal{U}_n > -3 \Rightarrow 3 - \mathcal{U}_n > 0$$

$$\Rightarrow \frac{-n}{2(n+1)}(3 - \mathcal{U}_n) < 0$$

$$\Rightarrow 3 - \frac{n}{2(n+1)}(3 - \mathcal{U}_n) < 3 \Rightarrow \boldsymbol{\mathcal{U}_{n+1}} < 3.$$

Donc,$\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{U}_n < 3$

**3°) a)** Justifions que :$\mathcal{U}_{n+1} - \mathcal{U}_n = \frac{n+2}{2(n+1)}(3 - \mathcal{U}_n)$

On a : $\mathcal{U}_{n+1} - \mathcal{U}_n = 3 - \frac{n}{2(n+1)}(3 - \mathcal{U}_n) - \mathcal{U}_n$

$$= (3 - \mathcal{U}_n) - \frac{n}{2(n+1)}(3 - \mathcal{U}_n)$$

$$= (3 - \mathcal{U}_n)\left(1 - \frac{n}{2(n+1)}\right)$$

$$= (3 - \mathcal{U}_n)\left(\frac{2(n+1)}{2(n+1)} - \frac{n}{2(n+1)}\right)$$

$$= (3 - \mathcal{U}_n)\left(\frac{2(n+1)-n}{2(n+1)}\right)$$

$$= (3 - \mathcal{U}_n)\left(\frac{2n+2-n}{2(n+1)}\right) = (3 - \mathcal{U}_n)\frac{n+2}{2(n+1)}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\mathcal{U}_{n+1} - \mathcal{U}_n = \frac{n+2}{2(n+1)}(3 - \mathcal{U}_n)}$$

**b)** Sens de variation de $(\mathcal{U}_n)$,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{n+2}{2(n+1)} > 0 \ et\ 3 - \mathcal{U}_n > 0$$

$\Rightarrow \mathcal{U}_{n+1} - \mathcal{U}_n > 0 \Rightarrow (\mathcal{U}_n)$est croissante

**4°)** $\mathcal{V}_n = n(3 - \mathcal{U}_n), \forall n > 1$,

**a)** Montrons que $(\mathcal{V}_n)$ est géométrique :

$$\mathcal{V}_{n+1} = (n+1)(3 - \mathcal{U}_{n+1})$$

$$= (n+1)\left(3 - 3 + \frac{n}{2(n+1)}(3 - \mathcal{U}_n)\right)$$

$$= (n+1)\left(\frac{n}{2(n+1)}(3 - \mathcal{U}_n)\right)$$

$$= \frac{n(n+1)}{2(n+1)}(3 - \mathcal{U}_n) = \frac{n}{2}(3 - \mathcal{U}_n)$$

$$= \frac{1}{2}\big(n(3 - \mathcal{U}_n)\big) = \frac{1}{2}\mathcal{V}_n \Rightarrow \boldsymbol{\mathcal{V}_{n+1} = \frac{1}{2}\mathcal{V}_n}.$$

D'où, la suite $(\mathcal{V}_n)$ est géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$

**b)** Exprimons $\mathcal{V}_n$ et $\mathcal{U}_n$ en fonction de $n$ :

$\mathcal{V}_1 = 1(3 - \mathcal{U}_1) = 1\left(3 - \frac{5}{2}\right) = 1\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$,

$\mathcal{V}_n = \mathcal{V}_n \times q^n = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \Rightarrow \boldsymbol{\mathcal{V}_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n}$

$\mathcal{V}_n = n(3 - \mathcal{U}_n) \Rightarrow \mathcal{V}_n = 3n - n\mathcal{U}_n$

$\Rightarrow n\mathcal{U}_n = 3n - \mathcal{V}_n \Rightarrow \mathcal{U}_n = \dfrac{3n - \mathcal{V}_n}{n}$

$\Rightarrow \mathcal{U}_n = 3 - \dfrac{\mathcal{V}_n}{n} = 3 - \dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{n} \Rightarrow \boldsymbol{\mathcal{U}_n = 3 - \dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{n}}$

**Exemple 47 :**

$(\mathcal{U}_n)$ est la suite définie par : $\begin{cases} \mathcal{U}_0 = 4 \\ \mathcal{U}_{n+1} = \frac{1}{2}\mathcal{U}_n - 3 \end{cases}$

**1°)** Calculer $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \mathcal{U}_3$

**2°)** Démontrer que : $\mathcal{U}_{n+1} - \mathcal{U}_n = \frac{1}{2}(\mathcal{U}_n - \mathcal{U}_{n-1})$

**3°)** Démontrer par récurrence que : $\mathcal{U}_{n+1} - \mathcal{U}_n = -5\left(\frac{1}{2}\right)^n$ et en déduire le sens de variation de $(\mathcal{U}_n)$

**4°)** Démontrer que : $\mathcal{U}_n + 6 = \frac{1}{2}(\mathcal{U}_{n-1} + 6)$

**5°)** Démontrer par récurrence que : $\mathcal{U}_n + 6 = 10\left(\frac{1}{2}\right)^n$

**Réponse :**

**1°)** Calculons $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \mathcal{U}_3$

$\mathcal{U}_1 = \frac{1}{2}\mathcal{U}_0 - 3 = \frac{1}{2} \times 4 - 3 = -1$,

$\mathcal{U}_2 = \frac{1}{2}\mathcal{U}_1 - 3 = \frac{1}{2} \times (-1) - 3 = \frac{-7}{2}$

$\mathcal{U}_3 = \frac{1}{2}\mathcal{U}_2 - 3 = \frac{1}{2} \times \left(\frac{-7}{2}\right) - 3 = \frac{-19}{4}$

**2°)** Montrons que : $\mathcal{U}_{n+1} - \mathcal{U}_n = \frac{1}{2}(\mathcal{U}_n - \mathcal{U}_{n-1})$

On a ; $\mathcal{U}_{n+1} = \frac{1}{2}\mathcal{U}_n - 3,\ \mathcal{U}_n = \frac{1}{2}\mathcal{U}_{n-1} - 3$

$\Rightarrow \mathcal{U}_{n+1} - \mathcal{U}_n = \left(\frac{1}{2}\mathcal{U}_n - 3\right) - \left(\frac{1}{2}\mathcal{U}_{n-1} - 3\right)$

$= \frac{1}{2}\mathcal{U}_n - 3 - \frac{1}{2}\mathcal{U}_{n-1} + 3 = \frac{1}{2}\mathcal{U}_n - \frac{1}{2}\mathcal{U}_{n-1}$

$= \frac{1}{2}(\mathcal{U}_n - \mathcal{U}_{n-1}) \Rightarrow \boldsymbol{\mathcal{U}_{n+1} - \mathcal{U}_n = \frac{1}{2}(\mathcal{U}_n - \mathcal{U}_{n-1})}$

**3°)** Montrons par récurrence que :

$\mathcal{U}_{n+1} - \mathcal{U}_n = -5\left(\frac{1}{2}\right)^n$

**Initialisation**

$\mathcal{U}_1 = -1$

$\mathcal{U}_2 - \mathcal{U}_1 = \frac{-7}{2} - (-1) = \frac{-7}{2} + 1 = \frac{-5}{2} = -5\left(\frac{1}{2}\right)^1$,

$\mathcal{U}_3 - \mathcal{U}_2 = \frac{-19}{4} - \frac{-7}{2} = \frac{-5}{4} = -5\left(\frac{1}{2}\right)^2$

La propriété est vraie pour $\mathcal{U}_2 - \mathcal{U}_1$ et $\mathcal{U}_3 - \mathcal{U}_2$.

**Transmission**

Supposons qu'elle est vraie pour $\mathcal{U}_n - \mathcal{U}_{n-1}$ et montrons qu'elle est vraie pour $\mathcal{U}_{n+1} - \mathcal{U}_n$.

$\mathcal{U}_n - \mathcal{U}_{n-1} = -5\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$. Multiplions les deux parties par $\frac{1}{2}$ ,on obtient :

$\frac{1}{2}(\mathcal{U}_n - \mathcal{U}_{n-1}) = -5\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \times \frac{1}{2}$.

Or, on a déjà montré que :

$\frac{1}{2}(\mathcal{U}_n - \mathcal{U}_{n-1}) = \mathcal{U}_{n+1} - \mathcal{U}_n$.

Et on a : $-5\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \times \frac{1}{2} = -5\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$\Rightarrow \boldsymbol{\mathcal{U}_{n+1} - \mathcal{U}_n = -5\left(\frac{1}{2}\right)^n}$.

Sens de variation de $(\mathcal{U}_n)$ ;

$\mathcal{U}_{n+1} - \mathcal{U}_n = -5\left(\frac{1}{2}\right)^n < 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

Il en résulte que $(\mathcal{U}_n)$ est décroissante

**4°)** Démontrer que : $\mathcal{U}_n = \frac{1}{2}\mathcal{U}_{n-1} - 3$

$\mathcal{U}_n + 6 = \frac{1}{2}\mathcal{U}_{n-1} - 3 + 6 = \frac{1}{2}\mathcal{U}_{n-1} + 3$

$\Rightarrow \boldsymbol{\mathcal{U}_n + 6 = \frac{1}{2}(\mathcal{U}_{n-1} + 6)}$

**5°)** Démontrons par recurrence que :

$\mathcal{U}_n + 6 = 10\left(\frac{1}{2}\right)^n$

**Initialisation**

$\mathcal{U}_1 + 6 = -1 + 6 = 5 = 10\left(\frac{1}{2}\right)^1$,

$\mathcal{U}_2 + 6 = \frac{-7}{2} + 6 = \frac{5}{2} = 10\left(\frac{1}{2}\right)^2$

$\mathcal{U}_3 + 6 = \frac{-19}{4} + 6 = \frac{5}{4} = 10\left(\frac{1}{2}\right)^3$, La propriété est donc vraie pour $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \mathcal{U}_3$

**Transmission**

Supposons qu'elle est vraie pour n et montrons qu'elle est vraie pour $n + 1$ : $\mathcal{U}_n + 6 = 10\left(\frac{1}{2}\right)^n$

Multiplions les deux paries par $\frac{1}{2}$,

$\frac{1}{2} \times (\mathcal{U}_n + 6) = 10\left(\frac{1}{2}\right)^n \times \frac{1}{2}$

Or, on a déjà montré que : $\frac{1}{2}(\mathcal{U}_n + 6) = \mathcal{U}_{n+1} + 6$

Et on a : $10\left(\frac{1}{2}\right)^n \times \frac{1}{2} = 10\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

$\Rightarrow \boldsymbol{\mathcal{U}_{n+1} + 6 = 10\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}$

**Exemple 48 :**

Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ 3^{2n+1} + 2^{n+2}$ est un multiple 7

**Réponse :**

**Initialisation**

Pour $n = 0$ ; $3^{2\times0+1} + 2^{0+2} = 3 + 4 = 7 = 7 \times 1$.

Cette propriété est vraie pour $n = 0$.

**Transmission**

On suppose que cette propriété est vraie pour un entier naturel $n$. C'est-à-dire qu'il existe un entier $k$

tel que ; $3^{2n+1}+2^{n+2}=7k$, montrons qu'elle est vraie pour $n+1$.

$3^{2(n+1)+1}+2^{(n+1)+2}=3^{2n+3}+2^{n+3}$

$=7\times 3^{2n+1}+2\times 3^{2n+1}+2\times 2^{n+2}$

$=7\times 3^{2n+1}+2(3^{2n+1}+2^{n+2})$

$=7\times 3^{2n+1}+2\times 7k=7(3^{2n+1}+2k)=7k'$

Avec $k'=3^{2n+1}+2k$ car $3^{2n+1}+2k$ est un entier.

Il existe donc un entier $k'$ tel que :

$3^{2(n+1)+1}+2^{(n+1)+2}=7k'$

La propriété est vraie pour $n+1$, d'où :

$\forall n\in\mathbb{N}, 3^{2n+1}+2^{n+2}$ est un multiple de 7.

**Exemple 49 :**

Montrer par récurrence que ;

$$\forall n\in\mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2}$$

**Réponse :**

**Initialisation**

Pour $n=1$ ; $\sum_{k=1}^{1} k=1$ et $\frac{1(1+1)}{2}=\frac{2}{2}=1$.

La propriété est vraie pour $n=1$

**Transmission**

On suppose que pour un entier naturel $n\neq 0$; $\sum_{k=1}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2}$

Montrons que ;

$$\sum_{k=1}^{n+1} k=\frac{(n+1)\big((n+1)+1\big)}{2}$$

C.-à-d. que ; $\sum_{k=1}^{n+1} k=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$

On a ;$\sum_{k=1}^{n} k=\underbrace{1+2+3+4+\cdots n}_{=\frac{n(n+1)}{2}}+(n+1)$

$$=\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)=\frac{n(n+1)}{2}+\frac{2(n+1)}{2}$$

$$=\frac{n(n+1)+2(n+1)}{2}=\frac{(n+1)(n+2)}{2}=\sum_{k=1}^{n+1} k$$

D'où, la propriété est vraie pour $n+1$ donc ;

$$\forall n\in\mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2}$$

**Exemple 50 :**

Montrer par récurrence que ;

$$\forall n\in\mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

**Réponse :**

**Initialisation**

Pour$n=1, \sum_{k=1}^{1} k^2=1^2=1$,

$$\frac{1(1+1)(2\times 1+1)}{6}=\frac{1\times 2\times 3}{6}=\frac{6}{6}=1$$

La propriété est donc vraie pour $n=1$.

**Transmission**

On suppose que cette propriété est vraie pour un entier naturel $n\geq 1$, c'est-à-dire que ;

$\sum_{k=1}^{n} k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Montrons qu'elle est vraie pour$n+1$, c.-à-d. ;

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2=\frac{(n+1)[(n+1)+1][2(n+1)+1]}{6}$$

$$=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

$$=\frac{(n+1)(2n^2+3n+4n+6)}{6}$$

$$=\frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2=\underbrace{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}_{=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}+(n+1)^2$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2$$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{6(n+1)^2}{6}$$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6}$$

$$=\frac{(n+1)[n(2n+1)+6(n+1)]}{6}$$

$$=\frac{(n+1)[2n^2+n+6n+6]}{6}$$

$$=\frac{(n+1)[2n^2+7n+6]}{6}=\sum_{k=1}^{n+1} k^2.$$

D'où, la propriété est vraie pour$n+1$, donc ;

$$\forall n\in\mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

**Exemple 51 :**

Monter par récurrence que ;

$$\forall n\in\mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} k^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

**Initialisation**

Pour $n=1$, on a ; $\sum_{k=1}^{1} k^3=1^3=1$;

et $\frac{1^2(1+1)^2}{4}=\frac{1\times 2^2}{4}=\frac{4}{4}=1=1$

La propriété est vraie pour $n=1$.

**Transmission**

On suppose que cette propriété est vraie pour un entier naturel $n$, c'est-à-dire qu'on a ;

$$\sum_{k=1}^{n} k^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Montrons qu'elle est vraie pour$n+1$, c.-à-d. ;

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3=\frac{(n+1)^2[(n+1)+1]^2}{4}=\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

On a ; $\sum_{k=1}^{n+1} k^3=\underbrace{1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3}_{=\frac{n^2(n+1)^2}{4}}+(n+1)^3$,

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3$$
$$= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{4(n+1)^3}{4} = \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4}$$
$$= \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^2(n+1)}{4}$$
$$= \frac{(n+1)^2[n^2 + 4(n+1)]}{4} = \frac{(n+1)^2[n^2 + 4n + 4]}{4}$$
$$= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} = \sum_{k=1}^{n+1} k^3$$

D'où, la propriété est vraie pour $n+1$. Donc, $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

**Exemple 52 :**

On considère la suite $(\mathcal{U}_n)$ définie par ;

$$\begin{cases} \mathcal{U}_0 = 13 \\ et \\ \forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{U}_{n+1} = \frac{2}{3}\mathcal{U}_n + 4 \end{cases}$$

**1°/ a)** Calculer les termes $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$ et $\mathcal{U}_3$.

**b)** Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{U}_n > 12$.

**c)** Montrer que $(\mathcal{U}_n)$ est décroissante.

**2°/** Soit $(\mathcal{V}_n)$ la suite définie$\forall n \in \mathbb{N}$, par ; $\mathcal{V}_n = \mathcal{U}_n - 12$

**a)** Montrer que $(\mathcal{V}_n)$ est une suite géométrique, dont on déterminera la raison et le premier terme.

**b)** Exprimer $(\mathcal{V}_n)$ puis $(\mathcal{U}_n)$ en fonction de $n$.

**c)** On pose$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \mathcal{V}_0 + \mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 + \cdots + \mathcal{V}_{n-1}$, $S'_n = \mathcal{U}_0 + \mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2 + \cdots + \mathcal{U}_{n-1}$

Calculer $S_n$et $S'_n$.

**Réponse :**

**1°)** $\boldsymbol{a})\mathcal{U}_1 = \frac{2}{3}\mathcal{U}_0 + 4 = \frac{2}{3} \times 13 + 4 = \frac{38}{3}$,

$$\mathcal{U}_2 = \frac{2}{3}\mathcal{U}_1 + 4 = \frac{2}{3} \times \frac{38}{3} + 4 = \frac{112}{9}$$
$$\mathcal{U}_3 = \frac{2}{3}\mathcal{U}_2 + 4 = \frac{2}{3} \times \frac{112}{9} + 4 = \frac{332}{27}$$

**b)** Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{U}_n > 12$ ;

**Initialisation**

Pour $n = 0$, on a ; $\mathcal{U}_0 = 13 > 12$

**Transmission**

On suppose que cette propriété est vraie pour un entier naturel $n$, c'est-à-dire que $\mathcal{U}_n > 12$, montrons qu'elle est vraie pour $n+1$ ;

On a ;$\mathcal{U}_n > 12 \Rightarrow 2\mathcal{U}_n > 24 \Rightarrow \frac{2}{3}\mathcal{U}_n > 8$

$$\Rightarrow \frac{2}{3}\mathcal{U}_n + 4 > 12$$

D'où, $\mathcal{U}_{n+1} > 12$. La propriété est donc vraie pour $n+1$, d'où ; $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{U}_n > 12$.

**c)**$\mathcal{U}_{n+1} - \mathcal{U}_n = \frac{2}{3}\mathcal{U}_n + 4 - \mathcal{U}_n = \frac{-1}{3}\mathcal{U}_n + 4$

$$= \frac{-\mathcal{U}_n + 12}{3} = \frac{-1}{3}(\mathcal{U}_n - 12)$$

Or, $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{U}_n > 12 \Rightarrow \mathcal{U}_n - 12 > 0$.

Donc,$\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{U}_n > 12 \Rightarrow \frac{-1}{3}(\mathcal{U}_n - 12) < 0$

D'où ; $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{U}_{n+1} - \mathcal{U}_n < 0$.La suite $(\mathcal{U}_n)$ est donc décroissante.

**2°)**$\boldsymbol{a})\mathcal{V}_n = \mathcal{U}_n - 12 \Rightarrow \mathcal{V}_{n+1} = \mathcal{U}_{n+1} - 12$

$$= \frac{2}{3}\mathcal{U}_n + 4 - 12 = \frac{2}{3}\mathcal{U}_n - 8 = \frac{2\mathcal{U}_n - 24}{3}$$
$$= \frac{2}{3}(\mathcal{U}_n - 12) \Rightarrow \mathcal{V}_{n+1} = \frac{2}{3}(\mathcal{U}_n - 12)$$
$$= \frac{2}{3}\mathcal{V}_n. \quad \forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{V}_{n+1} = \frac{2}{3}\mathcal{V}_n$$

$(\mathcal{V}_n)$est donc une suite géométrique de raison$q = \frac{2}{3}$et de premier terme$\mathcal{V}_0 = 1$.

**b)** comme $(\mathcal{V}_n)$ est une suite géométrique de premier terme $\mathcal{V}_0 = 1$ et de raison $q = \frac{2}{3}$

$\mathcal{V}_n = \mathcal{V}_0 \times q^n \Rightarrow 1 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$.Donc, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{\mathcal{V}_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n}$

Or, $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{V}_n = \mathcal{U}_n - 12$. D'où ; $\forall n \in \mathbb{N}$. $\mathcal{U}_n = \mathcal{V}_n + 12$.

Donc ;$\forall n \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{\mathcal{U}_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n + 12}$

**c)**Comme $(\mathcal{V}_n)$ est une suite géométrique de premier terme $\mathcal{V}_0 = 1$ et de raison $= \frac{2}{3}$, et comme $S_n = \mathcal{V}_0 + \mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 + \cdots + \mathcal{V}_{n-1}$

$$\Rightarrow S_n = \mathcal{V}_0 \frac{1 - q^{n-1-0+1}}{1-q} = \mathcal{V}_0 \frac{1-q^n}{1-q}$$
$$= 1 \times \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 - \frac{2}{3}} = \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{-\frac{1}{3}} = 3\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right).$$

D'où,$n \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{S_n = 3\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)}$

D'autre part,$S'_n = \mathcal{U}_0 + \mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2 + \cdots + \mathcal{U}_{n-1}$.Or, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{U}_n = \mathcal{V}_n + 12$. D'où ;

$$S'_n = (\mathcal{V}_0 + 12) + (\mathcal{V}_1 + 12) + \cdots + (\mathcal{V}_{n-1} + 12)$$
$$= \underbrace{(\mathcal{V}_0 + \mathcal{V}_1 \ldots + \mathcal{V}_{n-1})}_{=S_n} + \underbrace{(12 + 12 + \cdots + 12)}_{=12 \times n}$$
$$= S_n + 12 \times n$$
$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \boldsymbol{S'_n = 3\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right) + 12n}$$

**Exemple 53 :**

On considère la suite numérique $(\mathcal{U}_n)$ définie par ;

$$\begin{cases} \mathcal{U}_0 = 0 \\ et \\ \forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{U}_{n+1} = \sqrt{2 + \mathcal{U}_n} \end{cases}$$

**1°)** Calculer les termes $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$et$\mathcal{U}_3$.

**2°)** Montrer par récurrence que ; $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{U}_n \in [0\,;2]$.

**3°)** Etudier le signe$f(x) = 2 + x - x^2$.

**4°)** En déduire le signe de ; ${\mathcal{U}_{n+1}}^2 - {\mathcal{U}_n}^2 \forall n \in \mathbb{N}$, puis le sens de variation de de $(\mathcal{U}_n)$.

**Réponse :**

**1°)** $\mathcal{U}_1 = \sqrt{2 + \mathcal{U}_0} = \sqrt{2+0} = \sqrt{2}$,

$$\mathcal{U}_2 = \sqrt{2 + \mathcal{U}_1} = \sqrt{2 + \sqrt{2}}, \ \mathcal{U}_3$$

$$= \sqrt{2+\mathcal{U}_2} = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

**2°)** Montrons par récurrence que ; $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{U}_n \in [0;2]$.

**Initialisation**

Pour$n = 0$, on a ; $\mathcal{U}_0 = 0 \in [0;2]$. La propriété est donc vraie pour $n = 0$

**Transmission**

On suppose que cette propriété est vraie pour un entier naturel $n$ c'est-à-dire que ; $\mathcal{U}_n \in [0;2]$.

On a alors d'après l'hypothèse de récurrence ;$\mathcal{U}_n \in [0;2] \Leftrightarrow 0 \le \mathcal{U}_n \le 2$

$$\Rightarrow 2 \le 2+\mathcal{U}_n \le 4 \Rightarrow \sqrt{2} \le \sqrt{2+\mathcal{U}_n} \le 2$$

D'où ; $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{U}_n \in [0;2]$.

**3°)** $f(x) = 2 + x - x^2$

$2 + x - x^2 = 0 \Delta = b^2 - 4ac$

$= 1 - 4 \times (-1) \times 2 = 9 > 0, \sqrt{\Delta} = 3$

$x_1 = \dfrac{-1+3}{-2} = -1;\ \ x_2 = \dfrac{-1-3}{-2} = 2$

| $x$ | $-\infty$ | $-1$ | | $2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $2+x-x^2$ | $-$ | $\mathbf{0}$ | $+$ | $\mathbf{0}$ | $-$ |

**4°)** $\mathcal{U}_{n+1}{}^2 - \mathcal{U}_n{}^2 = \left(\sqrt{2+\mathcal{U}_n}\right)^2 - \mathcal{U}_n{}^2$

$$= 2 + \mathcal{U}_n - \mathcal{U}_n{}^2 = f(\mathcal{U}_n).$$

Donc,$\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{U}_{n+1}{}^2 - \mathcal{U}_n{}^2 = 2 + \mathcal{U}_n - \mathcal{U}_n{}^2$

Or,$\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{U}_n \in [0;2]$ et $\forall n \in [-1;2],\ f(n) \ge 0$

D'où, $\forall n \in \mathbb{N}, f(\mathcal{U}_n) \ge 0$

Donc,$\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{U}_{n+1}{}^2 - \mathcal{U}_n{}^2 \ge 0$

D'où, $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{U}_{n+1}{}^2 \ge \mathcal{U}_n{}^2$

Et comme$\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{U}_n \in [0;2]$, les termes de la suite $(\mathcal{U}_n)$ sont positifs ;

$\Rightarrow \mathcal{U}_{n+1} \ge \mathcal{U}_n \Rightarrow \mathcal{U}_{n+1} - \mathcal{U}_n \ge 0, \forall n \in \mathbb{N}$

Ce qui prouve que la suite $(\mathcal{U}_n)$ est croissante.

**Exercice 21 :**

Soit $(\mathcal{U}_n)$ la suite définie par :

$$\begin{cases} \mathcal{U}_0 = 1 \\ et \\ \forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{U}_{n+1} = \dfrac{2+\mathcal{U}_n}{1+\mathcal{U}_n} \end{cases}$$

**1°)**Calculer $\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1$ et $\mathcal{U}_3$ ;

**2°)** Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{U}_n > 0$ ;

**3°)** Montrer que la suite $(\mathcal{U}_n)$ est minoré par 1, puis qu'elle est majorée par $\frac{3}{2}$

**Solution :**

**1°)** $\mathcal{U}_1 = \frac{2+\mathcal{U}_0}{1+\mathcal{U}_0} = \frac{2+1}{1+1} = \frac{3}{2}$,

$$\mathcal{U}_2 = \frac{2+\mathcal{U}_1}{1+\mathcal{U}_1} = \frac{2+\frac{3}{2}}{1+\frac{3}{2}} = \frac{7}{5},$$

$$\mathcal{U}_3 = \frac{2+\mathcal{U}_2}{1+\mathcal{U}_2} = \frac{2+\frac{7}{5}}{1+\frac{7}{5}} = \frac{17}{12}$$

**2°) Initialisation**

Pour $n = 0$, $\mathcal{U}_0 = 1 > 0$. La propriété est vraie pour $n = 0$.

**Transmission**

On suppose que cette propriété est vraie pour un entier naturel $n$, c.-à-d. que $\mathcal{U}_n > 0$, montrons que $\mathcal{U}_{n+1} > 0$. D'après l'hypothèse de récurrence, on a ;

$$\mathcal{U}_n > 0 \Rightarrow \begin{cases} 2+\mathcal{U}_n > 0 \\ 1+\mathcal{U}_n > 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{2+\mathcal{U}_n}{1+\mathcal{U}_n} > 0$$

$\Rightarrow \mathcal{U}_{n+1} > 0$

La propriété est donc vraie pour $n+1$. D'où, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{U}_n > 0$

**3°)** Pour montrer que $\mathcal{U}_n$ est minoré par 1, il suffit de montrer que ; $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{U}_n - 1 > 0$.

Montrons par récurrence que$\mathcal{U}_n - 1 > 0$.

**Initialisation**

$n = 0 \Rightarrow \mathcal{U}_0 = 1 \Rightarrow \mathcal{U}_0 - 1 > 0$. La propriété est vraie pour $n = 0$.

**Transmission**

On suppose que $\mathcal{U}_n - 1 > 0$, montrons que

$$\mathcal{U}_{n+1} - 1 > 0 \Rightarrow \frac{2+\mathcal{U}_n}{1+\mathcal{U}_n} - 1 > 0$$

$$\Rightarrow \frac{2+\mathcal{U}_n}{1+\mathcal{U}_n} - \frac{1+\mathcal{U}_n}{1+\mathcal{U}_n} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{2+\mathcal{U}_n-(1+\mathcal{U}_n)}{1+\mathcal{U}_n} > 0 \Rightarrow \frac{2+\mathcal{U}_n-1-\mathcal{U}_n}{1+\mathcal{U}_n} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+\mathcal{U}_n} > 0$$

D'après l'hypothèse de récurrence $\mathcal{U}_n > 0$d'où ;$1 + \mathcal{U}_n \ge 2 \Rightarrow \frac{1}{1+\mathcal{U}_n} \ge \frac{1}{2}$Donc ; $\frac{1}{1+\mathcal{U}_n} > 0 \Rightarrow \mathcal{U}_{n+1} > 0$

La suite $(\mathcal{U}_n)$ est donc minorée par 1. Montrons par récurrence que$(\mathcal{U}_n)$ est majorée par$\frac{3}{2}$

**Initialisation**

Pour $n = 0$, on a ;$\mathcal{U}_0 = 1 \Rightarrow \mathcal{U}_0 < \frac{3}{2}$. La propriété est donc vraie pour$n = 0$.

**Transmission**

On suppose que $\mathcal{U}_n \le \frac{3}{2}$, montrons que $\le \frac{3}{2}$.

$$\mathcal{U}_{n+1} - \frac{3}{2} = \frac{2+\mathcal{U}_n}{1+\mathcal{U}_n} - \frac{3}{2} = \frac{2+\mathcal{U}_n}{1+\mathcal{U}_n} - \frac{3+3\mathcal{U}_n}{2+2\mathcal{U}_n}$$

$$= \frac{4+2\mathcal{U}_n-3-3\mathcal{U}_n}{2+2\mathcal{U}_n} = \frac{1-\mathcal{U}_n}{2+2\mathcal{U}_n} = \frac{1-\mathcal{U}_n}{2(1+\mathcal{U}_n)}$$

Or,$\mathcal{U}_n > 1 \Rightarrow \begin{cases} 2(1+\mathcal{U}_n) > 0 \\ 1-\mathcal{U}_n \le 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{1-\mathcal{U}_n}{2(1+\mathcal{U}_n)} \le 0.$

D'où ;$\mathcal{U}_{n+1} - \frac{3}{2} \le 0 \Rightarrow \mathcal{U}_{n+1} \le \frac{3}{2}$

Donc ; $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{U}_n \le \frac{3}{2}$. Donc,$(\mathcal{U}_n)$est majorée par $\frac{3}{2}$.

