REPUBLIQUE ISLAMIQUE DE MAURITANIE

Honneur - Fraternité - Justice

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE
ET DE LA REFORME DU SYSTEME EDUCATIF

INSTITUT PEDAGOGIQUE NATIONAL

MATEMATIQUE

7EME C

AVANT – PROPOS

Chers collègues professeurs, Chers élèves,

L'institut Pédagogique National a le plaisir de présenter à la famille scolaire un projet de manuel de l'élève pour la 7ème année secondaire ; -série Mathématiques- conformément aux nouveaux programmes réécrits selon la vision holistique.

Ce document a été réalisé dans des conditions marquées par l'urgence afin qu'il soit disponible dès la rentrée 2024 – 2025. Il sera ensuite amélioré, corrigé et mis à niveau dans sa prochaine version en tenant compte de vos remarques et suggestions.

Il a été procédé à l'adoption d'une méthodologie particulière mettant l'accent sur les points essentiels dans le programme suivant une approche pragmatique qui privilégie les aspects pratiques et les savoir-faire.

Ce choix est traduit par la segmentation du programme en termes de chapitres (15) et la mise en œuvre d'une structure de chapitre permettant aux différents utilisateurs d'en tirer profit.

Cette structure est ainsi conçue:

- " **Faire- savoir**" : permet de déterminer **l'essentiel du chapitre** sous forme de résumé des points essentiels et incontournables.
- " **Savoir – faire** ": permet à l'élève de mettre ses capacités à l'exercice, dans un premier temps, en traitant des **applications** directes du cours et dans un deuxième temps en passant aux **Exercices** de niveau avancé.

L'IPN souhaite que les utilisateurs de ce projet de manuel leur fassent parvenir leurs remarques et suggestions constructives pour qu'il puisse en tenir compte dans la prochaine édition.

Les auteurs :

Mohameden O / Bah
Inspecteur de l'enseignement secondaire
El Jed O / Moctar
Professeur de l'enseignement secondaire

Mohameden O/ El Hadi
Inspecteur de l'Enseignement Secondaire
Yesleck O / Bamba O / Tiyib
Professeur de l'enseignement secondaire

Maquettiste:

Oumry Ahmed Bebba I.P.N

Revisé par :

Ely Med Abdella Professeur de l'enseignement secondaire
Mohameden Bah Inspecteur de l'enseignement secondaire

IPN

Table des matières

CHAPITRE 1

Systèmes linéaires et matrices

Faire savoir

L'essentiel du chapitre

I. Systèmes linéaires – Définitions :

Définition 1 :

On appelle système linéaire de **n** équations aux **p** inconnues x_1 ; x_2 ; …x_p le système

$$(S)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \ldots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \ldots + a_{2p}x_p = b_2 \\ . \\ . \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 \ldots + a_{np}x_p = b_n \end{cases} \quad \text{où} \quad a_{11},\ldots,a_{1p},\ldots,a_{np} \;\text{ et }\; b_1,\ldots,b_n \;\text{ sont des réels donnés.}$$

- On dit aussi que (S) est un système à **n** lignes et **p** colonnes.
- Si **n = p**, **(S)** est un système carré.
- Les réels $a_{11}, a_{22} \ldots a_{nn}$ sont les coefficients diagonaux du système. Lorsque les coefficients situés sous la diagonales sont nuls ($a_{ij} = 0$, pour tous **i** et **j** tels que **i > j**), le système est triangulaire supérieur.
- Une solution de **(S)** est un p-uplet **(** x_1 ; x_2 ; …,x_p**)** vérifiant simultanément les **n-** équations. Résoudre **(S)** c'est déterminer l'ensemble de ces solutions.

Exemple 1 :

$$(S_1)\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = 8 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 = 14 \end{cases} \quad ; \quad (S_2)\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ \quad\;\; x_2 - x_3 = 4 \\ \quad\quad\quad 2x_3 = -6 \end{cases}$$

(S_2) est carré et triangulaire supérieur ; **(7 ; 1 ; -3)** est une solution de **(S_1)** et **(S_2).**

Définition 2 :

Deux systèmes **(S)** et **(S')** sont équivalents s'ils ont le même ensemble de solutions, autrement dit si toute solution de **(S)** est solution de **(S')** et réciproquement.

II. Opérations élémentaires sur les systèmes :

1. Codage :

On note L_i la $i^{ème}$ ligne d'un système **(S)** .

Le tableau ci-dessous rassemble les opérations élémentaires sur les lignes de (S) et leur codage.

Opération élémentaire	codage
Echange des lignes **i** et **j**	$L_i \leftrightarrow L_j$
Multiplication de la ligne **i** par α ($\alpha \neq 0$)	$L_i \leftarrow \alpha L_i$
Addition à la ligne **i** d'un multiple de la ligne **j** (λ réel quelconque)	$L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$

Théorème :

On passe d'un système (S) à un système (S') équivalent :

- en échangeant l'ordre des inconnues de (S), ce qui revient à échanger deux colonnes de (S).
- en suppriment dans (S) deux lignes identiques
- en procédant à une opération élémentaire sur les lignes de (S).

Exemple 2 :

Transformons le système (S) $\begin{cases} x+y+z+t=1 \\ x+y+2z+2t=1 \\ x+3y+3z+t=3 \\ 2x+3y+z+t=4 \end{cases}$ par $\begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1 \end{matrix}$ $\begin{cases} x+y+z+t=1 \\ z+t=0 \\ 2y+2z \quad =2 \\ y-z-t=2 \end{cases}$

$L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_3 \begin{cases} x+y+z+t=1 \\ y+z=1 \\ z+t \; =0 \\ y\text{-}z\text{-}t \; =2 \end{cases}$; $L_4 \leftarrow L_4 - L_2 \begin{cases} x+y+z+t \; =1 \\ y+z \; =1 \\ z+t \; =0 \\ \text{-}2z\text{-}t \; =1 \end{cases}$; $L_4 \leftarrow L_4 + 2L_3 \begin{cases} x+y+z+t \; =1 \\ y+z \; =1 \\ z+t \; =0 \\ t \; =1 \end{cases}$

Le système obtenu est triangulaire supérieur. Il se résout aisément par substitution. Il a une solution unique **(-1 ; 2 ; -1 ; 1)**.

III. Méthode de Gauss :

1. Exposé de la méthode :

L'idée

Il s'agit, par étapes successives, de transformer un système **(S)** en un système triangulaire supérieur **(S')**, qui lui est équivalent.

Résoudre un tel système **(S')** sera dès lors une chose aisée, par substitution.

Les étapes ;

a) On place en $\mathbf{L_1}$ une ligne où le coefficient de $\mathbf{x_1}$ est non nul (une telle ligne existe, et ce coefficient est appelé **Pivot**.)
   On élimine l'inconnue $\mathbf{x_1}$ dans $\mathbf{L_2}, \dots, \mathbf{L_n}$ par $\mathbf{L_i \leftarrow L_i + \lambda L_1}$ (λ à calculer pour chaque $\mathbf{i \geq 2}$)

b) S'il existe parmi $\mathbf{L_2, \dots, L_n}$ une ligne où le coefficient de $\mathbf{x_2}$ est non nul, on la place en $\mathbf{L_2}$, et on utilise ce coefficient comme nouveau pivot.
   On élimine l'inconnue $\mathbf{x_2}$ dans $\mathbf{L_3, \dots, L_n}$ par $\mathbf{L_i \leftarrow L_i + \lambda L_2}$

c) Ainsi de suite, jusqu'à obtenir une forme triangulaire.

2. Mise en œuvre :

Exemple 3 :

Résoudre le système $\begin{cases} 2a+b-c-d \; =-18 \\ a+b+c+d \; = \; 0 \\ 3a+5c \quad = \; 1 \\ a+b-7c+13d=-40 \end{cases}$

Solution

Pour éviter des calculs fractionnaires, il est préférable de travailler avec un premier pivot égal à 1.

Nous procédons donc ainsi :

① $L_1 \leftrightarrow L_2 \begin{cases} \boxed{1}a+b+c+d \; =0 \\ 2a+b-c-d \; = \; -18 \\ 3a+5c \quad = \; 1 \\ a+b-7c+13d=-40 \end{cases}$; ② $\begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{matrix}$ $\begin{cases} a+b+c+d \quad = \; 0 \\ \boxed{-1}b-3c-3d \; =-18 \\ -3b+2c\text{ -}3d \; = \; 1 \\ -8c+12d \quad =-40 \end{cases}$

3 $L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2$ $\begin{cases} a+b+c+d & = 0 \\ -b-3c-3d & = -18 \\ \boxed{11}c + 6d & = 55 \\ -8c+12d & = -40 \end{cases}$ 4 ; $L_4 \leftarrow L_4 + \frac{8}{11}L_3$ $\begin{cases} a+b+c+d & = 0 \\ -b-3c-3d & = -18 \\ 11c + 6d & = 55 \\ \frac{180}{11}d & = 0 \end{cases}$

Du dernier système, nous déduisons successivement : **d = 0 ; c = 5 ; b = 3 ; a = -8.**

L'ensemble de solutions est $S = \{(-8\ ;\ 3\ ;\ 5\ ;\ 0)\}$; solution unique.

3. Cas particuliers :

Un système linéaire n'a pas toujours une solution unique, même s'il est carré. Nous en utilisons ici deux exemples résolus par la méthode de Gauss.

Exemple 4 :

Résoudre le système $\begin{cases} 1x-3y+2z & = 1 \\ 5x+y+z & = -4 \\ -2x-10y+5z & = 7 \end{cases}$; $\begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - 5L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1 \end{matrix}$ $\begin{cases} 1x-3y+2z & = 1 \\ \boxed{16}y-9z & = -9 \\ -16y+9z & = 9 \end{cases}$; $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$

$\begin{cases} x-3y+2z & = 1 \\ 16y-9z & = -9 \\ 0 & = 0 \end{cases}$; On peut exprimer (par exemple) **z**, puis **x**, en fonction de **y** :

$z = \frac{16}{9}y + 1$; $x = \frac{-5}{9}y - 1$; L'ensemble des solutions contient une infinité de triplets :

$S = \left\{(-\frac{5}{9}y\text{-}1\ ;\ y\ ;\ \frac{16}{9}y+1)\ ;\ \text{où } y \in \mathbb{R}\right\}$

Exemple 5 :

Résoudre le système $\begin{cases} \boxed{1}x_1 - 2x_2 - 3x_3 & = 1 \\ 5x_1 - 3x_2 + x_3 & = 2 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 & = 3 \\ x_1 + 7x_3 & = 4 \end{cases}$; $\begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - 5L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{matrix}$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 & = 1 \\ \boxed{-13}x_2 + 16x_3 & = -3 \\ -7x_2 + 10x_3 & = 0 \\ -2x_2 + 10x_3 & = 3 \end{cases}$;

$\begin{matrix} L_3 \leftarrow L_3 - \frac{7}{13}L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - \frac{2}{13}L_1 \end{matrix}$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 & = 1 \\ -13x_2 + 16x_3 & = -3 \\ \frac{18}{13}x_3 & = \frac{21}{13} \\ \frac{98}{13}x_3 & = \frac{45}{13} \end{cases}$; $L_4 \leftarrow L_4 - \frac{98}{18}L_3$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 & = 1 \\ -13x_2 + 16x_3 & = -3 \\ \frac{18}{13}x_3 & = \frac{21}{13} \\ 0 & = -\frac{16}{3} \end{cases}$;

La dernière équation n'ayant pas de solution, l'ensemble de solutions est vide.

$S = \Phi$

IV. Matrices, déterminants et systèmes d'équations linéaires :

1. Notion de matrice :

a. Définitions :

Une matrice de format $n \times m$ ou (n,m) est un tableau rectangulaire de nombres réels, de nm éléments, rangés en n lignes et m colonnes. n et m sont les ***dimensions*** de la matrice.

Exemple 6 : $A = \begin{bmatrix} -6 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ avec $n = 2$ et $m = 3$.

Remarque 1 :

On se limitera aux cas de matrices dimensions (n,m) tels que : $1 \le n \le 3$ et $1 \le m \le 3$

Pour nommer une matrice, on utilise une lettre majuscule.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{13} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{31} & \dots & a_{33} \end{bmatrix} \text{ ou } A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{13} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{31} & \dots & a_{33} \end{pmatrix}$$

On note $\left[a_{ij}\right]$ ou $\left(a_{ij}\right)$ la matrice d'élément général a_{ij}. On écrit donc : $A = \left[a_{ij}\right]$ ou $A = \left(a_{ij}\right)$

Le coefficient a_{ij} se trouve à l'intersection de la $i^{ème}$ ligne et la $j^{ème}$ colonne.

Si $m = 1$, la matrice est appelée *vecteur-colonne* : $A = \begin{bmatrix} a_{11} \\ \dots \\ a_{31} \end{bmatrix}$

Si $n = 1$, la matrice est appelée *matrice ligne* : $A = \left(a_{11}, \dots, a_{13}\right)$

b. Matrice carrée :

Si $m = n$; la matrice est appelée matrice carrée d'ordre n

- La matrice $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ est une matrice carrée 2×2 ou d 'ordre 2.
- La matrice $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ est une matrice carrée 3×3 ou d'ordre 3.

c. Quelques matrices carrées particulières : (Exemples avec $n = 2$ et $n = 3$)

Matrice unité ou identité d'ordre 2 notée $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Matrice unité ou identité d'ordre 3 notée $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Matrice diagonale, d'ordre 2 est $D_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}$ **et d'ordre 3 est** $D_3 = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$

Remarque 2 :

Si tous les coefficients sont nuls, alors la matrice est dite matrice nulle notée 0.

2. Calcul matriciel :

a. Opérations sur les matrices :

Addition, soustraction :

L'addition et la soustraction des matrices se font terme à terme. Les matrices doivent avoir les mêmes dimensions :

Exemple 7 :

$$\begin{bmatrix}-6 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}5 & -3 & 0\\ -1 & 1 & -4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & -1 & 3\\ -1 & 2 & 0\end{bmatrix} \text{ et } \begin{bmatrix}-6 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}5 & -3 & 0\\ -1 & 1 & -4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-11 & 1 & 3\\ 1 & 0 & 8\end{bmatrix}.$$

Multiplication par un réel :

Chaque terme de la matrice est multiplié par le nombre :

$$3\times\begin{bmatrix}-6 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-18 & 6 & 9\\ 0 & 3 & 12\end{bmatrix} \text{ et } -2\times\begin{bmatrix}-6 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-12 & -4 & -6\\ 0 & -2 & -8\end{bmatrix}.$$

Transposition :

La transposée ${}^t\mathbf{A}$ **(ou** $\mathbf{A}^t$**)** d'une matrice **A** est la matrice obtenue en échangeant les lignes et les colonnes de **A** :

$${}^t\mathrm{A}={}^t\begin{bmatrix}-6 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-6 & 0\\ 2 & 1\\ 3 & 4\end{bmatrix}.$$

Multiplication de matrices :

Le produit de la matrice $\mathbf{A(n\times m)}$ par la matrice $\mathbf{B(m\times p)}$ est la matrice $\mathbf{C(n\times p)}$ telle que l'élément $\mathbf{c_{ij}}$ est égal de la ligne i de la matrice **A** par la colonne j de la matrice **B**.

$$\mathbf{c_{ij}=\sum_{k=1}^{m}a_{ik}b_{kj};\quad pour\ i=1;\ldots;n\ et\ j=1;\ldots;p.}$$

Remarque 3 :

Le produit $\mathbf{A\times B}$ de deux matrices **A** et **B** existe si le nombre de colonnes de **A** est égal au nombre de lignes de B.

Exemple 8 :

$$\begin{bmatrix}-6 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 4\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3 & 2\\ 4 & 1\end{bmatrix}$$; on a en effet, effectué les produits ligne par colonne :

$$\begin{bmatrix}-6 & 2 & 3\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 1\end{bmatrix}=-3 \text{ et } \begin{bmatrix}-6 & 2 & 3\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 0\end{bmatrix}=2\ ;\begin{bmatrix}0 & 1 & 4\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 1\end{bmatrix}=4 \text{ et } \begin{bmatrix}0 & 1 & 4\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 0\end{bmatrix}=1.$$

b. Propriétés :

• L'addition des matrice est : - **Associative :** $A+B+C=(A+B)+C=A+(B+C)$ - **Commutative :** $A+B=B+A$. - $A+O=O+A=A$ - $\mathbf{A-B=A+(-B)}$ Le produit matriciel est : - **Associatif :** $A.B.C=(A.B).C=A.(B.C)$ - Distributif par rapport à l'addition : $A.(B+C)=A.B+A.C$ - Non commutatif : $A.B$ n'est pas égal à $B.A$ en général.	Puissance d'une matrice : Soit A une matrice carrée d'ordre n, on a : $\mathbf{A^0=I}$ **et** $\mathbf{A^{p+1}=A^p\times A}$ - La matrice unité I est *élément neutre* pour la multiplication et $\mathbf{A(n\times m)}$ une matrice : $A.I_m=I_n.A=A$, si la matrice A est de dimensions $n\times m$. • Transposée et matrice : ${}^t({}^t\mathrm{A})={}^t\mathrm{A}$; $(A+B)^t=A^t+B^t$; ${}^t(k\mathrm{A})=k({}^t\mathrm{A})$; $(A.B)^t=B^t.A^t$

La matrice $(-1)\times A$ se note $-A$ et s'appelle la matrice opposée de A $\alpha(\mathbf{A}+\mathbf{B})=\alpha\mathbf{A}+\alpha\mathbf{B}$; $(\alpha+\beta)\mathbf{A}=\alpha\mathbf{A}+\beta\mathbf{A}$ **et** $\alpha(\beta\mathbf{A})=(\alpha\beta)\mathbf{A}$ La matrice nulle est un élément absorbant : $A\times O=O$ et $O\times A=O$	${}^t\mathbf{A}=\mathbf{A}$ (A est dite : **Matrice symétrique)** ; ${}^t\mathbf{A}=-\mathbf{A}$ (A est dite **Matrice antisymétrique) ;** Pour toute matriceA, le produit ${}^t\mathbf{A}\,\mathbf{A}$ est une matrice carrée symétrique et les éléments de sa diagonale principale sont positifs.

3. Déterminant d'une matrice carrée d'ordre 2 ou d'ordre 3 :

Pour une matrice $\mathbf{2\times2}$, $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{a} & \mathbf{b}\\ \mathbf{c} & \mathbf{d}\end{pmatrix}$, le nombre $\mathbf{ad-bc}$ est appelé ***déterminant* de** la matrice ***A***,

noté : $\begin{vmatrix}\mathbf{a} & \mathbf{b}\\ \mathbf{c} & \mathbf{d}\end{vmatrix}$ **ou** $|\mathbf{A}|$ **ou det A.**

Pour une matrice $\mathbf{3\times3}$, $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{a_{11}} & \mathbf{a_{12}} & \mathbf{a_{13}}\\ \mathbf{a_{21}} & \mathbf{a_{22}} & \mathbf{a_{23}}\\ \mathbf{a_{31}} & \mathbf{a_{32}} & \mathbf{a_{33}}\end{pmatrix}$, on pose : $\mathbf{A'}=\begin{pmatrix}\mathbf{a_{11}} & \mathbf{a_{12}} & \mathbf{a_{13}}\\ \mathbf{a_{21}} & \mathbf{a_{22}} & \mathbf{a_{23}}\\ \mathbf{a_{31}} & \mathbf{a_{32}} & \mathbf{a_{33}}\\ \mathbf{a_{11}} & \mathbf{a_{12}} & \mathbf{a_{13}}\\ \mathbf{a_{21}} & \mathbf{a_{22}} & \mathbf{a_{23}}\end{pmatrix}$

➢ Méthode de Sarrus :

- On recopie les deux premières lignes comme dans A′
- On calcule la somme S_1 des produits des diagonales descendantes.

  $S_1=\mathbf{a_{11}\,a_{22}\,a_{33}}+\mathbf{a_{21}\,a_{32}\,a_{13}}+\mathbf{a_{31}\,a_{12}\,a_{23}}$
- On calcule la somme S_2 des produits des diagonales ascendantes.

  $S_2=\mathbf{a_{31}\,a_{22}\,a_{13}}+\mathbf{a_{11}\,a_{32}\,a_{23}}+\mathbf{a_{21}\,a_{12}\,a_{33}}$
- **det A =** S_1-S_2

➢ Expansion du déterminant suivant une ligne ; la première par exemple :

$$\mathbf{det\,A}=\mathbf{a_{11}}\begin{vmatrix}\mathbf{a_{22}} & \mathbf{a_{23}}\\ \mathbf{a_{32}} & \mathbf{a_{33}}\end{vmatrix}-\mathbf{a_{12}}\begin{vmatrix}\mathbf{a_{21}} & \mathbf{a_{23}}\\ \mathbf{a_{31}} & \mathbf{a_{33}}\end{vmatrix}+\mathbf{a_{13}}\begin{vmatrix}\mathbf{a_{21}} & \mathbf{a_{22}}\\ \mathbf{a_{31}} & \mathbf{a_{32}}\end{vmatrix}$$

➢ Expansion du déterminant suivant une colonne ; la troisième par exemple :

$$\mathbf{det\,A}=\mathbf{a_{13}}\begin{vmatrix}\mathbf{a_{21}} & \mathbf{a_{22}}\\ \mathbf{a_{31}} & \mathbf{a_{32}}\end{vmatrix}-\mathbf{a_{23}}\begin{vmatrix}\mathbf{a_{11}} & \mathbf{a_{12}}\\ \mathbf{a_{31}} & \mathbf{a_{32}}\end{vmatrix}+\mathbf{a_{33}}\begin{vmatrix}\mathbf{a_{11}} & \mathbf{a_{12}}\\ \mathbf{a_{21}} & \mathbf{a_{22}}\end{vmatrix}$$

<u>**Cas général :**</u> Soit $\mathbf{A}=\left(a_{ij}\right)_{1\le i;j\le 3}$ est une matrice carrée, on appelle mineur du couple (i, j) le déterminant de la matrice où on a barré la $\mathbf{i}^{\text{ème}}$ ligne et la $\mathbf{j}^{\text{ème}}$ colonne.

Si ce mineur est noté $\mathbf{M_{ij}}$, le cofacteur du couple (i , j) est $\mathbf{C_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}}$.

Dans ce cas on a : $\mathbf{det\,A}=\sum_{j=1}^{3}\mathbf{a_{ij}c_{ij}}$(développement par rapport à la i-ème ligne)

$\mathbf{det\,A}=\sum_{i=1}^{3}\mathbf{a_{ij}c_{ij}}$(développement par rapport à la $\mathbf{j}^{\text{ème}}$ colonne)

Exemple 9 :

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

En développant suivant une ligne : La $2^{\text{ème}}$ par exemple, les mineurs sont :

$M_{21} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 1\times(-2)-(-1)\times 2 = 0$; $M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 1\times(-2)-2\times 2 = -6$ et $M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1\times(-1)-2\times 1 = -3$

Les cofacteurs correspondants sont : $C_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = (-1)\times 0 = 0$;

$C_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = 1\times(-6) = -6$ et $C_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = (-1)\times(-3) = 3$.

$$\det A = \sum_{j=1}^{3} a_{2j} C_{2j} = a_{21}C_{21} + a_{22}C_{22} + a_{23}C_{23} = (0\times 0) + (3\times(-6)) + (1\times 3) = -15$$

3. Matrice des cofacteurs ou comatrice :

La comatrice de A est la matrice des cofacteurs. Elle se note $\text{com}(A)$ et on a :

$\text{com}(A) = (C_{ij})_{1\le i\,;\,j\le n}, n = 2 \text{ ou } 3$; où C_{ij} est le cofacteur du couple (i, j).

Exemple 10 :

- Si $A=\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, alors $\text{com}(A)=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$.

- Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$, alors $\text{com}(A) = \begin{pmatrix} -5 & 2 & -6 \\ 0 & -6 & 3 \\ -5 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

4. Inverse d'une matrice :

Soit A une matrice carrée d'ordre n. S'il existe une matrice carrée B d'ordre n telle que :

$AB = BA = I_n$, on dit que A est inversible. On appelle B l'inverse de A et on la note A^{-1}.

Plus généralement, quand A est inversible, pour tout $p \in \mathbb{N}$, on note : $A^{-p} = (A^{-1})^p$

Théorème :

Une matrice A est inversible si et seulement si det A ≠ 0 et on a : $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} \times {}^t(\text{Com}(A))$.

Exemple 11 :

- Si $A=\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\text{com}(A) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$ et $\det(A) = -3$;

  d'où : $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} \times {}^t(\text{Com}(A)) = \dfrac{1}{-3} {}^t\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = -\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

- Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$, $\text{com}(A) = \begin{pmatrix} -5 & 2 & -6 \\ 0 & -6 & 3 \\ -5 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ et $\det A = \dfrac{1}{-15}$;

D'où : $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} \times {}^t(\mathrm{Com}(A)) = \dfrac{1}{-15} \times {}^t\begin{pmatrix} -5 & 2 & -6 \\ 0 & -6 & 3 \\ -5 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

$$= -\frac{1}{15} \times \begin{pmatrix} -5 & 0 & -5 \\ 2 & -6 & -1 \\ -6 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{15} & \frac{2}{5} & \frac{1}{15} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

Inverse d'une matrice et méthode de pivot Gauss :

Exemple 12 :

On donne la matrice : $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ -1 & 4 & -3 \end{pmatrix}$. On écrit I_3 la matrice unité d'ordre 3 à droite de A,

on obtient ainsi la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Appliquons des opérations élémentaires sur les lignes de la matrice B ainsi obtenue.

$\begin{cases} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{cases}$, donne : $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} L_1 \leftarrow L_1 - \frac{1}{2}L_3 \\ L_2 \leftarrow -L_2 \end{cases}$, donne : $B = \begin{pmatrix} 1 & \frac{13}{2} & 0 & \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 7 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} L_1 \leftarrow L_1 - \frac{13}{2}L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 7L_2 \end{cases}$, donne : $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{-23}{2} & \frac{13}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -13 & 7 & 1 \end{pmatrix}$

$L_3 \leftarrow -\frac{1}{2}L_3$, donne : $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{-23}{2} & \frac{13}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{13}{2} & -\frac{7}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

D'où la matrice inverse de A : $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-23}{2} & \frac{13}{2} & \frac{1}{2} \\ 2 & -1 & 0 \\ \frac{13}{2} & -\frac{7}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

5. Matrices et systèmes d'équations linéaires :

Formulation matricielle :

- Pour exprimer le système $(S_1)\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 = k_1 \\ b_1x_1 + b_2x_2 = k_2 \end{cases}$ sous forme matricielle, on écrit $\mathbf{AX = B}$:

  $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$; où $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$ est la matrice des coefficients. $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ est la matrice des variables et $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$ est la matrice des constantes.

- Pour exprimer le système $(S_2)\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = k_1 \\ b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = k_2 \\ c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 = k_3 \end{cases}$ sous forme matricielle, on écrit $\mathbf{AX = B}$:

  $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix}$; où $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$ est la matrice des coefficients. $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ est la matrice (ou le vecteur) des variables et $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix}$ est la matrice (ou le vecteur) des constantes.

Nous pouvons utiliser la méthode de Pivot de Gauss pour obtenir une matrice triangulaire équivalente à $\mathbf{A}$.

Si de plus A est inversible ; on utilisera soit la méthode de Pivot de Gauss ou le théorème précédent.

Remarque 4 :

Résoudre le système (S) équivaut donc à résoudre l'équation $AX = B$, d'inconnue X.

Or si A est inversible alors : $AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1}B$.

$AX = B$ ne signifie par forcement que $X = BA^{-1}$ ce qui nécessite de déterminer premièrement A^{-1} puis déduire la valeur de X. Or A est inversible si et seulement si son déterminant est non nul.

Notons que le déterminant d'un système (S) n'est que le déterminant de sa matrice A.

Exemple 13 :

Résoudre le système $(S_1)\begin{cases} x + y - 2z = -7 \ldots. L_1 \\ 2x - y + z = 0 \ldots. L_2 \\ 2x + y + z = 8 \ldots. L_3 \end{cases}$; sa forme matricielle sera : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 2 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-7\\ 0\\ 8\end{pmatrix}\begin{matrix}L_1\\ L_1-2L_2\\ L_1-2L_3\end{matrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 0 & -3 & 5\\ 0 & 0 & 10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-7\\ 14\\ 52\end{pmatrix}$$; donc le système devient :

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 2 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-7\\ 0\\ 8\end{pmatrix}\begin{matrix}L_1\\ L_1-2L_2\\ L_1-2L_3\end{matrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 0 & -3 & 5\\ 0 & 0 & 10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-7\\ 14\\ 52\end{pmatrix}$$; donc le système devient : $\begin{cases}x+y-2z=-7 \ldots\ldots L_1'\\ 2x-y+z=0 \ldots\ldots L_2'\\ 2x+y+z=8 \ldots\ldots L_3'\end{cases}$

Il reste à résoudre ce système triangulaire ; on obtient en commençant par la dernière équation puis en remontant : $z=\frac{26}{5}$; $y=4$ et $x=-\frac{3}{5}$. Donc le système (S_1) a pour solution $(-\frac{3}{5}\,;\,4\,;\,\frac{26}{5})$..

Résoudre le système (S_2) $\begin{cases}x+3y+z=1\\ 2x+5y+2z=0\\ -x+4y-3z=1\end{cases}$ sa forme matricielle sera : $\begin{pmatrix}1 & 3 & 1\\ 2 & 5 & 2\\ -1 & 4 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$

Par la méthode de Pivot de Gauss, on a déterminé la matrice inverse de $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 1\\ 2 & 5 & 2\\ -1 & 4 & -3\end{pmatrix}$:

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{-23}{2} & \frac{13}{2} & \frac{1}{2}\\ 2 & -1 & 0\\ \frac{13}{2} & -\frac{7}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}, \text{ donc } \begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{-23}{2} & \frac{13}{2} & \frac{1}{2}\\ 2 & -1 & 0\\ \frac{13}{2} & -\frac{7}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-11\\ 2\\ 6\end{pmatrix}.$$

La solution du système (S_2) est le triplet **(−11 ; 2; 6).**

Remarque 5 :

On pourra également déterminer l'inverse de A en utilisant le déterminant et la matrice des cofacteurs.