## A. Applications :

**Calcul de termes d'une suite**

**Exemple 1 :**

Calculer$\mathcal{U}_1$ ; $\mathcal{U}_2$ ; $\mathcal{U}_3$ ;$\mathcal{U}_4$ et $\mathcal{U}_5$ dans chacun des cas suivants :

**1.**$(\mathcal{U}_n)$ est définie sur $\mathbb{N}$ par : $\mathcal{U}_n = 5 \times 10^n + 2$.

**2.**$(\mathcal{U}_n)$est définie sur $\mathbb{N}$ par : $\mathcal{U}_0 = 1$et $\mathcal{U}_{n+1} = \frac{1}{1+\mathcal{U}_n}$.

**3.**$(\mathcal{U}_n)$ est la somme des inverses des $n$ premiers naturels non nuls.

**Réponse :**

**1.** $\mathcal{U}_n = 5 \times 10^n + 2$ ;

On a : $\mathcal{U}_1 = 5 \times 10^1 + 2 = 52$ ; $\mathcal{U}_2 = 502$ ;

$\mathcal{U}_3 = 5\,002$ ; $\mathcal{U}_4 = 50\,002$ et $\mathcal{U}_5 = 500\,002$

**2.** $\mathcal{U}_0 = 1$ et $\mathcal{U}_{n+1} = \frac{1}{1+\mathcal{U}_n}$;

On obtient successivement ;

$$\mathcal{U}_1 = \frac{1}{1+\mathcal{U}_0} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2},$$

$$\mathcal{U}_2 = \frac{1}{1+\mathcal{U}_1} = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3},$$

$$\mathcal{U}_3 = \frac{1}{1+\mathcal{U}_2} = \frac{1}{1+\frac{2}{3}} = \frac{3}{5}$$

$$\mathcal{U}_4 = \frac{1}{1+\mathcal{U}_3} = \frac{1}{1+\frac{2}{3}} = \frac{5}{8},$$

$$\mathcal{U}_5 = \frac{1}{1+\mathcal{U}_4} = \frac{1}{1+\frac{5}{8}} = \frac{8}{13}$$

**3.**Un est la somme des inverses des $n$ premiers termes naturels non nuls.

On a : $\mathcal{U}_1 = \frac{1}{1} = 1,\quad \mathcal{U}_2 = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2},$

$\mathcal{U}_3 = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6},\quad \mathcal{U}_4 = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{25}{12},$

$\mathcal{U}_5 = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{137}{60}$

**Remarque 16 :**

On peut noter que pour tout naturel non nul :$\mathcal{U}_{n+1} = \mathcal{U}_n + \frac{1}{n+1}$

**Représentation d'une suite**

**Exemple 2 :**

Soit $(\mathcal{U}_n)$ la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $\mathcal{U}_0 = -5$ et $\mathcal{U}_{n+1} = \sqrt{6 + \mathcal{U}_n}$

**1.** Représenter dans un même repère$(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, la droite $\Delta$ d'équation $y = x$ et la courbe représentative$\mathcal{C}$de la fonction : $f : x \to \sqrt{6+x}$

**2.** Utiliser $\mathcal{C}$ et $\Delta$ pour représenter graphiquement les premiers termes de la suite sur l'axe des abscisses.

**3.** Faire une conjecture sur le sens de variation de $(\mathcal{U}_n)$, ses bornes éventuelles.

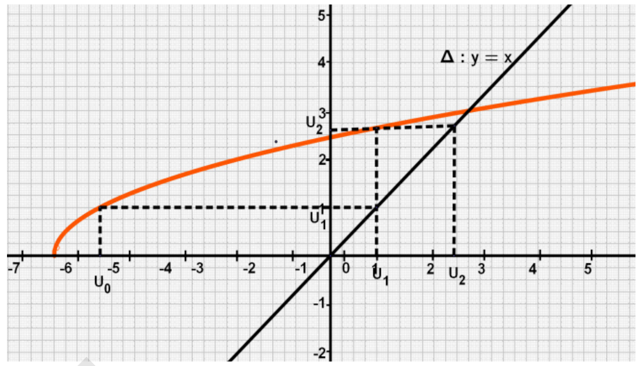
**4.** De quel nombre semble se rapprocher quand n devient grand ?

**Réponse :**

Il semble que la suite $(\mathcal{U}_n)$ soit croissante, donc minorée par son premier terme $\mathcal{U}_0$ qui vaut $-5$.

De plus, il est raisonnable de penser qu'elle est majorée par 3 et que $(\mathcal{U}_n)$ ne cesse de se rapprocher de 3 quand $n$ grandit ; plus précisément :

$\mathcal{U}_n$ est aussi proche de 3 que l'on veut dès que $n$ est suffisamment grand.




**Suite majorée, minorée, bornée :**

**Exemple 3 :**

Les suites proposées sont-elles bornées :

$$\mathcal{U} : n \longmapsto \frac{1}{\sqrt{n}} + 2;\ \mathcal{V} : n \longmapsto (-1)^n;\ \mathcal{W} : n \longmapsto \frac{\sqrt{n}}{n+1}$$

**Réponse :**

♦$\mathcal{U} : n \longmapsto \frac{1}{\sqrt{n}} + 2$ est définie sur $\mathbb{N}^*$; pour tout$n$de$\mathbb{N}^*$,

on a $0 \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \leq 1$ ; c'est-à-dire $2 \leq \mathcal{U}_n \leq 3$, donc la suite est bornée par 2 et 3.

**Remarque 17 :**

La valeur 3 est atteinte pour $n = 1$ et $\mathcal{U}_n$ est aussi proche de 2 que l'on veut (*sans jamais l'atteindre*), pour que$n$ soit suffisamment grand.

♦$\mathcal{V} : n \longmapsto (-1)^n$ est définie sur $\mathbb{N}$, pour tout $n$ de $\mathbb{N}$

on a : $\begin{cases} \mathcal{V}_n = -1\ ;\ si\ n\ est\ impair \\ \mathcal{V}_n = 1\ ;\ si\ n\ est\ pair \end{cases}$

Donc, la suite $\mathcal{V}_n$ est bornée par $-1$ et 1.

♦$\mathcal{W} : n \longmapsto \frac{\sqrt{n}}{n+1}$ est définie sur $\mathbb{N}$ ; pour tout $n$ de $\mathbb{N}$

on a : $\frac{\sqrt{n}}{n+1} \geq 0$ ; c'est-à-dire $\mathcal{W}_n \geq 0$ ; de plus, $\sqrt{n} \leq n+1$ ; donc ; $\mathcal{W}_n \leq 1$, Donc, la suite $(\mathcal{W}_n)$ est bornée par 0 et 1.

**Exemple 4 :**

**Sens de variation d'une suite**

Etudier le sens de variation de la suite $\mathcal{U}$ proposée :

$\mathcal{U} : n \longmapsto n^3 - 4n^2 - 5n - 1,$

$\mathcal{U} : n \longmapsto (-5)^n,\quad \mathcal{U} : n \longmapsto \frac{3^n}{n+1},$

$\mathcal{U} : \begin{cases} \mathcal{U}_0 = 4 \\ \mathcal{U}_{n+1} = \mathcal{U}_n - 0{,}71 \end{cases},\quad \mathcal{U} : n \longmapsto n^2 + n - 5.$

**Réponse :**

● $\mathcal{U} : n \longmapsto n^3 - 4n^2 - 5n - 1$ ; pour tout naturel $n$ ;

$\mathcal{U}_{n+1} - \mathcal{U}_n = (n+1)^3 - 4(n+1)^2 - 5(n+1)$

$-1n^3 + 4n^2 + 5n + 1 = 3n^2 - 5n - 8$





Math 6AS.indd 155 26/07/2024 10:43:43

$-1$ est une racine du polynôme du second degré $x \mapsto 3x^2 - 5x - 8$, l'autre racine est donc $\frac{8}{3}$, d'où :

$$\mathcal{U}_{n+1} - \mathcal{U}_n = 3(n+1)\left(n - \frac{8}{3}\right) = (n+1)(3n-8) ;$$

$\mathcal{U}_{n+1} - \mathcal{U}_n$est donc du signe de $3n - 8$, il vient

Si, $\leq 2$ , alors $\mathcal{U}_{n+1} - \mathcal{U}_n < 0$ ;

Si, $\geq 3$ , alors $\mathcal{U}_{n+1} - \mathcal{U}_n > 0$ ;

La suite $\mathcal{U}$ est strictement croissante à partir du rang 3.

- $\mathcal{U} : n \mapsto (-5)^n$ ; la suite $\mathcal{U}$ est définie sur $\mathbb{N}$ et pour tout naturel$n$,
  - ♦ Si $n$ est pair, alors $\mathcal{U}_n > 0$
  - ♦ Si $n$ est impair, alors $\mathcal{U}_n < 0$

  $\mathcal{U}$ n'est pas monotone, même à partir d'un certain rang.

- $\mathcal{U} : n \mapsto \frac{3^n}{n+1}$ ; la suite est définie sur $\mathbb{N}$ et à termes strictement positifs.

Pour tout naturel n ;

$$\frac{\mathcal{U}_{n+1}}{\mathcal{U}_n} = \frac{3^{n+1}}{n+2} \times \frac{n+1}{3^n} = \frac{3(n+1)}{n+2} = \frac{3n+3}{n+2}$$

Or,$\frac{3n+3}{n+2} > 1$, donc pour tout naturel $n$, $\frac{\mathcal{U}_{n+1}}{\mathcal{U}_n} > 1$

$\mathcal{U}_{n+1} > \mathcal{U}_n$( car $\mathcal{U}_n > 0$), cela prouve que $\mathcal{U}$ est strictement croissante.

- $\mathcal{U} : \begin{cases} \mathcal{U}_0 = 4 \\ \mathcal{U}_{n+1} = \mathcal{U}_n - 0{,}71 \end{cases}$ ; la suite $\mathcal{U}$ est définie sur $\mathbb{N}$ et pour tout naturel$n$,$\mathcal{U}_{n+1} - \mathcal{U}_n = -0{,}71$

Donc $\mathcal{U}_{n+1} - \mathcal{U}_n < 0$. Par conséquent, $\mathcal{U}$ est strictement décroissante.

- $\mathcal{U} : n \mapsto n^2 + n - 5$ ; la suite $\mathcal{U}$ est définie sur $\mathbb{N}$, d'autre par, les fonctions$x \mapsto x^2$ et $x \mapsto x - 5$ sont strictement croissantes sur $\mathbb{R}$, donc il en est de même de leur somme :$x \mapsto x^2 + x - 5$.

Il en résulte que$\mathcal{U}$ est strictement croissante sur $\mathbb{N}$.

**Suite arithmétique :**

**Exemple 5 :**

**a)** $\mathcal{U}$ est une suite arithmétique telle que :

$\mathcal{U}_{10} = 9$ et $\mathcal{U}_{17} = 17{,}4$.

♦ Calculer $\mathcal{U}_{21}$.

♦ Calculer la somme $\mathcal{S}$ telle que :

$\mathcal{S} = \mathcal{U}_{10} + \mathcal{U}_{11} + \cdots + \mathcal{U}_{21}$.

**b)** Soit $\mathcal{U}$ la suite arithmétique définie sur $\mathbb{N}$ telle que : $\mathcal{U}_4 + \mathcal{U}_6 + \mathcal{U}_8 + \mathcal{U}_{10} = -8$ et $\mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_4 = -3$.

Déterminer, sa raison $r$et son premier terme $\mathcal{U}_0$.

**Réponse :**

**a)**Soit $r$ la raison de la suite arithmétique ;

$\mathcal{U}_{17} = \mathcal{U}_{10} + 7r$ ; or $\mathcal{U}_{10} = 9$ et $\mathcal{U}_{17} = 17{,}4$.

Donc $7r + 9 = 17{,}4 \Longrightarrow r = \frac{8{,}4}{7} = 1{,}2$

♦ $\mathcal{U}_{21} = \mathcal{U}_{17} + 4r = 17{,}4 + 4 \times 1{,}2$

$= 17{,}4 + 4{,}8$ ; donc $\mathcal{U}_{21} = 22{,}2$.

♦$\mathcal{S} = \mathcal{U}_{10} + \mathcal{U}_{11} + \cdots + \mathcal{U}_{21}$ ; $\mathcal{S}$ est donc la somme des onze termes consécutifs de la suite arithmétique $\mathcal{U}$ de $\mathcal{U}_{10}$ à $\mathcal{U}_{21}$.

On en déduit que $\mathcal{S} = 12 \times \frac{\mathcal{U}_{10}+\mathcal{U}_{21}}{2} = 6 \times (9 + 22{,}2)$

d'où ; $\mathcal{S} = 187{,}2$.

**b)** $\mathcal{U}$ est la suite arithmétique de raison $r$ et de premier terme $\mathcal{U}_0$, donc pour tout naturel $n$ ;

$\mathcal{U}_n = \mathcal{U}_0 + nr$. On en déduit :

$$\mathcal{U}_4 + \mathcal{U}_6 + \mathcal{U}_8 + \mathcal{U}_{10} = 4\mathcal{U}_0 + (4+6+8+10)r = 4\,\mathcal{U}_0 + 28r$$

$\mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_{11} = 2\mathcal{U}_0 + (1+11)r = 2\mathcal{U}_0 + 12r$.

Or ; $\mathcal{U}_4 + \mathcal{U}_6 + \mathcal{U}_8 + \mathcal{U}_{10} = -8$ et $\mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_{11} = -3$

Donc,$\begin{cases} 4\,\mathcal{U}_0 + 28r = -8 \\ 2\mathcal{U}_0 + 12r = -3 \end{cases}$la résolution du système donne$\mathcal{U}_0 = \frac{3}{2}$et$r = -\frac{1}{2}$.

**Suite Géométrique :**

**Exemple 6 :**

**a)** Soit $\mathcal{U}$ la suite géométrique de raison$-\frac{2}{3}$ et de premier terme $\mathcal{U}_3$ tel que $\mathcal{U}_0 = 9$.

Calculer $\mathcal{S}$ où$\mathcal{S} = \mathcal{U}_3 + \mathcal{U}_4 + \cdots + \mathcal{U}_{10}$.

**b)** $\mathcal{U}$ est une suite géométrique de raison positive, telle que $\mathcal{U}_4 = 44$ et $\mathcal{U}_{10} = 352$ ; calculer $\mathcal{U}_{13}$.

**Réponse :**

**a)** $\mathcal{S}$ est la somme des huit termes consécutifs de la suite géométrique $\mathcal{U}$, de $\mathcal{U}_3$ à $\mathcal{U}_{10}$ ; la raison de cette suite est $-\frac{2}{3}$, donc $\mathcal{S} = \mathcal{U}_3 \frac{1-\left(\frac{-2}{3}\right)^8}{1-\left(\frac{-2}{3}\right)}$ ; Or, $\mathcal{U}_0 = 9$ ;

donc $\mathcal{U}_3 = 9\times\left(-\frac{2}{3}\right)^3$ ; donc, $\mathcal{S} = 9\times\left(-\frac{2}{3}\right)^3 \frac{1-\left(\frac{-2}{3}\right)^8}{1-\left(\frac{-2}{3}\right)}$

$$= -9\times\frac{2^3}{3^3}\times\frac{1-\left(\frac{-2}{3}\right)^8}{1-\left(\frac{-2}{3}\right)} = -\frac{10088}{6561}$$

**b)** Soit $q$ la raison de la suite géométrique $\mathcal{U}$ : $\mathcal{U}_{10} = \mathcal{U}_4 q^6$; donc $q^6 = \frac{\mathcal{U}_{10}}{\mathcal{U}_4}$ ; or ; $\mathcal{U}_4 = 44$

et $\mathcal{U}_{10} = 352$, donc, $q^6 = \frac{352}{44} = 8$.

D'autre part, $\mathcal{U}_{13} = \mathcal{U}_{10} q^3 = 352 q^3$ ; on a :

♦ $q^6 = 8$ , soit $(q^3)^2 = 8$ ;

♦ $q \geq 0$, donc $q^3 \geq 0$

On en déduit : $q^3 = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ ;

Finalement : $\mathcal{U}_{13} = 352 \times 2\sqrt{2}$;soit $704\sqrt{2}$.

**Remarque 18 :**

$q^3 = \sqrt{8} = \left(\sqrt{2}\right)^3$ ; la fonction $x \mapsto x^3$ étant une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on en déduit $q = \sqrt{2}$:

## Limite d'une suite :

**Exemple 7 :**

A l'aide des opérations sur les suites, déterminer, la limite de la suite $\mathcal{U}$ proposée :

**a)** $\mathcal{U} : n \mapsto -2 + \sqrt{n}$,  **b)** $\mathcal{U} : n \mapsto \frac{1}{n^2\sqrt{n}}$,

**c)** $\mathcal{U} : n \mapsto -5n^2 - n$,  **d)** $\mathcal{U} : n \mapsto 3^n + \left(-\frac{1}{3}\right)^n$,

**e)** $\mathcal{U} : n \mapsto \frac{(-0{,}5)^n}{7^n + 6}$,  **f)** $\mathcal{U} ; n \mapsto \frac{n^3}{(0{,}7)^n}$

**Réponse :**

**a)** $\mathcal{U} : n \mapsto -2 + \sqrt{n}$ ; cette suite est définie sur $\mathbb{N}$ ; c'est la somme de la suite constante $n \mapsto -2$ et la suite de référence : $n \mapsto \sqrt{n}$ qui diverge vers $+\infty$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathcal{U}_n = +\infty$.

**b)** $\mathcal{U} : n \mapsto \frac{1}{n^2\sqrt{n}}$ ; $\mathcal{U}$ est définie seulement sur $\mathbb{N}^*$, on sait que, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$, Donc , $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2\sqrt{n} = +\infty$.

L'inverse d'une suite de limite $+\infty$, étant une suite de limite nulle, on obtient : $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathcal{U}_n = 0$.

c) $\mathcal{U} : n \mapsto -5n^2 - n$ ; $\mathcal{U}$ est définie sur $\mathbb{N}$, on a

$\lim\limits_{n\to+\infty} (-5n^2) = -\infty$ ; $\lim\limits_{n\to+\infty} (-n) = -\infty$ ;

Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathcal{U}_n = -\infty$ (la somme de deux Suites de limite $-\infty$ a pour limite $-\infty$).

**d)** $\mathcal{U} : n \mapsto 3^n + \left(-\frac{1}{3}\right)^n$ ; $\mathcal{U}$ est définie sur $\mathbb{N}$,

comme $\left|-\frac{1}{3}\right| < 1$ ; la suite géométrique $n \mapsto \left(-\frac{1}{3}\right)^n$ a pour limite 0 ; d'autre part ; $3 > 1$, donc la suite géométrique $n \mapsto 3^n$ a pour limite $+\infty$, on peut conclure $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathcal{U}_n = +\infty$

**e)** $\mathcal{U} : n \mapsto \frac{(-0{,}5)^n}{7^n+6}$ ; $\mathcal{U}$ est définie sur $\mathbb{N}$, $|-0{,}5| < 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (-0{,}5)^n = 0$ ; or $7 > 1$ ; donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 7^n = +\infty$, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} (7^n + 6) = +\infty$.

De plus, on sait que le quotient d'une suite de limite 0 par une suite de limite $+\infty$ est une suite de limite 0.

On obtient donc finalement $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathcal{U}_n = 0$

**f)** $\mathcal{U} ; n \mapsto \frac{n^3}{(0{,}7)^n}$ ; $\mathcal{U}$est définie sur $\mathbb{N}$, on sait que : $\lim\limits_{n\to+\infty} n^3 = +\infty$.

D'autre part, comme ,$|0{,}7| < 1$, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} (0{,}7)^n = 0$.

la suite $\mathcal{U}$ est donc le quotient d'une suite de limite $+\infty$ par une suite de limite 0.

Pour conclure il suffit, de remarquer que l'on a pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, $(0{,}7)^n > 0$. On peut alors affirmer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathcal{U}_n = +\infty$.

## B. EXERCICES DIVERS

**1.** Le plan est muni du repère (O ; I ; J) dans chacun des cas suivants, représenter sur l'axe des abscisses les 5 premiers termes de la suite ($U_n$)

$a)\begin{cases}U_0 = 1\\ U_{n+1} = 1 + 2\sqrt{U_n}; \forall n \in \mathbb{N}\end{cases}$ ; $b)\begin{cases}U_0 = \dfrac{1}{2}\\ U_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{U_n}; \forall n \in \mathbb{N}\end{cases}$

$c)\begin{cases}U_0 = 3\\ U_{n+1} = \dfrac{1}{3}U_n^2 - 3\ ; \forall n \in \mathbb{N}\end{cases}$

**2.** Soit ($V_n$)la suite de terme général $V_n = 2 + n(-1)^n$
Calculer les 5 premiers termes de cette suite et représenter ces termes sur un axe.

**3.** Minorer et majorer aux mieux la suite $U: n \mapsto \frac{1}{n}$.

**4.** U est la suite définie par :$\forall\ n \in \mathbb{N} U_n = n^2 - 2n + 4$.
Montrer que U est minorée par -5.

**5.** Montrer que la suite U définie pour tout naturel n par :
Un = $\frac{1}{n+2}$ est strictement décroissante.

**6.** Montrer que la suite U définie pour tout naturel n par : Un = $\frac{2n+1}{n+3}$est strictement croissante.

**7.** Etudier la monotonie de chaque suite U et V définie ci-dessous

$a)U_n = \dfrac{2n+5}{n+1}$; b) $V_n = (-1)^n\dfrac{1}{n}$; $a)U_n = 2^n3^{n+1}$; b) $V_n = (n-3)^2$;

$a)U_n = \dfrac{n^2+1}{2n}$; b) $\begin{cases}V_0 = 4\\ V_{n+1} = V_n - 3\end{cases}$

**8.** U est la suite définie par $U_0$ et pour tout naturel n par la récurrence ci-dessous. Est-il possible de choisir $U_0$ de telle sorte que U soit une suite constante.

$a)U_{n+1} = \dfrac{1}{3}U_n + 8\ ; b)U_{n+1} = -U_n^2 + 2U_n+1;\ c)U_{n+1} = \dfrac{3+U_n}{1-U_n}$

**9.** Etudier la monotonie de (U) telle que : $\forall\ n \geq 1$ ;$U_n = \frac{2^n}{n}$

**10.** Dans chacun des cas suivants, montrer que (Un) est une suite arithmétique(**on précisera le premier terme et la raison**).

$a)\forall n \in \mathbb{N}, U_n = 4 - 3(n-1); b)\begin{cases}U_5 = -1\\ 5U_{n+1} = 5U_n - 2\ ; \forall n \in \mathbb{N}\end{cases}$

**11.** Dans chacun des cas suivants, préciser si la suite ($U_n$) est arithmétique, géométriques ou ni l'une ni l'autre.

$a)\ U_n = (-1)^n$ ; $b)\ U_n = 2^n - 3^n$; $c)U_n = -3(n+2)$
$d)U_n = (-3)^{n+2}$; $e)\ U_n = (-3)^n + 2$; $f)\ U_n = 10^{-n}$

**12.** U est la suite définie par $U_0 = 2$ et pour tout naturel n par $U_n = U_{n+1} - 5$.

1. Démontrer que U est une suite arithmétique et préciser sa raison.
2. Déterminer $U_n$ explicitement en fonction de n .
3. Calculer $S_n = U_3 + U_4 + ...+ U_n$ et déterminer n pour que $S_n = 6456$.

**13.** U est la suite définie par $U_0 = 1$ et $\forall\ n \in \mathbb{N} U_{n+1} = \frac{U_n}{1+U_n}$

1. Calculer $U_1$ ; $U_2$ ; $U_3$ ; U4 ; $U_5$.

Si $U_n \neq 0$, on pose $t_n= \frac{1}{U_n}$, calculer : $t_0$ ; $t_1$ ; $t_2$ ; $t_3$ ; $t_4$ ; $t_5$.

2. Montrer que la suite est une suite arithmétique.
3. Déduire une expression de $U_n$ en fonction de n.

**14.** Dans chacun des cas suivants, démontrer que ($U_n$) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

$a)\ \forall n \in \mathbb{N}\ ;\ U_n = (2)^{n+3}$ ; $b)\forall n \in \mathbb{N}\ ;\ U_n = 4^{n-1}$;
$c)\forall n \in \mathbb{N}\ ;\ U_n = \dfrac{3^n}{24^n}$; $d)\ \forall n \in \mathbb{N}\ ;\ U_n = \dfrac{2^{n+2}}{5^n}$

**15.** Soit ($U_n$) la suite définie par :$\begin{cases}U_1 = 1\\ U_{n+1} = 1 + 10U_n; \forall n \in \mathbb{N}\end{cases}$

Calculer $U_2$ ; $U_3$ ; $U_4$ et $U_5$.
Démontrer que pour tout naturel n non nul, $U_n$ est la somme de n termes consécutifs d'une suite géométrique que l'on déterminera. En déduire l'expression de $U_n$ en fonction de n.

**16.** a ; b ; c sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique de plus :
$\begin{cases}a + b + c = 19\\ 2a + b - c = 5\end{cases}$ ; Calculer a ; b ; c.

**17.** En utilisant les théorèmes de comparaison, déterminer la limite de la suite U proposée.

$a)\ n \mapsto \dfrac{(-1)^n}{n}$ ; b) $n \mapsto \dfrac{1}{n^2}$ ; c) $n \mapsto \sqrt{n^4+3}$ ; d) $n \mapsto \dfrac{n^5}{n^2-\pi}$

$e)n \mapsto \sqrt{4n^2+1} - n$ ; f) $n \mapsto 2n + cos\, n^2$ ;

**18.** U est la suite définie sur par $U_n = (\frac{n}{10} - 1)^n$
Quelle conjecture est-on incité à formuler ?
1°) Démontrer que U a pour limite $+\infty$.
2°) Calculer les onze premiers termes de la suite U.

**19.** On donne la suite ($U_n$) définie par :$\begin{cases}U_0 = a\\ U_{n+1} = \frac{9}{6-U_n}\end{cases}$
Déterminer a pour que la suite ($U_n$) soit constante.

**20.** Soit la suite ($U_n$) définie par $U_n = 5^n + 3 - n$

**a)** Calculer les 5 premiers termes de ($U_n$).
**b)** Montrer que $U_n$ n'est pas arithmétique ni géométrique.
**c)** On pose $S_n = U_0 + U_1 + U_2+\ldots+U_n$
Calculer$S_n$en fonction de n(Un est la somme d'une suite géométrique et d'une suite arithmétique).

**21.** ($U_n$) une suite géométrique décroissante telle que :

$$U_0U_3 = 128 et U_0 + U_3 = 36$$

a- Démontrer que tous les termes de cette suite sont strictement positifs. Calculer $U_0 et U_3$.
b- Déterminer la raison q de cette suite.
c- Calculer en fonction de n la somme $S_n$ des n premiers termes de cette suite.
d- En déduire la limite de $S_n$ lorsque n tend vers $+\infty$

**22.** ($U_n$) est une suite arithmétique. Calculer $U_0$ et la raison r, puis $U_n$ sachant que $U_n$ est constante et que :$\begin{cases}U_1 + U_2 + U_3 = -9\\ U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 = 99\end{cases}$

# CHAPITRE 11 Transformations géométriques planes

## Cours

## A - Isométries du plan

### A-1) Définitions et propriétés

On appelle isométrie toute application *(transformation)* de du plan $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ qui conserve les distances,c.-à-d. telle que pour tous points $M$ et $N$ d'images$M'$et $N'$ on a : $MN= M'N'$.

**Exemples et contre-exemples**

**1-** Les translations, les rotations, les symétries centrales, les réflexions sont des isométries

**2-** l'homothétie n'est pas une isométrie que si son rapport est égal à $1 (Id_{\mathcal{P}})$ ou $-1$ *(symétrie centrale).*

**Propriétés**

**1-** Une isométrie est une bijection son application réciproque est aussi une isométrie.

**2-** La composée de deux isométries est aussi une isométrie.

**3-** Toute isométrie conserve :

- l'alignement des points
- le parallélisme des droites
- l'orthogonalité des droites
- la mesure des angles
- le barycenter des points pondérés
- les longueurs
- les aires

**Théorème**

Soient $ABC$ et $A'B'C'$ deux triangles tels que : $AB = A'B'$ ; $BC = B'C'$ ; $AC = A'C'$.

Il existe une isométrie et une seule qui applique $A$ sur $A'$, B sur $B'$ et $C$ sur $C'$.

### A-2) Rappel

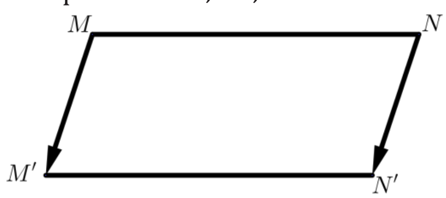
#### 2-1) Translation

**Définition**

Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan $\mathcal{P}$, la translation de vecteur $\vec{u}$ est l'application $t_{\vec{u}}$ de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ qui à tout point $M$ associe le point $M'$ tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.

**a) Propriétés caractéristiques d'une translation**

Soit $f$ une application du plan dans lui-même, $f$ est une translation si est seulement si, pour tous $M$ et $N$ d'images respectives $M'$ ; $N'$ ; on a : $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{M'N'}$ ;




**Démonstration**

Si $f$ est une translation pour tous points $M$, $N$ d'images respectives $M'$ et $N'$ on a : $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{M'N'}$.

**Réciproquement**, on suppose que pour tous points $M$ ; $N$ d'images respectives $M'$et $N'$, on a : $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{M'N'}$, démontrons que $f$ est une translation.

Soit $A$ un point et $A'$son image par $f$.

Pour tout point $M$ du plan on a : $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{A'M'}$donc : $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AA'}$et$f$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$.

**b) Composée de deux translations**

**Propriété : soient** $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs, la composée $t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}}$ est une translation de vecteur $\vec{u} + \vec{v}$.

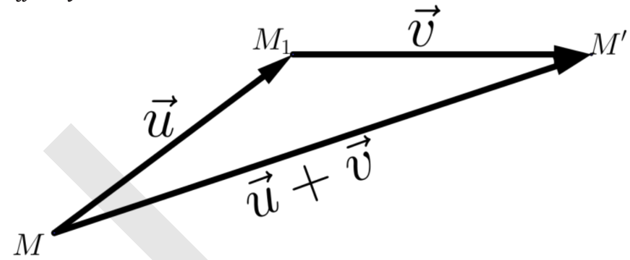
**Démonstration**

Soit $M$ un point du plan, $M_1$son image par $t_{\vec{u}}$ et $M'$ ; l'image de $M_1$ par $t_{\vec{v}}$ .

On a : $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{M_1N} = \vec{u} + \vec{v}$ .

Ainsi, $t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}}$ est l'application qui à tout point $M$ associe le point $M'$ tel que : $\overrightarrow{MM'} = \vec{u} + \vec{v}$.