Savoir-faire

A. Applications

Exercice 1 :

Déterminer un polynôme **P** de degré trois vérifiant les conditions : **P(1) = -9 ; P(2) = -9 ; P(4) = 45**.

Solution :

Posons $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Le problème revient à résoudre le système : $\begin{cases} a+b+c+d=-9 \\ 8a+4b+2c+d=-9 \\ 27a+9b+3c+d=5 \\ 64a+16b+4c+d=45 \end{cases}$;

Etant donné que le l'inconnue d figurant avec le coefficient 1, commençons par inverser les inconnues pour faciliter les calculs.

$$\begin{cases} d+c+b+a=-9 \\ d+2c+4b+8a=-9 \\ d+3c+9b+27a=5 \\ d+4c+16b+64a=45 \end{cases} \quad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2-L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3-L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4-L_3 \end{matrix} \begin{cases} d+c+b+a & =-9 \\ c+3b+7a & =0 \\ c+5b+19a & =14 \\ c+7b+37a & =40 \end{cases} ;$$

$$\begin{matrix} L_3 \leftarrow L_3-L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4-L_3 \end{matrix} \begin{cases} d+c+b+a & =-9 \\ c+3b+7a & =0 \\ 2b+12a & =14 \\ 2b+18a & =26 \end{cases} ; \; L_4 \leftarrow L_4-L_3 \begin{cases} d+c+b+a & =-9 \\ c+3b+7a & =0 \\ 2b+12a & =14 \\ 6a & =12 \end{cases}$$

On en tire successivement : **a = 2 ; b = -5 ; c= 1 ; d = -7.**

Donc, $P(x) = 2x^3 - 5x^2 + x - 7$

Exercice 2 :

Résoudre le système suivant par les méthodes : substitution, combinaison $\begin{cases} x+y+z=6 \\ x+y+t=7 \\ x+z+t=8 \\ y+z+t=9 \end{cases}$

Solution :

- Résolution par substitution

$$\begin{cases} x+y+z=6 \\ x+y+t=7 \\ x+z+t=8 \\ y+z+t=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=6-x-y \\ t=7-x-y \\ x+6-x-y+7-x-y=8 \\ y+6-x-y+7-x-y=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z & =6-x-y \\ t & =7-x-y \\ -x-2y & =-5 \\ -x-y & =-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z & =6-x-y \\ t & =7-x-y \\ x+2y=5 \\ y & =4-2x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z & =6-x-y \\ t & =7-x-y \\ y & =4-2x \\ x+8-4x & =5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z & =6-x-y \\ t & =7-x-y \\ y & =4-2x \\ -3x & =-3 \end{cases}$$

On en tire successivement : **x = 1 ; y = 2 ; z = 3 ; t = 4** ; d'où $S=\{(1\,;\;2\,;\;3\,;\;4)\}$.

- Résolution par combinaison ; posons $\mathbf{S = x + y + z + t}$

$$\begin{cases} x+y+z=6 \\ x+y+t=7 \\ x+z+t=8 \\ y+z+t=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S-t=6 \\ S-z=7 \\ S-y=8 \\ S-x=9 \\ 3S \quad =30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S-t=6 \\ S-z=7 \\ S-y=8 \\ S-x=9 \\ S \quad =10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ z=3 \\ t=4 \end{cases}$$

Cette dernière équation en additionnant membre à membre les quatre équations du système initial

Exercice 3 :

Dans une base de l'espace. On considère les trois vecteurs : $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\7\\3\end{pmatrix}$; $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\-2\\0\end{pmatrix}$; $\vec{w}\begin{pmatrix}-27\\5\\9\end{pmatrix}$.

sont-ils coplanaires ?

Solution :

$\vec{u}$; $\vec{v}$; $\vec{w}$, sont coplanaires s'il existe (par exemple) deux réels x et y tels que : $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$.

Cette égalité nous conduit a un système d'équations : $x\begin{pmatrix}-1\\7\\3\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}3\\-2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-27\\5\\9\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -x+3y=-27 \\ 7x-2y=5 \\ 3x \quad =9 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -x+3y=-27 \\ 7x-2y=5 \\ x \quad =3 \end{cases}$ ce qui donne, enfin, x = 3 ; y = 8, donc $\vec{w} = 3\vec{u} + 8\vec{v}$; d'où les vecteurs $\vec{u}$; $\vec{v}$; $\vec{w}$ sont coplanaires.

Exercice 4 :

On donne la matrice $\mathbf{M} = \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}$

1) Exprimer $\mathbf{M}^2$ en fonction de **M.**

2) En déduire $\mathbf{M}^p$ pour tour entier naturel $\mathbf{p} \geq 1$.

Solution :

1. Calculons : $\mathbf{M}^2 = \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 2\\2 & 2\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix} = 2\mathbf{M}.$

2. On conjecture que $\mathbf{M}^p = 2^{p-1}\mathbf{M}$; pour tour entier naturel $\mathbf{p} \geq 1$.

   Montrons par récurrence cette formule :

   - Puisque $\mathbf{M} = \mathbf{M}^1 = 2^0\mathbf{M}$, l'égalité est donc vraie pour $\mathbf{p} = 1$.
   - Soit $\mathbf{p} \geq 1$. Supposons que $\mathbf{M}^p = 2^{p-1}\mathbf{M}$ et montrons que : $\mathbf{M}^{p+1} = 2^{(p+1)-1}\mathbf{M} = 2^p\mathbf{M}.$

     $\mathbf{M}^{p+1} = \mathbf{M}^p \times \mathbf{M} = 2^{p-1}\mathbf{M} \times \mathbf{M}$ **(Par hypothère de récurrence)**

     $= 2^{p-1}\mathbf{M}^2 = 2^{p-1} \times 2\mathbf{M}$ **(d'apès 1)).**

     $= 2^p\mathbf{M} = 2^{(p+1)-1}\mathbf{M}.$

   On montré par récurrence que : Pour tout entier naturel $\mathbf{M}^p = 2^{p-1}\mathbf{M} = \begin{pmatrix}2^{p-1} & 2^{p-1}\\2^{p-1} & 2^{p-1}\end{pmatrix}$.

Exercice 5 :

Une entreprise de vêtements fabrique des jupes, des robes et pantalons. Pour fabriquer une jupe, il faut 0,75m de tissu, 4 boutons et une fermeture Eclair. Pour la fabrication d'une robe, il faut 1,5m de tissu, 6 boutons et une fermeture Eclair. Enfin, la confection d'un pantalon demande 1,25m de tissu, 2 boutons et une fermeture Eclair.

On appelle respectivement x, y et z le nombre de jupes, de robes et de pantalons confectionnés et a, b et c les quantités de tissu (en mètres), de boutons et de fermetures Eclair utilisés pour leur réalisation ;

On appelle M, A et X les matrices suivantes : M= $\begin{pmatrix} 0,75 & 1,5 & 1,25 \\ 4 & 6 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

1. a. Vérifer MX=A

   b. Déterminer A pour la fabrication de 200 jupes, 120 robes et 320 pantalons.

2. On considère la matrice M'= $\begin{pmatrix} -1,6 & 0,1 & 1,8 \\ 0,8 & 0,2 & -1,4 \\ 0,8 & -0,3 & 0,6 \end{pmatrix}$

   a. Calculer MM'

   b. Ecrire la matrice X en fonction de M' et de A.

   c. En déduire les quantités de jupes, de robes et de pantalons fabriqués quand on utilise 735 mètres de tissu, 2400 boutons et 620 fermetures.

3. L'entreprise a deux fournisseurs dont les prix de ventes (en MRO) des différents produits sont donnés dans le tableau suivant :

	Tissu en mètres	Boutons	Fermetures
Fournisseur 1	**45**	**5**	**6**
Fournisseur 2	**48**	**4,5**	**5,5**

   a. Que représente la matrice CA ?

   b. Calculer CA.

Solution :

l.a. Spécification du problème :

- Le nombre de mètres de tissu a pour confectionner x jupes, y robes et z pantalons est : $\mathbf{0,75x+ 1,5y+1,25z}$. Donc **a=** $\mathbf{0,75x+ 1,5y+1,25z}$
- Le nombre de boutons b pour confectionner x jupes, y robes et z pantalons est : $\mathbf{4x+ 6y+2z}$; ainsi $\mathbf{b=4x+ 6y+2z}$
- Le nombre de fermetures c pour confectionner x jupes, y robes et z pantalons est : $x+ y+z$; ainsi $c = x+ y+z$.

En résumé, on a : $\begin{cases} \mathbf{0,75x+1,5y+2z = a} \\ \mathbf{4x+6y+2z = b} \\ \mathbf{x+y+z = c} \end{cases}$ soit $\begin{pmatrix} 0,75 & 1,5 & 1,25 \\ 4 & 6 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

1.b. Dans l'égalité précédente, on remplace respectivement x, y et z par 200 ; 120 et 320. a, b et c

$$\begin{pmatrix} 0,75 & 1,5 & 1,25 \\ 4 & 6 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 200 \\ 120 \\ 320 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{a}=\mathbf{0,75}\times 200+\mathbf{1,5}\times 120+\mathbf{1,25}\times 320 = \mathbf{730} \\ \mathbf{b}=\mathbf{4}\times 200+\mathbf{6}\times 120+\mathbf{2}\times 320 = \mathbf{2160} \\ \mathbf{c}=200+120+320=\mathbf{640} \end{cases}. \text{soit } A=\begin{pmatrix} 730 \\ 2160 \\ 640 \end{pmatrix}.$$

2.a. On calcule

$$\text{MM'}=\begin{pmatrix} 0,75 & 1,5 & 1,25 \\ 4 & 6 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1,6 & 0,1 & 1,8 \\ 0,8 & 0,2 & -1,4 \\ 0,8 & -0,3 & 0,6 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 0,75\times(-1,6)+1,5\times 0,8+1,25\times 0,8 & 0,75\times 0,1+1,5\times 0,2+1,25\times(-0,3) & 0,75\times 1,8+1,5\times(-1,4)+1,25\times 0,6 \\ 4\times(-1,6)+6\times 0,8+2\times 0,8 & 4\times 0,1+6\times 0,2+2\times(-0,3) & 4\times 1,8+6\times(-1,4)+2\times 0,6 \\ 1\times(-1,6)+1\times 0,8+1\times 0,8 & 1\times 0,1+1\times 0,2+1\times(-0,3) & 1\times 1,8+1\times(-1,4)+1\times 0,6 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.b. Du résultat de la question 2.a. on conclut que M a pour inverse M', tire donc : X= M'A.

2.c. On en déduit du résultat précédent en remplaçant A par $\begin{pmatrix} 735 \\ 2400 \\ 620 \end{pmatrix}$.

$$X=\begin{pmatrix} -1,6 & 0,1 & 1,8 \\ 0,8 & 0,2 & -1,4 \\ 0,8 & -0,3 & 0,6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 735 \\ 2400 \\ 620 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (-1,6)\times 735+0,1\times 2400+1,8\times 620 \\ 0,8\times 735+0,2\times 2400+(-1,4)\times 620 \\ 0,8\times 735+(-0,3)\times 2400+0,6\times 620 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 80 \\ 200 \\ 240 \end{pmatrix}.$$

3.a. On note $C=\begin{pmatrix} 45 & 5 & 6 \\ 48 & 4,5 & 5,5 \end{pmatrix}$ et $A=\begin{pmatrix} 735 \\ 2400 \\ 620 \end{pmatrix}$.

La matrice produit CA représente les prix de vente avancés par les deux fournisseurs de 80 jupes, 200 robes et 240 pantalons.

3.b. Calculons : $CA=\begin{pmatrix} 45 & 5 & 6 \\ 48 & 4,5 & 5,5 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 735 \\ 2400 \\ 620 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 45\times 735+5\times 2400+6\times 620 \\ 48\times 735+4,5\times 2400+5,5\times 620 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 48795 \\ 49490 \end{pmatrix}.$

B. Exercices Divers :

En utilisant des opérations élémentaires, résoudre les systèmes :

1. $\begin{cases} x-2y+z=1 \\ 2x-y+3z=0 \\ x+y-z=2 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x_1+5x_2+2x_3=8 \\ 3x_1+2x_2 \quad =-1 \\ x_1+4x_2+2x_3=7 \end{cases}$

En utilisant la méthode de Gauss, résoudre les systèmes suivants :

3. $\begin{cases} a-b+2c+3d=1 \\ a-3b+4c-d=7 \\ -a+2b-2c-9d=10 \\ 2a-3b+7c-d=16 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 5x+y+z=-5 \\ 2x+13y-7z=-1 \\ 5x-y+z=1 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 8x+2y+5z=3 \\ 3x-4y+3z=-1 \end{cases}$

6. $\begin{cases} -x+3y+z=2 \\ 4x-y+7z=0 \\ 2x+5y+9z=4 \end{cases}$

7. $\begin{cases} a+b+c+d=-1 \\ 3a-b+2c-5d=-26 \\ -a \quad +c-2d=-8 \\ 8a+2b \quad +d=0 \end{cases}$

8. $\begin{cases} -2x+y-z-t=3 \\ x-2y+z-2t=7 \\ 3x+2z+t=5 \\ 2x-y+2z-2t=15 \end{cases}$

9. $\begin{cases} 3x-y-z-t=-1 \\ x-3y+z+t=-2 \\ x+y-2z+4t=4 \\ x-y+z-2t=-8 \end{cases}$

10 $\begin{cases} 6x+6y+5z+18t+204 \quad =14 \\ 10x+9y+7z+24t+304 \quad =18 \\ 12x+12y+23z+27t+354 \quad =32 \\ 8x+6y+6z+15t+204 \quad =16 \\ 4x+5y+4z+15t+154 \quad =11 \end{cases}$

11 Déterminer un polynôme **P** de degré **3** vérifiant : **P(1) = 0 ; P(2) = 2 ; P(3) = -1** et **P(4) = 5.**

12 Déterminer une fonction polynôme de degré **3** dont la représentation graphique passe par les points **A(0 ; -1) ; B(2 ; 5)** et admet en chacun des points **A** et **B** une tangente horizontale.

13 Même exercice avec **A(2 ; -1)** et **B(1 ; 1)**.

14 Dans une base de l'espace, on considère les vecteurs :

$\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$; $\vec{v}\begin{pmatrix} 8 \\ 13 \\ 21 \end{pmatrix}$; $\vec{w}\begin{pmatrix} 34 \\ 55 \\ 89 \end{pmatrix}$ sont-ils coplanaires ?

15 Même exercice avec,

$\vec{e_1}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\vec{e_2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\vec{e_3}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

16 On considère les matrices suivantes :

$M=\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}, N=\begin{pmatrix} 0 & -7 \\ 7 & -4 \\ 2 & 14 \end{pmatrix}, L=\begin{pmatrix} 11 & 5 \\ -1 & 1 \\ 15 & 0 \end{pmatrix},$

$K=\begin{pmatrix} 12 & 4 & 3 \\ -2 & 5 & 7 \end{pmatrix}$ et $J=\begin{pmatrix} 1 & 4 & -9 & 2 \\ 8 & 5 & 11 & 0 \\ 3 & 1 & 13 & 6 \end{pmatrix}.$

1) Calculer M+N, M-N, N+3M et 5M+7N. Peut-on calculer J+K ? N+J ? K+L ? J+L ?
2) Calculer M×K, K×N, K×J et L×K
   Peut-on calculer M×N ?
   N×M ? N×J ? L×N ? L×J ? Conclure.

17 On cosidère les matrices carrés (2×2) : $A=\begin{pmatrix}0 & -1\\0 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 3\\0 & 0\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}0 & -1\\0 & 3\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}4 & -1\\5 & 4\end{pmatrix}$ et $E=\begin{pmatrix}2 & 5\\5 & 4\end{pmatrix}$.

1) Calculer A×B , C×D, B×A et C×E. Conclure.

2) On donne : $P=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & 2\end{pmatrix}$ et $Q=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\2 & 0 & 0\\3 & 1 & 0\end{pmatrix}$.

a) Que peut-on dire des matrices P, Q et P+Q ?

b) Calculer PQ, QP. Que peut-on dire de ces matrices ? En déduire $(P+Q)^n$

18 On considère les matrices carrés (2×2) :

$A=\begin{pmatrix}2 & 5\\1 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}2 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}$

et $D=\begin{pmatrix}3 & 6\\-1 & -2\end{pmatrix}$

1) Calculer A+B, A-B, A-2B, 4C-7D, 3B-6D, A×B , C×D, B×A et C×A. Conclure.

2) Les matrices A , B, C et D sont-ils inversibles ? Si oui déterminer leurs inverses.

3) Calculer A^2-5A puis C^2-2C

4) Calculer $A^{-1}\,B^{-1}$, $B^{-1}\,A^{-1}$ puis $(A\times B)^{-1}$ et $(B\times A)^{-1}$. Conclure

5) On donne la matrice : $F=\begin{pmatrix}-1 & -2 & 0\\2 & 3 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$,

Calculer $2F-F^2$ .Sans calcul en déduire F^{-1}

6) Calculer l'inverse de $E=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\1 & 0 & 3\end{pmatrix}$.

19

Soit la matrice carrée: $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\1 & 0 & 1\\1 & 1 & 0\end{pmatrix}$.

1-Calculer A^2 et verifier que $A^2=A+I_3$, $I_3=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ est la matrice identité (3×3).

2- Montrer en utilisant la question précédente que A est inversible puis en déduire A^{-1}.

3-En déduire la solution du système : $\begin{cases}x+y=3\\x+z=2\\y+z=1\end{cases}$

4-Vérifier le résultat de la question précédente en résolvant le système par la méthode de Cramer.

20

Soient $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\1 & 2\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 3\end{pmatrix}$ et $P=\begin{pmatrix}1 & 1\\-1 & 1\end{pmatrix}$.

1) Montrer que P est inversible et trouver P^{-1}.

2) Vérifier que $A = P\times D\times P^{-1}$.

3) Déterminer D^p pour tout entier naturel p (on calculera les premières puissances de D puis on conjecturera un résultat que l'on démontrera par récurrence).

4) a) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel p, $A^p = P\ D^p\ P^{-1}$.

b) En déduire l'expression de A^p pour tout entier naturel p.

5) On considère les suites $(u_n)_{n\in N}$ et $(v_n)_{n\in N}$ définies par :

$u_0 = 0$, $v_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 2u_n + v_n$ et $v_{n+1} = u_n + 2v_n$.

Pour tout entier naturel n, on pose $X_n=\begin{pmatrix}u_n\\v_n\end{pmatrix}$.

a) Montrer que pour tout entier naturel n, $X_{n+1} = AX_n$.

b) En déduire que $\forall n\in\mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$.

c) Déterminer les expressions de u_n et v_n en fonction de n.

21. 1) Montrer que la somme de deux triangulaires supérieures reste triangulaire supérieure

2) Montrer que c'est aussi valable pour le produit

3) Montrer que si A est triangulaire supérieure, ${}^{t}A$ esttriangulaire inférieure. Et si A est diagonale ?

4) Soit A une matrice carrée d'ordre 2 , inversible. Montrer que si A est symétrique

A^{-1} l'est aussi. Et si A antisymétrique ?

22. Pour fabriquer trois produits P_1, P_2 et P_3 on doit leur faire subir successivement des opérations sur trois machines M_1, M_2 et M_3. Le temps d'exécution sur chacune des machines sont fournis par le tableau suivant

	M_1	M_2	M_3
P_1	11mn	12mn	16mn
P_2	22mn	12mn	16mn
P_3	11mn	24mn	16mn

Par exemple on peut noter que le temps d'exécution de la pièce P_1 sur la machine M_2 est de 12 minutes. On suppose que les machines n'ont pas de temps mort par suite d'une attente d'un produit en opération sur une autre machine. Les heures disponibles de chaque machine pour une activité d'un mois sont :

165 heures pour la machine M_1

140 heures pour la machine M_2

160 heures pour la machine M_3

Dans ces conditions, combien doit-on fabriquer mensuellement des produits P_1, P_2 et P_3 si l'on désire utiliser les trois machines à pleine capacité (avant de commencer le problème exprimées avec la même unité de mesure).

23. On considère la

matrice : $M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

1) Vérifier que M est inversible en calculant detM

2) Résoudre les systèmes suivants :

$(S1) \begin{cases} 3x + y + z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \\ -x + y - 2z = 1 \end{cases}$ $(S2) \begin{cases} 3x' + y' + z' = 0 \\ 2x' - y' + z' = 1 \\ -x' + y' - 2z' = 0 \end{cases}$;

$(S3) \begin{cases} 3x'' + y'' + z'' = 0 \\ 2x'' - y'' + z'' = 0 \\ -x'' + y'' - 2z'' = 1 \end{cases}$

3) Vérifier que $\begin{pmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{pmatrix}$ est la matrice inverse de M.

4) Utiliser la méthode de Gauss pour déterminer la matrice inverse de M.

24. Une association de diététiciens organise un repas pour ses membres, à base de pommes de terre, de maïs et de bœuf haché.

- Une portion de 100g de pommes de terre contient 100 calories et 5g de protéines et coûte 40 MRU ,
- Une portion de 100g de maïs contient 150 calories et 10g de protéines et coûte 20MRU
- Une portion de 100g de viande hachée contient 300 calories et 25g de protéines et coûte 60 MRU.

Les organisateurs ont le choix entre

La formule **A** : un repas contenant 800 et 50g de protéines

La formule **B** : un repas contenant 750 et 55g de protéines

1. Dresser un tableau à double entrée rassemblant les apports et les coûts de chaque intgrédients.
2. Déterminer la composition de chaque formule à l'aide de systèmes linéaires
3. Exprimer le coût de chaque formule en fonction de la quantité de bœuf.
4. Quelle est la formule la moins chère ?

25. On donne la matrice : $A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$.

1) Vérifier que $A^2=A+2I_3$. Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}$;

$$A^n=\left(\frac{2^n-(-1)^n}{3}\right)A+\left(\frac{2^n+2(-1)^n}{3}\right)I_3.$$

2) Soit M la matrice : $M=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$.

a) Vérifier que $A=M-I_3$ et montrer que $\forall k\in\mathbb{N}^*\ M^k=3^{k-1}M$.

b) En déduire que

$A^n=\left(\sum_{k=1}^{n}C_n^k 3^{k-1}(-1)^{n-k}\right)M+(-1)^n I_3$ puis que

$$A^n=\left(\frac{2^n-(-1)^n}{3}\right)M+(-1)^n I_3.$$

3) a) On donne les matrices colonnes : $u=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$, $v=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ et $w=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$;

calculer les produits Au, Av et Aw.

b) Soit P la matrice carrée d'ordre 3 :

$$P=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&0&1\\0&-1&1\end{pmatrix}.$$

Montrer que $AP=P\begin{pmatrix}-1&1&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ puis que

$$A^n=P\begin{pmatrix}(-1)^n&1&0\\0&(-1)^n&0\\0&0&2^n\end{pmatrix}P^{-1}$$

26. On définit les matrices carrées d'ordre n avec $n\geq 2$; A , B et J comme suit :

$$A=\begin{pmatrix}0&.&.&0&1\\.&.&0&1&0\\.&0&1&0&.\\0&1&0&.&.\\1&0&.&.&0\end{pmatrix};B=\begin{pmatrix}0&1&.&.&1\\1&0&1&.&.\\.&1&0&1&.\\.&.&1&0&1\\1&.&.&1&0\end{pmatrix};J=\begin{pmatrix}1&1&.&.&1\\.&1&1&.&.\\.&1&1&1&.\\.&.&1&1&1\\1&.&.&1&1\end{pmatrix}$$

1. Parmi ces matrices, quelles sont celles qui sont inversibles ?
2. Déterminer les inverses de celles qui sont inversibles.

27. Un hôtel veut renouveler une partie de son équipement. Il faut changer au moins 72 coussins, 48 rideaux et 32 jetés de lit. Deux ateliers de confection font des offres par lots :

- L'atelier Idéal : un lot de 12 coussins, 4 rideaux et 4 jetés de lit pour un montant de 8 000MRU.
- L'atelier Renov. : un lot de 6 coussins, 6 rideaux et 2 jetés de lit pour un montant de 6 000MRU. On note x le nombre de lôts Idéal achetés et y le le nombre de lôts Renov.

1. Traduire les contraintes du problème portant sur x et y par un système d'inéquations

Exprimer la dépense occasionnée par l'achat de x lots Idéal et y lots Renov.

28. Soit $A\in\mathcal{M}_n$ telle que $A+I_n$ est inversible. On pose $B=(I_n-A)(I_n+A)^{-1}$

1. Montrer que $B=(I_n+A)^{-1}(I_n-A)$
2. Montrer que (I_n+B) est inversible.
3. Exprimer A en fonction de B.

29. Soit $\mathcal{M}_{(n;p)}$ l'ensemble des matrices $(n;p)$ à coefficients réels et $A\in\mathcal{M}_{(n;p)}$.

On pose : $B={}^tA\times A$ et $C=A\times{}^tA$

1. Peut-on avoir B=C ?
2. Montrer que les coefficients des diagonales de B et C sont positifs

Les matrices B et C sont-elles symétriques ?

30. Soit $\mathcal{M}_n$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels.

1. Soient A et B deux éléments de $\mathcal{M}_n$ tels que AB=A+B. Montrer que A et B commutent.
2. Soient A et B deux éléments de $\mathcal{M}_n$ tels que $AB=A^2+A+I_n$ .Montrer que A et B commutent.

CHAPITRE 2

Arithmétique

Faire savoir

L'essentiel du chapitre

I. Divisibilité dans $\mathbb{Z}$:

Définition et vocabulaire :

Définition :

Soit $a, b \in \mathbb{Z}$, on dit que a divise b ou b est un multiple de a, s'il existe $q \in \mathbb{Z}$ tel que $b=aq$, cela se note $a|b$.

Pour tout $a \in \mathbb{Z}$, l'ensemble des multiples de a se note $a\mathbb{Z}$.

Propriété 1 :

Pour tous a,b et $c \in \mathbb{Z}$,

- $a|a$, $\pm 1|a$ et $a|0$
- Si $a|b$ et si $b|c$, alors $a|c$
- Si $a|b$ et si $b \neq 0$, alors $|a| \leq |b|$
- Si $a|b$ et $b|a$ alors $a=\pm b$
- Si $a|b$ et $a|c$, alors $a|(kb+lc)$; quels que soit les entiers $k, l \in \mathbb{Z}$.

Démonstration :

- Ces premières propriétés sont évidentes car $a=1\times a=(-1)\times(-a)$ et $0=0\times a$
- Si $a|b$ et si $b|c$, il existe des entiers q et r tel que $b=aq$ et $c=br$. On deduit $c=aqr$, donc $a|c$.
- Supposons $a|b$, donc $b=aq$, avec $q \in \mathbb{Z}$. si $b\neq 0$, alors $q\neq 0$.donc $|q|\geq 1$. Par suite $|b|=|a||q|\geq|a|$.
- Supposons $a|b$ et $b|a$, donc il existe des entiers q et r tel que $a=bq$ et $b=ar$. Si a ou b est nuls, alors $a=b=0$ et l'on a bien $a=\pm b$. supposons a et b non nuls. On a $a=bq=arq$, donc $1=rq$. Puisque r et q sont des entiers, il s'ensuit $r=q=\pm 1$. Donc $a=\pm b$.
- Supposons que a divise b et c, alors il existe des entiers p et q tel que $b=ap$ et $c=aq$. Pour tous entiers k et l, on a alors $kb+lc=a(kp+lq)$,donc $a|(kb+lc)$.

II. Division euclidienne :

Proposition 1 :

Soit b un entier non nul. Pour tout $a \in \mathbb{Z}$, il existe des entiers q et r uniques tels que $a=bq+r$ $0\leq r\leq |b|$.

L'entier q s'appelle quotient de a et b et l'entier r s'appelle le reste de la division de a et b.

Démonstration :

Supposons d'abord $b>0$. Notons X l'ensemble des multiples de b qui sont inferieurs ou égaux à a. c'est une partie de $\mathbb{Z}$ qui est majorée (par a), donc X a un plus grand élément bq.

Le multiple $b(q+1)$ n'appartient alors pas à X, donc on a $bq \leq a < b(q+1)$.

En posant $r=a-bq$, il vient $0 \leq r < b(q+1)-bq=b$ et $a=bq+r$.

Si $b<0$, appliquons ce qui précède à a et $-b$: il existe q, r € Z tel que $a=(-b)q+r$ et $0 \leq r < -b$, donc $a=b(-q)+r$ et $0 \leq r < |b|$.

Montrons maintenant l'unicité du couple (q, r). Supposons que $a=bq+r=bq'+r'$, avec $0 \leq r < |b|$ et $0 \leq r' < |b|$. alors en soustrayant, il vient $0=b(q-q')+(r-r')$, donc :$|b||q-q'|=|r-r'|$

Mais comme r et r' sont compris entre 0 et $|b|-1$, on a $|r-r'|<|b|$, donc $|b||q-q'|<|b|$. Puisque $|b|>0$, on en déduit $|q-q'|<1$, comme $|q-q'|$est un entier positif non nul, il s'ensuit $|q-q'|=0$, ou encore $q=q'$, par suite $r=r'$.

Remarque 1 :

- b divise a si et seulement si le reste de la division de a par b est nul.
- Si $b > 0$, le quotient q est l'unique entier tel que $q \leq \frac{a}{b} < q+1$; c'est la partie entière du nombre rationnel $\frac{a}{b}$.

Exemple 1 :

Voici des divisions euclidiennes :

- Division de 12 par 5 : $12=5\times2+2$
- Division de 12 par -5 : $12= (-5) \times (-2) +2$
- Division de -12 par 5 : $12= (-5) \times (-3) +3$
- Division de -12 par -5 : $-12= (-5) \times3+3$

III. Nombres premiers :

Définition :

Un entier naturel $p\geq2$ est premier si ses seuls diviseurs positifs sont 1 et p.

Soit n un entier au moins égal à 2. Le plus petit diviseur positif d de n tel que $d>1$ est évidement un nombre premier.

Exemple 2 :

- 1 n'est pas premier et 2 est le seul nombre premier pair.
- 101 et 103 sont premiers.
- 91 n'est pas premier.
- **0** n'est pas premier : tout entier naturel non nul est diviseur de **0**.