$t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}}$ est donc la translation de vecteur $\vec{u} + \vec{v}$.

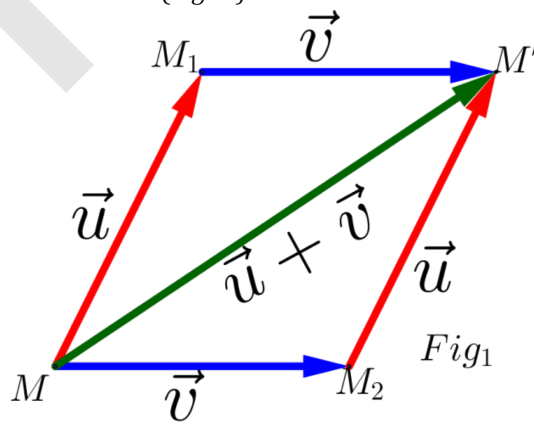



***Remarque1:***

Pour tous vecteurs$\vec{u}$ et $\vec{v}$ on a :$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

donc, $t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}} = t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{u}}$.

On dit que la composée des translations est commutative (*Fig. 1*)




$Fig_1$

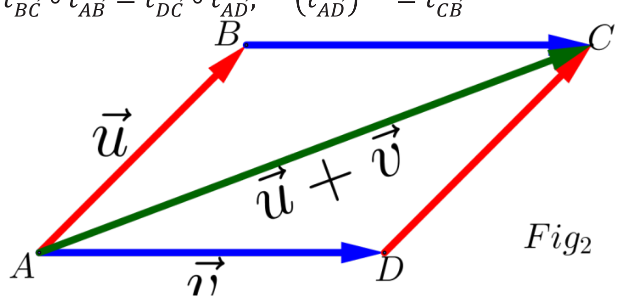
• Si$\vec{u} = -\vec{v}$ on obtient : $t_{\vec{u}} \circ t_{-\vec{u}} = Id$. Cette relation caractérise les bijections réciproques.

• Toute translation est une bijection du plan, la bijection réciproque de $t_{\vec{u}}$ est $t_{-\vec{u}}$.

**Exemple**

Sur la figure 2 : $t_{\overrightarrow{AB}} \circ t_{\overrightarrow{AD}} = t_{\overrightarrow{AC}}$

$t_{\overrightarrow{BC}} \circ t_{\overrightarrow{AB}} = t_{\overrightarrow{DC}} \circ t_{\overrightarrow{AD}}$, $\quad (t_{\overrightarrow{AD}})^{-1} = t_{\overrightarrow{CB}}$




$Fig_2$

### Expression analytique d'une translation

Le plan est muni du repère $(O\,;\,\vec{I},\,\vec{J})$ ; soit tla translation de vecteur$\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ ; $M(x\,;\,y)$ un point du plan et $M'(x'\,;\,y')$ son image par t ; on a ; $\overrightarrow{MM'} = \vec{u} \Rightarrow \begin{cases} x' - x = a \\ y' - y = b \end{cases}$.

L'expression analytique de la translation du vecteur$\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ est telle que :$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$.

### 2.2) Réflexions et rotations

#### a) Réflexion*(Symétries orthogonales)*

**Définition**

Soit $D$ une droite du plan $\mathcal{P}$. La réflexion d'axe $D$ (*Ou symétrie orthogonale par rapport à D)* est l'application $S_D$ du plan $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ qui laisse invariant tout point de $D$ et qui à tout point $M$ n'appartenant pas à $D$ associe le point $M'$ tel que $D$ est la médiatrice du segment $[MM']$.

**Propriétés**

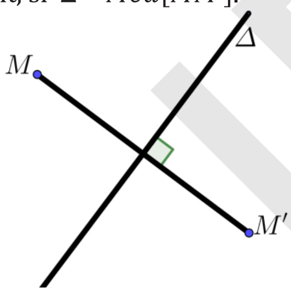
**1-** Toute réflexion $S_D$ dans $\mathcal{P}$ est une bijection son application réciproque est égale à elle-même.

$$S_D \circ S_D = Id_{\mathcal{P}}$$

**2-** Une réflexion conserve les barycentres, la distance, les écarts des angles et transforme les angles orientés en leurs opposés.

**Propriétés caractéristiques d'une symétrie orthogonale**

$M'$ est le symétrique de $M$ par rapport à la droite $(\Delta)$, si et seulement, si $\Delta = Med[MM']$.




### Composée de deux symétries orthogonales d'axe parallèles

**Propriété**

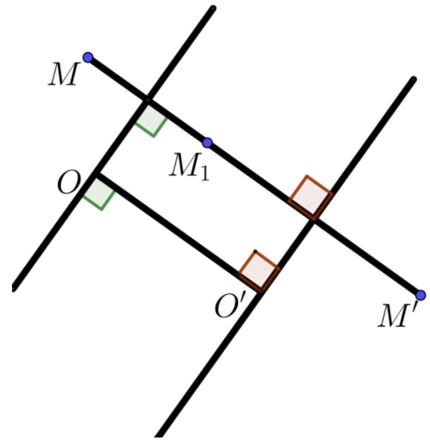
Soit$(\Delta)$ et $(\Delta)$deux droites parallèles, $O$ un point de $(\Delta)$ et $O'$projeté orthogonal de $O$ sur $(\Delta')$ ; la composée $S_2 \circ S_1$ des symétries orthogonales d'axes respectifs $(\Delta)$ et$(\Delta')$ est la translation $t$ de vecteurs $2\overrightarrow{OO'}$.

**Démonstration**

Soit $M$ un point $M_1$ son symétrique par rapport à $(\Delta)$, $M'$ est le symétrique de $M_1$ par rapport à $(\Delta')$.
$H$ et $H'$ sont les projetés orthogonaux de $M$ sur $(\Delta)$et $(\Delta')$ ; $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{M_1M'}$

$$= 2\overrightarrow{HM_1} + 2\overrightarrow{M_1H'} = 2\overrightarrow{HH'} = 2\overrightarrow{OO'}$$

Donc, $S_{(\Delta')} \circ S_{(\Delta)} = t_{2\overrightarrow{OO'}}$



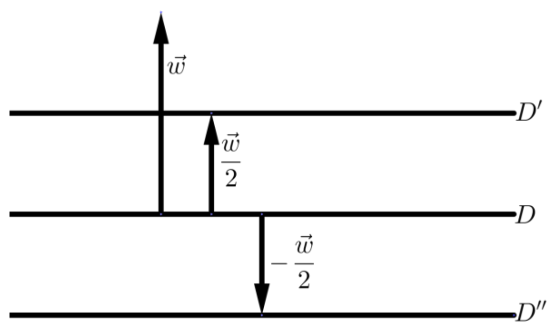

***Remarques 2 :***

- Lorsque les axes $(\Delta)$ et $(\Delta')$ sont confondus on obtient$S_{(\Delta)} \circ S_{(\Delta')} = Id$.
- La transformation réciproque de$S_{(\Delta)}$est $S_{(\Delta)}$.
- Les transformations$S_{(\Delta)} \circ S_{(\Delta')}$ et$S_{(\Delta')} \circ S_{(\Delta)}$sont réciproques l'une de l'autre.

### Décomposition d'une translation

Soit $t$ une translation de vecteur $\vec{w}$ et soit $D$ une droite dont la direction est orthogonale à celle de $\vec{w}$. Alors, il existe une unique droite $D'$ telle que $t = S_{D'} \circ S_D$ *( $D'$est l'image de $D$ par la translation de vecteur* $\frac{\vec{w}}{2}$ *).*

Et il existe également une unique droite $D''$ telle que $t = S_D \circ S_{D''}$ *( $D''$est l'image de D par la translation de vecteur* $-\frac{\vec{w}}{2}$ *).*




**Propriété**

Soit une translation $t$de vecteur non nul$\vec{u}$.
Pour toute droite $\Delta$de vecteur normal $\vec{u}$, il existe une droite $\Delta'$ et une seule telle que :$t_{\vec{u}} = S_{\Delta'} \circ S_{\Delta}$.

**Démonstration**

- Existence : soit $\Delta'$ l'image de $\Delta$ par la translation de vecteur $\frac{1}{2}\vec{u}$.

D'après l'étude précédente $\Delta$ vérifie : $t_{\vec{u}} = S_{\Delta'} \circ S_{\Delta}$

- Unicité : soit $\Delta''$ une droite telle que : $t_{\vec{u}} = S_{\Delta''} \circ S_{\Delta}$ ; montrons que $\Delta''$ et $\Delta'$ sont confondues.

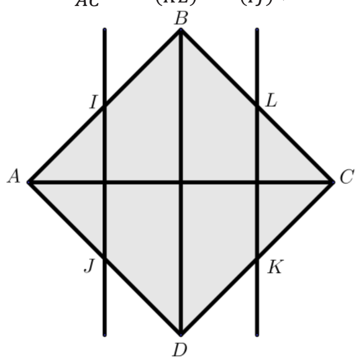
On a ;




Math 6AS.indd 160
26/07/2024 10:43:51

$S_{\Delta''} \circ S_{\Delta} = S_{\Delta'} \circ S_{\Delta} \Rightarrow \left(S_{\Delta''} \circ S_{\Delta}\right) \circ \left(S_{\Delta'} \circ S_{\Delta}\right) = Id$
$\Rightarrow S_{\Delta''} = S_{\Delta} \Rightarrow \Delta'' = \Delta'$
Donc, les droites $(\Delta')$ et $(\Delta'')$ sont confondues.

**Exemples**
Soit $ABCD$ un losange, de centre $O$.
$I$ ; $J$ ; $K$ et $L$ les milieux respectifs des côtés $[AB]$ ; $[AD]$ ; $[CD]$ et $[CB]$.
On a : $t_{\overrightarrow{AO}} = S_{(BD)} \circ S_{(IJ)}$ ;
$t_{\overrightarrow{AO}} = S_{(KL)} \circ S_{(BD)}$ ;
$t_{\overrightarrow{AC}} = S_{(KL)} \circ S_{(IJ)}$ ;



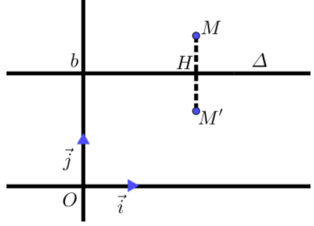

### Expression analytique des symétries orthogonales particulières

Le plan est muni d'un repère $(O\,;\,\vec{I}\,,\,\vec{J})$, soit $S$ une symétrie orthogonale d'axe $(\Delta)$. $M(x\,;\,y)$ un point du plan, $M'(x'\,;\,y')$ son image par $S$. On se propose de déterminer l'expression analytique de $S$ dans trois cas particuliers :

#### 1)$(\Delta)$ parallèle à l'axe des abscisses

Soit $(\Delta)$ la droite d'équation : $y = b$ et $H$ le point d'intersection de la droite $(\Delta)$ avec $(MM')$ ; les points $M$ et $M'$ ont même abscisse et $H$ le milieu de $[MM']$.
Donc, $x = x'$et $y + y' = 2b$.
L'expression analytique de la symétrie orthogonale d'axe $(\Delta)$ : $y = b$

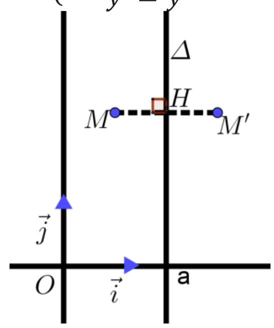
est telle que : $\begin{cases} x' = x \\ y' = -y + 2b \end{cases}$




#### 2)$(\Delta)$ parallèle à l'axe des ordonnées :

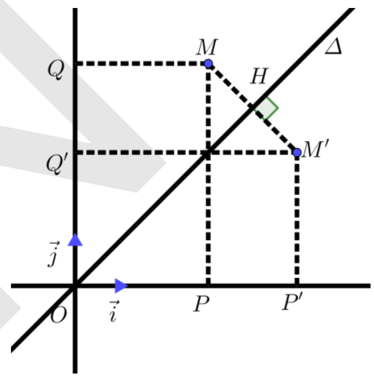
Soit $(\Delta)$ la droite d'équation $x = a$, et $H$ le point d'intersection de $(\Delta)$ et $(MM')$ ; les points $M$ et $M'$ont même ordonnée et $H$ est le milieu de $[MM']$.
Donc,
l'expression analytique de la symétrie orthogonale d'axe $(\Delta)$
d'équation : $x = a$ est telle que :

$\begin{cases} x' = -x + 2a \\ y' = y \end{cases}$




#### 3)$(\Delta)$ est la première bissectrice du repère.

$(\Delta)$ est la droite d'équation $y = x$ ; soient $P$ ; $Q$ ; $P'$ ;$Q'$ les projetés orthogonaux des points $M$ et $M'$ sur les axes du repère.
Les images respectives par s des points $Q'$ et $P'$ sont les points $P'$ et $Q'$. Donc, $x' = y$ et$y' = x$.
L'expression analytique de la symétrie orthogonale autour de la première bissectrice est telle que :
$\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$




#### 4) Composée de deux réflexions d'axes perpendiculaires :

Soit $(\Delta)$ et $(\Delta')$ deux droites perpendiculaires en $I$, et soit $S_{\Delta}$ la réflexion d'axe $(\Delta)$ et $S_{\Delta'}$ la réflexion d'axe $(\Delta')$. Cherchons à déterminer $S_{\Delta'} \circ S_{\Delta}$ ;
$M : S_{\Delta} \longmapsto M'$, $\quad S_{\Delta'} : M' \longmapsto M''$,

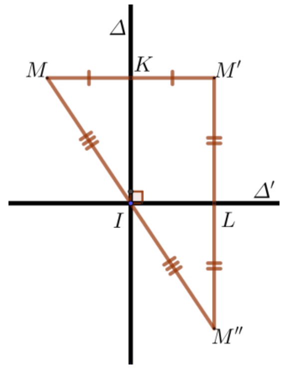
$M \vdash S_{\Delta'} \circ S_{\Delta} \longrightarrow M''$

$$S_{\Delta}(M) = M' \Rightarrow \overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{KM'},$$

$$S_{\Delta'}(M') = M'' \Rightarrow \overrightarrow{M'M''} = 2\overrightarrow{M'L}$$

Donc ; $MM'' = 2\overrightarrow{KL}$.

Comme $(MM') \perp (M'M'') \Rightarrow ABC$ est rectangle en $M'$ et $I = M * M''$ (*propriété des milieux*).
Donc ;$S_{\Delta'} \circ S_{\Delta}(M) = M'' /\ I = M * M''$.
Donc, la composée de deux réflexions d'axes perpendiculaires est une symétrie centrale de centre $I$, point d'intersection des deux droites.




### 2.3) Rotations

### Composée de deux réflexions d'axes sécants

**Propriété**

Soient $(\Delta)$ et $(\Delta')$ deux droites sécantes en un point $O$ de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$et $\vec{v}$. La composée $S_{\Delta'} \circ S_{\Delta}$ des symétries orthogonales d'axes respectifs $(\Delta)$ et $(\Delta')$ est la rotation de centre $O$ et d'angle $2(\widehat{\vec{u};\ \vec{v}})$.

**Démonstration**

Le point $O$ est invariant par $S_{\Delta'} \circ S_{\Delta}$ ,

Soit $M$ un point distinct de $O$. $M_1$ son symétrique par rapport à $(\Delta')$.

Démontrons que :

$$\forall M \neq O;\ \begin{cases} OM = OM' \\ \left(\widehat{\overrightarrow{OM};\ \overrightarrow{OM'}}\right) = 2\left(\widehat{\vec{u};\ \vec{u'}}\right) \end{cases}$$

On a : $OM = OM_1$ et $OM_1 = OM'$ ; donc $OM = OM'$.

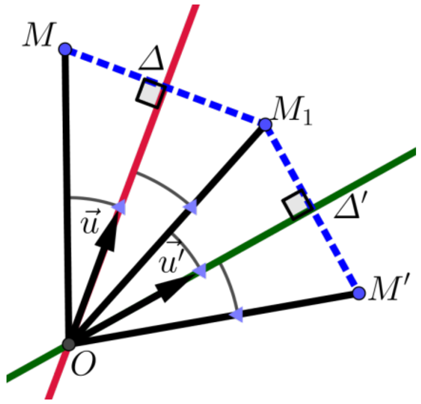
$$\left(\widehat{\overrightarrow{OM};\ \overrightarrow{OM'}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{OM};\ \overrightarrow{OM_1}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{OM_1};\ \overrightarrow{OM'}}\right)$$

$$= 2\left(\widehat{\vec{u};\ \overrightarrow{OM_1}}\right) + 2\left(\widehat{\overrightarrow{OM_1};\ \vec{u'}}\right)$$

$$= 2\left(\widehat{\vec{u};\ \vec{u'}}\right) = 2(D_1, D_2)[\mathbf{2\pi}]$$

$$\Longrightarrow S_{\Delta'} \circ S_{\Delta}(O) = S_{\Delta'}(S_{\Delta}(O)) = S_{\Delta'}(O) = O$$

$$\Longrightarrow S_{\Delta'} \circ S_{\Delta} = r_{(O;\ 2(\Delta;\ \Delta'))}$$




***Remarque 3 :***

$S_{\Delta'} \circ S_{\Delta}$est la rotation de centre $O$ et d'angle $2\left(\widehat{\vec{u};\ \vec{u'}}\right)$.

● Les transformations $S_{\Delta'} \circ S_{\Delta}$ et $S_{\Delta} \circ S_{\Delta'}$ sont donc réciproques l'une de l'autre.

● Si $(\Delta)$ et $(\Delta')$ sont perpendiculaires $2\left(\widehat{\vec{u};\ \vec{u'}}\right) = \pi$ et $S_{\Delta'} \circ S_{\Delta}$est la symétrie de centre $O$.

● On déduit de la décomposition d'une rotation que les rotations conservent les distances et les angles orientés.

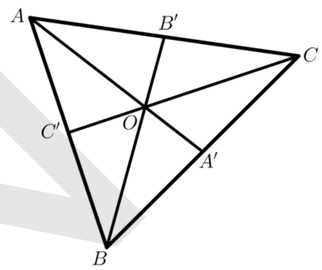
**Exemple**

$ABC$ est un triangle équilatéral de sens direct et de centre $O$ ; soient $A'$ ; $B'$ ;$C'$ les milieux respectifs des côtés $[BC]$ ; $[CA]$ ; $[AB]$.On a :

$S_{(AB)} \circ S_{(AC)} = r_{\left(A;\ -\frac{2\pi}{3}\right)}$, $S_{(CB)} \circ S_{(CC')} = r_{\left(C;\ \frac{\pi}{3}\right)}$

$S_{(CC')} \circ S_{(AA')} = S_{(BB')} \circ S_{(CC')} = r_{\left(O;\ \frac{2\pi}{3}\right)}$,

$S_{(BC)} \circ S_{(BB')} = r_{\left(B;\ \frac{-\pi}{3}\right)}$




### b- Rotation

**Définition**

Soit $\Omega$ un point du plan et soit $\theta$ un réel. La rotation de centre $\Omega$ et d'angle $\theta$ est une application de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ qui laisse invariant le point $\Omega$ et qui à tout point $M$ distinct de $\Omega$ associe le point $M'$ tel que :

$$\begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ \text{et} \\ \left(\widehat{\overrightarrow{\Omega M};\ \overrightarrow{\Omega M'}} = \theta\ [2\pi]\right) \end{cases}$$

**Propriétés**

**1-** Toute rotation $r$ de centre $\Omega$ et d'angle $\theta$ est une bijection et son application réciproque $r^{-1}$ est une rotation de centre $\Omega$ et d'angle $-\theta$.

**2-** Une rotation d'angle $0\ [2\pi]$ est l'identité du plan $Id_{\mathcal{P}}$.

**3-** Une rotation d'angle non nul admet un unique point invariant *(son centre)*.

**4-** Une rotation d'angle $\pi$ et de centre $\Omega$ est une symétrie centrale de centre $\Omega$.

**5-** Une rotation conserve le barycentre, la distance et les angles orientés.

**6-** L'image d'une droite $D$ par une rotation d'angle $\theta$ est une droite qui fait avec $D$ l'angle $\theta$.

**Propriétés caractéristiques**

Soit $f$ une application du plan dans lui-même et $\alpha$un angle non nul.

$f$ est une rotation si et seulement si, pour tous points $M$ et $N$ d'images respectives $M'$ et $N'$

On a : $MN = M'N'$et$\left(\widehat{\overrightarrow{MN};\ \overrightarrow{M'N'}}\right) = \alpha$.

**Démonstration guidée**

On suppose que $f$ est une rotation d'angle $\alpha$. Démontrons que pour tous points $M$ ; $N$ d'images respectives $M'$ et$N'$.

On a :$\left(\widehat{\overrightarrow{MN}; \overrightarrow{M'N'}}\right) = \hat{\alpha}$ .Soit $O$ le centre de la rotation $f$ ;

● Vérifier que ;

$$\left(\widehat{\overrightarrow{MN}; \overrightarrow{M'N'}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{MN}; \overrightarrow{OM}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{OM}; \overrightarrow{OM'}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{OM'}; \overrightarrow{M'N'}}\right)$$

● Justifier que :$\left(\widehat{\overrightarrow{MN}; \overrightarrow{OM}}\right)$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{OM'}; \overrightarrow{M'N'}}\right)$sont opposés.

(*On pourra utiliser la conservation des angles par une rotation*). Conclure

Réciproquement, On suppose que $f$ est une application telle que pour tous points $M$ et $N$ d'images respectives $M'$ et $N'$ on a : $MN = M'N'$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{MN}; \overrightarrow{M'N'}}\right) = \hat{\alpha}$;

● Démontrons que $f$est une rotation d'angle $\alpha$.

● Démontrons maintenant que $f$ admet un point invariant. Soit $M$ un point et $M'$ son image par$f$ . O le point tel que le triangle $OMM'$ soit isocèle en $O$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{OM}; \overrightarrow{OM'}}\right) = \alpha$. Soit $O'$ l'image de $O$ par .

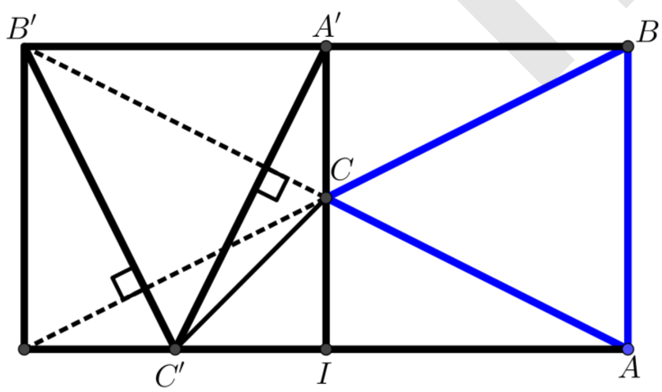
● Démontrons que $O'M' = OM$'et$\left(\widehat{\overrightarrow{O'M'}; \overrightarrow{OM'}}\right) = 0$

(*on pourra introduire le vecteur $\overrightarrow{OM}$ à l'aide de la relation de Chasles sur les angles orientés*).

**Exemple**

Sur la figure ci-contre les images des points$A$ ; $B$ et $C$ par la rotation $r_{\left(I\,;\,\frac{\pi}{2}\right)}$ sont respectivement $A'$; $B'$ et $C'$, si $\hat{\gamma}$est l'angle orienté de mesure $\frac{\pi}{2}$. On a donc ;

$$\left(\widehat{\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{A'B'}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{B'C'}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CA'}}\right) = \hat{\gamma}$$




### A-3) Exemples de composées d'isométries

**a)** Composition de deux rotations $r_1$ et $r_2$de même centre $O$ et d'angles$\hat{\alpha}_1$ et$\hat{\alpha}_2$ est une rotation$r_3$ de centre $O$ et d'angle orienté $\hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_2$.

$$r_{1(O\,;\,\hat{\alpha}_1)} \circ r_{2(O\,;\,\hat{\alpha}_2)} = r_{1(O\,;\,\hat{\alpha}_1+\hat{\alpha}_2{}_1)}$$

**b) Composition d'une rotation et d'une translation**

● La composée d'une rotation $r$ d'angle orienté non nul$\hat{\alpha}$ et d'une translation est une rotation $r'$ d'angle orienté$\hat{\alpha}$.

**c) Composée de deux rotations de centres différents (distincts)**

● La composée de deux rotations $r$ et $r'$ de centres distincts et d'angles respectifs $\hat{\alpha}$ et $\widehat{\alpha'}$est :

▶ Une rotation d'angle $\hat{\alpha} + \widehat{\alpha'}$si $\hat{\alpha} + \widehat{\alpha'} \neq \hat{0}$ ;

▶ Une translation si $\hat{\alpha} + \widehat{\alpha'} = \hat{0}$ ;

Soit les rotations $r_1$et $r_2$, avec$r_{1(O_1\,;\,\hat{\alpha}_1)}$ et $r_{2(O_2\,;\,\hat{\alpha}_2)}$ tels que $\hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_2 \neq 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

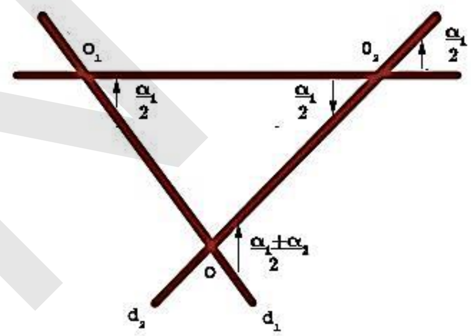
$r_2 \circ r_1$ est la rotation de centre $O$ : point d'intersection des droits $d_1$ et $d_2$ et d'angle $\hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_2$.

**Démonstration**

Soit $\Delta$ l'axe $(O_1O_2)$.

$$r_1 = S_\Delta \circ S_{d_1}, \qquad r_2 = S_{d_2} \circ S_\Delta$$

$$r_2 \circ r_1 = \left(S_{d_2} \circ S_\Delta\right) \circ \left(S_\Delta \circ S_{d_1}\right) = \left(S_{d_2} \circ S_{d_1}\right) = r_{(O;\,\hat{\alpha}_1+\hat{\alpha}_2)}$$




**d) Décomposition d'une rotation**

▶Soit $r$ une rotation de centre $K$ et d'angle $\hat{\alpha}$ ; $O$ un point distinct de $K$. Il existe deux translations $t_1$ et $t_2$ et une rotation $r'$ de centre $O$ et d'angle$\hat{\alpha}$ telles que :

$r = t_1 \circ r'$, $r = r' \circ t_2$

### B-2 ) Homothétie

**Définition**

Soit $\Omega$ un point du plan $\mathcal{P}$ et soit $k$ un réel non nul. L'homothétie de centre $\Omega$ et de rapport $k$ est l'application $h$ de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ qui à tout point $M$ associe le point $M'$ tel que $\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$

## B-3) Exemples de composées de deux homothetiess

**a) Composition de deux homotheties de même centre**

La composée de deux homothéties de même centre $\Omega$ et de rapport respectifs $k_1$ et $k_2$ est une homothétie de centre $\Omega$ et dont le rapport est égal au produit $k_1 \times k_2$ des deux rapports.

**Remarque 3 :**

Dans ce cas, $h_1 \circ h_2 = h_2 \circ h_1$

### b) Composition de deux homothéties de centres distincts

Dans ce cas, soient $O_1$ et $O_2$ deux points distincts, soient $k_1$ et $k_2$ deux nombres réels non nuls, soient $h_1$ et $h_2$ deux homothéties, $O_1$ et $O_2$ leurs centres respectifs et $k_1$ et $k_2$ leurs rapports respectifs.

Posons $f = h_1 \circ h_2$ et $g = h_2 \circ h_1$.

● Si $k_1k_2 \neq 1$, alors $f$ et $g$ sont deux homothéties de rapport $k_1k_2$ et dont les centres respectifs $\Omega_1$ et $\Omega_2$ appartiennent à la droite $(O_1O_2)$.

$$\Omega_1 = bar\begin{array}{|c|c|}\hline O_1 & O_2 \\ \hline 1-k_1 & k_1-k_1k_2 \\ \hline\end{array}$$

$$\text{et } \Omega_2 = bar\begin{array}{|c|c|}\hline O_1 & O_2 \\ \hline k_2-k_1k_2 & 1-k_2 \\ \hline\end{array}$$

● Si $k_1k_2 = 1$, alors $f$ et $g$ sont deux translations dont les vecteurs $\vec{w}_1$ et $\vec{w}_2$ sont colinéaires à $\overrightarrow{O_1O_2}$.

( $\vec{w}_1 = (k_1 - 1)\overrightarrow{O_1O_2}$ et $\vec{w}_2 = (k_2 - 1)\overrightarrow{O_2O_1}$ ).

**Exercice**

$ABC$ est un triangle, $I$, $J$ et $K$ sont les milieux respectifs de $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$. $G$ est le centre de gravité de $ABC$, $D$ est le symétrique de $B$ par rapport à $C$, le point $E$ est le centre du parallélogramme $AKIJ$, les droites $(AB)$ et $(DJ)$ se coupent en $F$. $h_1$ est l'homothétie de centre $A$ et de rapport2. $h_2$ est l'homothétie de centre $B$ et de rapport$\frac{1}{2}$. $h_3$ est l'homothétie de centre $G$ et de rapport $-\frac{1}{2}$.

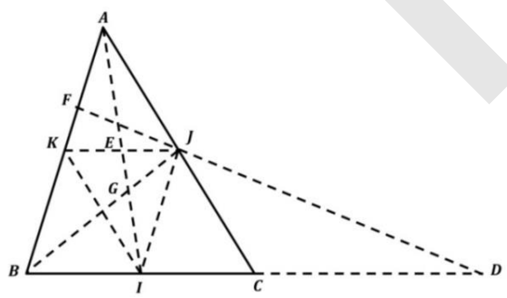
$f_1 = h_2 \circ h_1$, $\quad f_2 = h_3 \circ h_1$, $\quad f_3 = h_2^{-1} \circ h_1$,

**1°/** Faire une figure illustrant les données précédentes.

**2°/**Caractériser $f_1$, $f_2$ et $f_3$.

**Solution**

**1°/ Construction**




**2°/ Caractérisation**

⍰ $f_1 = h_2 \circ h_1$

Le produit des rapports est $\frac{1}{2} \times 2 = 1$, d'où $f_1$ est une translation. Déterminons le vecteur de $f_1$ :

**Méthode 1**

$$\vec{w} = \left(1 - \frac{1}{2}\right)\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

$f_1(A) = h_2 \circ h_1(A) = h_2\big(h_1(A)\big) = h_2(A) = K$

Donc,$f_1(A) = K$, d'où, le vecteur de $f_1$ est $\overrightarrow{AK}$.