Règle pratique :

Pour étudier si un entier naturel **a** est premier on effectue sa division euclidienne par les nombres premiers **b** successifs jusqu'à ce que :

- soit le reste est nul auquel cas **a** n'est pas premier (et le nombre **b** correspondant à cette étape est le plus petit diviseur premier de **a**.
- soit on arrive à un quotient **q** inférieur au diviseur **b** (ce qui équivaut à $\mathbf{b}^2 > \mathbf{a}$) sans avoir rencontré de reste nul, auquel cas on peut conclure que **a** est premier.
- **Le crible d'Ératosthène** Permet d'obtenir aisément les nombres premiers dans l'ordre croissant.

Exemple 4 : ***Le crible d'Ératosthène (pour les 100 premiers entiers)***

0	10	20	30	34	50	60	70	80	90
1	**11**	21	**31**	**41**	51	**61**	71	81	91
2	12	22	32	42	52	62	72	82	92
3	**13**	**23**	33	**43**	**53**	63	**73**	**83**	93
4	14	24	34	44	54	64	74	84	94
5	15	25	35	45	55	65	75	85	95
6	16	26	36	46	56	66	76	86	96
7	**17**	27	**37**	**47**	57	**67**	77	**87**	**97**
8	18	28	38	48	58	68	78	88	98
9	**19**	**29**	39	49	**59**	69	**79**	**89**	99

Proposition 2 : Il existe une infinité de nombre premiers.

Démonstration :

Soit un entier n≥2. Alors l'entier N=n!+1 n'a aucun diviseur compris entre 2 et n : en effet, un tel diviseur k diviserait n! et N, donc diviserait N-(n!)=1, ce qui n'est pas possible. Or N possède au moins un diviseur premier p. puisque p≥2 on en déduit p>n. cela montre qu'il existe des nombres premiers aussi grands qu'on veut.

Proposition 3 :

Tout entier n supérieur strictement à 1 est produit de nombres premiers

Démonstration :

On raisonne par récurrence. Soit un entier n>1. Si n est premier, il est produit de nombres premiers ! Sinon. Il se en n=pq, ou les entiers p et q satisfont 1<p<n et 1<q<n. par hypothèse de récurrence. Les entiers p et q sont produits de nombres premiers, donc n aussi.

<u>**Proposition 4 :**</u> ***Décomposition primaire***

Tout entier naturel s'écrit de façon unique comme produit de facteurs premiers à l'ordre des facteurs près : $a = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times p_3^{\alpha_3} \ldots \times p_n^{\alpha_n}$ tels que $\mathbf{p_i}$ premier et $\boldsymbol{\alpha_i}$ entier naturel.

<u>**Exemple 5 :**</u>

- $\mathbf{16 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4}$
- $\mathbf{35 = 5^1 \times 7^1}$
- $\mathbf{180 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 2^2 \times 3^2 \times 5^1}$

IV. <u>PGCD et PPCM :</u>

<u>**Définition :**</u>

a et **b** désignent deux entiers naturels non nuls. On appelle plus grand commun diviseur de **a** et **b** et on note $\mathbf{PGCD(a, b)}$ ou $\mathbf{a \wedge b}$ le plus grand entier naturel qui divise à la fois **a** et **b**.

On appelle plus petit commun multiple de **a** et **b** et on note $\mathbf{PPCM(a, b)}$ ou $\mathbf{a \vee b}$ le plus petit entier naturel non nul qui est à la fois multiple de **a** et multiple de **b**.

L'algorithme d'Euclide fournit une méthode pratique de recherche du **PGCD** de deux nombres.

<u>**Exemple 6 :**</u>

On veut déterminer par l'algorithme d'Euclide le **PGCD** de **324** et **385** :

- $\mathbf{385 = 324 \times 1 + 61}$
- $\mathbf{324 = 61 \times 5 + 19}$
- $\mathbf{61 = 19 \times 3 + 4}$
- $\mathbf{19 = 4 \times 4 + 3}$
- $\mathbf{4 = 3 \times 1 + 1}$
- $\mathbf{3 = 1 \times 3 + 0}$

Ces calculs peuvent se présenter dans le tableau suivant :

	1	**5**	**3**	**4**	**1**	**3**
385	**324**	**61**	**19**	**4**	**3**	**1**
61	**19**	**4**	**3**	**1**	**0**	

Le dernier reste non nul obtenu dans les divisions successives étant **1** alors $\mathbf{PGCD(324, 385) = 1}$.

On peut également chercher le PGCD en décomposant :

$$\begin{array}{r|l} 385 & 5 \\ 77 & 7 \\ 11 & 11 \\ 1 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 324 & 2 \\ 162 & 2 \\ 81 & 3 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

; donc, $\mathbf{385 = 5 \times 7 \times 11}$; $\mathbf{324 = 2^2 \times 3^4}$.

Aucun facteur premier ne figure à la fois dans la décomposition de 385 et celle de 324.

<u>**Propriété 2 :**</u>

- Les diviseurs communs à deux entiers naturels sont les diviseurs de leur PGCD,
- Les multiples communs à deux entiers naturels sont les multiples de leur PPCM,
- Le produit de deux entiers naturels est égal au produit de leur PGCD par leur PPCM.

V. Entiers premiers entre eux :

Définition :

Deux entiers relatifs sont premiers entre eux si et seulement si leur seul diviseur commun positif est **1**.Soit $\mathrm{pgcd}(a,b)=1$

Théorème de Bézout :

Deux entiers relatifs **a** et **b** sont premiers entre eux si et seulement s'il existe deux entiers relatifs **u** et **v** tels que : $\mathbf{au+bv=1}$

Démonstration :

On peut supposer a et b positifs. Notons D l'ensemble des entiers de la forme au+bv, où u,v $\in \mathbb{Z}$.
Si des entiers n et m appartiennent à D, le reste de la division de n par m s'ecrit n-qm avec q $\in \mathbb{Z}$, donc appartient à D. Puisque a et b appartient à D. On voit que, dans l'algorithme d'Euclide, tous les restes sont dans D ; en particulier, pgcd(a , b) appartient à D.

Théorème de Gauss :

a, b et **c** désignent des entiers relatifs. Si **c** divise le produit **ab** et si **a** et **c** sont premiers entre eux, alors **c** divise **b**.

Démonstration :

Supposons a et b premiers entre eux. On a une relation de Bézout au+bv=1, d'où acu+bcv=c.
Si a divise bc, alors a divise (bc)v et a(cu), donc a divise c.

VI. Congruences dans $\mathbb{Z}$:

n désigne un entier naturel supérieur ou égal à **2**, **a** et **b** sont deux entiers relatifs.

Définition :

On dit que **a** et **b** sont congrus modulo **n** et l'on note $\mathbf{a \equiv b\ [n]}$, lorsque $\mathbf{a-b}$ est un multiple de **n**.

Propriété caractéristique :

a et **b** sont congrus modulo **n** si et seulement si **a** et **b** ont le même reste dans la division euclidienne par **n**.

1. Compatibilité avec les opérations :

n désigne un entier naturel supérieur ou égal à **2, a, a', b** et **b'** sont des entiers relatifs.

Si $\mathbf{a \equiv a'\ [n]}$ et $\mathbf{b \equiv b'\ [n]}$, alors :

- $\mathbf{a+b \equiv a'+b'\ [n]}$
- $\mathbf{a-b \equiv a'-b'\ [n]}$
- $\mathbf{ab \equiv a'b'\ [n]}$

Pour tout **k** de $\mathbb{N}^*$, $\mathbf{a^k \equiv a'^k\ [n]}$.

2. Applications aux critères de divisibilité :

x désigne un entier naturel dont l'écriture décimale est: $\mathbf{x \doteq \overline{a_n a_{n-1} ... a_1 a_0}}$

(les $\mathbf{a_i}$ étant ses **n + 1** chiffres)

- $\mathbf{x \equiv a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0}\ [9]$; on en déduit que **x** est divisible par **9** si et seulement si la somme des chiffres est divisible par **9**.
- $\mathbf{x \equiv a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0}\ [3]$; on en déduit que **x** est divisible par **3** si et seulement si la somme des chiffres est divisible par **3**.
- $\mathbf{x \equiv a_0}\ [2]$; **x** est divisible par **2** si et seulement si son chiffre des unités est pair.
- $\mathbf{x \equiv a_0}\ [5]$; **x** est divisible par **5** si et seulement si son chiffre des unités est **0** ou **5**.
- $\mathbf{x \equiv \overline{a_1 a_0}}\ [4]$; **x** est divisible par **4** si et seulement si le nombre formé par ses deux derniers chiffres est divisible par **4**.
- $\mathbf{x \equiv \overline{a_1 a_0}}\ [25]$; **x** est divisible par **25** si et seulement si le nombre formé par ses deux derniers chiffres est divisible par **25**.

- $10 \equiv -1\ [11]$; $100 \equiv 1\ [11]$; $1000 \equiv -1\ [11]$ …
- **x** est divisible par **11** si et seulement si la différence des sommes de ses chiffres de rangs pairs et de ses chiffres de rangs impairs est divisible par **11**.

VII. Petit théorème de Fermat :

Théorème 1 :

Soit p un nombre premier alors pour tout entier a, $a^p \equiv a[p]$

Théorème 2 :

Soit p un nombre premier alors pour tout entier a qui n' est pas multiple de p $a^{p-1} \equiv 1[p]$

Démonstration :

En utilisant le binôme de Newton

$(k+1)^p = \sum_{i=0}^{p} C_p^i\, k^i$ pour $1 \leq i \leq p-1$ on a $i\, C_p^i = pC_{p-1}^{i-1}$ et comme p et i sont premiers entre eux alors p divise C_p^i d'où $(k+1)^p \equiv k^p+1[p]$

Soit p un nombre premier fixé ; montrons par récurrence sur k

- Initialisation : $0^p \equiv 0[p]$
- Hérédité : on suppose que $k^p \equiv k[p]$ et comme $(k+1)^p \equiv k^p+1[p]$, on en déduit que $(k+1)^p \equiv k+1[p]$

Conclusion :

Pour tout entier naturel a on a $a^p \equiv a[p]$

Maintenant on suppose que a est un entier relatif a< 0 d'après ce qui précède on a :

$(-1)^p\ a^p \equiv -(-a)^p \equiv -a[p]$

Si p >2 alors p est impair d'où $(-1)^p = -1$ donc $a^p \equiv a[p]$

Supposons que p=2 on a : $-1 \equiv 1[2]$ce qui donne $-a \equiv a[2]$ d'où $a^2 \equiv a[2]$

On a montré que $a^p \equiv a[p]$ d'où p divise $a^p - a = a(a^{p-1}-1)$ et comme p ne divise pas a d'après Gauss on en déduit que p divise $a^{p-1}-1$ donc $a^{p-1} \equiv 1[p]$

Exemple 7 :

Montrer que $30\ divise\ n^5-n\ \ \forall n \in \mathbb{N}$

Réponse :

On a 5 est un nombre premier d'après le théorème du petit Fermat $n^5 \equiv n[5]$, donc 5 divise n^5-n d'autre part n^5-n =n(n-1)(n+1)(n^2+1)

2 divise n(n-1) (*le produit de deux entiers consécutifs*) ⇒ 2 divise n^5-n

3 divise n(n-1)(n+1) (le produit de trois entiers consécutifs) ⇒ 3 divise n^5-n

2 et 3 sont premiers entre eux donc 6=2.3 divise n^5-n

On a 6 divise n^5-n et 5 divise n^5-n 6 et 5 sont premiers entre eux donc 30=5.6 divise n^5-n

VIII. Equations diophantiennes :

Méthode de résolution : dans $\mathbb{Z}$. de l'équation a x+by=c ; où a,b et c sont des entiers relatifs :

- ✓ On détermine d=pgcd (a .b)
- ✓ Si c n'est pas un multiple de d alors l'équation n'a pas de solution sinon on divise les deux membres de l'équation par d pour trouver l'équation équivalente Ax+By =C avec A et B sont premiers entre eux
- ✓ On détermine une solution particulière (u ;v) de l'équation Ax+By=C en utilisant l'algorithme d'Euclide puis on écrit A x+By=Au+B v ce qui donne A(x-u)=B(v-y) comme A et B sont premiers entre eux d'après le théorème de Gauss y-v=kA ; k est un entier relatif d'où par substitution $x - u = -kB$

Finalement l'ensemble des solutions est l'ensemble des couples $(u - KB, v + KA)$; où $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice résolu : Résoudre l'équation (E): 62x+43y=1 dans $\mathbb{Z}^2$.

Solution :

En utilisant l'algorithme d'Euclide :

62=43.1+19 (4)

43=19.2+5 (3)

19=5.3+4 (2)

5=4.1+1 (1)

D'après la dernière égalité que Le PGCD(62 ; 43)=1 donc l'équation (E) admet des solutions (Théorème de Bézout)

Déterminons une solution particulière en remontant les égalités (1), (2), (3) et (4) en éliminant les restes successifs de l'algorithme sauf le PGCD on obtient : 62(-9) +43(13)=1 donc (-9 ; 13) est une solution particulière de : (E)

Solution générale ; l'équation (E) est équivalente à :62x+43y=62(-9)+43(13)

Soit encore : 62(x+9)=43(13-y) comme 62 et 43sont premiers entre eux et d'après le théorème de Gauss il existe un entier relatif k tel que $x = -9 + 43k$ et $y = 13 - 62k$

Conclusion : L'ensemble des solutions sont les couples :(-9+43k ;13-62k) avec k un entier relatif

IX. Systèmes de numération :

1. Système décimal :

C'est le système de numération usuel dans la vie quotidienne dans ce système tout nombre est exprimé à partir des chiffres 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9.

Exemple 8 : $2546=2.10^3+5.10^2+4.10^1+6.10^0$

Conversion du système décimal vers une base quelconque :

Pour convertir un nombre de base 10 vers une base B quelconque il faut faire des divisions successives par B et retenir à chaque fois le reste jusqu'à l'obtention à un quotient inferieur à la base B . dans ce cas le nombre s'écrit de la gauche vers la droite en commençant par le dernier quotient allant jusqu'au premier reste :

2. Base binaire :

Dans cette base tous les nombres sont exprimés à l'aide des chiffres 0 et 1ces deux chiffres sont appelés bits (contraction Binary digiT)

Cette base est très pratique en électronique numérique pour distinguer deux états logiques :

On écrit $(a_n a_{n-1}\ldots\ldots\ldots a_0)_2=a_n.2^n+a_{n-1}.2^{n-1}+\ldots\ldots\ldots a_1.2^1+a_0.2^0$

Exemple 9 : $(11010)_2=1.2^4+1.2^3+0.2^2+1.2^1+0.2^0=16+8+2=(26)_{10}$

3. Système octal :

Le système de base 8 comprend huit chiffres qui sont : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 et 7.

Exemple 10 : $(4527)_8=4.8^3+5.8^2+2.8^1+7.8^0=(2391)_{10}$

4. Système hexadécimal :

Le système de base 16 résulte du développement des micro- ordinateurs les symboles utilisés dans cette base sont les dix chiffres de 0 à 9 complétés par les lettres A(pour10), B(pour 11), C(pour12), D(pour 13), E(pour14) et F(pour15).

Exemple 11 : $(C1BD5)_{16}=12.16^4+1.16^3+11.16^2+13.16^1+5.16^0=(793557)_{10}$.

Savoir-faire

A. Applications :

Exercice. 1

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$; $U_n = 3^{2n+1} + 2^{n+2}$.