⍰ $f_2 = h_3 \circ h_1$

Le produit des rapports est $-\frac{1}{2} \times 2 = -1$ $(\neq 1)$, d'où $f_2$ est une homothétie de rapport $-1$, donc une symétrie centrale. Déterminons le centre de $f_2$ :

**Méthode 2**

$$\Omega = bar\begin{array}{|c|c|}\hline A & G \\ \hline -\frac{1}{2}+1 & 1+\frac{1}{2} \\ \hline\end{array} = bar\begin{array}{|c|c|}\hline A & G \\ \hline \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \hline\end{array}$$

$$= bar\begin{array}{|c|c|}\hline A & G \\ \hline 1 & 3 \\ \hline\end{array} = bar\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline A & A & B & C \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline\end{array}$$

$$= bar\begin{array}{|c|c|c|}\hline A & B & C \\ \hline 2 & 1 & 1 \\ \hline\end{array} = bar\begin{array}{|c|c|}\hline A & I \\ \hline 2 & 2 \\ \hline\end{array} = bar\begin{array}{|c|c|}\hline A & I \\ \hline 1 & 1 \\ \hline\end{array}$$

$\Omega$ est le milieu de $[AI]$, c'est-à-dire le centre du parallélogramme $AKIJ$. Le centre de $f_2$ est donc le point $I$.

**Méthode 2**

$f_2(A) = h_3 \circ h_1(A) = h_3\big(h_1(A)\big) = h_3(A)$

$$G = bar\begin{array}{|c|c|c|}\hline A & B & C \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline\end{array} = bar\begin{array}{|c|c|}\hline A & I \\ \hline 1 & 2 \\ \hline\end{array}$$

$$\Longrightarrow \overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GI} = \vec{0} \Longrightarrow 2\overrightarrow{GI} = -\overrightarrow{GA} \Longrightarrow \overrightarrow{GI} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GA}$$

D'où,$h_3(A) = I \Longrightarrow f_2(A) = I$ . D'où, le centre de $f_2$ est le milieu de $[AI]$donc $E$.

⍰ $f_3 = h_2^{-1} \circ h_1$

Le rapport de $h_2$ étant $\frac{1}{2}$ celui de $h_2^{-1}$ est l'inverse de $\frac{1}{2}$ donc 2. D'où le produit des rapports est $2 \times 2 = 4$ $(\neq 1)$ donc, $f_3$ est une homothétie de rapport4. Déterminons le centre de $f_3$.

**Méthode 1**

$$\Omega = bar\begin{array}{|c|c|}\hline A & B \\ \hline 2-4 & 1-2 \\ \hline\end{array} = bar\begin{array}{|c|c|}\hline A & G \\ \hline -2 & -1 \\ \hline\end{array}$$

$$= bar\begin{array}{|c|c|}\hline A & G \\ \hline 2 & 1 \\ \hline\end{array} \Longrightarrow \overrightarrow{A\Omega} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AF} \Longrightarrow \Omega = F$$

**Méthode 2**

$$\begin{aligned} f_3(K) &= h_2^{-1} \circ h_1(K) = h_2^{-1}\big(h_1(K)\big) \\ &= h_2^{-1}(B) = B \Longrightarrow f_3(K) = B \\ f_3(J) &= h_2^{-1} \circ h_1(J) = h_2^{-1}\big(h_1(J)\big) \\ &= h_2^{-1}(C) = C \Longrightarrow f_3(J) = C \end{aligned}$$

Or, $(KB) \cap (JC) = \{F\} \Longrightarrow \Omega = F$.

### Composée d'une translation et d'une homothétie

Soit $t$ une translation de vecteur $\vec{w}$ et soit $h$ un homothétie de centre $O$ et de rapport $k$. On pose : $f = t \circ h$ et $g = h \circ t$.

● Si $k = 1$, alors $h = Id_{\mathcal{P}}$*(Identité du plan $\mathcal{P}$)*, donc : $t \circ h = h \circ t = t$, donc $f = t$.

● Si $\vec{w} = \vec{0}$, alors $t = Id_{\mathcal{P}}$ *(Identité du plan $\mathcal{P}$)*, donc : $t \circ h = h \circ t = h$, donc $f = h$.

● Si $k \neq 1$ et $\vec{w} \neq \vec{0}$, alors $f$ et $g$ sont deux homothéties de rapport $k$ et dont les centres $\Omega_1$ et

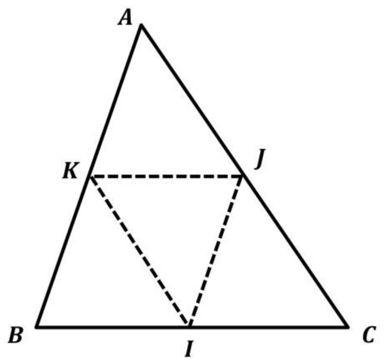
$\Omega_2$ appartiennent à la droite passant par $O$ et de vecteur directeur $\vec{w}$.

$$\left(\overrightarrow{O\Omega_1} = \frac{1}{1-k}\vec{w} \text{ et } \overrightarrow{O\Omega_2} = \frac{k}{1-k}\vec{w}\right)$$

**Exercice**

$ABC$ est un triangle $I$, $J$ et $K$ sont les milieux respectifs de $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$. $t$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{KI}$ et $h$ l'homothétie de centre $A$ et de rapport $\frac{1}{2}$. On pose $f = t \circ h$ et $g = h \circ t$. Caractériser $f$ et $g$.

**Solution**




Comme chacune des transformation $f$ et $g$ est une composée d'une translation de vecteur non nul et d'une homothétie de rapport $k = \frac{1}{2} (\neq 1)$, alors $f$ et $g$ sont deux homothéties de rapport $= \frac{1}{2}$.

Déterminons leurs centres respectifs $\Omega$ et $\Omega'$ :

**Méthode 1**

Le centre $\Omega$ de $f = t \circ h$ est tel que :

$$\overrightarrow{A\Omega} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}}\overrightarrow{KI} = 2\overrightarrow{KI} \Longrightarrow \overrightarrow{A\Omega} = 2\vec{A} = \overrightarrow{AC} \Longrightarrow \mathbf{\Omega = C}$$

Le centre $\Omega'$ de $g = h \circ t$ est tel que :

$$\overrightarrow{A\Omega'} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}\overrightarrow{KI} = \overrightarrow{KI} \Longrightarrow \overrightarrow{A\Omega'} = \overrightarrow{AJ} \Longrightarrow \mathbf{\Omega' = J}$$

**Méthode 2**

$f(B) = t \circ h(B) = t\big(h(B)\big) = t(K) = I \Longrightarrow \boldsymbol{f(B) = I}$

$f(A) = t \circ h(A) = t\big(h(A)\big) = t(A) = J \Longrightarrow \boldsymbol{f(A) = J}$

Or, $(BI) \cap (AJ) = C$, d'où le centre $\Omega$ de $f$ est $C$.

$$g(J) = h \circ t(J) = h\big(t(J)\big) = h(C) = J$$

$g(J) = J$ d'où, le centre $\Omega'$ de $g$ est $J$.

### b) Composition d'une homothétie et d'une translation

● La composée d'une homothétie de rapport $k$ et d'une translation est une homothétie de rapport $k$.

### d) Décomposition d'une homothétie

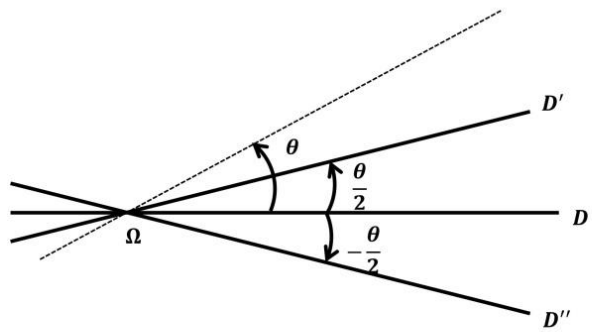
● Soit $h$ une homothétie de centre $\Omega$ et de rapport $k_1 \neq 1$ ; soit $O$ un point distinct de $\Omega$

Il existe deux translations $t_1$ et $t_2$ et une homothétie $h'$ de centre $O$ et de rapport $k$ telles que :

$h = t_1 \circ h'$ $\qquad\qquad$ $h = h' \circ t_2$

### Décomposition d'une rotation

Soit $r$ une rotation de centre $\Omega$ et d'angle $\theta$ et soit $D$ une droite qui passe par $\Omega$. Alors il existe une unique droite $D'$ telle que $r = S_{D'} \circ S_D$ *($D'$ passe par $\Omega$ et vérifie* $(D, D') = \frac{\theta}{2}[\pi]$ *).* Et il existe également une unique droite $D''$ telle que $r = S_D \circ S_{D''}$*( $D'$ passe par $\Omega$ et vérifie* $(D, D'') = -\frac{\theta}{2}[\pi]$ *)*




### Composée de deux rotations de même centre

La composée de deux rotations de même centre et d'angle égal à la somme des deux angles.

**Remarque 4 :**

Dans ce cas, si les rotations sont $r_1$et $r_2$, alors ;$r_1 \circ r_2 = r_2 \circ r_1$

### Composée de deux rotations de centres distincts

Soit $O_1$ et $O_2$ deux points distincts, soit $\theta_1$ et $\theta_2$ deux réels et soit $r_1$ et $r_2$ les rotations de centres respectifs $O_1$ et $O_2$ et d'angles respectifs $\theta_1$ et $\theta_2$.

● Si $\theta_1 + \theta_2 \not\equiv 0\ [2\pi]$, alors $r_1 \circ r_2$ est une rotation d'angle $\theta_1 + \theta_2$.

● Si $\theta_1 + \theta_2 \equiv 0\ [2\pi]$, alors $r_1 \circ r_2$ est une translation.

**Remarque 5 :**

Si $r_1$ et $r_2$ sont deux rotations de centre distincts et d'angles non nuls, alors $r_1 \circ r_2 \neq r_2 \circ r_1$.

**Exercice**

Dans le plan $\mathcal{P}$, on considère un triangle direct $ABC$ et trois triangles équilatéraux directs $CBP$, $ACQ$ et $BAR$ de centres respectifs $I, J$ et $K$. On désigne par $r_I$, $r_J$ et $r_K$ les rotations centres respectifs $I$, $J$ et $K$ et d'angles $\frac{2\pi}{3}$.

On pose $f = r_J \circ r_K$ et $g = r_I \circ r_J \circ r_K = r_I \circ f$.

**1-** Faire une figure illustrant les données précédentes.

**2- a)** Montrer que $f$ est une rotation dont on déterminera l'angle.

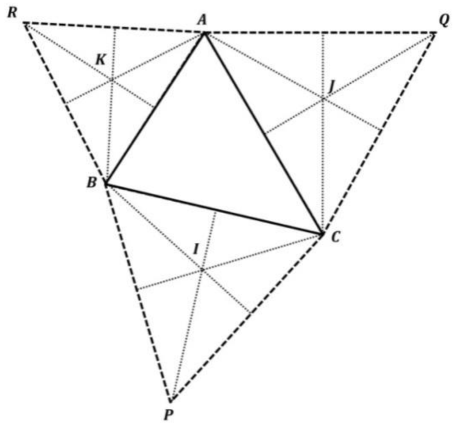
**b)** Montrer que $g = Id_{\mathcal{P}}$ et en déduire le centre de $f$.

**3- a)** A l'aide de décompositions convenables de $r_K$ et $r_J$, donner une décomposition de $f$.

**b)** En déduire que le triangle $IJK$ est équilatéral direct.

## Solution

**1- Construction**




**2- a)** $f = r_J \circ r_K$ composée de deux rotations dont la somme des angles est $\frac{2\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} \not\equiv 0\ [2\pi]$, d'où $f$ est une rotation d'angle $\frac{4\pi}{3}$.

b) $g = r_I \circ f$ composée de deux rotations dont la somme des angles est $\frac{2\pi}{3} + \frac{4\pi}{3} = \frac{6\pi}{3} = 2\pi \equiv 0\ [2\pi]$, d'où $g$ est une translation.

$$g(B) = r_I \circ f(B) = r_I \circ r_J \circ r_K(B)$$
$$= r_I\left(r_J\left(r_K(B)\right)\right) = r_I\left(r_J(A)\right) = r_I(C) = B$$

D'où, $g(B) = B$. Donc le vecteur de la translation $g$ est $\overrightarrow{BB} = \vec{0}$. D'où, $\boldsymbol{g = Id_{\mathcal{P}}}$.

On a ;

$$g = r_I \circ f = Id_{\mathcal{P}} \Rightarrow \underbrace{r_I^{-1} \circ r_I}_{=Id_{\mathcal{P}}} \circ f = r_I^{-1} \circ Id_{\mathcal{P}} = r_I^{-1}$$

$\Rightarrow Id_{\mathcal{P}} \circ f = r_I^{-1} \Rightarrow \boldsymbol{f = r_I^{-1}}$

D'où, le centre de $f$ est $I$.

**3- a)** On pose $D = (RJ)$, alors comme $D$ passe par le centre $K$ de $r_K$, il existe une unique droite $D_1$ telle que :

$r_K = S_D \circ S_{D_1}$.

( $D_1$ passe par $K$ et vérifie $(D_1, D) = \frac{\pi}{3}\,[\pi]$ ). Et comme $D$ passe aussi par le centre $J$ de $r_J$, il existe une unique droite $D_2$ telle que $r_J = S_{D_2} \circ S_D$ ( $D_2$ passe par $J$ et vérifie $(D, D_2) = \frac{\pi}{3}\,[\pi]$.

Or, $f = r_J \circ r_K$ d'où, $f = S_{D_2} \circ \underbrace{S_D \circ S_D}_{=Id_{\mathcal{P}}} \circ S_{D_1}$.

D'où, $\boldsymbol{f = S_{D_2} \circ S_{D_1}}$.

**b)** Comme $f = S_{D_2} \circ S_{D_1}$ et comme $f$ est une rotation de centre $I$, les droites $D_1$ et $D_2$ passent donc par $I$. Or, $D_1$ passe par $K$ et $D_2$ par $J$, d'où $D_1 = (KI)$ et $D_2 = (IJ)$.

Or, $(D_1, D) = \frac{\pi}{3}\,[\pi]$ et $(D, D_2) = \frac{\pi}{3}\,[\pi]$ ;

D'où dans le triangle $IJK$, $(\overrightarrow{KI}, \overrightarrow{KJ}) = \frac{\pi}{3}\,[\pi]$ et $(\overrightarrow{JK}, \overrightarrow{JI}) = \frac{\pi}{3}\,[\pi]$. Donc, le troisième angle dans le même sens $(\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{IK}) = \frac{\pi}{3}\,[\pi]$. D'où, le triangle $IJK$ est équilatéral direct.

## Composée d'une translation et d'une rotation

Soient $t$ une translation de vecteur $\vec{w}$ et $r$ une rotation d'angle $\theta$.

- Si $\theta \equiv 0\ [2\pi]$, alors $r = Id_{\mathcal{P}}$.
  Dans ce cas, $r \circ t = t \circ r = t$.
- Si $\vec{w} = \vec{0}$, alors $t = Id_{\mathcal{P}}$. Dans ce cas, $r \circ t = t \circ r = r$
- Si $\theta \not\equiv 0\ [2\pi]$ et $\vec{w} \neq \vec{0}$, alors $f = t \circ r$ et $g = r \circ t$ sont deux rotations de même angle $\theta$, mais, $f \neq g$.

**Exercice**

Dans le plan $\mathcal{P}$, on considère un parallélogramme direct $ABCD$ et trois triangles équilatéraux directs $BAI$, $IAJ$ et $ADK$. $t$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{BA}$ et $r$ est la rotation de centre $A$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

On pose $f = t \circ r$ et $g = r \circ t$.

**1-** Faire une figure illustrant les données précédentes.

**2- a)** Montrer que chacune des transformations $f$ et $g$ est une rotation dont on précisera l'angle.

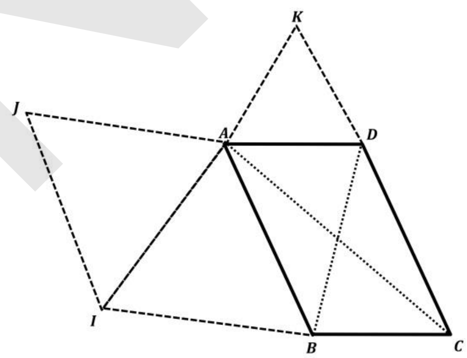
**b)** Déterminer $f(I)$ et en déduire le centre de $f$.

**c)** Déterminer $g(B)$ et en déduire le centre de $g$.

**d)** Déterminer $g(C)$ et en déduire que le triangle $ICK$ est équilatéral direct.

## Solution

**1- Construction**




**2- a)** Comme chacune des transformations $f$ est $g$ est une composée d'une translation et d'une rotation d'angles $\frac{\pi}{3}(\not\equiv 0\ [2\pi])$, a lors $f$ et $g$ sont deux rotations d'angle $\frac{\pi}{3}$.

**b)** $f(I) = t \circ r(I) = t\left(r(I)\right) = t(B) = A \Rightarrow f(I) = A$.

D'où, le centre de $f$ est le point $\Omega$ tel que :

$$\begin{cases} \Omega I = \Omega A \\ \quad et \\ \left(\overrightarrow{\Omega I}, \overrightarrow{\Omega A}\right) = \dfrac{\pi}{3}\,[2\pi] \end{cases}$$

Or, $JIA$ est équilatéral direct d'où ;

$$\begin{cases} JA = JI \\ \quad et \\ \left(\overrightarrow{JI}, \overrightarrow{JA}\right) = \dfrac{\pi}{3}\,[2\pi] \end{cases} \Rightarrow \Omega = J$$

$\Rightarrow J$ est le centre de $f$.

**c)** $g(B) = r \circ t(B) = r\left(t(B)\right) = r(A) = A$

$\Rightarrow g(B) = A$. D'où, le centre de $g$ est le point $\Omega'$ tel que :

$$\begin{cases} \Omega' A = \Omega' B \\ et \\ \left(\overrightarrow{\Omega' A}, \overrightarrow{\Omega' B}\right) = \dfrac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases}$$

Or, $IAB$ est équilatéral direct d'où ;

$$\begin{cases} IA = IB \\ et \\ \left(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB}\right) = \dfrac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases} \Longrightarrow \Omega' = I$$

$\Longrightarrow$ $I$ est le centre de $g$

**d)**$g(C) = r \circ t(C) = r(t(C)) = r(D) = K$

$\Longrightarrow$ $g(C) = K$. Et comme la rotation $g$ de centre $I$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$ transforme $C$ en $K$, on a donc :

$$\begin{cases} IK = IC \\ et \\ \left(\overrightarrow{IK}, \overrightarrow{IC}\right) = \dfrac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases}$$

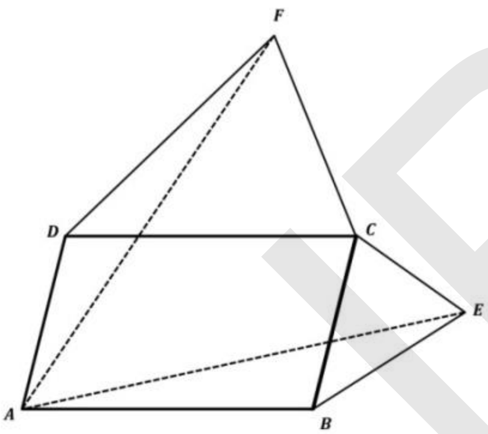
D'où, $CKI$ est un triangle équilatéral direct.

**1-** Si $f$ et $g$ sont deux déplacements, alors $f \circ g$ est un déplacement.

**2-** Si $f$ et $g$ sont deux antidéplacements, alors $f \circ g$ est un déplacement.

**3-** Si $f$ est un déplacement et $g$ est un antidéplacement, alors $f \circ g$ et $f \circ g$ sont deux antidéplacements.

.




**Remarques**

► La rotation vectorielle d'angle $\frac{\pi}{2}$ est appelée quart de tour vectoriel direct.

► La rotation vectorielle d'angle $-\frac{\pi}{2}$ est appelée quart de tour indirect

► La rotation vectorielle d'angle nul est appelée l'identité $Id_{\mathcal{V}}$ de $\mathcal{V}$.

# Applications

## Démonstration des propriétés

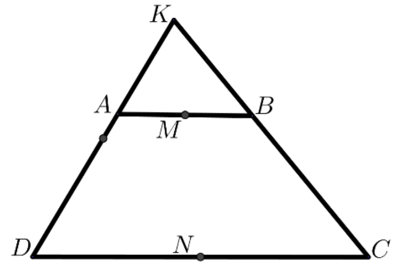
### Exemple 1

On considère un trapèze $ABCD$ tel que $(AB)/\!/(CD)$.
On désigne par $K$ le point d'intersection des droites $(AD)$et $(BC)$.
Montrer que le milieu $M$de $[AB]$, le milieu $N$ de $[CD]$et $K$ sont alignés.

**Hypothèse :**$ABCD$ un trapèze ; $K = (AD) \cap (BC)$ ;$M$ milieu de $[AB]$ et N milieu de $[CD]$.
**Conclusion :** $K$, $M$ et $N$ sont alignés

**Solution**

$A$ ; $B$ ; $C$ et $D$ sont quatre points tels que $(AB)/\!/(DC)$ et $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{DC}$, Il existe une homothétie $h$ et une seule qui transforme $A$ en $D$ et $B$ en $C$. le centre de cette homothétie est$K$, l'image par $h$ du milieu $M$ de $[AB]$ et le milieu $N$ de $[DC]$.




Et puisque un point et son image par $h$ et le centre de $h$ sont alignés, alors, $K$, $M$ et $N$ sont alignés.

### Exemple 3

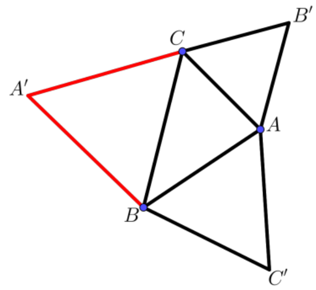
On considère un triangle quelconque $ABC$ sur les côtés $(AB)$ ; $(BC)$ et $(AC)$ extérieurement, on construit les triangles équilatéraux $ABC'$ et $BCA'$ et $CAB'$.
Montrer que : $AA' = BB' = CC'$.

**Hypothèse :** $ABC$ un triangle ; $ABC'$ un triangle équilatéral ; $BCA'$
un triangle équilatéral ; $CAB'$ un triangle équilatéral
**Conclusion** : $AA' = BB' = CC'$

**Solution**

On considère la rotation $r$ de centre $A$ et d'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{AC'}; \overrightarrow{AB}}\right)$.

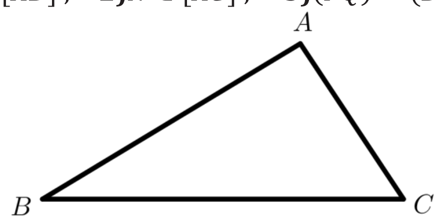
Par $r$ , $B$ est l'image de $C'$, $B'$ est l'image de $C$ ; $[BB']$ est donc l'image de $[CC']$, on en déduit que : $BB' = CC'$.
La rotation $r'$ de centre $B$ et d'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{BC'}; \overrightarrow{BA}}\right)$, permet de montrer que $CC' = AA'$.




**Construction des figures**

### Exemple 4

Figure auxiliaire satisfaisant à toutes les conditions sauf une.
On donne le triangle $ABC$. Construire un carré $MNPQ$ tel que :
**1)**$M \in [AB]$ ; **2)**$N \in [AC]$ ; **3)**$(PQ) = (BC)$



**Solution**

**Recherche d'une démarche ;**

● Construire un carré qui satisfait à 2 des 3 conditions est simple, on peut trouver une infinité de solutions.

Le problème consiste alors, à trouver parmi ces constructions celle ou celles qui satisfait à la 3ème condition.

● Construisons d'abord un carré $EFGH$ qui satisfait au condition ( 1 ) et ( 2) : $E \in [AB]$ et $(GH) = (BC)$.

● Soit $\boldsymbol{f}$ une homothétie de centre $B$ ; $f(E) = E' \in [AB]$ ; $f(GH) = (G'H') = (BC)$.

Toutes les homothéties de centre $B$ transforment $EFGH$ en un carré $E'F'G'H'$ qui satisfait aux conditions (1) et (3).

Il suffit d'en choisir celles qui transforment le carré $EFGH$ en un carré qui satisfait à la 2ème condition.

**Construction**

● Sur la droite $(AB)$ marquer un point $E \neq B$ ; tracer la perpendiculaire à $(BC)$ passant par $E$ ; elle coupe $(BC)$en $(H)$. Sur $(BC)$ placer un point $G$ tel que $GH = EH$ ;

● On désigne par $N$ le point d'intersection de $(BF)$ et $(AC)$ ; Construire le carré $MNPQ$ image de $EFGH$ par l'homothétie de centre $B$ qui applique $F$en$N$.

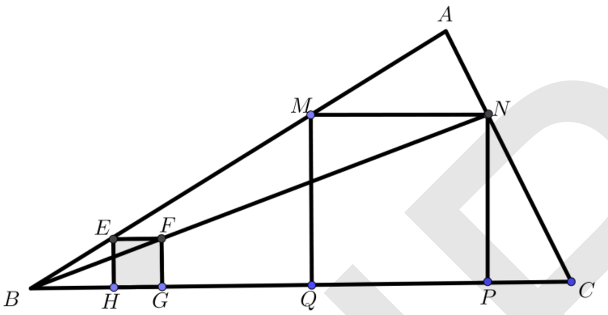



**Image des supports**

**Exemple 2**

On donne deux droites sécantes $\Delta_1$ et $\Delta_2$, $A$ est un point qui n'appartient ni à $\Delta_1$ni à $\Delta_2$.

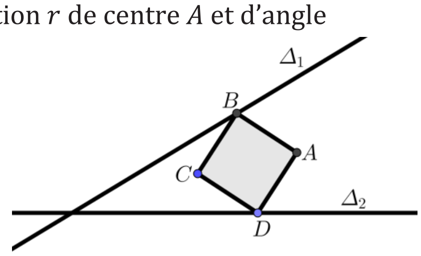
Construire un carré $ABCD$ tel que : $B \in \Delta_1$ ; $D \in \Delta_2$.

**Solution**

**Recherche d'une démarche**

Réalisons une figure solution *(esquisse)*.

Considérons la rotation $r$ de centre $A$ et d'angle $(\widehat{\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AD}})$ et construisons l'image de l'esquisse par cette rotation. Soit $\Delta_1'$ l'image de $\Delta_1$ par $r$ ; on peut remarquer que $D$ est le point d'intersection de $\Delta_2$ et $\Delta_1'$.




En effet $D$ et l'image par $r$ de $B$ point de $\Delta_1$, $D$ appartient donc à l'image de $\Delta_1$.

**Construction**

● Construire l'image $\Delta_1'$ de $\Delta_1$ par la rotation $r_{\left(A\,;\,\frac{\pi}{2}\right)}$.

On désigne par $D$ le point d'intersection de $\Delta_2$et $\Delta_1'$.

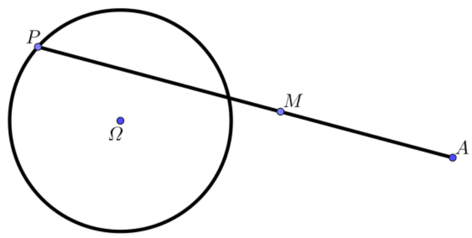
● Construire le carré direct $ABCD$.

**Recherche des lieux géométriques**

**Exemple 1**

On donne le point $A$ et le cercle $\mathcal{C}$ de centre $\Omega$ et de rayon $r$.

$P$ étant un point de$\mathcal{C}$, on désigne par $M$ le milieu de $[AP]$.




Déterminer le lieu géométrique de $M$ lorsque $P$ décrit $\mathcal{C}$.

**Solution**

**Analyse**

● Considérons l'homothétie $h$ de centre$A$de rapport$\frac{1}{2}$.

● Désignons par $\mathcal{C}'$ l'image du cercle $\mathcal{C}$par cette homothétie ; lorsque $P$ décrit $\mathcal{C}$; $M$ décrit$\mathcal{C}'$ l'image de $\mathcal{C}$ par $h$.

**Construction**

Soit $O'$ le milieu de $[\Omega A]$ ; construire le cercle de centre $O'$et de rayon $\frac{r}{2}$ ; c'est l'image de $\mathcal{C}$ par $h$.

**Exemple 2**

On donne le cercle $\mathcal{C}$de centre $O$ et de rayon $r$ et le point $A$ de ce cercle.

$B$ désignant un point de $\mathcal{C}$ distinct de $A$. On construit le carré indirect $ABCM$.

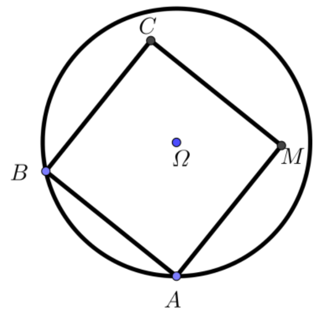
Déterminer le lieu géométrique de $M$ lorsque $B$ décrit le cercle $\mathcal{C}$.

**Solution**

**Analyse :**

Considérons la rotation de centre $A$ et d'angle droit indirect.

Lorsque $B$ décrit $\mathcal{C}$, son image $M$ décrit le cercle $\mathcal{C}'$, image de $\mathcal{C}$ par $r$.




**Construction**

● Construire l'image $O'$ de $O$ par la rotation $r$ de centre $A$ et d'angle droit indirect.

● Construire le cercle $\mathcal{C}'$de centre $O'$ et de rayon$r$, c'est l'image du cercle $\mathcal{C}$ par la translation $r$.

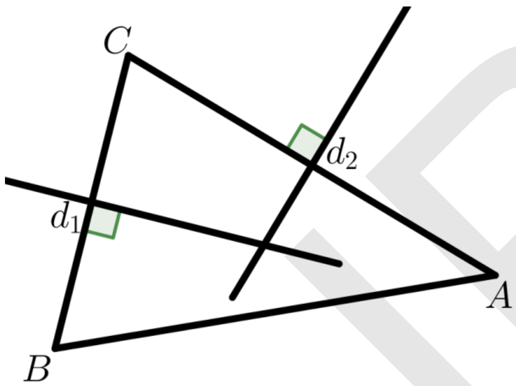
## B.EXERCICES DIVERS

**1.** La rotation r est donnée par son centre O et un point A et son image A'.
Soit B un point de C $_{(O\,;\,OA)}$ et C un point de (OA). Construire les images B' et C' des points B et C, Justifier.

**2.** On donne les points A et B . construire les centres des rotations $r_1$ et $r_2$ appliquant A sur B.
Et d'angles respectifs $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{2}$.

**3.** On donne les droites parallèles (d) et (d') et un point O. Soit r la rotation de centre O et d'angle orienté $\frac{\pi}{2}$.
Construire un point M de (d) dont l'image par la rotation r appartient à la droite (d').

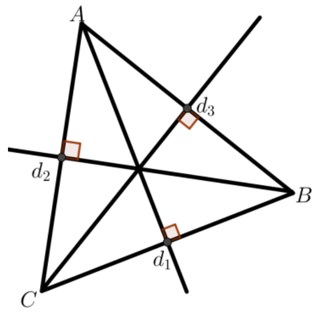
**4.** Soit le triangle ABC, On appelle $(d_1)$ la médiatrice de [BC] et $(d_2)$ la médiatrice de [AC].
Soit $S_1$ la symétrie orthogonale d'axe $(d_1)$ ; $S_2$ celle d'axe $(d_2)$.
1) Construire l'image A'B'C' du triangle ABC par $S_2 o S_1$.
2) Démontrer que les points A ; A' ; B ; B' ; C ; appartiennent à un même cercle.




3) Quelle est la nature du triangle ABC pour que $S_2 o S_1$ soit une symétrie centrale.

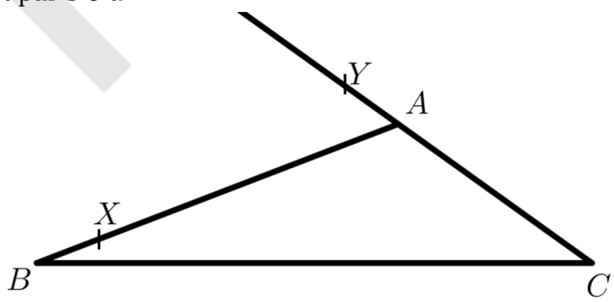
**5.** ABCD est un quadrilatère quelconque. Soient $S_S$ ; $S_B$ ; $S_C$ les symétries centrales de centres respectifs A ; B et C.
Déterminer l'image du sommet D par $S_A o S_B$ o $S_C$

**6.** ABC est un triangle équilatéral, $(d_1)$ ; $(d_2)$ et $(d_3)$ les médiatrices respectives des côtés [BC] ; [CA] et [AB] soient $S_1$ ; $S_2$ et $S_3$ les symétries orthogonales d'axes respectifs $(d_1)$ ; $(d_2)$ et $(d_3)$.
Démontrer que : $S_1 o S_2$ o $S_3$ est une symétrie orthogonale, préciser son axe.




**7.** ABC est un triangle rectangle en A. A' ; B' et C' sont les milieux respectifs des côtés BC] ; [CA] et [AB].
Trouver une translation t telle que : $S_{[A'C']} o S_A$= t o $S_{[A'B']}$.
ABC est un triangle rectangle en A. A' ; B' et C' sont les milieux respectifs des côtés BC] ; [CA] et [AB].
Trouver une translation t telle que : $S_{[A'C']} o S_A$= t o $S_{[A'B']}$.

**8.** ABC est un triangle quelconque.
X un point de [AB], sur la demi-droite [CA), on marque le point Y tel que CY =AX.
Déterminer une translation t, une symétrie orthogonale S et une rotation r telle que : l'image de [AX] par rot et par S o t soit [YC].
Construire ensuite l'image du triangle ABC par r o t et par S o t.



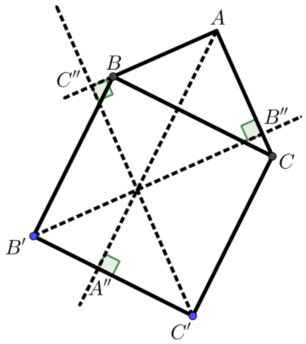

**9.** $(L_1)$ et $(L_2)$ sont deux droites sécantes, en B non perpendiculaires. A est un point de $(L_1)$ et (D un point de $(L_2)$.
Tous deux distincts de B. la perpendiculaires à $(L_2)$ passant par A coupe $(L_2)$ en C ; la, perpendiculaire à $(L_1)$ passant par D coupe $(L_1)$ en E.
1) Démontrer que les triangles ABC et DBE sont semblables.
Soit $f$ la similitude qui applique A sur D ; B en B et C en E.
2) Soit ( Δ ) la bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$ . A' et C' les symétriques respectifs de A et C par rapport à (Δ ).
Démontrer qu'il existe une homothétie de centre B qui applique A' sur D. Soit h cette homothétie.
3) $S_\Delta$ désigne la symétrie orthogonale d'axe (Δ).

Démontrer que h o $S_{\Delta}$ = ***f***.

M étant un point quelconque du plan, construire l'image de M par S.

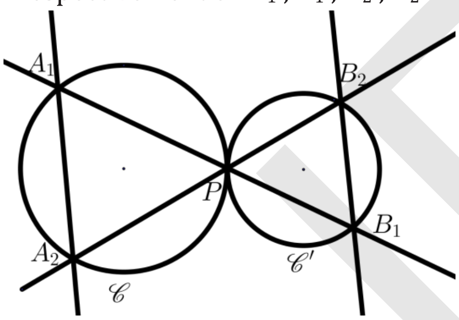
4) Construire l'image par ***f*** du triangle ABE.

**10.** ABC est un triangle quelconque, sur le côté [BC] et extérieurement on construit un rectangle AB'C'C. On désigne par B'' ; C'' et A'' les projetés orthogonaux de B' sur [AC] de C' sur [AB] et de A sur [B'C']. Montrer que les droites (B'B'') ; (C'C'') et (AA'') sont concourantes.




**11.** Démontrer que les symétriques de l'orthocentre d'un triangle ABC par rapport aux milieux des côtés sont sur le cercle circonscrit à ce triangle.

**12.** On considère deux cercles C et C ' tangents en P. Par P on trace deux droites ($d_1$) et ($d_2$) qui recoupent C et C ' respectivement en $A_1$ ; $B_1$ ; $A_2$ ; $B_2$.




Démontrer que les droites ($A_1A_2$) et ($B_1B_2$) sont parallèles.

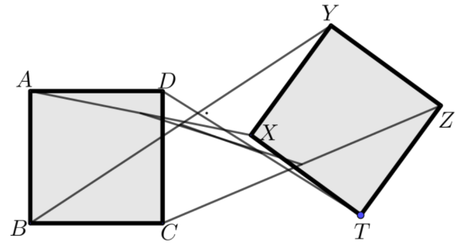
**13.** Les points A ; A ; B ; C ; A' et B' sont tels que OAB est un triangle équilatéral direct.

OA'B' est un triangle équilatéral direct, OA = OA' et OBCA' est un parallélogramme.

Démontrer que ACB' est équilatéral.

**14.** ABCD et XYZT sont deux carrés superposables; ABCD est direct ; XYZT est indirect.

Démontrer que les milieux de [AX] ; [BY] ; [CZ] et [DT] sont alignés.




**15.** Soit ($d_1$) et ($d_2$) sont deux droites parallèles A est un point de la bande délimitée par ($d_1$) et ($d_2$). Construire un cercle tangent à ($d_1$), à ($d_2$) et passant par A.

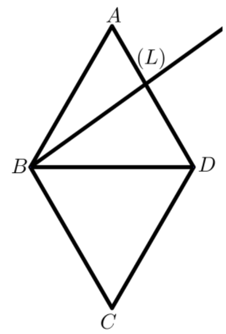
**16.** ($d_1$) et ($d_2$) étant deux droites sécantes, P un point qui n'appartient ni à ($d_1$) ni à ($d_2$).

Construire les points B de ($d_1$) et C de ($d_2$) tels que P soit le milieu de [AB].

**17.** On donne une droite (L) et un point A ;

On considère un losange ABCD de sens direct tel que AB = BD et B∈ (L).

Quel est le lieu géométrique du point C lorsque B décrit (L).

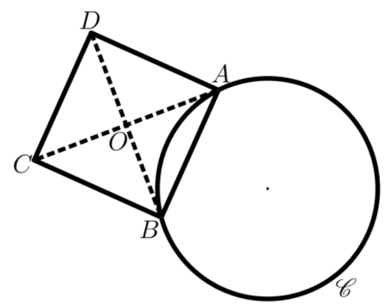



**18.** On donne le cercle C et un point A de C .

B désignant un point de C distinct de A.

On construit le carré ABCD de centre O.

Quel est le lieu géométrique du centre O du carré lorsque B décrit le cercle C .




**19.** A l'extérieur d'un quadrilatère convexe direct ABCD, on construit les triangles équilatéraux $AI_1B$ ; BI C ; $CI_3D$ et $DI_4A$. $r_1$, $r_2$, $r_3$ et $r_4$ sont les rotations de centre $I_1$, $I_2$, $I_3$ et $I_4$ d'angle $\frac{-\pi}{3}$ (l'orientation étant celle de la figure).

a- Préciser le centre et l'angle de la rotation : R= $r_4$ o $r_3$o$r_2$o$r_1$.

b- Montrer que $r_2$ o $r_1$ est une rotation, soit P son centre. Montrer que $r_4$ o $r_3$ est rotation, soit Q son centre.

c- Déduisez-en que le triangle APQ est un triangle équilatéral.

# CHAPITRE 12

# Dénombrement

## Cours

### I. Langage des ensembles :

#### 1) Notion d'ensemble :

**Définition :**

Un ensemble est un groupe d'objets ou d'éléments bien définis et deux-à-deux distincts.

**Exemple 1 :**

- L'ensemble des chiffres décimaux,
- L'ensemble des lettres alphabétiques latines,
- L'ensemble des nombres premiers,
- L'ensemble des nombres pairs, etc...

▶L'intersection de deux ensembles c'est l'ensemble des éléments communs entre eux.

▶La réunion de deux ensembles c'est l'ensemble de tous les éléments des deux ensembles sans répétition.

▶Le complémentaire d'un ensemble par rapport à un autre c'est l'ensemble des éléments du second n'appartenant pas au premier.

#### 2) Cardinal d'un ensemble fini :

**Définition :**

Le cardinal d'un ensemble fini $E$ noté $card\ (E)$ est le nombre des éléments de cet ensemble.

- Le cardinal de l'ensemble *(fini)* vide est :

$$card\ (\phi) = 0$$

- Si $E$ est un ensemble vide *(noté $\phi$)*; cet ensemble n'a aucun élément., alors, $card\ (E) = 0$ ;

$card\ (E) = 0 \Leftrightarrow E = \phi$.

- Le cardinal d'un singleton est1.
- Le cardinal d'un ensemble contenant exactement deux éléments est 2.

#### 3) Vocabulaire et Propriétés :

Si $A$ est une partie de $\Omega$ *(un sous ensemble de $\Omega$)*, on écrit $A \subset \Omega$ : *(A inclus dans $\Omega$)*

Alors ; $0 \leq card\ (A) \leq card\ (\Omega)$

$\phi$ est la partie vide de $\Omega$ et $\Omega$ est la partie pleine de $\Omega$.

Pour toute partie $A$ d'un ensemble non vide $\Omega$, on a ;

$$\frac{card\ (A)}{card\ (\Omega)} \in [0\,;1]$$

Soit $A$ et $B$ deux ensembles finis ;

**1.** $card(A \cup B) = card(A) + card(B) - card(A \cap B)$.

De plus si $A \cap B = \phi$, alors :

$$card\ (A \cup B) = card\ (A) + card\ (B)$$

**2.** $card\ (A - B) = card\ (A) - card\ (A \cap B)$

Et si $B \subset A$, alorscard $(A - B) = card\ (A) - card\ (B)$

**3°/** Si $A$ et $\Omega$ sont deux ensembles finis tels que $A \subset \Omega$, le complémentaire de $A$ par rapport à $\Omega$ est noté $\bar{A} = \Omega - A$, alors ;$card\ (\bar{A}) = card\ (\Omega) - card\ (A)$

$\bar{A} \cap \bar{B} = \overline{A \cup B}$ et $\bar{A} \cup \bar{B} = \overline{A \cap B}$

**Exemple 2 :**

$\Omega = \{0\,;1;2\,;3\}$, $card\ (\Omega) = 4$

$\Omega = \{a_1\,;\ a_2\,;a_3\,;a_4\,;\ldots;\ a_n\}$, $card\ (\Omega) = n$

$\Omega = \{a_0\,;a_1\,;\ a_2\,;a_3\,;a_4\,;\ldots;\ a_n\}$, $card\ (\Omega) = n+1$

$\Omega = \{a_0\,;a_1\,;\ a_2\,;a_3\,;a_4\,;\ldots;\ a_{n-1}\}$, $card\ (\Omega) = n$

L'ensemble$E = \{0; 1; a; b; c; d\}$, $card\ (E) = 6$

**Exemple 3 :**

Soit $E$ l'ensemble des chiffres décimaux :

$E = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

$F = \{0,2,3,5,7\}$, $G = \{0,1,2,3,6\}$

$F \cap G = \{0,2;3\}$, $F \cup G = \{0,1,2,3,5,6,7\}$

$\bar{F} = \{1,4,6,8,9\}$, $\bar{G} = \{4,5,7,8,9\}$,

$\bar{F} \cap \bar{G} = \{4,8;9\}$, $\bar{F} \cup \bar{G} = \{1,4,5,6,7,8,9\}$

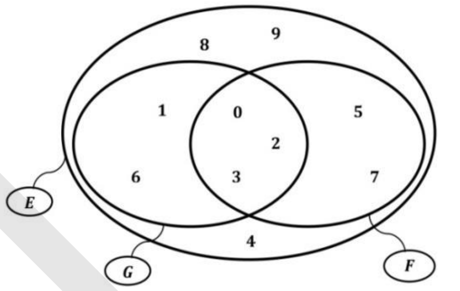
$card\ (E) = 10$, $card\ (F) = 5$, $card\ (G) = 5$,

$card\ (F \cap G) = 3$, $card\ (F \cup G) = 7$

$card\ (\bar{F}) = 5$, $card\ (\bar{G}) = 5$,

$card\ (\bar{F} \cap \bar{G}) = 3$, $card\ (\bar{F} \cup \bar{G}) = 7$

**Diagramme de Venn**




**Exercice 1 :**

On a effectué une étude auprès des lecteurs de trois revues $A, B, C$. Sur 100 personnes interrogées, 51 lisent $A$, 42 lisent $B$ et 38 lisent $C$, 22 lisent $A$ et $B$, 14 lisent $B$ et $C$, et 16 lisent $A$ et $C$, 8 lisent $A, B, C$.

A l'aide d'un diagramme de Venn, calculer le nombre de personnes de personnes qui

ne lisent que $A$ et $B$, $B$ et $C$, $A$ et $C$, ne lisent ni $A$ ni $B$ ni $C$.

**Solution :**

#### 4) Produits cartésiens d'ensembles :

- Soit $A$ et $B$ deux ensembles ; les ensembles $A \times B$ et $B \times A$ désignent les produits cartésiens de $A$ et $B$.

- $A \times B = \{(a;b)/a \in A\ et\ b \in B\}$ ;

- $B \times A = \{(b;a)/b \in B\ et\ a \in A\}$

●Soient $A_1$ ; $A_2$ ; ... $A_n$ n ensembles donnés.

Le produit cartésien de $A_1$ ; $A_2$ ; ...; $A_n$ noté

$A_1 \times A_2 \times \ \ldots \times A_n$ est l'ensemble :

$\{(a_1;\ a_2\,;\ldots;\ a_n)$ où $a_1 \in A_1;\ a_2 \in A_2\,;\ \ldots;\ a_n \in A_n\}$

De plus, si $A_1$ ; $A_2$ ; ... $A_n$ sont finis, alors $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ est fini et on a:

$card(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n) = card(A_1) \times card(A_2) \times \ldots \times card(A_n)$.

- Soit $A$ un ensemble et $n \in \mathbb{N}^*$:

$A^2$ désigne$A \times A$ ; $A^n$ désigne $\underbrace{A \times A \times A \times \ldots \times A}_{n\ \text{facteur}}$

- Soit $A$ et $B$ deux ensembles finis ;

| Il y a | Si, et seulement si |
|---|---|
| Possibilité d'injection de $A$ dans $B$ | $card\ (A) \leq card\ (B)$ |
| Possibilité de surjection de $A$ surs $B$ | $card\ (A) \geq card\ (B)$ |
| Possibilité de bijection de $A$ sur $B$ | $card\ (A) = card\ (B)$ |

## II. Les applications :

### 1) Notion d'application :

**Définition :**

Soit $E$ et $F$ deux ensembles, en associant à chaque élément $x$ de $E$ un seul élément $y$ de $F$, noté$(x)$ , on définit une application$f$ de $E$vers $F$.

$$f : E \longrightarrow F$$
$$x \longmapsto y$$

**Exemple 4 :**

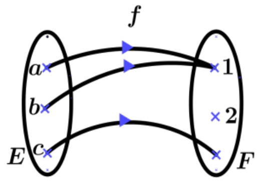
On donne les ensembles :

$E = \{a, b; c\}, \quad F = \{1, 2; 3\}$.

soit f l'application de E dans F :

$f(a) = 1$ ; $f(b) = 1$ ;$f(c) = 3$.

$f$ est non injective dans cet exemple.



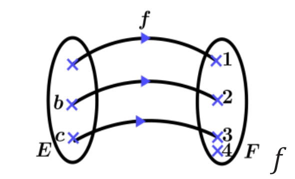

**Définition :**

$f$ est une injection de $E$ dans $F$, si et seulement si :

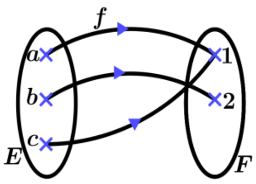
$\forall x_1, x_2 \in E$ ; $x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

**Exemple 5 :**

On donne les applications :




*est non surjective*




*$f$ est surjective*

**Définition :**

$f$est une surjection de $E$ sur $F$, si et seulement si

$$\forall y \in F \ ; \ \exists x \in E : f(x) = y$$

**Définition :**

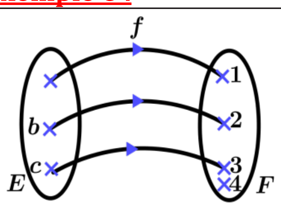
$f$une bijection de $E$ sur $F$, si et seulement si

$f$ est à la fois une injection et une surjection de $E$ sur $F$,

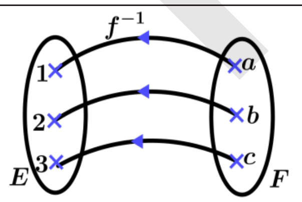
$\Leftrightarrow \forall y \in F$ ; $\exists! \, x \in E : f(x) = y$

De plus, $f$ admet une application réciproque notée $f^{-1}$, par conséquent,$\forall y \in F$ ; $\exists! \, x \in E : f^{-1}(x) = y$

**Exemple 6 :**




$f$ application bijective



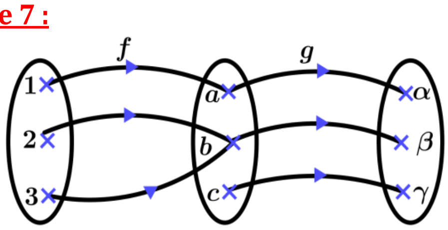

$f^{-1}$ bijection réciproque

### 2) Composée de deux applications :

Si$f$ est une application d'un ensemble $E$ vers un ensemble $F$ et $g$ une application de l'ensemble $F$ vers un ensemble$G$. Alors, $g \; o \, f$ est application de l'ensemble $E$ cers l'ensemble $G$, définie par :

$$\forall x \in E : \ (g \; o \, f)(x) = \ g\big(f(x)\big)$$

**Exemple 7 :**




$(g \; o \, f)(1) = g\big(f(1)\big) = g(a) = \alpha$

$(g \; o \, f)(2) = g\big(f(2)\big) = g(b) = \beta$

$(g \; o \, f)(3) = g\big(f(3)\big) = g(b) = \beta$

### 3) Fonction et application :

Une fonction $f$ d'un ensemble $E$ vers un ensemble $F$, est une application de $E$ vers $F$, si et seulement si, L'ensemble de définition de$f$est $E$.

## III. Permutation : *(Notion de n!avec n ∈ ℕ)*

**Définition :**

Soit $E$ un ensemble fini de cardinal$n$, on appelle permutation de $n$ éléments de $E$ et on la note $n!$ *(et on lit factorielle n)* le nombre naturel défini par :

$n! = n(n-1)(n-2)(n-3) \times \ldots \times 2 \times 1$

**Exemple 8 :**

$7! = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5\,040$,

$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ ;

$4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 2\,4$ ; $\qquad 3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$ ;

$2! = 1 \times 2 = 2$.

**Remarque 1 :**

- Par convention, $0! = 1$ et $1! = 1$
- $n! = n(n-1)!$

**Exemple 9 :**

Avec combien de façons peut-on garer 5 voitures numérotées de 1 à 5 dans 5 garages numérotés de $A$ à $E$ ?

**Réponse :**

Le nombre de façons est égal au nombre de permutations ;$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$.

**Formules :**

- $\forall n \in \mathbb{N}^* : \ \prod_{k=1}^{k=n} k = n!$
- $\forall n \in \mathbb{N} : \ (n+1)n! = (n+1)!$,

$$\frac{(n+1)!}{n!} = n + 1, \qquad \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}$$

**Exemple 10 :**

$5! \ = \ 5 \times 4! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ ; $4 \times 3! = 4!$

**Remarque 2 :**

Soit $p$ et $q$ deux entiers naturels, si, $p \leq q$ , alors $\frac{q!}{p!}$ est un entier naturel.

**Exemple 11 :**

$$\frac{5!}{3!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{3!} = 5 \times 4 = 20 \ ;$$

## IV. Listes :

**Exemple 12 :**

Soit $\Omega = \{1\,;2\,;3\,;4\,;5\}$ un ensemble; on a $(1;\ 2;\ 3)$ est une liste dans $\Omega$ à 3 termes, on l'appelle une $3-$liste dans $\Omega$.

$(\,1\,;\ \ 1\,;\ 2\,;\ 3\,)$ est une $4-$liste dans $\Omega$

$(\,1\,;\ \ 2\,;\ 3\,;\ 2\,;\ 1\,;\ 3\,)$ est une $6-$liste dans $\Omega$

$(\,1\,;\ 2\,;\ 1\,;\ 2\,;\ 3\,;\ 3\,;\ 3\,;\ 3\,)$est une $8-$listedans $\Omega$

**Définition :**

● Soit $n$ et $p$ deux entiers naturels non nuls.

Le nombre de $p-$ *liste* dans un ensemble $\Omega$ ayant $n$ éléments est $n^p$

● Soit $A$ et $B$ deux ensembles finis non vides tels que ;

$Card(A) = p\,;card(B) = n$

Le nombre d'applications de $A$ vers $B$ est $n^p$

## V. Arrangement :

### 1) Le nombre arrangements avec répétition :

**Définition**

Soit $E$un ensemble fini de cardinal $n$. On appelle $p-arrangement$ dans $\Omega$, ou nombre d'arrangements avec répétition de $p$ élément pris parmi $n$ $(0 \le p \le n)$toute $p-liste$ dans $\Omega$ à termes distincts deux à deux, c.-à-d.le nombre naturel défini par $n^p$.

**Exemple 13 :**

Soit $\Omega = \{1\,;2\,;3\,;4\,;5\}$

- $(1\,;\ 2\,;\ 3)$ est un $3-$arrangement dans $\Omega$
- $(3\,;\ 2\,;\ 1)$ est un $3-$arrangement dans $\Omega$
- $(1\,;\ 2\,;\ 5\,;\ 4\,;\ 3)$ est un $5-$arrangement dans $\Omega$
- Un $6-$arrangement dans $\Omega$ dans $\Omega$ n'existe pas

### b) Le nombre d'arrangements sans répétition :

**Définition**

Soit $E$un ensemble fini de cardinal $n$. On appelle nombre $p-arrangement$ ou d'arrangements sans répétition de $p$ éléments pris parmi $n$ $(0 \le p \le n)$ le nombre naturel défini par :

$$A_n^p = n(n-1)(n-2) \times \dots \times \big(n-(p-1)\big)$$
$$= n(n-1)(n-2) \times \dots \times (n-p+1)$$

En multipliant et en divisant par $(n-p)!$, on obtient ;

$$\boldsymbol{A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}}$$

- Soit $A$ et $B$ deux ensembles tels que ; $card(A) = p$ ; $card(B) = n$ ; avec $p \le n$.

Le nombre d'injection de $A$ dans $B$ est$A_n^p$.

- Un $n-arrangement$ dans un ensemble $\Omega$ ayant $n$ éléments est appelé une permutation de $\Omega$

**Exemple 14 :**

Soit $\Omega = \{1\,;2\,;3\,;4\,;5\}$ ;

$(1\,;2\,;3\,;4\,;5)$ ; $(2\,;1\,;4\,;3\,;5)$ ; $(1\,;3\,;4\,;5\,;2)$ sont des permutations de $\Omega$.

- Le nombre de permutation d'un ensemble $\Omega$ ayant $n$ éléments est : $A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = n!$
- Soit $A$ et $B$ deux ensembles finis tels que $card\ (A) = card\ (B) = n$.

  Le nombre de bijections de $A$ sur $B$ est $n!$.

**Exemple 15 :**

$$A_4^2 = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4!}{2!} = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2!}$$
$$= 4 \times 3 \Longrightarrow A_4^2 = 12$$
$$A_7^3 = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7!}{4!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4!}{4!}$$
$$= 7 \times 6 \times 5 \Longrightarrow A_7^3 = 210$$

**Propriétés**

$$\boldsymbol{a)} A_n^1 = \frac{n!}{(n-1)!} = \frac{n(n-1)!}{(n-1)!} = n \Longrightarrow A_n^1 = n$$
$$\boldsymbol{b)} A_n^0 = \frac{n!}{(n-0)!} = \frac{n!}{n!} = 1 \Longrightarrow A_n^0 = 1$$
$$\boldsymbol{c)} A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n! \Longrightarrow A_n^n = n!$$
$$\boldsymbol{d)}\ A_n^{n-1} = \frac{n!}{(n-(n-1))!} = \frac{n!}{1!} = \frac{n!}{1} = n!$$
$$\Longrightarrow A_n^{n-1} = n!$$

**Exercice 2 :**

Dans un jeu de 32 cartes, on tire successivement sans remise 4 cartes. Calculer le nombre de cas donnant :

**a)** Les cartes de la même couleur,
**b)** Les cartes contiennent un roi,
**c)** Les cartes de même niveau,
**d)** Les cartes contiennent au moins une dame,
**e)** Les cartes contiennent au plus un valet.

**Solution :**

**a)** Les cartes sont de la même couleur :

$$A_{16}^4 + A_{16}^4 = \frac{16!}{(16-4)!} + \frac{16!}{(16-4)!} = 2 \times \frac{16!}{12!}$$
$$= 2 \times \frac{16 \times 15 \times 14 \times 13 \times 12!}{12!}$$
$$= 2 \times 16 \times 15 \times 14 \times 13 = 87\,360$$

**b)** Les cartes contiennent un roi :

$$A_4^1 \times A_{28}^3 = \frac{4!}{(4-1)!} \times \frac{28!}{(28-3)!} = \frac{4!}{3!} \times \frac{28!}{25!}$$
$$= 4 \times 28 \times 27 \times 26 = 78\,624$$

**c)** Les cartes de même niveau :

$$8A_4^4 = 8 \times \frac{4!}{(4-4)!} = 8 \times \frac{4!}{0!}$$
$$= 8 \times \frac{4!}{1} = 8 \times 4 \times 3 \times 2 = 192$$

**d)** Les cartes contiennent au moins une dame :

$$A_4^1 \times A_{28}^3 + A_4^2 \times A_{28}^2 + A_4^3 \times A_{28}^1 + A_4^4 \times A_{28}^0$$
$$= \frac{4!}{(4-1)!} \times \frac{28!}{(28-3)!} + \frac{4!}{(4-2)!} \times \frac{28!}{(28-2)!}$$
$$+ \frac{4!}{(4-3)!} \times \frac{28!}{(28-1)!}$$
$$+ \frac{4!}{(4-4)!} \times \frac{28!}{(28-0)!}$$
$$= 4 \times 28 \times 27 \times 26 + 4 \times 3 \times 28 \times 27$$
$$+ 4 \times 3 \times 2 \times 28 + 4 \times 3 \times 2 \times 1$$
$$= 78\,624 + 9\,072 + 672 + 24$$
$$= 88\,392$$

**e)** Les cartes contiennent au plus un valet :

$$A_4^1 \times A_{28}^3 + A_4^0 \times A_{28}^4$$
$$= \frac{4!}{(4-1)!} \times \frac{28!}{(28-3)!}$$
$$+ \frac{4!}{(4-0)!} \times \frac{28!}{(28-4)!}$$
$$= 4 \times 28 \times 27 \times 26 + 1 \times 28 \times 27 \times 26 \times 25$$
$$= 78\,624 + 491\,400 = 570\,024$$

**Exercice 3 :**

Dans une classe de 20 élèves (8 filles et 12 garçons), le professeur veut former une équipe de 5 personnes.

**1°/** Aide-le.

**2°/** Déterminer le nombre de cas donnant :

**a)** Le groupe est du même sexe.
**b)** Le groupe contient Ahmed.
**c)** Le groupe contient exactement deux filles.
**d)** Le groupe contient au moins un garçon.