1) Calculer $U_{n+1} - 9U_n$

2) Démontrer par récurrence : pour tout entier naturel U_n est divisible par **7**.

Solution :

$$U_{n+1} - 9\,U_n = 3^{2(n+1)+1} + 2^{(n+1)+2} - 9\left(3^{2n+1} + 2^{n+2}\right)$$

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$; $= 3^{2n+3} + 2^{n+3} - 3^2 \times 3^{2n+1} - 9 \times 2^{n+2}$

$$= 3^{2n+3} - 3^{2n+3} + (2-9) \times 2^{n+2}$$

On a donc $U_{n+1} - 9U_n = -7 \times 2^{n+2}$.

2) Démontrons par récurrence : U_n est divisible par **7**, $\forall n \in \mathbb{N}$.

La propriété est donc vraie pour **n = 0**.

Soit **p** un entier naturel, supposons que U_p est divisible par **7**et démontrons que U_{p+1}l'est également.

On a $U_{n+1} = 9U_n - 7 \times 2^{n+2}$, mais par hypothèse U_p est divisible par **7**, donc il en est de même pour $9U_n$.

Donc $9U_n$ et $7 \times 2^{n+2}$ sont tous deux multiples de **7** leur différence est aussi multiple de **7**.

Par conséquent U_{p+1} est multiple de **7**. Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, U_n est divisible par **7**.

Exercice 2 :

1) **89** est-il un nombre premier ?

2) Simplifier le plus possible les fractions : $\frac{72}{64}$; $\frac{382}{534}$; $\frac{1068}{3144}$.

Solution :

1) pour déterminer si **89** est premier, étudions sa divisibilité par les nombres premiers successifs

- **89** n'est pas divisible par **2** ; (**9** est impair)
- **89** n'est pas divisible par **3** ; (**8+9** n'est pas divisible par **3**)
- **89** n'est pas divisible par **5** ; ($9 \neq 5$; $9 \neq 0$)
- **89** n'est pas divisible par **7** ; ($89 = 12 \times 7 + 5$),
- **89** n'est pas divisible par **11** ; ($89 = 8 \times 11 + 1$),

Le carré de **11** étant supérieur de à **89** ($11^2 = 121$), et **89** n'ayant pas de diviseur premier inférieur à **11**, on peut affirmer que **89** est premier.

2) Simplification

- $\frac{72}{64} = \frac{8\times 9}{8\times 8} = \frac{9}{8}$; $\text{pgcd}(9,8) = 1$; $\frac{9}{8}$ est irréductible.
- $\frac{382}{534} = \frac{2\times 191}{2\times 3\times 89} = \frac{191}{267}$; $191 = 2 \times 89 + 13$ n'est ni divisible par **89**, ni par **3**,
- $\frac{1068}{3144} = \frac{2^2\times 3\times 89}{2^2\times 3\times 262} = \frac{89}{262}$; $262 = 2 \times 89 + 84$; n'est pas divisible par **89**

Exercice 3 :

Un document rédigé comporte **4350** lignes sur plusieurs pages.

Une page complète comporte **34** lignes et seule la dernière page est éventuellement non complète.

Calculer le nombre de lignes figurant sur la dernière page.

Solution :

Effectuons la division euclidienne de **4350** par **34** : $4350 = 34 \times 127 + 32$,

Donc, sur la dernière page (**n° 128**) il y a **32** lignes.

Exercice 4 :

Dans chacun des cas suivants, déterminer l'écriture du naturel **a** dans la base **n**.

1) $a = 3$; $n = 7$; 2) $a = 53$; $n = 2$; 3) $a = 53$; $n = 5$; 4) $a = 4606$; $n = 12$.

Solution:

1) $a < n \Rightarrow \overline{a}^{n} = a$; $\overline{3}^{7} = 3$;

2) $53 = 5 \times 10 + 3 = 5 \times 5 \times 2 + 3 = 2 \times 5^2 + 0 \times 5^1 + 3 \times 5^0$. Donc $53 = \overline{203}^{5}$

3) $53 = 2 \times 26 + 1$; $26 = 2 \times 13 + 0$; $13 = 6 \times 2 + 1$; $6 = 2 \times 3 + 0$; $3 = 2 \times 1 + 1$; $1 = 2 \times 0 + 1$. Donc

$53 = \overline{110101}^{2}$.

4) $4606 = 12 \times 383 + 10$; $383 = 12 \times 31 + 11$; $31 = 12 \times 2 + 7$; $2 = 12 \times 0 + 2$

Ou encore $4606 = 2 \times 12^3 + 7 \times 12^2 + 11 \times 12 + 10$.

Dans la base **12** on écrit $10 = A$; $11 = B$. Donc $4606 = \overline{27AB}^{12}$.

Exercice 5 :

L'entier naturel **341** s'écrit $\overline{2331}^{a}$. Calculer **a**.

Solution :

a est un entier supérieur à **3** qui vérifie : $341 = 2 \times a^3 + 3 \times a^2 + 3 \times a + 1$, donc **a** est un entier supérieur ou égal à **4** solution de l'équation polynomiale : $2 \times x^3 + 3 \times x^2 + 3 \times x + 1 = 0$

On peut procéder par essais successifs, mais on peut remarquer que :

$$2a^3 < 341 < 3a^3 \Leftrightarrow \frac{341}{3} < a^3 < \frac{341}{2}, \text{ donc } a = 5.$$

Exercice 6 :

a) Déterminer **pgcd(168 ; 288)** et **ppcm(168 ; 288).**

b) **a** ; **b** et **c** trois entiers tels que **pgcd(a ;b) = 1** et **pgcd(a ;c) = 1** ; montrer que **a** et **bc** sont premiers entre eux.

c) Déterminer un couple **(u ; v)** d'entiers relatifs tels que **14u +25v = 1.**

Solution :

a) Utilisons l'algorithme d'Euclide

- **$288 = 168 \times 1 + 120$**
- **$168 = 120 \times 1 + 48$**
- **$120 = 48 \times 2 + 24$**
- **$48 = 24 \times 2 + 0$**

Ces divisions Euclidiennes successives peuvent se présenter dans le tableau suivant :

	1	1	2	2
288	168	120	48	24
120	48	24	0	

Pgcd(168 ; 288) = 24

Donc **ppcm(168 ; 288)** = $\frac{168 \times 288}{24}$ **= 2016** ou encore **$168 = 2^3 \times 3^1 \times 7^1$** ; **$288 = 2^5 \times 3^2$** ;

donc **pgcd(168 ; 288) = $2^3 \times 3^1 = 8 \times 3 = 24$** ; **ppcm(168 ; 288) = $2^5 \times 3^2 \times 7^1 = 2016$**

b) On pose **d = pgcd(a ; bc)**, alors **d** divise **bc** ; **d** est premier avec **b**, donc d'après le théorème de Gauss **d** divise **c**, donc **d** est un diviseur positif commun entre **a** et **c**.

Or le seul diviseur positif commun de **a** et **c** c'est **1**, d'où **d = 1** et **pgcd(a ; bc) = 1**.

Donc **a** et **bc** sont premiers entre eux.

c) **$14u + 25v = 1$** ; **14** et **25** sont premiers entre eux ; **$25 = 14 + 11$**, donc, d'après le théorème de Bézout il existe deux entiers relatifs **u** et **v** vérifiant cette égalité.

Déterminons de tels entiers **u** et **v** en utilisant l'algorithme d'Euclide de calcul du **pgcd** de deux entiers.

- **$25 = 14 \times 1 + 11$ (1)**
- **$14 = 11 \times 1 + 3$ (2)**
- **$11 = 3 \times 3 + 2$ (3)**
- **$3 = 2 \times 1 + 1$ (4)**

Par rapports successifs en partant de la dernière égalité on a :

- **$1 = 3 - 2$ (4)**
- **$1 = 3 - (11 - 3 \times 3)$ (3)**

  $= 4 \times 3 - 11$
- **$1 = 4 \times (14 - 11) - 11$ (2)**

  $= 4 \times 14 - 5 \times 11$
- **$1 = 4 \times 14 - 5 \times (25 - 14)$ (1)**

  $= 9 \times 14 - 5 \times 25$

On a donc **$14 \times 9 + 25 \times (-5) = 1$,** d'où **u = 9 ; v = -5**.

Mat 7 M AC.indd 34 20/01/46 02:16:17

B. Exercices Divers

1. Donner les écritures du nombre **0,6** sous forme de fraction dont le dénominateur est compris (ou au sens large) entre **50** et **70**.

2. Quelles sont les fractions égales à $\frac{33}{21}$ dont le dénominateur est positif et strictement inférieur à **50** ?

3. 1) Trouver tous les diviseurs positifs de **144**.
2) Trouver tous les diviseurs positifs de **1820**.
3) Trouver tous les diviseurs positifs de **1485**.

4. Un terrain rectangulaire a pour dimensions **156 m** et **90 m** ; on veut l'entourer d'une clôture de fil de fer soutenue par des piquets régulièrement espacés, un piquet étant planté à chaque angle du terrain, sachant que deux piquets successifs doivent être distants d'un nombre entier de mètres et située à plus de **2m** et à moins de **5m** l'un de l'autre .
Combien faut-il prévoir de piquets ?

5. On appelle diviseur propre d'un entier naturel tout diviseur positif de cet entier autre que lui-même.
Deux entiers naturels sont dits amicaux lorsque la somme des diviseurs propres de chacun est égale à l'autre.
a) Montrer que **220** et **284** sont amicaux
b) Que peut-on dire de **1210** et **1184** ?

6. a) **97** est-il un nombre premier ?
261 est-il un nombre premier ?
c) **1031** est-il un nombre premier ?

7. a désigne un entier relatif, Démontrer que le nombre $\mathbf{a\,(a^2 - 1)}$ est divisible par **6**.

8. Pour chacune des écritures proposées, préciser laquelle des trois propositions suivantes est vraie :
P_1 l'écriture ne définit aucune division euclidienne
P_2 l'écriture définit une seule division euclidienne
P_3 l'écriture définit deux divisions euclidiennes.
1) $63 = 9 \times 7$; 3) $70 = 9 \times 7 + 7$
2) $68 = 9 \times 7 + 5$; 4) $73 = 9 \times 7 + 10$

9. Soit **x** le nombre qui s'écrit $\overline{1357}$ en base 8 ; donner l'écriture décimale et l'écriture en base **2** de **x**.

10 Montrer que si **x** est un entier naturel non divisible par **5**, alors le reste de la division Euclidienne de x^4 par **5** est **1**.

11 1) Déterminer le reste de la division Euclidienne par **5** de chacun des nombres 2^k l'entier k variant de **0** à **8**.
Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le reste de la division Euclidienne de 2^{4n} par **5** est égal à un entier constant à préciser.
2) Démontrer à l'aide de la question précédente et de la formule du binôme de Newton que pour tout entier naturel **n** le reste dans la division euclidienne de 17^{4n} par **5** est **1**.
3) Déduire des deux premières questions que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^{4n+3} + 17^{4n+2} + 3$ est divisible par **5**.

12 Démontrer que $2^{2n} + 2$ est divisible par **3** quel que soit l'entier naturel n (on pourra utiliser la formule du binôme de Newton ou procéder par récurrence).

13 1) Déterminer les restes de la division euclidienne par **7** des puissances successives de **10** à 10^6.
2) Démontrer par récurrence que : pour tout **k** de $\mathbb{N}$,
le reste dans les divisions euclidiennes de 10^{6k} par **7** est 1.
En déduire le reste dans la division euclidienne de 10^n par **7** suivant la valeur de l'entier **n**.
3) Déterminer tous les entiers naturels tels que $3 + 10^n$ soit divisible par **7**.

14 Dans chacun des cas suivants déterminer l'écriture du naturel a dans la base n :
1) $a = 4$; $n = 2$; 3) $a = 23$; $n = 12$
2) $a = 13$; $n = 5$; 4) $a = 105$; $n = 8$

15 Dans cet exercice les écritures soulignées sont en base **2**.
1) comment s'écrivent les puissances de **2** dans le système binaire ?
2) Effectuer les calculs proposés en donnant l'écriture des résultats en base **2** (**n** et **p** désignent des entiers naturels non nuls).

16 Soit **b** un entier supérieur ou égal à **2** ; écrire le nombre $(\mathbf{b+1})^3$ en base **b**. Distinguer trois cas : $\mathbf{b = 2}$, $\mathbf{b = 3}$ et $\mathbf{b > 3}$

17 Dans chacun des cas suivants ; déterminer le **pgcd** de **a** et **b** en utilisant deux méthodes :

- l'algorithme d'Euclide
- la décomposition en produit de facteurs

1) **a = 144** ; **b = 216** 3) **a = 1024** ; **b = 1120**
2) **a = 225** ; **b = 350** 4) **a = 3492** ; **b = 4680**

18 Pour carreler une surface rectangulaire de dimensions **60 cm** et **90cm**, on utilise des carreaux de forme carré (tous de même dimensions)
Sachant que la mesure en **cm** du côté d'un carreau est un nombre entier.
Déterminer les valeurs possibles du nombre de carreaux nécessaires.

19 Soient **a** et **b** deux entiers naturels
1) Montrer que $\mathbf{pgcd\ (a\ ;\ a^2 + b) = pgcd\ (a\ ;b)}$
2) Montrer que :
ppcm(a + b ; 2a + 2b) = ppcm(a ; b)
Indication : **a ; b ; a' ; b'** désignent des entiers naturels, on a : **pgcd(a ; b) = pgcd(a' ; b')** si et seulement si les diviseurs communs à **a** et **b** sont les diviseurs communs à **a'** et **b'**.

20 a et b deux entiers naturels non nuls. On pose **x = 15a + 4b** et **y = 11a +3b** .
Calculer **3x -4y** et **-11x + 15y** .En déduire que : **pgcd(15a + 4b ; 11a +3b) = pgcd(a ; b)**

21 n désigne un entier naturel non nul
1) Calculer **pgcd(n ; n +1)** ; **ppcm(n ; n + 1)**
2) Calculer **pgcd(n +1 ; 2n + 1)** ;
ppcm(n +1 ; 2n + 1).

22 **a** et **b** désigne deux entiers naturels premiers entre eux. On pose s = a + b et p = ab
Determiner: pgcd(a ; s) ; pgcd(s ;p).
a) $\underbrace{1\ldots1}_{\text{n chiffres}} + 1$; b) $\underbrace{10\ldots0}_{\text{n zéro}} \times \underbrace{10\ldots0}_{\text{p zéro}}$; c) $\underbrace{10\ldots0}_{\text{n-1 zéro}}1 \times \underbrace{1\ldots1}_{\text{n chiffres}}$

23 Déterminer les couples **(x; y)** d'entiers naturels tels que : **pgcd(x ; y) = 160** ; **ppcm(x ; y)= 7200**

24 **p** est un nombre premier et **k** un entier tel que : $\mathbf{1 \le k \le p - 1}$
1) Vérifier que $C_p^k = \dfrac{p}{k} C_{p-1}^{k-1}$;
2) En déduire que **p** divise C_p^k .