**e)** Le groupe contient Ahmed et Fatma.

**Solution :**

**1°/**Nombre d'équipes de 5 personnes :

$$A_{20}^{5}=\frac{20!}{(20-5)!}=\frac{20!}{15!}$$
$$=\frac{20\times 19\times 18\times 17\times 16\times 15!}{15!}$$
$$=20\times 19\times 18\times 17\times 16$$
$$=1\,860\,480$$

**2°/a)** Le groupe est du même sexe :

$$A_{8}^{5}+A_{12}^{5}=\frac{8!}{(8-5)!}+\frac{12!}{(12-5)!}$$
$$=\frac{8!}{3!}+\frac{12!}{7!}=8\times 7\times 6\times 5\times 4$$
$$+12\times 11\times 10\times 9\times 8$$
$$=6\,720+95\,040=101\,760$$

**b)** Le groupe contient Ahmed.:

$$A_{1}^{1}\times A_{19}^{4}=1\times\frac{19!}{(19-4)!}=19\times 18\times 17\times 16$$
$$=93\,024$$

**c)** Le groupe contient exactement deux filles.

$$A_{8}^{2}\times A_{12}^{3}=\frac{8!}{(8-2)!}\times\frac{12!}{(12-3)!}=\frac{8!}{6!}\times\frac{12!}{9!}$$
$$=8\times 7\times 12\times 11\times 10=73\,920$$

**d)** Le groupe contient au moins un garçon :

$$A_{12}^{1}\times A_{8}^{4}+A_{12}^{2}\times A_{8}^{3}+A_{12}^{3}\times A_{8}^{2}+A_{12}^{4}\times A_{8}^{1}$$
$$+A_{12}^{5}\times A_{8}^{0}$$
$$=\frac{12!}{(12-1)!}\times\frac{8!}{(8-4)!}+\frac{12!}{(12-2)!}\times\frac{8!}{(8-3)!}$$
$$+\frac{12!}{(12-3)!}\times\frac{8!}{(8-2)!}$$
$$+\frac{12!}{(12-4)!}\times\frac{8!}{(8-1)!}$$
$$+\frac{12!}{(12-5)!}\times\frac{8!}{(8-0)!}$$
$$=12\times 8\times 7\times 6\times 5+12\times 11\times 8\times 7\times 6$$
$$+12\times 11\times 10\times 8\times 7$$
$$+12\times 11\times 10\times 9\times 8$$
$$+12\times 11\times 10\times 9\times 8\times 1$$
$$=20\,160+44\,352+73\,920+95\,040+95040$$
$$=328\,512$$

**e)** Le groupe contient Ahmed et Fatma :

$$A_{1}^{1}\times A_{1}^{1}\times A_{18}^{3}=1\times 1\times\frac{18!}{(18-3)!}=1\times 1\times\frac{18!}{15!}$$
$$=18\times 17\times 16=4\,896$$

**Exercice 4 :**

Une urne contient 7 jetons numérotés de 1 à 7. On tire successivement et sans remise 3 jetons de cette urne. Calculer le nombre de tirages possibles.

**Solution :**

Le nombre de tirages possibles est :

$$A_{7}^{3}=\frac{7!}{(7-3)!}=\frac{7!}{4!}=\frac{7\times 6\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1}{4\times 3\times 2\times 1}$$
$$=7\times 6\times 5=210$$

**Remarque 2 :**

Le nombre de permutations de $n$ éléments est :

$$A_{n}^{n}=\frac{n!}{(n-n)!}=\frac{n!}{0!}=\frac{n!}{1}=n!$$

**Exercice 5 :**

Dans une salle il y a 10 chaises, 10 personnes entrent dans cette salle pour s'y installer. Calculer le nombre de dispositions possibles.

**Solution :**

Le nombre de dispositions possibles est : $A_{10}^{10}=10!=10\times 9\times 8\times 7\times\ldots\times 2\times 1=3\,628\,800$

## VI. Combinaison :

**Définition**

Soit $\Omega$ un ensemble fini.

On appelle une combinaison dans $\Omega$ toute partie *(ou sous-ensemble)*de $\Omega$.

**Définition**

Soit $E$ un ensemble de cardinal $n$, on appelle combinaison de $p$ $(0\leq p\leq n)$ éléments distincts (sans répétition) pris parmi $n$ le nombre de sous-ensembles de $p$ éléments de $n$ défini par :

$$\boldsymbol{C_{n}^{p}=\frac{A_{n}^{p}}{p!}=\frac{\frac{n!}{(n-p)!}}{\frac{p!}{1}}=\frac{n!}{(n-p)!\,p!}}$$

**Exemple 16 :**

Soit $\Omega=\{1\,;2\,;3\,;4\,;5\}$

$(1\,;2\,;3)$ est <u>une</u> combinaison de 3 éléments dans $\Omega$.

$(1\,;3\,;4\,;5)$est <u>une</u> combinaison de4 éléments dans $\Omega$.

- $\phi$*(partie vide)* est <u>la</u> combinaison dans $\Omega$ de zéro élément.
- $\Omega$*(partie pleine)* est la combinaison de 5 éléments.
- Une combinaison de 6 éléments dans $\Omega$ n'existe pas.

**Exemple 17 :**

$$C_{5}^{2}=\frac{5!}{(5-2)!\,2!}=\frac{5\times 4\times 3!}{3!\,2!}=5\times 2=10$$
$$C_{4}^{3}=\frac{4!}{(4-3)!\,3!}=\frac{5\times 4\times 3!}{1!\,3!}=5\times 4=20$$

**Exercice 6 :**

Une classe de 29 élèves procède à un tirage au sort pour désigner une commission de trois membres de cette classe.

**1°/** Calculer le nombre de commissions possibles dans chacun des deux cas suivants :

**a)** La commission est composée d'un coordinateur, d'un responsable sportif et d'un responsable culturel.

**b)** La commission est composée de trois élèves sans tâche particulière.

**2°/** Calculer dans le deuxième cas, le nombre de commissions qui comportent exactement deux garçons sachant qu'il y a exactement 7 filles dans cette classe.

**Solution :**

**1°/ a)** Dans le premier cas, le nombre de commissions possible est :

$$A_{29}^{3}=\frac{29!}{(29-3)!}=\frac{29!}{26!}=\frac{29\times 28\times 27\times 26!}{26!}$$
$$=29\times 28\times 27=21\,924$$



Math 6AS.indd 174 26/07/2024 10:44:14

**b)** Dans le deuxième cas, le nombre de commissions est le nombre de combinaisons possibles :

$$C_{29}^{3}=\frac{29!}{(29-3)!\,3!}=\frac{29\times 28\times 27\times 26!}{26!\,3!}$$
$$=29\times 14\times 9=3\,654$$

**2°/** Dans le second cas, le nombre de commissions qui comportent exactement 2 garçons est ;

$$C_{22}^{2}\times C_{7}^{1}=\frac{22!}{(22-2)!\,2!}\times 7=\frac{22\times 21\times 20!}{20!\,2!}\times 7$$
$$=11\times 21\times 7=1\,617$$

## Exercice 7 :

Une urne contient quatre boules vertes numérotées de 1 à 4, trois boules rouges numérotées de 1 à 3 et deux boules jaunes numérotées 1 à 2. On tire simultanément trois boules de cette urne.

**1°/** Calculer le nombre de tirages possibles.

**2°/** Calculer le nombre de tirages dans chacun des cas suivants :

**a)** Les trois boules tirées sont vertes.

**b)** Le tirage est unicolore.

**c)** Le tirage est tricolore.

**d)** Le triage est bicolore.

**e)** Le tirage comporte exactement deux boules rouges.

**f)** Le tirage ne comporte aucune boule jaune.

**g)** Le tirage comporte au moins une boule jaune.

**h)** Les numéros des boules sont identiques.

**Solution :**

**1°/** Le nombre de tirages possible est :$C_{9}^{3}=\frac{9!}{6!3!}=84$

**2°/a)** Le nombre de tirages où les trois boules tirées sont vertes :$C_{4}^{3}=\frac{4!}{1!3!}=4$

**b)** Le nombre de tirages où les trois boules sont unicolores :$C_{4}^{3}+C_{3}^{3}=4+1=5$

**c)** Le nombre de tirages où les trois boules sont tricolores :$C_{4}^{1}\times C_{3}^{1}\times C_{2}^{1}=4\times 3\times 2=24$

**d)** Le nombre de tirages où les trois boules sont bicolores :

$$C_{4}^{2}\times C_{3}^{1}+C_{4}^{2}\times C_{2}^{1}+C_{3}^{2}\times C_{2}^{1}+C_{3}^{2}\times C_{4}^{1}+C_{2}^{2}\times C_{4}^{1}+C_{2}^{2}\times C_{3}^{1}$$
$$=\frac{4!}{2!\,2!}\times 3+\frac{4!}{2!\,2!}\times 2+3\times 2+3\times 4+1\times 4+1\times 3=18+12+6+12+4+3$$
$$=55$$

**Autre méthode :**

On note $U$, $B$ et $T$ les tirages unicolores, bicolores et tricolores $B=(\overline{U\cup T})$.

Alors $card\ (A)=card\ (\Omega)-card\ (U\cap T)$. Or, $U\cap T=\emptyset$, d'où, $card(U\cup T)=card(U)+card(T)$.

Donc ; $card\ (B)=card\ (\Omega)-\big(card\ (U)+card\ (T)\big)$
$$=84-(5+24)=84-29=55$$

**e)** Le nombre de tirages comportant exactement deux boules rouges : $C_{3}^{2}\times C_{6}^{1}=3\times 6=18$

**f)** Le nombre de tirages ne comportant aucune boule jaune :$C_{7}^{3}=\frac{7!}{4!3!}=35$

$$C_{2}^{1}\times C_{7}^{2}+C_{2}^{2}\times C_{7}^{1}=2\times\frac{7!}{2!\,5!}+7=49$$

**Autre méthode :**

« au moins une boule jaune » est le complémentaire de « aucune boule jaune »

$$84-35=49$$

**h)** Le nombre de tirages où les numéros des boules sont identiques :

$$C_{3}^{3}+C_{3}^{3}=1+1=2$$

## Exercice 8 :

Une urne contient 12 boules ; 5 rouges, 3 vertes et 4 blanches. On tire simultanément 3 boules de l'urne.

**1°/** Déterminer le nombre de cas possibles.

**2°/** Déterminer le nombre de cas donnant :

**a)** Les trois boules tirées sont de même couleur.

**b)** Les trois boules tirées de couleurs différentes.

**c)** Les trois boules tirées contiennent au moins une verte.

**d)** Les trois boules tirées contiennent exactement deux de même couleur.

**Solution :**

**1°/**Nombre de cas possibles :

$$C_{12}^{3}=\frac{12!}{(12-3)!\,3!}=220$$

**2°/ a)** Nombre de cas donnant les trois boules tirées sont de même couleur :

$$C_{5}^{3}+C_{4}^{3}+C_{3}^{3}=\frac{5!}{(5-3)!\,3!}+\frac{4!}{(4-3)!\,3!}+\frac{3!}{(3-3)!\,3!}$$
$$=10+4+15=1$$

**b)** Nombre de cas donnant les trois boules tirées sont de couleurs différentes :

$$C_{5}^{1}\times C_{4}^{1}\times C_{3}^{1}=\frac{5!}{(5-1)!\,1!}\times\frac{4!}{(4-1)!\,1!}\times\frac{3!}{(3-1)!\,1!}$$
$$=5\times 4\times 3=60$$

**c)** Nombre de cas donnant les trois boules tirées contiennent au moins une verte :

$$C_{3}^{1}\times C_{9}^{2}+C_{3}^{2}\times C_{9}^{1}+C_{3}^{3}\times C_{9}^{0}$$
$$=\frac{3!}{(3-1)!\,1!}\times\frac{9!}{(9-2)!\,2!}+\frac{3!}{(3-2)!\,2!}\times\frac{9!}{(9-1)!\,1!}+\frac{3!}{(3-3)!\,3!}\times\frac{9!}{(9-0)!\,0!}$$
$$=3\times 36+3\times 9+1\times 1=136$$

**d)** Nombre de cas donnant les trois boules tirées contiennent exactement deux de même couleur :

$$C_{5}^{2}\times C_{7}^{1}+C_{4}^{2}\times C_{8}^{1}+C_{3}^{2}\times C_{9}^{1}$$
$$=\frac{5!}{(5-2)!\,2!}\times\frac{7!}{(7-1)!\,1!}+\frac{4!}{(4-2)!\,2!}\times\frac{8!}{(8-1)!\,1!}+\frac{3!}{(3-2)!\,2!}\times\frac{9!}{(9-1)!\,1!}$$
$$=10\times 7+6\times 8+3\times 9=145$$

## Propriétés des combinaisons :

**1-**$C_{n}^{0}=1,\forall n\in\mathbb{N}$

**2-**$C_{n}^{n}=1,\forall n\in\mathbb{N}$

**3-**$C_{n}^{1}=n,\forall n\in\mathbb{N}$

4-$C_n^{n-1} = , \forall n \in \mathbb{N}$
5-$C_n^{n-k} = C_n^k, \forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq k \leq n$
6-$C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq k \leq n$

**Démonstration**

$$1 - C_n^0 = \frac{n!}{(n-0)!\,0!} = \frac{n!}{n! \times 1} = \frac{n!}{n!} = \frac{1}{1} = 1$$

$$2 - C_n^n = \frac{n!}{(n-n)!\,n!} = \frac{n!}{0! \times n!} = \frac{n!}{1 \times n!} = \frac{1}{1} = 1$$

$$3 - C_n^1 = \frac{n!}{(n-1)!\,1!} = \frac{n(n-1)!}{(n-1)! \times 1} = \frac{n}{1} = n$$

$$4 - C_n^{n-1} = \frac{n!}{(n-(n-1))!\,(n-1)!}$$
$$= \frac{n(n-1)!}{(n-n+1)!\,(n-1)!} = \frac{n}{1!} = \frac{n}{1} = n$$

$$5 - C_n^{n-k} = \frac{n!}{(n-(n-k))!\,(n-k)!}$$
$$= \frac{n!}{(n-n+k)!\,(n-k)!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$
$$= \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = C_n^k$$

$$6 - C_n^k + C_n^{k+1} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} + \frac{n!}{(n-(k+1))!\,(k+1)!}$$
$$= \frac{n!}{(n-k)!\,k!} + \frac{n!}{(n-k-1)!\,(k+1)!}$$
$$= \frac{n!\,(k+1+n-k)}{(k+1)(n-k)k!\,(n-k-1)!}$$
$$= \frac{n!\,(n+1)}{(k+1)k!\,(n-k)(n-k-1)!}$$
$$= \frac{(n+1)!}{(k+1)!\,(n-k)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!\,\big((n+1)-(k+1)\big)!}$$
$$= C_{n+1}^{k+1}$$

● Soit $\Omega$ un ensemble fini ayant $n$ éléments

| **Propriétés des parties de $\Omega$** | **Propriétés des nombres $C_n^p$** |
|---|---|
| Il y a une seule partie *(partie ayant 0 élément c'est $\phi$ (la partie vide))*. | $C_1^0 = 1$ |
| Il y a une seule partie *(partie ayant $\Omega$ élément c'est $\Omega$ (la partie pleine))*. | $C_n^n = 1$ |
| Il y a $(n)$ parties ayant chacune $(1)$ élément *(les singletons de $\Omega$)*. | $C_n^1 = n$ |
| A toute partie de $\Omega$ ayant $p$ éléments correspond une seule partie de $\Omega$ ayant $n-p$ éléments et réciproquement *(ce sont des parties complémentaires dans $\Omega$)*. Donc, le nombre de parties à $(p)$ éléments est le même que le nombre de partie à $(n-p)$éléments . | $C_n^p = C_n^{n-p}$ |

| **Type de tirage** | $\boldsymbol{Card}$**(A)** | **conditions** |
|---|---|---|
| Successif avec remise | $n^p$ | $p$ quelconque |
| Successif sans remise | $A_n^p$ | $p \leq n$ |
| simultané | $C_n^p$ | $p \leq n$ |

## VII. Developement du binôme de Newton : Formules du binôme de Newton :

$\forall a\,;b \in \mathbb{R}\,;\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\qquad (a+b)^n = \sum_{k=0}^{k=n} C_n^k\, a^{n-k} b^k\,,$

$$(a-b)^n = \sum_{k=0}^{k=n} (-1)^k C_n^k\, a^{n-k} b^k$$

**Démonstration par récurrence**

**Initialisation**

Pour $n = 0$ :

$$(a+b)^0 = 1$$
$$C_0^k a^{0-k} b^k = C_0^0 a^{0-0} b^0 = 1 \times 1 \times 1 = 1$$

C'est donc vrai pour $n = 0$.

**Transmission**

On suppose que la formule de Newton est vraie pour un entier $n$.

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$$

et nous allons montrer qu'elle est vraie pour $n+1$.

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k a^{n+1-k} b^k$$

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)^n (a+b)$$
$$= (a+b) \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$$
$$= a \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k + b \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$$
$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^{k+1}$$
$$(C_n^0 a^{n+1} b^0 + C_n^1 a^n b^1 + \cdots + C_n^n a^1 b^n)$$
$$+ (C_n^0 a^n b^1 + C_n^1 a^{n-1} b^2 + \cdots$$
$$+ C_n^n a^0 b^{n+1})$$
$$= C_n^0 a^{n+1} b^0 + (C_n^1 + C_n^0) a^n b^1 + (C_n^2 + C_n^1) a^{n-1} b^2$$
$$+ \cdots + (C_n^n + C_n^{n-1}) a^1 b^n + C_n^n a^0 b^{n+1}$$
$$= C_n^0 a^{n+1} b^0 + C_{n+1}^1 a^n b^1 + C_{n+1}^2 a^{n-1} b^2 + \cdots$$
$$+ C_{n+1}^n a^1 b^n + C_n^n a^0 b^{n+1}$$
$$= C_n^0 a^{n+1} b^0 + C_{n+1}^1 a^n b^1 + C_{n+1}^2 a^{n-1} b^2 + \cdots$$
$$+ C_{n+1}^n a^1 b^n + C_{n+1}^{n+1} a^0 b^{n+1}$$
$$= \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k a^{n+1-k} b^k$$

D'où, la formule est vraie pour $n+1$. Donc,

$$\forall n \in \mathbb{N}, (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$$

## VIII. Le triangle de Pascal :

$C_n^p + C_{n+1}^p = C_{n+1}^{p+1}$ *(Propriété de base pour la construction du triangle suivant appelé triangle de Pascal)*

$$
\begin{array}{l}
(n=0) \quad C_0^0 \\
(n=1) \quad C_1^0 \; C_1^1 \\
(n=2) \quad C_2^0 \; C_2^1 \; C_2^2 \\
(n=3) \quad C_3^0 \; C_3^1 \; C_3^2 \; C_3^3 \\
(n=4) \quad C_4^0 \; C_4^1 \; C_4^2 \; C_4^3 \; C_4^4 \\
(n=5) \quad C_5^0 \; C_5^1 \; C_5^2 \; C_5^3 \; C_5^4 \; C_5^5 \\
(n=6) \quad C_6^0 \; C_6^1 \; C_6^2 \; C_6^3 \; C_6^4 \; C_6^5 \; C_6^6 \\
(n=7) \quad C_7^0 \; C_7^1 \; C_7^2 \; C_7^3 \; C_7^4 \; C_7^5 \; C_7^6 \; C_7^7 \\
\ldots \quad \ldots \; \ldots \; \ldots \; \ldots \; \ldots \; \ldots \; \ldots \; \ldots \; \ldots \; \ldots \\
(n=p) \quad C_p^0 \; C_p^1 \; C_p^2 \; C_p^3 \; C_p^4 \; C_p^5 \; C_p^6 \; C_p^7 \; \ldots \; C_p^p
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c}
1 \\
1 \quad 1 \\
1 \quad 2 \quad 1 \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\
1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1 \\
1 \quad 7 \quad 21 \quad 25 \quad 25 \quad 21 \quad 7 \quad 1 \\
\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots
\end{array}
$$

### Remarque 3 :

Le triangle de Pascal porte les valeurs des nombres $C_n^p$

### Exercice 8 :

Développer les binômes suivants :

$(a+b)^2,\quad (a+b)^3,\quad (a+b)^4,\quad (a+b)^5,\quad (a+b)^6,\quad (a-b)^4$

**Solution :**

$$(a+b)^2 = \sum_{k=0}^{2} C_2^k a^{2-k} b^k = C_2^0 a^2 b^0 + C_2^1 a^1 b^1 + C_2^2 a^0 b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = \sum_{k=0}^{3} C_3^k a^{3-k} b^k = C_3^0 a^3 b^0 + C_3^1 a^2 b^1 + C_3^2 a^1 b^2 + C_3^3 a^0 b^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a+b)^4 = \sum_{k=0}^{4} C_4^k a^{4-k} b^k = C_4^0 a^4 b^0 + C_4^1 a^3 b^1 + C_4^2 a^2 b^2 + C_4^3 a^1 b^3 + C_4^4 a^0 b^4 = a^4 + 4a^3 b + 6a^2 b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$(a+b)^5 = \sum_{k=0}^{5} C_5^k a^{5-k} b^k = C_5^0 a^5 b^0 + C_5^1 a^4 b^1 + C_5^2 a^3 b^2 + C_5^3 a^2 b^3 + C_5^4 a^1 b^4 + C_5^5 a^0 b^5$$
$$= a^5 + 5a^4 b + 10a^3 b^2 + 10a^2 b^3 + 5ab^4 + b^5$$

$$(a+b)^6 = \sum_{k=0}^{6} C_6^k a^{6-k} b^k = C_6^0 a^6 b^0 + C_6^1 a^5 b^1 + C_6^2 a^4 b^2 + C_6^3 a^3 b^3 + C_6^4 a^2 b^4 + C_6^5 a^1 b^5 + C_6^6 a^0 b^6$$
$$= a^6 + 6a^5 b + 15a^4 b^2 + 20a^3 b^3 + 15a^2 b^4 + 6ab^5 + b^6$$

$$(a-b)^4 = \sum_{k=0}^{k=4} (-1)^k C_4^k\, a^{4-k} b^k = C_4^0 a^4 b^0 - C_4^1 a^3 b^1 + C_4^2 a^2 b^2 - C_4^3 a^1 b^3 + C_4^4 a^0 b^4 = a^4 - 4a^3 b + 6a^2 b^2 - 4a^1 b^3 + b^4$$

$$\forall x \in \mathbb{R}\,;\ \forall n \in \mathbb{N}\,,\qquad (1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k$$

### Exercice 9 :

Montrer les égalités suivantes :

**1°/** $\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$

**2°/** $(p+1)!\,p! = (p+1)(p!)^2$

**3°/** $\dfrac{1}{p!} - \dfrac{1}{(p+1)!} = \dfrac{pp!}{(p+1)(p!)^2} = \dfrac{1}{(p+1)!\,(p-1)!}$

**Solution :**

**1°/** $\forall n \in \mathbb{N}, (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$

Si $x = y = 1$, on a ;

$$(1+1)^n = 2^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k 1^{n-k} 1^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \boldsymbol{2^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k}$$

**2°/** $(p+1)!\,p! = (p+1)p!\,p! = (p+1)!\,(p!)^2$

**3°/** $\dfrac{1}{p!} - \dfrac{1}{(p+1)!} = \dfrac{(p+1)! - p!}{p!\,(p+1)!} = \dfrac{(p+1)p! - p!}{(p+1)!\,(p!)^2} = \dfrac{((p+1)-1)p!}{(p+1)!\,(p!)^2} = \dfrac{pp!}{(p+1)!\,(p!)^2} = \dfrac{1}{(p+1)!\,(p-1)!}$

### Exercice 10 :

**1-** En supposant que $p$ est fixe et en raisonnant par récurrence sur $n (p \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N})$, montrer que l'on a :

$$C_p^p + C_{p+1}^p + \cdots + C_n^p = C_{n+1}^{p+1}$$

**2- a)** Vérifier que : $C_k^{p+1} + C_k^p = C_{k+1}^{p+1}$

**b)** Montrer que : $C_p^p + C_{p+1}^p + \cdots + C_n^p = C_{n+1}^{p+1}$

**Solution :**

$1 - C_p^p + C_{p+1}^p + \cdots + C_n^p = C_{n+1}^{p+1}$ ?

Montrons par récurrence sur $n$

**Initialisation**

Pour $n = p$ on a ; $C_p^p = C_{p+1}^{p+1}$ la relation est donc vraie pour $n = p$.

**Transmission**

Supposons qu'elle est vraie pour $n$ et montrons qu'elle l'est pour $n+1$

$$C_p^p + C_{p+1}^p + \cdots + C_n^p = C_{n+1}^{p+1}$$

$$C_p^p + C_{p+1}^p + \cdots + C_n^p + C_{n+1}^p = C_{n+1}^{p+1}?$$

On a ;

$$C_p^p + C_{p+1}^p + \cdots + C_n^p + C_{n+1}^p = C_{n+1}^{p+1} + C_{n+1}^p$$

$$= \frac{(n+1)!}{(n+1-(p+1))!\,(p+1)!} + \frac{(n+1)!}{(n+1-p)!\,p!}$$

$$= \frac{(n+1)!}{(n-p)!\,(p+1)!} + \frac{(n+1)!}{(n+1-p)!\,p!}$$

$$= \frac{(n+1)!}{(n-p)!\,(p+1)!} + \frac{(n+1)!}{(n+1-p)(n-p)!\,p!}$$

$$= \frac{(n+1)!\,(n+1-p)}{(n-p)!\,(p+1)!\,(n+1-p)} + \frac{(n+1)!\,(p+1)}{(n+1-p)(n-p)!\,p!\,(p+1)}$$

$$= \frac{(n+1)!\,(n+1-p) + (n+1)!\,(p+1)}{(n+1-p)(n-p)!\,p!\,(p+1)}$$

$$= \frac{(n+1)!\,(n+1-p+p+1)}{(n-p+1)!\,(p+1)!}$$

$$= \frac{(n+1)!\,(n+2)}{(n-p+1)!\,(p+1)!} = \frac{(n+2)!}{(n+2-(p+1))!\,(p+1)!}$$

$$= C_{n+2}^{p+1} \Rightarrow \boldsymbol{C_{n+1}^{p+1} + C_{n+1}^p = C_{n+2}^{p+1}}$$

D'où, la propriété est vraie pour $n+1$.

**2 – *a*)** $C_k^{p+1} + C_k^p = C_{k+1}^{p+1}$ ?

$$C_k^{p+1} + C_k^p = \frac{k!}{(k-p-1)!\,(p+1)!} + \frac{k!}{(k-p)!\,p!}$$

$$= \frac{k!\,(k-p)}{(-p-1)!\,(p+1)!\,(k-p)!} + \frac{k!\,(p+1)}{(k-p)!\,p!\,(p+1)}$$

$$= \frac{k!\,(k-p) + k!\,(p+1)}{(k-p)!\,(p+1)!}$$

$$= \frac{kk! - pk! + pk! + k!}{(k-p)!\,(p+1)!} = \frac{kk! + k!}{(k-p)!\,(p+1)!}$$

$$= \frac{k!\,(k+1)}{(k-p)!\,(p+1)!}$$

$$= \frac{(k+1)!}{(k+1-(p+1))!\,(p+1)!} = C_{k+1}^{p+1}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{C_k^{p+1} + C_k^p = C_{k+1}^{p+1}}$$

***b*)** $$\sum_{k=p+1}^{n} \left(C_k^{p+1} + C_k^p\right) = \sum_{k=p+1}^{n} C_{k+1}^{p+1}$$

$$C_{p+2}^{p+1} + C_{p+3}^{p+1} + \cdots + C_n^{p+1} + C_{n+1}^{p+1}$$

$$= C_{p+1}^{p+1} + C_{p+2}^{p+1} + C_{p+3}^{p+1} + \cdots + C_n^{p+1}$$

$$+ C_{n+1}^p + \cdots + C_n^p$$

$$\Rightarrow C_{n+1}^{p+1} = C_{p+1}^{p+1} + C_{p+1}^p + \cdots + C_n^p \Rightarrow C_{n+1}^{p+1}$$

$$= C_{p+1}^{p+1} - C_p^p + C_p^p + C_{p+1}^p + \cdots + C_n^p$$

$$\Rightarrow C_{n+1}^{p+1} = 1 - 1 + C_p^p + C_{p+1}^p + \cdots + C_n^p$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{C_p^p + C_{p+1}^p + \cdots + C_n^p = C_{n+1}^{p+1}}$$

## Exercice 11 :

**1°/** Montrer que;$\forall n, p \in \mathbb{N}, p+2 \le n$ , on a :

$$C_n^p = C_{n-2}^p + 2C_{n-2}^{p-1} + C_{n-2}^{p-2}$$

**2°/** Montrer que ; $\forall n, p, p \ge 1,\ p-1 \le n$ , on a :

$$pC_{n+1}^p = (n+1)C_n^{p-1}$$

**3°/** En déduire que : $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} C_n^k$.

**Solution :**

**1°/**$C_{n-2}^p + 2C_{n-2}^{p-1} + C_{n-2}^{p-2}$

$$= C_{n-2}^p + C_{n-2}^{p-1} + C_{n-2}^{p-1} + C_{n-2}^{p-2}$$

$$= C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1} = C_n^p \Rightarrow \boldsymbol{C_n^p}$$

$$= \boldsymbol{C_{n-2}^p + 2C_{n-2}^{p-1} + C_{n-2}^{p-2}}$$

$$pC_{n+1}^p = \frac{p(n+1)!}{(n+1-p)!\,p!} = \frac{p(n+1)!}{(n+1-p)!\,p(p-1)!}$$

$$= \frac{(n+1)!}{(n+1-p)!\,(p-1)!}$$

$$= \frac{(n+1)n!}{(n-(p-1))!\,(p-1)!}$$

$$= (n+1)\frac{n!}{(n-(p-1))!\,(p-1)!} = (n+1)C_n^{p-1}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{pC_{n+1}^p = (n+1)C_n^{p-1}}$$

## Exercice 12 :

On considère la fonction :$f(x) = (1+x)^n,\ (n \in \mathbb{N})$

**1°/** Calculer $f'(x)$ et en déduire la somme :$\sum_{k=1}^{n} kC_n^k$

**2°/** En s'inspirant de **1°/**, calculer les sommes :

$$\sum_{k=1}^{n} k(k-1)C_n^k, \qquad et \sum_{k=2}^{n} k^2 C_n^k$$

**Solution :**

**1°/** $f(x) = (1+x)^n \Rightarrow \boldsymbol{f'(x) = n(1+x)^{n-1}}$

$$f(x) = (1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\,(1)^{n-k} x^k$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\,x^k = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \cdots + C_n^n x^n$$

$$\boldsymbol{f'(x) = C_n^1 + 2C_n^2 x + \cdots + nC_n^n x^{n-1}}$$

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{n} kC_n^k\,x^{k-1}, et\ f'(1) = n.2^{n-1}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\sum_{k=1}^{n} kC_n^k = n.2^{n-1}}$$

$$f'(x) = n(1+x)^{n-1} \Rightarrow f''(x) = n(n-1)(1+x)^{n-2}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{f''(1) = n(n-1).2^{n-2}}\boxed{1}$$

$$f''(x) = 2C_n^2 + 6C_n^3 x + 12C_n^4 x^2 + \ldots + n(n-1)C_n^n x^{n-2}$$

$$f''(1) = 2C_n^2 + 6C_n^3 + 12C_n^4 + \cdots + n(n-1)C_n^n$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{f''(1) = \sum_{k=2}^{n} k(k-1)C_n^k}\boxed{2}$$

**De** $\boxed{1}$ **et** $\boxed{2}$ $\Rightarrow \boldsymbol{\sum_{k=2}^{n} k(k-1)C_n^k = n(n-1).2^{n-2}}$

$$\sum_{k=2}^{n} k(k-1)C_n^k = n(n-1).2^{n-2}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=2}^{n} k^2 C_n^k - \sum_{k=2}^{n} kC_n^k = n(n-1).2^{n-2}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=2}^{n} k^2 C_n^k = \sum_{k=2}^{n} kC_n^k + n(n-1).2^{n-2}$$

$$= \sum_{k=2}^{n} kC_n^k - C_n^1 + n(n-1).2^{n-2}$$

$$= n.2^{n-1} + n(n-1).2^{n-2} - n$$

$$= n\left[(2+(n-1))2^{n-2} - 1\right]$$

$$= n[(n+1)2^{n-2} - 1]$$

$$\Rightarrow \sum_{k=2}^{n} \boldsymbol{k^2 C_n^k = n\left[(n+1)2^{n-2} - 1\right]}$$

## A. Applications :

### Listes :

**Exemple 1 :**

L'allumage d'une grande salle de jeux, est assuré par 10 ampoules commandées chacune par un interrupteur. Combien y-t-il de manières différentes d'éclairer cette salle ?

**Réponse :**

- On note 1pour : une ampoule est allumée ; 0pour : une ampoule est éteinte
- On pose : $\Omega = \{0\,;1\}$.
- Chaque manière d'éclairer la salle est une $10 - liste$ dans Ω différentes de la $10 - liste$ (0 ;0 ;0 ;0 ;0 ;0 ;0 ;0 ;0 ;0), qui correspond à la salle non éclairée.
- Donc, le nombre de manières d'éclairer la salle est :$2^{10}$ – 1= 1024 -1 = **1023**

### Arrangements :

**Exemple 2 :**

Combien de façons différentes a-t-on pour ranger 3 livres dans 5 casiers de couleurs différentes ne pouvant contenir chacun qu'un seul livre?

**Réponse :**

- On note $C_1$ ; $C_2$ ; $C_3$ ; $C_4$ ; $C_5$ ; les cinq casiers.
- On pose : Ω= $\{C_1\,;\,C_2\,;\,C_3\,;\,C_4\,;\,C_5\}$.
- Chaque façon de ranger les 3 livres est un $3 - arrangement$ dans Ω, alors, le nombre de façons différentes de ranger les livres est :

$$A_5^3 = \frac{5!}{2!} = \frac{5\times4\times3\times2\times1}{2!} = 60.$$

### Tirages :

**Exemple 3**

Une caisse contient 7 boules indiscernables au toucher.

1) On tire au hasard <u>successivement avec remise</u> 3 boules de la caisse.Quel est le nombre de tirages possibles ?

2) On tire maintenant <u>successivement sans remise</u> 3 boules de la caisse. Quel est le nombre de tirages possibles ?

3) On tire maintenant <u>simultanément</u> 3 boules de la caisse. Quel est le nombre de tirages possibles ?

**Réponse :**

- On note : $b_1$ ; $b_2$ ; $b_3$ ; $b_4$ ; $b_5$ ; $b_6$ ; $b_7$, les 7 boules.
- On pose : Ω= $\{b_1\,;\,b_2\,;\,b_3\,;\,b_4\,;\,b_5\,;\,b_6\,;\,b_7\}$.

**1)**Chaque tirage successif avec remise de 3 boules est une 3-liste dans Ω.

Donc ; le nombre de tirages possibles est :

$7^3$ = 7 × 7 × 7.= **343.**

**2)**Chaque tirage successif sans remise de 3 boules est un 3-arrangement dans Ω.

Donc ; le nombre de tirages possibles est : $A_7^3 = \frac{7!}{4!} = 7\times6\times5 = 210.$

**3)**Chaque tirage simultané de 3 boules est une combinaison de 3 éléments de Ω.

Donc ; le nombre de tirages possibles est : $C_7^3 = \frac{7!}{3!4!} = \frac{7!}{3!4!} = \frac{7\times6\times5}{3\times2\times1} = 35.$

### Nombre de parties d'un ensemble fini :

**Exemple 4 :**

**1) a)** Montrer que $\forall\, k \in \mathbb{N} : (k+1)! - k\,! = k\,k\,!$

**b)**Calculer la somme :

$S = 1\times1\,! + 2\times2\,! + 3\times3\,! + \cdots + 2019\times2020\,!$

**2) a)** Montrer que :$\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$

**b)** Quel est le nombre de parties d'un ensemble Ω ayant $(n)$ éléments ?

**Réponse :**

**1) a)** On a : $\forall k \in \mathbb{N}\,; (k+1)! = (k+1)k!$

Donc ; $\forall k \in \mathbb{N}\,;\ (k+1)! - k! = (k+1)k! - k!$

$= (k+1-1)k! = kk!$

D'où ; $\forall k \in \mathbb{N}:\ (k+1)! - k! = kk!$

**b)**$S = \sum_{k=1}^{2020} kk! = \sum_{k=1}^{2020}\left((k+1)! - k!\right)$

$= (2!-1!) + (3!-2!) + (4!-3!) + \cdots$

$+ (2020! - 2019!) = 2020! - 1$

Donc ; $S = 2020\,! - 1$

**2)a)** On a ; $\forall a,b \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}: (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$

$a = b = 1$, on a : $\sum_{k=0}^{n} C_n^k 1^{n-k} 1^k = (1+1)^n = 2^n$

Donc ; $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$

b) le nombre de parties de Ω à 0 élément est $C_n^0$

- Le nombre de parties de Ω à 1 élément est $C_n^1$
- Le nombre de parties de Ω à 2 éléments est $C_n^2$
- Le nombre de parties de Ω à n éléments est $C_n^n$
- Donc le nombre de parties de Ω est :

- $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k = \boxed{2^n}$

## B. EXERCICES DIVERS

**1.**Les numéros de téléphones d'un réseau téléphonique sont des nombres entiers de 6 chiffres.
Quelle est la capacité de ce réseau ?

**2.**On lance deux dés cubiques de couleurs différentes, un noir et un jaune. On relève dans l'ordre le numéro présenté par le dé noir, puis celui présenté par le dé jaune.
Schématiser l'ensemble des résultats possibles.
Quels est le nombre de résultats possibles.

**3.**Combien de façons différentes 3 personnes peuvent occuper 5 chaises ?

**4.**Combien de groupes de 7 élèves peut-on former dans une classe de 12 élèves ?

**5.**De combien de manières différentes peut-on distribuer 5 stylos à 5 élèves ?

**6.**1) 3 personnes occupent au hasard des places dans une voiture à 5 places. Quel est le nombre de façons différentes possibles ?
2) Le chauffeur et 3 personnes occupent des places dans une voiture à 5 places, le chauffeur occupe la place de commande. Quel est le nombre de façons différentes possibles ?

**7.**Une caisse contient 8 boîtes dont 3 noires, 3 jaunes et 2 blanches.
On tire au hasard 3 boules simultanément
a) quel est le nombre de tirage possible ?
b) quel est le nombre de tirage contenant 1 seule boule noire ?
c) quel est le nombre de tirage contenant au moins une boule noire?
2) On tire maintenant au hasard 2 boules simultanément.
a) quel est le nombre de tirages possibles ?
b) quel est le nombre de tirages contenant deux boules de mêmes couleurs ?
c) quel est le nombre de tirages contenant deux boules de couleurs différentes ?

**8.**Une caisse contient cinq boules numérotées 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5.
On tire successivement deux boules sans remise.
1) quel est le nombre de tirages possibles ? schématiser le nombre de tirages possibles.
2) Quel, est le nombre de tirages donnant a + b > 7.
( a et b les numéros des boules tirées).

**9.**1) Montrer que ;

$$\forall n \in \mathbb{N} \,; \ \sum_{k=1}^{n} (-1)^k C_n^k = 0$$

2) Montrer que ;

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \,; \ \sum_{k=1}^{n} k C_n^k = n 2^{n-1}$$

**10.**Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante :
$\sum_{k=0}^{n} C_n^k 2^k x^k = 0$

**11.**Une caisse contient 4 boules numérotées de 1 à 4.
1) On tire successivement avec remise deux boules.
a) donner le nombre de tirages possibles, et schématiser ce nombre.
b ) quel est le nombre de tirages donnant $|a - b| = 1$ (a et b les numéros de boules tirées).
2) On tire maintenant <u>successivement sans remise</u> deux boules.
a)Donner le nombre de tirages possibles et schématiser ce nombre.
b )Quel est le nombre de tirages donnant $|a - b| = 1$.
3)On tire maintenant <u>simultanément</u> deux boules.
a )donner le nombre de tirages possibles et schématiser ce nombre.
b)quel est le nombre de tirages donnant $|a - b| = 1$.

**12.**On lance une pièce de monnaie mauritanienne trois fois de suite.
On note a chaque fois la nature de la face visible ( A : pour face en Arabe et F : pour face en Français).
Quel est le nombre de résultats possibles ?
Schématiser ces résultats à l'aide d'un arbre.

**13.**La fabrication d'une pièce nécessite de passer par celle-ci sur quatre machines A,B,C,D.
déterminer les trajets possibles dans chacun des cas suivants :
a- L'ordre de passage est indifférent.
b- La pièce doit d'abord passer par A ;
c- La pièce doit passer par B avant C et D

**14.**Soit T l'ensemble des naturels formés de 3 chiffres distincts non nuls a,b,c.
a- Quel est le cardinal de T ?
b- Calculer la somme des naturels de T.

**15.**Une urne A contient 2 boules blanches, 3 boules bleues et 5 boules rouges. Une urne B contient 4 boules bleues. On tire simultanément 2 boules de l'urne A que l'on place dans l'urne B, puis on tire 3 boules simultanément de l'urne B.
Quel est le nombre de tirages tricolores possibles ?

**16.**Démontrer que pour tous naturels n et P tels que $P \geq 1 et n \geq P - 1$ on a $PC_{n+1}^{P} = (n+1)C_n^{P-1}$.

**17.**A l'aide du développement de $(1+x)^n$,
calculer :
a- $C_n^0 + 2C_n^1 + 2^2 C_n^2 + \ldots\ldots + 2^P C_n^P + \ldots\ldots + 2^n C_n^n$
b- $C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \ldots\ldots + PC_n^P + \ldots\ldots + nC_n^n$

# CHAPITRE 13 Echantillonnage

**Le principe :**

On considère par exemple l'expérience suivante consistant à lancer plusieurs fois un dé et à noter si la face supérieure affichée est un 4 ou un autre nombre.

La valeur supposée et théorique de la probabilité d'obtenir un 4 est $\frac{1}{6}$.

La mise en défaut ou non de cette expérience, nous permettra d'affirmer s'il est raisonnable de penser que le dé est pipé ou ne l'est pas.

En réalisant l'expérience un certain nombre de fois (échantillon), on mesure la fréquence. d'apparition du 4.
Si la fréquence et la valeur théorique sont trop "éloignées" (dépassent un seuil fixé) alors on peut rejeter la valeur théorique et considérer que le dé est pipé.
Dans le cas inverse, on considère qu'il ne l'est pas.

## I. Notion d'échantillon :

**Exemple 1 :**

Si, sur l'ensemble des cartes à puce produites par une entreprise en une semaine, on enprélève 200, on dit que cet ensemble de 200 cartes à puce constitue un **échantillon de taille 200** de la population de toutes les cartes à puce produites en une semaine.

**Définition :**

Un échantillon de taille n est constitué des résultats de n répétitions indépendantes de la même expérience sur l'ensemble des personnes ou objets sur lesquels porte l'étude statistique (la population).
Un échantillon issu d'une population est donc l'ensemble de quelques éléments de cette population.

## *II. Intervalle de fluctuation :*

On suppose que 22% des cartes à puce produites par l'entreprise sont défectueuses.

La **proportion théorique** p est donc égale à 22%.
On prélève un échantillon de taille 200 parmi cette production et on compte le nombre decartes à puce défectueuses parmi cet échantillon. Ce nombre est égal à 41.
Dans ce cas, la **fréquence observée** f est égale à $\frac{41}{200} = 0,205$.
Pour un échantillon de taille 200, l'**intervalle de fluctuation** de la fréquence p des cartes à puce défectueuses au seuil de 95 % **,** est un intervalle de centre 0,22 tel que les fréquences observées se trouvent dans cet intervalle pour 95 % des échantillons de taille 200.

**Définition :**

L'intervalle de fluctuation au seuil de 95% d'une fréquence d'un échantillon de taille n estl'intervalle


centré autour de la proportion théorique p tel que la fréquence observée f se trouve dans l'intervalle avec une probabilité égale à 0,95.

**Propriété 1 :**

Pour 0,2 < p < 0,8 et n > 25, l'intervalle de fluctuation au seuil de 95% de f est l'intervalle

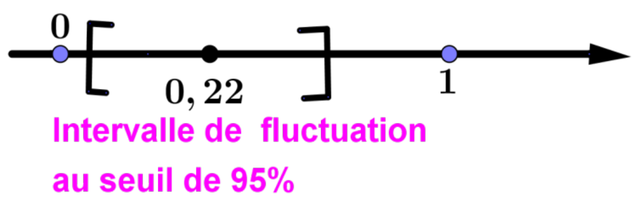
$$\left[p-\frac{1}{\sqrt{n}}\ ;\ p+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$$

Cela signifie qu'on a une probabilité de 0,95 pour que la fréquence observée se trouve dans l'intervalle $\left[p-\frac{1}{\sqrt{n}}\ ;\ p+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$

**Remarque 1 :**

L'amplitude de cet intervalle est égale à $\frac{2}{\sqrt{n}}$

Dans l'exemple précédent, l'intervalle de fluctuation




au seuil de 95% de p = 0,22 est

$$\left[0,22-\frac{1}{\sqrt{200}}\ ;0,22+\frac{1}{\sqrt{200}}\right]$$

soit de façon approchée [0,15 ; 0,29].

**Méthode :** Prendre une décision à partir d'un *échantillon*

Deux entreprises A et B recrutent dans un bassin d'emploi où il y a autant de femmesque d'hommes, avec la contrainte du respect de la parité.

Dans l'entreprise A, il y a 100 employés dont 43 femmes (soit 43 %). Dans l'entreprise B, il y a 2500 employés dont 1150 femmes (soit 46 %).

Or, 46 % est plus proche de 50 % que 43 % : les chiffres parlent d'eux-mêmes !
Si on admet que la parité, c'est exactement 50 % de femmes, il est vrai que B est plusproche que A.
Peut-on alors affirmer que l'entreprise B respecte mieux la parité que l'entreprise A ?
La proportion théorique p est égale à 0,5 (50% de femmes).

Pour l'entreprise A :
La taille de l'échantillon n est égale à 100.La fréquence observée f est égale à 0,43.

Pour l'entreprise B :
La taille de l'échantillon n est égale à 2500.
La fréquence observée f est égale à 0,46.

Pour chaque entreprise, peut-on affirmer que la fréquence de femmes respecte la parité ?
Pour y répondre, on va vérifier dans chaque cas si la fréquence observée f se situe dansl'intervalle de fluctuation au seuil de 95%.

Pour l'entreprise A :
L'intervalle de fluctuation au seuil de 95% de $p = 0{,}5$ est :

$$f = \left[0{,}5 - \frac{1}{\sqrt{100}}\ ;\ 0{,}5 + \frac{1}{\sqrt{100}}\right] \text{ soit } f = [0{,}4\ ;\ 0{,}6]$$

Pour l'entreprise B :
L'intervalle de fluctuation au seuil de 95% de p = 0,5 est :

$$f = \left[0{,}5 - \frac{1}{\sqrt{2500}}\ ;\ 0{,}5 + \frac{1}{\sqrt{2500}}\right] \text{ soit } f = [0{,}48\ ;\ 0{,}52]$$

La valeur 43% est donc dans l'intervalle de fluctuation de l'entreprise A alors que lavaleur 46% n'est pas dans l'intervalle de fluctuation de l'entreprise B.
La proportion de 46% s'observe donc dans moins de 5% des échantillons de taille 2500.On peut alors rejeter l'hypothèse que l'entreprise B respecte la parité.
Par contre, pour l'entreprise A, on peut accepter cette hypothèse.

## III. Intervalle de confiance :

**Exemple 2 :**

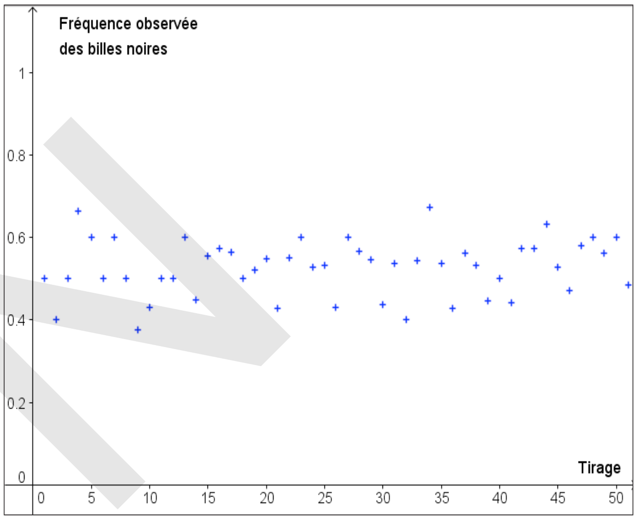
Un jeu consiste à tirer 100 billes d'un sac contenant 300 billes noires et 300 billesblanches.

L'expérience peut être simulée avec un tableur afin d'effectuer rapidement un grandnombre de tirage.
Pour cet échantillon de taille 100, on compte le nombre de billes noires et on calcule la fréquence observée f.
On pourrait ainsi vérifier que, dans 95 % des cas, la fréquence des billes noires dansl'échantillon appartient à l'intervalle :

$$F = \left[0{,}5 - \frac{1}{\sqrt{100}}\ ;\ 0{,}5 + \frac{1}{\sqrt{100}}\right] \text{ soit : } [0{,}4\ ;\ 0{,}6];$$

où $p = 0{,}5$ et $n = 100$.

**NUAGE DE POINTS DES FREQUENCES OBSERVEES DES BILLES NOIRES POUR 50 TIRAGES**




**EFFECTUES**

**Définition :**

Soit p la proportion théorique tel que $0{,}2 < p < 0{,}8$.
On considère la fréquence observée f pour un échantillon donné de taille $n > 25$.
L'intervalle $I_C = \left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}\ ;\ f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ est appelé un intervalle de confiance (ou fourchette de sondage) de p au niveau 0,95.

**Propriété 2 :**

95 % des intervalles de confiance associés aux échantillons de taille n possibles ayant comme fréquence observée f contiennent la proportion théorique p.

Méthode : Estimer une proportion inconnue

1. Avant les élections, le candidat A commande un sondage effectué sur 250 personnes.138 personnes interrogées déclarent avoir l'intention de voter pour le candidat A.
   Le candidat A peut-il espérer être élu ?
2. Le candidat A commande un second sondage effectué sur 1000 personnes pourlequel 538 personnes déclarent avoir l'intention de voter

pour lui. Le candidat A peut-il espérer être élu ?

**Réponse :**

1. Soit p la proportion théorique d'électeurs pour le candidat A.

La fréquence observée est égale à $f = \frac{138}{250} = 0,552$

L'intervalle de confiance de p au seuil de 0,95 est :

$$I_C = \left[0,552 - \frac{1}{\sqrt{250}}\ ;\ 0,552 + \frac{1}{\sqrt{250}}\right]$$

soit de façon approchée [0,49 ; 0,62].

On a donc : $0,49 < p < 0,62$. Il est donc possible que le candidat A ne soit pas élu.

La fréquence observée est égale à :

$$f = \frac{538}{1000} = 0,538$$

L'intervalle de confiance de p au seuil de 0,95 est :

$$I_C = \left[0,538 - \frac{1}{\sqrt{1000}}\ ;\ 0,538 + \frac{1}{\sqrt{1000}}\right]$$

soit de façon approchée [0,51 ; 0,57].

On a donc : $0,51 < p < 0,57$.

La proportion théorique évaluée est supérieure à50%.

Le candidat A peut donc espérer être élu puisque 95% des échantillons possibles de taille 1000 seraient compris dans cet intervalle.

**Exemple 3 :**

En 2007, quelques jours avant le second tour des élections présidentielles dans un pays européen, on publie le sondage suivant réalisé auprès de 900 personnes :

Candidat A : 45%

Candidat B : 55%

Interpréter ce sondage.

**Réponse :**

On calcule l'intervalle de confiance pour le Candidat B

$$I_C = \left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}\ ;\ f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right] = \left[55 - \frac{1}{\sqrt{900}}\ ;\ 55 + \frac{1}{\sqrt{900}}\right]$$

soit $= \left[0,55 - \frac{1}{30}\ ;\ 0,55 + \frac{1}{30}\right] \approx [0,517\ ;\ 0,583]$.

La proportion des votants en faveur du candidat B se trouvant dans [0,517 ; 0,583] avec 95% de chance, on peut en déduire qu'il avait de grandes chances d'être élu.

**Exercice :**

Dans la réserve indienne d'Aamjiwnaag, située au canada, à proximité d'industries chimiques, il est né entre 1999 et 2003, 132 enfants dont 46 garçons.

Est ce normal ?

Solution :

On fait ici l'hypothèse P suivante : « le sexe d'un enfant qui nait dans cette réserve est un garçon avec une probabilité de 0,5 ».

La taille de l'échantillon est $n = 132$ ($n > 25$) et la fréquence observée est $f_0 = \frac{46}{132} \approx 0,34$

avec $0,2 \le f_0 \le 0,8$.

L'intervalle de fluctuation au seuil de 95% est :

$$I_F = \left[0,5 - \frac{1}{\sqrt{132}}\ ;\ 0,5 + \frac{1}{\sqrt{132}}\right] \approx [0,41\ ;\ 0,58].$$

$f_0 \in I_F$ et on rejette l'hypothèse P.

La probabilité qu'un garçon naisse dans cette réserve n'est pas de 0,5.

Les 95% sont illustrés avec le graphique qui suit :

On simule 100 fois le comptage de garçons sur 132 naissances.

Dans 94 simulations, la proportion des garçons nés se trouve dans l'intervalle de fluctuation.

## B.Exercices divers

**1.**Une urne contient des boules de différentes couleurs dont 75% de boules rouges.Ahmed tire une boule au hasard, note la couleur et la remet dans l'urne.

Il prétend avoir effectué cette expérience 60 fois et avoir obtenu 35 boules rouges. Son frère Sidi affirme qu'il n'a pas fait l'expérience sérieusement. On se propose de vérifier s'il a de bonnes raisons de l'affirmer.

1. Déterminer la proportion théorique p et la taille n de l'échantillon.
2. Calculer la fréquence observée f.
3. Calculer l'intervalle de fluctuation $I_f$ au seuil de 95%.
4. Vérifier si la fréquence observée f appartient à l'intervalle de fluctuation $I_f$ et conclure.

**2.**La proportion de personnes aux cheveux châtains en France est d'environ 50%. On a observé un échantillon de 150 personnes dont 89 ont les cheveux châtains. Cet échantillon est-il représentatif de la population ?

**3.**Dans une classe de 37 élèves, un délégué de classe a été élu avec 60% des voix.Parmi les 17 filles,
11 d'entre elles ont voté pour ce délégué.

Les filles sont-elles représentatives des résultats des élections de délégués ?

**4.**Une maladie guérit naturellement dans 70% des cas. Un laboratoire souhaite tester l'efficacité d'un nouveau médicament.

Pour cela, on administre ce médicament à 500 personnes. Pour 77% d'entre elles, la guérison a eu lieu.Que penser de l'efficacité de ce médicament ?

**5.**Un centre commercial n'attire que 22% de clients hors de la communauté urbaine.

Souhaitant élargir sa clientèle, le centre commercial s'agrandit (nouveaux magasins, cinéma, restaurants, ...)

Après les travaux, voulant connaître l'impact de ses investissements, 300 clients sont interrogés : 72
d'entre eux habitent hors de la communauté urbaine.

Peut-on affirmer que l'agrandissement a eu un impact sur la fréquentation des clients hors communautéurbaine.

**6.**Un fournisseur d'accès à Internet disposait de 25% de part de marché avant l'arrivée d'un nouveauconcurrent.

Après l'arrivée de ce concurrent, il effectue une enquête sur un échantillon de 200 foyers et obtient 19% depart de marché.

Peut-il considérer que l'arrivée de ce nouveau concurrent lui a fait perdre des parts de marché.

**7.**Un musée national connaît une proportion de visiteurs français égale à 71%.

Durant l'été, le musée propose une exposition temporaire sur le thème de l'Egypte ancienne.

On souhaite connaître son impact sur la fréquentation des visiteurs français.

Décider si la nouvelle exposition a eu un impact dans les cas suivants :

1. Sur un échantillon de 50 visiteurs, 82% sont français.
2. Sur un échantillon de 500 visiteurs, 77% sont français.

**8.** Fatou a lancé une pièce de monnaie 50 fois. Elle a obtenu 32 fois «pile ».A-t-elle de bonnes raisons de s'étonner du résultat.

**9.**La répartition des groupes sanguins dans le monde est donnée dans le tableau ci-dessous.

| Groupes | O | A | B | AB |
|---|---|---|---|---|
| Fréquences en % | 45 | 40 | 11 | 4 |

Elle est cependant variable selon les ethnies.

1. On a testé le sang de 480 esquimaux et on a trouvé que 211 d'entre eux sont du groupe A.
   a. Déterminer n, p, $f_0$.
   b. Les conditions de calcul de l'intervalle de fluctuation sont-elles réunies ?
   c. Si oui, déterminer l'intervalle de fluctuation.
   d. La proportion du groupe A chez les esquimaux est-elle conforme à la population mondiale ?
2. On a trouvé 62 esquimaux du groupe B.
   Que peut-on dire ?

CHAPITRE 14

# Probabilités

## I. Langage des événements :

**Exemple 1 :**

Lors d'un oral de mathématiques, quatre questions sont posées : une question de probabilité $(P)$ ; une question de statistiques $(S)$ ; une question de géométrie $(G)$ et une question d'algèbre $(A)$.
Chacune de ces questions est écrite sur une feuille pliée et le candidat choisit une des quatre feuilles.
L'ensemble des résultats possibles (éventualités) peut être noté $\Omega = \{P; S; G; A\}$
*« obtenir la question de probabilité »*correspond à $\{P\}$ ;
*« obtenir une question de statistique »*correspond à $\{S\}$ ;
*« obtenir une question de géographie »*correspond à $\Phi$;
*« obtenir une question qui n'est pas de la littérature »* correspond à $\Omega = \{P; S; G; A\}$.

**Définition :**

Soit $\Omega$ l'ensemble des éventualités (résultats possibles) d'une expérience aléatoire ($\Omega$ est appelé univers).
On appelle événement, toute partie de $\Omega$.
$\Phi$ est une partie de $\Omega$, c'est un événement, appelé événement impossible.
$\Omega$ est une partie de $\Omega$, c'est un événement, appelé événement certain.

**Exemple 2 :**

Une urne contient trois boules : une bleue, une rouge, une verte.
On tire une boule de l'urne et on note sa couleur.
L'ensemble des éventualités (univers) est $\Omega = \{B; R; V\}$.
Il y a huit événements $\Phi$ ; $\{B\}$ ; $\{V\}$ ; $\{R\}$ ; $\{B; V\}$ ; $\{B; R\}$ ; $\{V; R\}$ ; $\Omega$.

**Définition :**

La réunion de deux événements $A$ et $B$ est un événement $A \cup B$, appelé aussi événement $''A \text{ ou } B''$.
L'intersection de deux événements $A$ et $B$ est un événement $A \cap B$, appelé aussi événement $''A \text{ et } B''$.
Lorsque deux événements $A$ et $B$ ont une intersection vide ($A \cap B = \Phi$), on dit que ces deux événements sont disjoints ou incompatibles.
On appelle événements contraires d'un événement $A$ et on note $\bar{A}$ l'ensemble de toutes les éventualités qui ne sont pas dans $A$. ($\bar{A}$ est la partie complémentaire de $A$dans $\Omega$).

**Remarque 1 :**

Un événement et son contraire sont incompatibles.

**Exercice 1 :**

On jette un dé dont les faces sont numérotés de 1 à 6 et on s'intéresse au numéro apparaissant sur la face supérieure.
**1°/** Définir l'ensemble des éventualités $\Omega$
**2°/** Ecrire sous forme de parties de $\Omega$ les événements :
$A$ = *« obtenir un numéro inférieur ou égal à 2 »*
$B$ = *« obtenir un numéro impair »*
$C$ = « obtenir un numéro strictement supérieur à 4 »
**3°/** Ecrire sous forme de parties de $\Omega$ les événements :
$A \cup B$ ; $A \cap B$ ; $A \cup C$ ; $A \cap C$ ; $B \cup C$ ; $B \cap C$ ; $\bar{A}$ ; $\bar{A} \cup C$ ; $\bar{A} \cap C$.
Donner pour chacun d'eux une phrase qui le caractérise.
**4°/** Parmi les événements utilisés précédemment, citer deux événements incompatibles qui ne sont pas contraires l'un de l'autre.

## II. Loi de probabilité :

**Exemple 3 :**

On dispose de deux dés dont les faces sont numérotées de 1à 6. L'un est rouge, l'autre bleu.
On s'intéresse au numéro apparaissant sur la face supérieure lorsqu'on jette un de ces dés. En faisant un grand nombre de tirages, on a obtenu les résultats suivants :
Pour le dé rouge :

| Numéro $x_i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Fréquence $f_i$ | 0,163 | 0,166 | 0,166 | 0,167 | 0,168 | 0,167 |

Pour le dé bleu :

| Numéro $x_i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Fréquence $f_i$ | 0,07 | 0,152 | 0,149 | 0,168 | 0,145 | 0,314 |

La donnée des fréquences constitue ce que l'on appelle une distribution de fréquences. Une distribution de fréquences a les propriétés suivantes (valables quelle que soit l'expérience envisagée).
● Pour $i$ on a $f_i \geq 0$ ; ● La somme des $f_i$ est 1 (et par conséquent, pour tout $i$ ; $f_i \leq 1$).

**Remarque 2 :**

● En observant chacune des distributions de fréquences de l'exemple précédent, on peut supposer que le dé bleu pour lequel de fortes variations existent entre les différentes faces n'est pas équilibré, alors que le dé rouge pour lequel la fluctuation est faible est un dé équilibré.

● Il est bien évident que la répartition des fréquences n'est pas stable (c'est ce que l'on appelle la fluctuation d'échantillonnage). Si l'on fait deux séries de 1.000 lancers avec le même dé, on n'obtiendra pas exactement les mêmes résultats. Pour modéliser une expérience aléatoire, on n'pas une distribution de fréquences qui est expérimentale, mais une distribution théorique que l'on appellera loi de probabilité. Le choix de ce modèle théorique est évidemment très important pour la validité des résultats.