25 **x** et **y** désignent des entiers naturels premiers entre eux.
Préciser si les propositions suivantes sont vraies ou fausses :
P_1 Il existe des entiers relatifs **a** et **b** tels que
$xa - yb = 1$.
P_2 Pour tous entiers relatifs **u** et **v** on a :
$xu + yv = 1$
P_3 Il existe une infinité de couple **(u ; v)** d'entiers relatifs tels que $xu + yv = 1$
P_4 Il existe des entiers relatifs α et β tels que :
$\alpha x + \beta y = 3$

26 Déterminer un couple **(u ; v)** d'entiers relatifs vérifiant la condition proposée :
1)**3u + 4v = 1** ; 2) **364u + 165v = 1** ;
3) **364 -165v = 6**

27 1) Déterminer un couple $(x_0\ ;\ y_0)$ d'entiers relatifs tels que : $37x_0 + 165y_0 = 1$
2) En utilisant ce couple particulier déterminer toutes les solutions dans $\mathbb{Z}$ de l'équation
37x + 22y = 1.

28. Théorème de Thabit Ibn Qurra
Développant les travaux de Pythagore sur les nombres amiables, Thabit Ibn Qurra a démontré ce qui suit :
Si $a = 3 \times 2^n - 1$, $b = 3 \times 2^{n-1} - 1$ et $c = 9 \times 2^{2n-1} - 1$ sont premiers, avec n entier naturel plus grand que l'unité, alors $2^n \times a \times b$ et $2^n \times c$ sont amiables.
Cette condition est nécessaire mais pas suffisante.
1. En appliquant ce théorème, montrer que 220 et 284 sont amiables.
2. Retrouver le résultat de la question1.en cherchant les divieurs de chacun de ces nombres puis en faisant la somme des diviseurs strictement inférieurs à chaque nombre

CHAPITRE 3

Nombres complexes 1

Faire savoir

L'essentiel du chapitre

I. Ensemble des nombres complexes :

1. Définition :

- L'ensemble des nombres de la forme $x+iy$ où x et y sont réels est appelé ensemble des nombres complexes et noté $\mathbb{C}$, il contient l'ensemble des réels $\mathbb{R}$.
- $\mathbb{C}$est muni d'une addition et d'une multiplication qui prolongent celles de $\mathbb{R}$ et qui suivent les mêmes règles de calcul.
- Le nombre **i** vérifie $i^2 = -1$.

2. Forme algébrique d'un nombre complexe :

Soit un nombre complexe $z = x + iy$:

- $x + iy$ est la forme algébrique de **z**, sa partie réelle notée **Re(z)** et on écrit : **Re(z) = x** ;
- la partie imaginaire de **z** notée **Im(z)** et on écrit : **Im(z) = y** ;
- Un nombre complexe est réel si et seulement si, sa partie imaginaire est nulle,
- On appelle imaginaire pur tout complexe de la forme **iy** avec **y** réel. Un complexe est imaginaire pur, si et seulement si sa partie réelle est nulle,

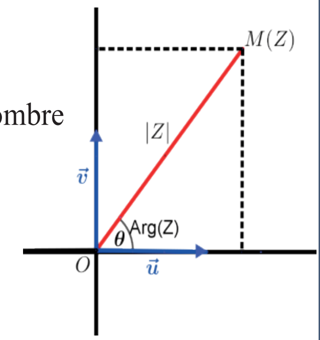
3. Représentation d'un nombre complexe :

Le plan est muni d'un repère $(O;\vec{u};\vec{v})$ orthonormé direct.

A tout point **M** de coordonnées cartésiennes **(x ; y)**, on associe le nombre complexe **z** défini par :

$z = x + iy$; **z** est appelé l'affixe du point **M** (et aussi du vecteur $\overrightarrow{OM}$).

On dit que **M** est le point image du nombre complexe **z** et que $\overrightarrow{OM}$ est son vecteur image.



4. Conjugué d'un nombre complexe :

Définition :

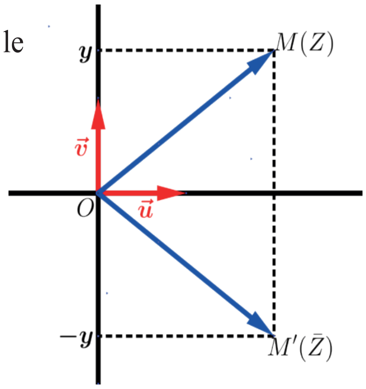
Le conjugué d'un nombre complexe **z** de forme algébrique $x+iy$ est le nombre complexe défini par

$\bar{z} = x - iy$.

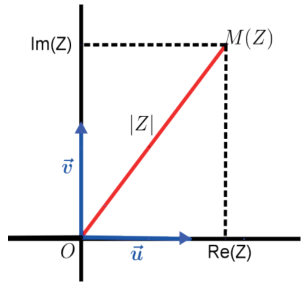
Propriétés :

z et **z'** désignent des nombres complexes,

- les points images de **z** et $\bar{z}$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.
- $z + \bar{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$; $z - \bar{z} = 2i\,\mathrm{Im}(z)$.
- **z** est réel si et seulement si, $\bar{z} = z$.
- **z** est imaginaire pur si et seulement si, $\bar{z} = -z$.
- $\overline{(\bar{z})} = z$,
- $\overline{z+z'} = \bar{z} + \bar{z'}$ (le conjugué d'une somme est la somme des conjugués),
- $\overline{zz'} = \bar{z} \times \bar{z'}$ (le conjugué d'un produit est le produit des conjugués),



- Si $\mathbf{z}$ est non nul, alors $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$, (le conjugué de l'inverse est l'inverse du conjugué),
- Si $\mathbf{z'}$ est non nul, alors $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$ (le conjugué du quotient est le quotient des conjugués),
- Si $\mathbf{n}$ est un entier non nul, alors $\overline{z^n} = \overline{z}^n$



5. Module d'un nombre complexe :

Définition :

Le module de $\mathbf{z}$ noté $|z|$ est la distance $\mathbf{OM}$; $|z| = OM = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Propriétés :

$\mathbf{z}$ et $\mathbf{z'}$ désignent deux nombres complexes :

- $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$;
- $|z| = |\overline{z}| = |-z|$ (un nombre complexe, son opposé et son conjugué ont même module).
- $|z+z'| \leq |z| + |z'|$ (Inégalité triangulaire)
- $|zz'| = |z| \times |z'|$ (le produit des modules est égal au module du produit).
- Si $\mathbf{z}$ est non nul, alors $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$ (le module de l'inverse est l'inverse du module),
- Si $\mathbf{z'}$ est non nul, alors $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$ (le module du quotient est le quotient des modules),

Pour tout entier naturel $\mathbf{n}$, non nul : $|z^n| = |z|^n$.

Remarque 1 : ***Distance de deux points :***

Soient $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ deux points d'affixes z_A et z_B . La distance $\mathbf{AB}$ est le module de la différence entre les affixes de $\mathbf{A}$ et de $\mathbf{B}$; $AB = |z_A - z_B|$.

6. Argument d'un nombre complexe :

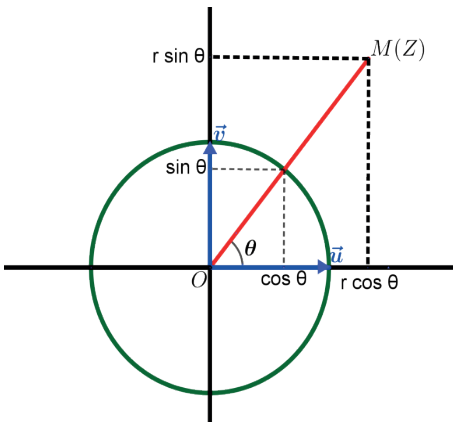
Définition :

Soit $\mathbf{z}$ un nombre complexe non nul et $\mathbf{M}$ le point du plan d'affixe $\mathbf{z}$.

On appelle argument de $\mathbf{z}$, noté $\arg(z)$, une mesure en radian de l'angle de vecteurs : $\left(\vec{u} \; ; \; \overrightarrow{OM}\right)$

Propriétés :

- $\arg(z_1 \times z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$
- $\arg(\frac{z_1}{z_2}) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$ avec $z_1 \neq 0$ et $z_2 \neq 0$
- $\arg(z^n) = n\arg(z)$; $z \neq 0$
- $\arg(\frac{1}{z}) = -\arg(z)$; $z \neq 0$
- $\arg(-z) = \pi + \arg(z)$
- $\arg(\overline{z}) = -\arg(z)$
- $z \in \mathbb{R}^* \Leftrightarrow \arg(z) = 0[\pi]$ ou $\arg(z) = k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$
- $z \in i\mathbb{R}^* \Leftrightarrow \arg(z) = \frac{\pi}{2}[\pi]$ ou $\arg(z) = \frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

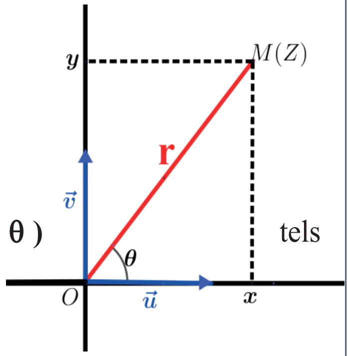


Interprétation géométrique :

- $\arg(z) = (\vec{U}, \overrightarrow{OM})[2\pi]$
- $\arg(z_B - z_A) = (\vec{U}, \overrightarrow{AB})[2\pi]$
- $\arg\left(\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})[2\pi]$

7. Forme trigonométrique d'un nombre complexe :

Définition :



Tout nombre complexe **z** non nul peut s'écrire sous la forme $\mathbf{z = r(\cos\theta + i\sin\theta)}$, où $\mathbf{r = OM = |z|}$ et $\theta = \left(\vec{u}\ ;\ \overrightarrow{OM}\right)$.

Cette écriture est appelée **forme trigonométrique** du nombre complexe **z**.

Le point **M** du plan distinct de **O** d'affixe z est déterminé par le couple **(r ; θ)** tels que : $\mathbf{OM = r}$ et $\theta = \left(\vec{u}\ ;\ \overrightarrow{OM}\right)\ [2\pi]$ (r ; θ) est alors le couple de coordonnées polaires du point **M**.

Exemple 1 :

Soient $\mathbf{z = 1 + i}$ et $\mathbf{z' = 1 - i}$. Mettre **z** et **z'** sous la forme trigonométrique.

On a : $|1+i| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, on peut écrire : $1 + i = \sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} + i\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Or, $\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \cos\dfrac{\pi}{4}$ et $\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \sin\dfrac{\pi}{4}$

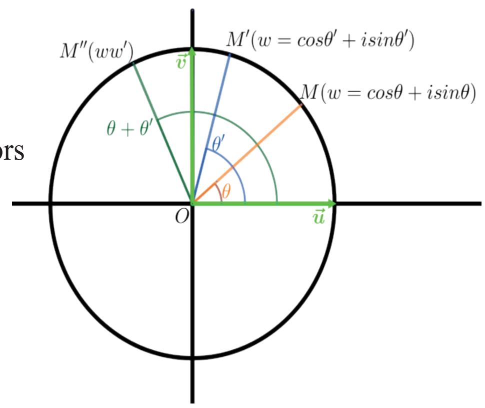
Donc $1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$.

De la même façons, on démontre que : $1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{-\pi}{4} + i\sin\dfrac{-\pi}{4}\right)$.

Remarque 2 :

- **0** n'a pas d'écriture trigonométrique.
- un argument de **z** est défini à un multiple de 2π près. Tous les arguments de **z** sont sous la forme $\theta + 2k\pi$. On écrira $\arg z = \theta\ [2\pi]$
- l'argument d'un nombre complexe non nul peut être représenté de manière unique par un nombre réel dans $]-\pi, \pi]$. On l'appelle argument principal de **z**.
- Si **z** est un nombre complexe de module **1** (**M** appartient au cercle trigonométrique), alors $z = \cos\theta + i\sin\theta$ ou $z = e^{i\theta}$ par convention $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.
- **z** est réel si, et seulement si : $z = 0$ **ou** $(z \neq 0$ **et** $\arg z = 0\ [\pi])$
- **z** est un réel strictement positif si, et seulement si, $\arg z = 0\ [2\pi]$, et strictement négatif si, et seulement si, $\arg z = \pi\ [2\pi]$.
- **z** est un imaginaire pur $\Leftrightarrow$ $z = 0$ **ou** $\left(z \neq 0 \text{ et } \arg z = \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]\right)$
- $z \in \left(i\mathbb{R}_+^*\right) \Leftrightarrow \arg z = \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$ et $z \in \left(i\mathbb{R}_-^*\right)\ \arg z = -\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$

Propriété :



Si $\omega = \cos\theta + i\sin\theta$ et $\omega' = \cos\theta' + i\sin\theta'$; alors $\omega\omega' = \cos(\theta + \theta') + i\sin(\theta + \theta')$.

II. Equation du second degré :

1. Résolution sur $\mathbb{C}$ de l'équation du second degré à coefficients complexes :

Théorème :

Soit **a, b** et **c** des nombres complexes tels que $\mathbf{a \neq 0}$.

L'équation $az^2+bz+c=0$ a pour solutions : $z_1=\dfrac{-b+d}{2a}$ et $z_2=\dfrac{-b-d}{2a}$, où **d** désigne une racine carrée de $\Delta=b^2-4ac$.

- si $\Delta=b^2-4ac\neq 0$, alors $z_1\neq z_2$.
- si $\Delta=b^2-4ac=0$, alors $z_1=z_2=\dfrac{-b}{2a}$; on dit que l'équation à une solution double.

Remarque 3 : $\Delta=b^2-4ac$ est appelé le discriminant de l'équation $az^2+bz+c=0$.

2. Résolution sur $\mathbb{C}$ d'une équation du second degré à coefficients réels :

Soit l'équation $az^2+bz+c=0$, ou **a, b** et **c** sont des réels et **a** non nul.

D'après l'étude précédente on a :

- si $\Delta=b^2-4ac>0$, l'équation admet deux solutions réelles distinctes : $\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$,
- si $\Delta=b^2-4ac=0$, l'équation admet une seule solution $\dfrac{-b}{2a}$, elle est réelle.
- si $\Delta=b^2-4ac<0$, une racine carrée complexe de Δ est $i\sqrt{-\Delta}$.

  L'équation admet deux racines complexes conjuguées : $\dfrac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $\dfrac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

Exemple 2:

1) Résoudre sur $\mathbb{C}$: $z^2-2z\cos\varphi+1=0$. Calculons le discriminant réduit :

$\Delta'=\cos^2\varphi-1=-\sin^2\varphi$, donc les solutions sont : $\cos\varphi+i\sin\varphi$ et $\cos\varphi-i\sin\varphi$.

2) Résoudre sur $\mathbb{C}$: $3x^2+2x+2=0$. Calculons le discriminant réduit : $\Delta'=1-6=-5=(i\sqrt{5})^2$

Les solutions sont donc : $\dfrac{-1+i\sqrt{5}}{3}$ et $\dfrac{-1-i\sqrt{5}}{3}$.

3) Résoudre dans $\mathbb{C}$: $(1-i)z^2-(6-4i)z+9-7i=0$. On a : $a=1-i$; $b=-(6-4i)$, $c=9-7i$;

b' = -3 + 2i ; b'² – ac = (-3 + 2i)² – (1- i)(9 – 7i) = 3 + 4i. Calculons les racines carrées de **3 + 4i**.

Il s'agit d'utiliser la méthode algébrique, soit $x+iy$ une racine carrée de ce nombre avec **x** et **y** réels.