**Définition :**

On considère $\Omega = \{\omega_1;\ \omega_2; \dots;\ \omega_n\}$.

On définit une loi de probabilité $p$ sur $\Omega$ en associant à chaque éventualité $\omega_i$ un nombre réel $p(\omega_i) = P_i$, tel que :

- Pour tout $i \in \{1\,;2\,;\dots\,;\ n\}$, $0 \leq P_i \leq 1$.
- $P_1 + P_2 + \dots + P_n = 1$.

On dit que $P_i$ est la probabilité de l'événement $\omega_i$.

Pour tout événement $A$, on appelle probabilité de $A$ la somme des probabilités des éventualités de $A$. Si $A = \{a_1;\ a_2; \dots;\ a_k\}$ on a ;

$$p(A) = p(a_1) + p(a_2) + \dots + p\,(a_k)$$

On a alors $p(\Omega) = 1$ et on pose d'autre part $p(\Phi) = 0$.

**Exemple 4 :**

1) Pour le dé rouge de l'exemple précédent, qui semble équilibré, on supposera que les différentes faces ont la même probabilité d'apparition (on dit que les différentes faces sont équiprobables). On utilisera alors la loi de probabilité définie par :

| Numéro $x_i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Probabilité $P_i$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ |

La probabilité de l'événement $A$ :

« *obtenir un numéro pair* » est alors ;

$p(A) = p(2) + p(\,4) + \dots + p\,(6)$

$= P_2 + P_4 + \dots + P_6 = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0{,}5$

2) Pour le dé bleu qui ne semble pas équilibré, on peut utiliser la loi de probabilité définie par :

| Numéro $x_i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Probabilité $P_i$ | 0,07 | 0,15 | 0,15 | 0,17 | 0,15 | 0,31 |

La probabilité de l'événement $A$ :

« *obtenir un numéro pair* » est alors ;

$p(A) = p(2) + p(\,4) + \dots + p\,(6) = P_2 + P_4 + \dots + P_6$
$= 0{,}15 + 0{,}17 + 0{,}31 = 0{,}63.$

**Remarque 3 :**

Un important théorème de mathématiques, appelé loi de grands nombres peut s'exprimer ainsi : dans le monde théorique défini par une loi de probabilité $P$ sur un ensemble fini, les fréquences des éléments de cet ensemble dans une suite de suite de $n$ expériences identiques et indépendantes tendent vers leur probabilité quand $n$ augmente indéfiniment.

Par exemple si on jette un très grand nombre de fois un dé parfaitement équilibré, la fréquence de chacune des faces tend vers sa probabilité, c'est-à-dire vers $\frac{1}{6}$.

Si on jette un très grand nombre de fois une pièce parfaitement équilibrée, la fréquence de chacune des faces tend vers sa probabilité, c'est-à-dire vers $\frac{1}{2}$.

**Cas particulier :**

Lorsque les éventualités ont toute la même probabilité, on dit qu'elles sont équiprobables ou que la loi de probabilité est uniforme.

$\Omega = \{\omega_1;\ \omega_2; \dots;\ \omega_n\}$, la probabilité de chaque éventualité est $P_0 = \frac{1}{\mathrm{card}(\Omega)} = \frac{1}{n}$

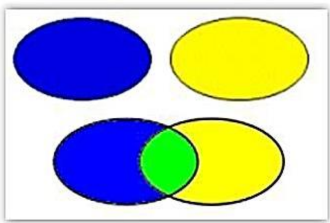
Dans ce cas, la probabilité d'un événement $A$ est le nombre d'éléments de $A$ divisé par le nombre d'éléments de $\Omega$, c'est-à-dire : $p(A) = \frac{\mathrm{card(A)}}{\mathrm{card}(\Omega)}$.

(On dit aussi : $p(A) = \frac{nombre\ de\ cas\ favorables}{nombre\ de\ cas\ possibles}$)

**Remarque 4 :**

On sait déjà (cours dénombrement) que le cardinal d'un ensemble fini est le nombre d'éléments de cet ensemble

- Si $A$ et $B$ sont deux ensembles finis disjoints ($A \cap B = \Phi$) ; $card\ (A \cup B) = card(A) + card(B)$
- Si $A$ et $B$ sont deux ensembles finis quelconques $card\ (A \cup B) = card(A) + card(B) - card(A \cap B)$



**Propriétés**

- Pour tout événement $A$, on a ; $p(A) \in [0; 1]$
- $\bar{A}$ étant le contraire de $A$, on a ; $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$.
- Si $A$ et $B$ sont deux événements quelconques, on a ; $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$.

**Remarque 5 :**

Si $A$ et $B$ sont deux événements incompatibles, on a $A \cap B = \Phi$, donc $p(A \cap B) = 0$.

Alors on peut écrire ; $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.

**Exercice 2:**

Un modèle de voiture est décliné en différentes versions.

Sur le site du constructeur un client pour avoir des informations, clique sur les cases à cocher. Il a :

- Trois choix de moteurs ; Essence, Diesel, GPL
- Deux choix de carrosseres ; 3 portes, 5 portes
- Deux choix de finitions ; Access, initiale

**1°)a)** Reproduire, terminer et compléter l'arbre ci-contre représentant les différents choix.

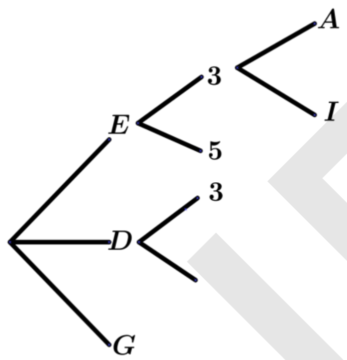
**b)** En déduire le nombre de versions possibles pour ce modèle.

**2°)** Un couple qui se renseigne laisse son enfant cliquer et on considère que l'enfant, qui ne sait pas lire fait un choix au hasard.

**a)** Quelle est la probabilité $p_1$ que l'enfant ait choisi le modèle 5 portes Essence en finition Access ?

**b)** Quelle est la probabilité $p_2$ que l'enfant ait choisi un modèle GPL en finition Initiale ?

**c)** Quelle est la probabilité $p_3$ que l'enfant ait choisi un modèle 3 portes?




**Exercice 3:**

Un jeu de 32 cartes peut être représenté par les 32 cases du tableau suivant :

(Cœur et Carreau sont des cartes de couleur rouge, Pique et Trèfle sont des cartes de couleur noire).

| | As | Roi | Dame | Valet | 10 | 9 | 8 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Cœur ♥** | | | | | | | | |
| **Carreau ♦** | | | | | | | | |
| **Pique** | | | | | | | | |
| **Trèfle ♣** | | | | | | | | |

On tire au hasard une carte dans ce jeu.

**1°)** Quelle est la probabilité de chacune des éventualités ?

**2°)** Quelle est la probabilité des événements suivants ?

**a)** $A$ : « La carte est le roi de Cœur ».

**b)** $B$ : « La carte tirée est rouge ».

**c)** $C$ : « La carte tirée est un As ».

**d)** $D$ : « La carte tirée est un As ou une carte rouge ».

**Exercice 4:**

Une urne contient 20 boules indiscernables au toucher. On considère l'épreuve qui consiste à tirer au hasard une boule de l'urne.

**1°)** Définir l'ensemble $\Omega$ des éventualités (univers) et la probabilité de chacune de ces éventualités.

**2°)** Les 20 boules sont de différentes couleurs : 8 jaunes, 6 rouges, 4 vertes et 2 bleues.

Quelle est la probabilité de chacun des événements suivants :

- $A$ : « La boule tirée est *jaune* ».
- $B$ : « La boule tirée est *rouge* ou *verte* ».
- $C$ : « La boule tirée n'est pas *noire* ».

**Exercice 5 :**

On lance deux dés cubiques dont les faces sont numérotées de 1à 6.

L'un est rouge l'autre est blanc.

Faire un tableau double entrée pour représenter toutes les éventualités.

Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

$A$ : « Obtenir exactement une face numéro 1 ».

$B$ : « Obtenir au plus une face numéro 1 ».

$C$ : « Obtenir au moins une face numéro 1 ».

$D$ : « Le plus petit des deux numéro est 4 ».

$E$ : « La somme des deux numéros est égale à 7 ».

$F$ : « La somme des deux numéros est strictement supérieure à 10 ».

**Exercice 6 :**

Une urne contient 49 boules indiscernables au toucher, numérotées de 1à 49. On tire une boule au hasard.

$A$ est l'événement : « On tire une boule de numéro multiple de 2 ».

$B$est l'événement : « On tire une boule de numéro multiple de 5 ».

Calculer $p(A), p(B), p(A \cap B), p(A \cup B)$.

## III - Variable aléatoire

**Exemple 5 :**

Un jeu consiste à tirer au hasard une carte d'un jeu de 52 cartes. On suppose les éventualités équiprobables. L'ensemble $\Omega$ des tirages d'une carte parmi 52 a pour cardinal ; $card\ (\Omega) = 52$. La probabilité de chaque éventualité est alors ; $p_0 = \frac{1}{52}$.

Pour tout événement $A$ on aura donc $p(A) = \frac{card\ (A)}{card\ (\Omega)}$.

A chaque tirage on associe un gain ou une perte définis de la façon suivante :

• Si on tire un As on gagne 5 UM.

• Si on tire un roi, une dame ou un valet, on gagne 1 UM.

• Dans tous les autres cas, on perd 1 UM.

Soit $X$ le gain algébrique associé à chaque tirage. $X$ peut prendre 5, 1 et $-1$.

En notant $X(\Omega)$ l'ensemble des valeurs que peut prendre $X$, on a $X(\Omega) = \{-1; 1; 5\}$.

On notera ; $(X = 5)$ l'événement : « Le tirage procure un gain de 5 $UM$ ».

$(X = 1)$l'événement : « Le tirage procure un gain de 1 $UM$ ».

$(X = -1)$l'événement : « Le tirage procure une perte de 1 $UM$ ».

• L'événement $(X = 5)$ est aussi l'événement « Tirer un $As$ ».

Sachant que l'on a 4 As dans le jeu de carte, on a quatre choix possibles pour un As, donc ; $card\ (X = 5) = 4$. Par conséquent,

$$p(X = 5) = \frac{card(X = 5)}{card\ (\Omega)} = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

• L'événement $(X = 1)$ est aussi l'événement « Tirer un Roi une Dame ou un Valet ».

Sachant que l'on a 4 Rois, 4 Dames et 4 Valets dans le jeu de carte, on a douze choix possibles, donc ; $card\ (X = 1) = 12$. Par conséquent,

$$p(X = 1) = \frac{card(X = 1)}{card\ (\Omega)} = \frac{12}{52} = \frac{3}{13}$$

• L'événement $(X = -1)$ est aussi l'événement « Tirer une carte qui n'estni un $As$, ni un $Roi$, ni une $Dame$, ni un $Valet$ ».

On a donc trente-six choix possibles, donc ; $card\ (X = -1) = 36$. Par conséquent,

$$p(X = -1) = \frac{card(X = -1)}{card\ (\Omega)} = \frac{36}{52} = \frac{9}{13}$$

On dit que $X$ est une variable aléatoire et on appelle loi de probabilité de $X$ (ou loi transportée par $X$), la donnée des probabilités des évènements ; $(X = -1)$, $(X = 1)$, $(X = 5)$, que l'on peut faire dans un tableau.

| $x_i$ | $-1$ | $1$ | $5$ |
|---|---|---|---|
| $p(X = x_i)$ | $\frac{9}{13}$ | $\frac{3}{13}$ | $\frac{1}{13}$ |

La somme des probabilités des trois événements ; $(X = -1)$, $(X = 1)$, $(X = 5)$ est égale à 1.

L'événement $(X = -1)$ a une probabilité de $\frac{9}{13}$ signifie que statistiquement sur un grand nombre de tirages, la fréquence d'une perte de 1 UM est proche de $\frac{9}{13}$.

Il en est de même pour $(X = 1)$ et pour $(X = 5)$.

On peut alors calculer la moyenne de gain, appelée espérance mathématique de $X$ et notée $E(X)$.

$$E(X) = -1 \times \frac{9}{13} + 1 \times \frac{3}{13} + 5 \times \frac{1}{13}$$
$$= \frac{-9 + 3 + 5}{13} = -\frac{1}{13}$$

Cela signifie que le jeu procure, en moyenne, une perte d'un treizième d'euro à chaque tirage.

**Définition :**

Etant donné un ensemble fini $\Omega$ muni d'une loi de probabilité $p$, on définit une variable aléatoire $X$ sur $\Omega$ en associant à chaque éventualité $\omega$ un nombre réel $x$.

On note $X(\Omega) = \{x_1; x_2; \dots; x_n\}$, l'ensemble des nombres réels ainsi obtenus. On appelle loi de probabilité de la variable aléatoire $X$, la donne des probabilités des événements $(X = x_i)$.

**Remarque 6 :**

• Lorsque l'ensemble $\Omega$ est fini, une variable aléatoire $X$ ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs.

• $(X = x_i)$ est l'ensemble des éventualités pour lesquelles la variable aléatoire $X$ prend la valeur $x_i$.

**Exercice 7 :**

On jette un dé dont les faces sont numérotées de 1à 6.

On définit une variable aléatoire $X$ en associant à chaque tirage le nombre ;

• $-10$ si on tire le numéro 1.

• 0 si on tire les numéros 2, 3, 4 ou 5.

• 10 si on tire le numéro 6.

**1°)** Définir l'ensemble des éventualités $\Omega$ et donner l'ensemble $X(\Omega)$.

**2°)** On suppose que le dé est parfaitement équilibré. Donner la loi de probabilité de $X$.

**3°)** On suppose que le dé est truqué et que les probabilités d'apparition des numéros 1, 2, 3, 4 et 5 sont toutes les cinq égales à 0,12. Donner la loi de probabilité de $X$.

**Exercice 8 :**

On considère une roue partagée en 15 secteurs angulaires égaux numérotés de 1à 15. Ces secteurs sont de différentes couleurs. On fait tourner la roue qui s'arrête sur l'un des 15 secteurs dont on note le numéro. L'ensemble des éventualités est :

$$\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14; 15\}$$

**1°)** Déterminer la probabilité des événements :

$E$ : « Le numéro est le multiple de 5 ».

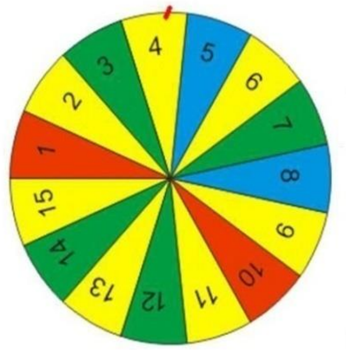
$F$ : « Le numéro n'est pas le multiple de 5 ».

$G$ : « Le numéro est pair et inférieur à 11 ».

$E \cap G$, $E \cup G$.

**2°)** Le secteur 1 et 10 sont de couleur rouge.

Les secteurs 5 et 8 sont de couleur bleue
Les secteurs 3, 7, 12 et 14 sont de couleur verte.
Les autres secteurs sont de couleur jaune.




On définit la variable aléatoire $X$ en associant à la couleur bleue le nombre 100. A la couleur rouge le nombre 30. A la couleur verte le nombre 10. A la couleur jaune le nombre 0.
Donner la loi de probabilité de $X$.

## Définition :

On considère un ensemble fini $\Omega$ muni d'une loi de probabilité $p$ et $X$ une variable aléatoire numérique. On note $X(\Omega) = \{x_1;\ x_2; \ldots;\ x_n\}$.

- On appelle espérance mathématique de $X$ le nombre réel :

$$E(X) = x_1 \times p(X = x_1) + x_2 \times p(X = x_2) + \cdots + x_n \times p(X = x_n) \Leftrightarrow E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \times p(X = x_i)$$

- On appelle variance de $X$ le nombre réel (positif) :

$$V(X) = \left(x_1 - E(X)\right)^2 \times p(X = x_1) + \left(x_2 - E(X)\right)^2 \times p(X = x_2) + \cdots + \left(x_n - E(X)\right)^2 \times p(X = x_n)$$

$$\Leftrightarrow V(X) = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - E(X)\right)^2 \times p(X = x_i) \Leftrightarrow V(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i)^2 \times p(X = x_i) - E(X)^2$$

- On appelle écart-type de $X$ le nombre réel (positif) : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

## Remarque 7 :

Lorsqu'on répète un grand nombre de fois une expérience, la fréquence de chaque résultat est proche de sa probabilité. L'espérance mathématique correspond donc à la moyenne sur un grand nombre d'expériences. De même les définitions de la variance et de l'écart-type étant identiques aux définitions données pour une série statistique on pourra utiliser une calculatrice en mode statistiques en remplaçant les valeurs des fréquences par les valeurs des probabilités.

- L'espérance mathématique est une mesure de tendance centrale.
- L'écart-type est une mesure de dispersion.

## Exercice 9 :

Une urne contient douze boules. Six boules sont vertes, cinq sont rouges et une est blanche. On tire au hasard une boule de l'urne. On définit une variable aléatoire $G$ en associant à ce tirage un gain ou une perte ( la perte sera considérée comme un gain négatif).

- Si la boule tirée est verte, on perd trois UM.
- Si la boule tirée est rouge, on gagne un UM.
- Si la boule tirée est blanche, on gagne dix UM.

Compléter, en justifiant, le tableau suivant donnant la loi de probabilité de $G$.

| Gain | $-3$ | 1 | 10 |
|---|---|---|---|
| Probabilité | | | |

Calculer l'espérance mathématique de $G$. Interpréter le résultat.

## Exercice 10 :

On jette simultanément deux dés équilibrés dont les faces sont numérotés de 1à 6.

**1°)** Quelle est la probabilité d'obtenir un double 6 ?

**2°)** Quelle est la probabilité d'obtenir deux numéros dont la somme est 4 ?

**3°)** On appelle $S$ la somme des deux numéros obtenus. Donner la loi de probabilité de $S$. Calculer l'espérance mathématique de $S$.

**4°)** En utilisant la calculatrice, déterminer l'écart-type de $S$.

## Exercice 11 :

On jette une pièce de monnaie. On appelle $X$ la variable aléatoire qui associe le nombre 3 au tirage de pile et 5 au tirage de face.

**1°)** On suppose la pièce parfaitement équilibrée, déterminer alors l'espérance mathématique $E(X)$, la variance $V(X)$ et l'écart-type $\sigma(X)$ de la variable aléatoire $X$.

**2°)** La pièce n'est peut-être pas parfaitement équilibrée, on note $p$ la probabilité d'obtenir face.

**a)** Exprimer en fonction de $p$ l'espérance mathématique $E(X)$, la variance $V(X)$ et l'écart-type $\sigma(X)$ de la variable aléatoire $X$.

**b)** Démontrer que l'on a $3 \leq E(X) \leq 5$.

**c)** Déterminer les valeurs de $p$ pour lesquelles l'écart-type est maximum ou minimum.
A quelle situation cela correspond-t-il ?

**Exercice 12 :**

On jette trois fois de suite une pièce de monnaie et on appelle ''tirage'' le résultat obtenu.

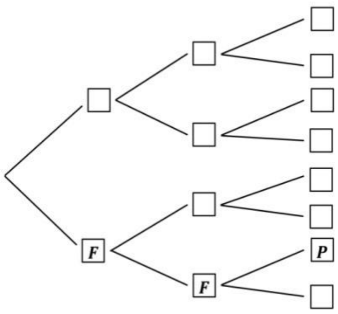
(Face ; Face ; Pile) est ainsi un tirage noté $FFP$.

Compléter l'arbre ci-contre et donner le nombre de tirages possibles.

En supposant que ces tirages sont équiprobables, déterminer la probabilité pour que le deuxième jet de la pièce donne ''Face''.

A chaque tirage on associe 20 points pour ''Pile'' et 10 points pour ''Face'' et on note $X$ la somme des points obtenus.

Donner la loi de probabilité de $X$ et calculer son espérance mathématique.




**Exercice 13 :**

On jette trois fois de suite une pièce de monnaie.

**1°)** Si on tire trois fois ''Pile'' ou trois fois ''Face'' on gagne 100 UM. Sinon on perd 10 UM (ce qui correspond à un gain négatif de $-10$ UM).

En utilisant une calculatrice en mode statistiques, déterminer l'espérance mathématique, l'écart-type et la variance associé à ce jeu.

**2°)** On rajoute 5 UM aux gains de la question précédente, c'est-à-dire que si on tire trois fois ''Pile'' ou trois fois ''Face'' on gagne 105 UM. Sinon on perd 5 UM. Que pensez-vous des valeurs de l'espérance mathématique, de l'écart-type et de la variance ? Vérifiez avec la calculatrice.

**3°)** On multiplie par 2 les gains du 1°), c'est-à-dire que si on tire trois fois ''Pile'' ou trois fois ''Face'' on gagne 200 UM. Sinon on perd 20 UM. Que pensez-vous des valeurs de l'espérance mathématique, de l'écart-type et de la variance ? Vérifiez avec la calculatrice.

**Propriété :**

Si on applique aux valeurs d'une variable aléatoire $X$ une transformation affine : $x \longmapsto ax + b$, alors :

- La moyenne de la nouvelle variable aléatoire est obtenue à partir de la moyenne de la variable d'origine en appliquant cette même transformation affine : c'est-à-dire $E(aX + b) = aE(X) + b$.
- La variance de la nouvelle variable aléatoire est obtenue à partir de la variance de la variable d'origine en multipliant par $a^2$ :
c'est-à-dire $V(aX + b) = a^2V(X)$.
- L'écart-type de la nouvelle variable aléatoire est obtenu à partir de l'écart-type de la variable d'origine en multipliant par la valeur absolue de $a$ :
C'est-à-dire $\sigma(aX + b) = |a|\sigma(X)$.

**Exercice 14 :**

Dans une ville comportant 12.000 ménages, une enquête portant sur les habitudes des ménages en matière d'écologie a donné les résultats suivants :

- 8.400 ménages pratiquent le tri sélectif.
- Parmi les ménages pratiquant le tri sélectif, 40% consomment des produits bio.
- Parmi les ménages ne pratiquant pas le tri sélectif, 360 consomment des produits bio.

On choisit un ménage au hasard (tous les ménages ont la même probabilité d'être choisis) et on note :

$T$ L'événement « Le ménage pratique le *tri sélectif* », et $\overline{T}$ son événement contraire.

$B$ L'événement « Le ménage consomme des produits *bio* », et $\overline{B}$ son événement contraire.

1°) Déterminer $p(T)$ ; $p(\overline{T} \cap B)$ ; $p(T \cap B)$.

2°) Justifier que $p(B) = 0{,}31$.

3°) Cette ville décide de favoriser les ménages ayant un comportement éco-citoyen.

Pour cela, elle donne chaque année un chèque de 500 UM aux ménages qui pratiquent le tri sélectif et un chèque de 200 UM aux ménages qui consomment les produits bio (les deux montants peuvent être cumulés). Soit $S$ la somme d'argent reçue par un ménage choisi au hasard.

a) Donner les différentes valeurs que peut prendre $S$.

b) Donner la loi de probabilité de $S$.

c) Calculer l'espérance mathématique de $S$ et interpréter le résultat. Déterminer la variance et l'écart-type de $S$.

d) Dans l'hypothèse où la ville doublerait le montant des chèques, quel seraient l'espérance mathématique, la variance et l'écart-type de $S$.

**Exercice 15 :**

Un restaurant propose à sa carte deux types de dessert : un assortiment de macarons et une part de tarte Tatin. Chaque client choisit un plat à 80 UM et un dessert. L'assortiment de macaron est vendu 40 UM et la tarte Tatin 50 UM. Il peut prendre éventuellement un supplément un café à 20 UM.

Le restaurant a eu 150 clients et 70% d'entre eux ont choisi comme dessert l'assortiment de macarons. Le restaurateur a remarqué que :

- Parmi les clients ayant pris un assortiment de macarons, 80% prennent un café.

● Parmi les clients ayant pris une part de tarte Tatin, 60% prennent un café.

On interroge au hasard un client de ce restaurant et on considère la variable aléatoire $S$ à la somme payée par le client.

**a)** Donner les valeurs prises par $S$ et la loi de probabilité de $S$.

**b)** Calculer l'espérance mathématique de $S$ et interpréter le résultat.

**Exercice 16 :**

On jette cinq fois de suite une pièce bien équilibrée. On appelle tirage le résultat obtenu. On considère la variable aléatoire $G$ qui à chaque tirage associe 50 si on obtient cinq résultats identiques. 10si on obtient quatre résultats identiques (et quatre seulement), $-15$ dans les autres cas.

Déterminer la loi de probabilité, l'espérance mathématique et l'écart-type de $G$.

## IV. Probabilité conditionnelle :

Une probabilité conditionnelle est une probabilité, à la différence que l'on sait déjà quelque chose.

Par exemple, en lançant un dé, on peut chercher la probabilité d'avoir un 4 **sachant** que l'on a obtenu un nombre pair.

Il y a un mot fondamental à retenir ici : ''sachant''. Tout simplement parce que souvent dans les questions il y a ce mot (ou un mot qui a le même sens), ce qui indique qu'il faut calculer une probabilité conditionnelle.

Au niveau de la notation, on écrit : $P_B(A)$ et on lit « $p$ *de* $A$ *sachant* $B$ »ou

« $p$ *de* $A$ *sachant que* $B$ *est réalisé* ».

Cela signifie que l'on cherche la probabilité de l'événement $A$ sachant que l'événement $B$ s'est produit.

Dans notre exemple, on cherche la probabilité d'obtenir 4 sachant que l'on a un nombre pair, donc :

$A$ = « *obtenir un* 4 » *et* $B$ =

« *avoir un nombre pair* ».

Il y a bien sûr une formule pour calculer cette probabilité conditionnelle : $p_B(A) = \frac{p(A\cap B)}{p(B)}$

Reprenons notre exemple : $A$ = « *obtenir un* 4 »

*et* $B$ = « *avoir un nombre pair* ».

$$p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$$

$$= \frac{p(obtenir\ un\ 4\ \cap obtenir\ un\ nombre\ impair)}{p(obtenir\ un\ nombre\ pair)}$$

Pour le dénominateur c'est facile, il y a 3 nombres pairs et 6 nombres au total, donc :

$$p\ (obtenir\ un\ nombre\ pair) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Au numérateur c'est différent : $A = obtenir\ un\ 4 = \{ 4 \}$, et $B = obtenir\ un\ nombre\ pair = \{2 ; 4 ; 6\}$, donc $A \cap B = \{ 4 \}$. Ainsi :

$$p(obtenir\ un\ 4 \cap obtenir\ un\ nombre\ pair) = p(4)$$

$$= \frac{1}{6}$$

On n'a plus qu'à remplacer : $p_B(A) = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$

**Remarque 8 :**

Ne confonds pas le $A$ et $B$, la probabilité que tu cherches est dans la parenthèse, et l'événement que tu connais est en indice juste après le $p$ : $p_B(A)$

N'inverse pas le $A$ et le $B$ (ça peut être d'autres lettres bien sûr), c'est une erreur classique.

## B.Exercices divers

**1.**Dans un jeu de 52 cartes, on tire successivement sans remise 4 cartes.
1)Calculer le nombre de cas possibles.
2)Calculer le nombre de cas donnant :
a) Les cartes de la même couleur,
b) Les cartes contiennent un roi,
c) Les cartes de même niveau,
d) Les cartes contiennent au moins une dame,
e) Les cartes contiennent au plus un valet.
3) Calculer les probabilités des évènements a), b), c), d), e).

**2.**Dans une classe de 20 élèves (8 filles et 12 garçons), le professeur veut former une équipe de 5 personnes.
1°/Donner le nombre de cas possible.
2°/ Déterminer le nombre de cas donnant :
a) Le groupe est du même sexe.
b) Le groupe contient Meyne.
c) Le groupe contient exactement deux filles.
d) Le groupe contient au moins un garçon.
e) Le groupe contient Ahmed et Fatma.
3°/ Calculer les probabilités des évènements a), b), c), d), e).

**3.**Une urne contient 7 jetons numérotés de 1 à 7. On tire successivement et sans remise 3 jetons de cette urne.
Calculer le nombre de tirages possibles.
Quelle est la probabilité des évènements suivants :
a) Les jetons tirés sont pairs ?
a) Les jetons tirés sont impairs ?

**4.**Dans une salle il y a 10 chaises, 10 personnes entrent dans cette salle pour s'y installer. Calculer le nombre de dispositions possibles.

**5.**Une classe de 29 élèves procède à un tirage au sort pour désigner une commission de trois membres de cette classe.
**1°/** Calculer le nombre de commissions possibles dans chacun des deux cas suivants :
a) La commission est composée d'un coordinateur, d'un responsable sportif et d'un responsable culturel.
b) La commission est composée de trois élèves sans tâche particulière.
2°/ Calculer dans le deuxième cas, le nombre de commissions qui comportent exactement deux garçons sachant qu'il y a exactement 7 filles dans cette classe.

**6.**Une urne contient quatre boules vertes numérotées de 1 à 4, trois boules rouges numérotées de 1 à 3 et deux boules jaunes numérotées 1 à 2. On tire simultanément trois boules de cette urne.
**1°/** Calculer le nombre de tirages possibles.
**2°/** Calculer le nombre de tirages dans chacun des cas suivants :
a) Les trois boules tirées sont vertes.
b) Le tirage est unicolore.
c) Le tirage est tricolore.
d) Le triage est bicolore.
e) Le tirage comporte exactement deux boules rouges.
f) Le tirage ne comporte aucune boule jaune.
g) Le tirage comporte au moins une boule jaune.
h) Les numéros des boules sont identiques.

**7.**Une urne contient 12 boules ; 5 rouges, 3 vertes et 4 blanches. On tire simultanément 3 boules de l'urne.
1°/ Déterminer le nombre de cas possibles.
2°/ Déterminer le nombre de cas donnant :
a) Les trois boules tirées sont de même couleur.
b) Les trois boules tirées de couleurs différentes.
c) Les trois boules tirées contiennent au moins une verte.
d) Les trois boules tirées contiennent exactement deux de même couleur.

**8.**L'allumage d'une grande salle de jeux, est assuré par 10 ampoules commandées chacune par un interrupteur. Combien y-t-il de manières différentes d'éclairer cette salle ?

**9.**Combien de façons différentes a-t-on pour ranger 3 livres dans 5 casiers de couleurs différentes ne pouvant contenir chacun qu'un seul livre?

**10**Une caisse contient 7 boules indiscernables au toucher.
1) On tire au hasard successivement avec remise 3 boules de la caisse. Quel est le nombre de tirages possibles ?
2) On tire maintenant successivement sans remise 3 boules de la caisse. Quel est le nombre de tirages possibles ?
3) On tire maintenant simultanément 3 boules de la caisse. Quel est le nombre de tirages possibles ?