$(x+iy)^2=3+4i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2=3 \\ x^2+y^2=5 \\ 2xy=4 \end{cases}$ Ce système donne, $x^2=4$ et $y^2=1$ et $xy>0$, d'où $2+i$ est une racine carrée de **3 + 4i**, Donc les solutions de l'équation sont :

$$z_1=\frac{3-2i+2+i}{1-i}=\frac{5-i}{1-i}=\frac{(5-i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{6+4i}{2}=3+2i$$

$$z_2=\frac{3-2i-(2+i)}{1-i}=\frac{1-3i}{1-i}=\frac{(1-3i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{4-2i}{2}=2-i$$

Savoir- faire

A. Applications

Exercice 1 :

a) Ecrire sous forme algébrique **x + iy** les nombres complexes suivants :

$a = (3+2i)(2-i)$; $b = \frac{5+6i}{1-i}$; $c = \frac{3+i}{2-i} + \frac{2-i}{3+i}$.

b) Ecrire sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants:

$a = 1-i$; $b = 1+i\sqrt{3}$; $c = \frac{\sqrt{2}}{1-i}$; $d = \frac{4i}{1+i\sqrt{3}}$.

Solution :

Ecriture sous forme algébrique

- $a = (3+2i)(2-i) = 6-3i+4i+2 = 8+i$
- $b = \frac{5+6i}{1-i} = \frac{(5+6i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{5+5i+6i-6}{2} = \frac{-1+11i}{2} = \frac{-1}{2} + \frac{11}{2}i$
- $c = \frac{3+i}{2-i} + \frac{2-i}{3+i} = \frac{(3+i)^2+(2-i)^2}{(2-i)(3+i)} = \frac{9+6i-1+4-4i-1}{6+2i-3i+1} = \frac{12+2i}{7-i}$

$$= \frac{(11+2i)(7+i)}{(7-i)(7+i)} = \frac{77+11i+14i-2}{50} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i$$

Ecriture sous forme trigonométrique

- $a = 1-i = \sqrt{2}(\frac{1-i}{\sqrt{2}}) = \sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}) = \sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}} + i(\frac{-1}{\sqrt{2}})) = \sqrt{2}(\cos(\frac{-\pi}{4}) + i\sin(\frac{-\pi}{4}))$;
- $b = 1+i\sqrt{3} = 2(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}) = 2(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$;
- $c = \frac{\sqrt{2}}{1-i} = \frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}$;
- $d = \frac{4i}{1+i\sqrt{3}} = \frac{4i(1-i\sqrt{3})}{4} = i(1-i\sqrt{3}) = \sqrt{3}+i = 2(\frac{\sqrt{3}+i}{2}) = 2(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}) = 2(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$

Exercice 2 :

Calculer le module du nombre complexe z proposé :

a) $z = 1+i\sqrt{3}$; b) $z = 1 - i$; c) $z = -3i$; d) $z = 200 - 200i$; e) $z = (1-i)(3\sqrt{2} - i\sqrt{7})$.

Solution :

a) $|z| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$; b) $|z| = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$; c) $|z| = \sqrt{(-3)^2} = 3$;

d) $|z| = \sqrt{200^2 + (-200)^2} = 200\sqrt{2}$; e) $|z| = |1-i||3\sqrt{2} - i\sqrt{7}| = \sqrt{2}\times 5 = 5\sqrt{2}$

Exercice 3 :

Déterminer un argument pour chacun des complexes suivants :

$a = 1 + i$; $b = 1 - i\sqrt{3}$; $c = \dfrac{1+i}{1-i\sqrt{3}}$; $d = (1+i)(1-i\sqrt{3})$.

Solution :

- $|a| = \sqrt{2}$; $\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$; $\sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \theta = \dfrac{\pi}{4}$; $\arg a = \dfrac{\pi}{4}\ [2\pi]$
- $|b| = 2$; $\cos\theta = \dfrac{1}{2}$; $\sin\theta = \dfrac{-\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \theta = \dfrac{-\pi}{3}$; $\arg a = \dfrac{-\pi}{3}\ [2\pi]$

  $|c| = \dfrac{|a|}{|b|} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $\arg c = \arg a - \arg b = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{7\pi}{12}\ [2\pi]$
- $|d| = |a||b| = 2\sqrt{2}$; $\arg d = \arg a + \arg b = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{12}\ [2\pi]$

Exercice 4 :

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations : a) $z^2 = -9$; b) $z^2 = -\sqrt{5}$; c) $z^2 = 3$

Solution :

a) $z^2 = -9 \Rightarrow z^2 = (3i)^2 \Rightarrow z_1 = 3i$; $z_2 = -3i$;

b) $z^2 = -\sqrt{5} \Rightarrow z^2 = (i\sqrt[4]{5})^2 \Rightarrow z_1 = i\sqrt[4]{5}$; $z_2 = -i\sqrt[4]{5}$;

c) $z^2 = 3 \Rightarrow z^2 = (\sqrt{3})^2 \Rightarrow z_1 = \sqrt{3}$; $z_2 = -\sqrt{3}$.

Exercice 5 :

Résoudre dans $\mathbb{C}$: $z^2 = -5 + 12i$

Solution :

Soit $z = x + iy \Rightarrow z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy \Rightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -5 \\ 2xy = 12 \\ x^2 + y^2 = 13 \end{cases} \Rightarrow x = \pm 2$; $y = \pm 3 \Rightarrow z_1 = 2 + 3i$; $z_2 = -2 - 3i$

B. Exercices divers :

1 Ecrire sous forme x + iy (avec x et y deux réels) :

$a = \dfrac{1}{(1+2i)(3-i)}$; $b = \dfrac{1+2i}{(1-2i)}$; $c = \dfrac{5+i\sqrt{2}}{1+i}$

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 4\bar{z} - 5 = 0$

3. Soit A le point d'affixe 1 – 2i, soient M et M' les points du plan d'affixes z et z'.
Traduire en termes de modules chacune des situations suivantes :

- Le triangle OMM' est isocèle en O
- Le triangle AMM' est isocèle en A
- Le triangle AMM' est isocèle en M
- Le triangle AMM' est rectangle en M

4. Déterminer et construire les ensembles E des points M dont l'affixe z vérifie les conditions suivantes :
1) $|z + 1 + 2i| = |z - 4|$; 2) $|z - 3i| = 2$;
3) $|\bar{z} - 2 + i| = 1$.

5. Déterminer et construire les ensembles E des points M dont l'affixe z vérifie les conditions proposées.

1) $\arg z = -\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$; 2) $\arg z = \dfrac{\pi}{4}\ [2\pi]$

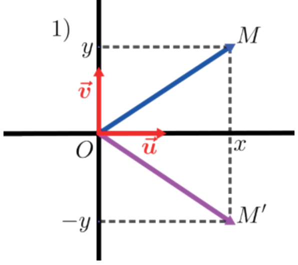
3) $\arg z = \dfrac{\pi}{6}\ [2\pi]$

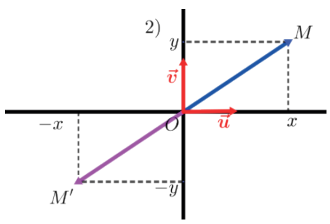
6. Déterminer et construire les ensembles E vérifiant des conditions :

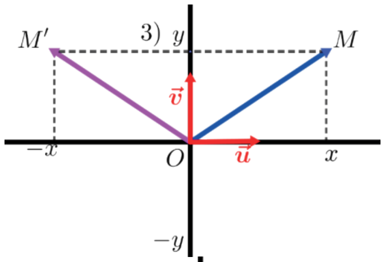
1) $z = 2e^{i\theta}$; $\theta \in [0\,;2\pi[$; 2) $z = r\,e^{i\frac{\pi}{2}}$; $r \in [0;+\infty[$;

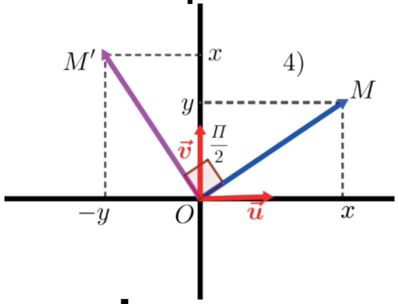
3) $z = k\,e^{i\frac{\pi}{4}}$; $k \in \mathbb{R}$.

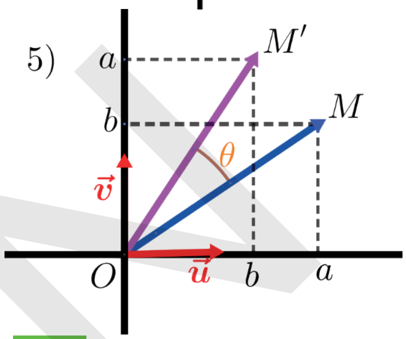
7. Soient M et M'deux points d'affixes non nulles notées z et z'.
Dans chacune des configurations suivantes que peut-on dire :
a) de z et z' b) de $|z|$ et $|z'|$
c) de argz et argz'











8. Soit z un nombre complexe, on note $x+iy$ sa forme algébrique et **M** son point image.

A chaque propriété de la liste 1, associe celle de la liste 2 qui caractérise le même ensemble des points.

Liste 1

1) $\begin{cases} y = x \\ x<0 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} y = -x \\ x > 0 \end{cases}$

3) $\begin{cases} y = \sqrt{3}x \\ x \neq 0 \end{cases}$; 4) $x^2+y^2 = 1$

5) $y = 0$; 6) $\begin{cases} x^2+y^2 = 4 \\ y \geq 0 \end{cases}$

Liste 2

a) $z = \bar{z}$; b) $\arg(z) = \dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$

c) $|z| = 1$; d) $\arg(z) = \dfrac{5\pi}{4}\ [2\pi]$

e) $\begin{cases} |z| = 2 \\ \operatorname{Im} z \geq 0 \end{cases}$; f) $\arg(z) = \dfrac{-\pi}{4}\ [2\pi]$

9. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $(O\ ;\ \vec{u}\ ;\vec{v})$.

Déterminer et représenter sur trois graphiques différents :

1) l'ensemble $\mathscr{E}$ des points M d'affixes z telles que : z ; $\frac{1}{z}$ et 1 – z aient même module.

2) l'ensemble $\mathscr{F}$ des points M d'affixes z telles que : z^2 soit imaginaire pur.

3) l'ensemble $\mathscr{G}$ des points M d'affixes z telles que : $z+\bar{z}+|z|^2=0$

10 **Vrai ou Faux**

1) Le complexe $\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{4}$ a pour module **1**.

2) $(1-\sqrt{2})e^{i\frac{\pi}{3}}$ a pour argument $\frac{\pi}{3}$.

3) Un argument de $2+3i$ est l'opposé d'un argument de **2-3i**.

4) $\frac{\pi}{2}-3$ est un argument du complexe $\sin 3+i\cos 3$.

5) $5-i$ et $\dfrac{5-i}{3\pi+4\sqrt{2}-1}$ ont même argument.

11 Donner la forme algébrique des complexe suivants :1) $e^{i\pi}$; 2)$e^{i\frac{\pi}{2}}$; 3)$2e^{i\frac{\pi}{3}}$; 4)$e^{-2i\pi}$

12 Donner une forme trigonométrique des complexes suivants : **1) -3 + 3i ; 2)** $\sqrt{2}+i\sqrt{6}$;

3)$-2(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})$

13 1) Donner les formes trigonométriques et exponentielles des complexes suivants :

$\sqrt{3}+i$; $\sqrt{3}-i$; $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

2) le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $(O\ ;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v})$. Placer les points A ; B ; C d'affixes respectives :

$\sqrt{3}+i$; $\sqrt{3}-i$; $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

On expliquera rapidement les trois constructions.

14 Soit le polynôme :

$$p(z)=z^4-6z^3-18z-9$$

1.) Déterminer les réels a, b et c tels que :
$P(z)=(z^2+3)(az^2+bz+c)$

2.) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z)=0$.

3.) Placer dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal $(O\ ;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v})$ les points **A ; B ; C** et **D** d'affixes
$i\sqrt{3}\ ;-i\sqrt{3}\ ;3+2\sqrt{3}\ ;3-2\sqrt{3}$.
Montrer que ces quatre points appartiennent à un même cercle.

4.) On note **E** le symétrique de **D** par rapport à **O**, Déterminer la nature du triangle **BEC**.

15 Donner un argument des complexes suivants :

1) $(\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{\pi}{7})(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$;

2) $(\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{\pi}{7})(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4})$

3) $-2(\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{\pi}{7})(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$;

4) $e^{i\frac{\pi}{3}}\times e^{-i\frac{\pi}{2}}$; 5)$e^{i\pi}+e^{i\frac{\pi}{3}}$

16 Soient A et B les points d'affixes $3+2i$ et $2+i$. Sans utiliser ni règle ni compas construire sur une feuille un point C tel que :
$(\vec{u}\ ;\ \overrightarrow{OC})=(\vec{u}\ ;\ \overrightarrow{OA})+(\vec{u}\ ;\ \overrightarrow{OB})\ (2\pi)$.

17 Soient z_1 ; z_2 et **Z** les complexes définis par : $z_1=1+i\sqrt{3}$; $z_2=1-i$; $Z=\frac{z_1}{z_2}$

1.) Déterminer la forme algébrique de **Z.**

2.) Déterminer le module et argument de z_1 ; z_2 et **Z.**

3.) Déduire des questions précédentes :

$$\cos\frac{7\pi}{12}=\frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\ ;\ \sin\frac{7\pi}{12}=\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}.$$

18 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations :

1) $z^2+4z+5=0$; 2) $4z^2-2z+1=0$

3) $z^2+z+1=0$; 4) $4z^2-z+1=0$

5) $2z^2-2z+1=0$; 6) $z^2-2z+2=0$

7) $2z^2-2z\cos\alpha+1=0$ $\alpha\in]0\ ;\pi[$

Mat 7 M AC.indd 44 20/01/46 02:16:20

CHAPITRE 4

Nombres complexes 2

Faire savoir

L'essentiel du chapitre

I. Argument d'un nombre complexe non nul : (Rappels et complémént)

z et **z'** désignent deux nombres complexes non nuls.

- **z** est réel si et seulement si, argument de **z** est un **0** ou π.
- **z** est imaginaire pur si et seulement si, **z** est nul ou $\frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$ est un argument de **z**.
- la somme d'un argument de **z** et d'un argument de **z'** est un argument du produit **zz'** ;
  $\arg(zz') = \arg z + \arg z' \quad [2\pi]$
- l'opposé d'un argument de **z** est un argument de l'inverse de **z**, $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = \arg \bar{z} \doteq -\arg z \quad [2\pi]$
- la différence d'un argument de **z** et d'un argument de **z'** est un argument du quotient $\frac{z}{z'}$:

$$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg z - \arg z' \quad [2\pi]$$

II. Notation exponentielle :

Définition :

Soit θ un nombre réel. On convient de noter $e^{i\theta}$ le nombre complexe : $\cos\theta + i\sin\theta$.

Théorème 1 :

Tout nombre complexe **z** non nul peut s'écrire sous la forme $re^{i\theta}$ où $r = OM = |z|$ et $\theta = (\vec{u}, \overrightarrow{OM})$

Cette écriture est appelée **forme exponentielle** du nombre complexe **z**.

Exemple 1 :

Soient $z = 1+i$, et $z' = 1-i$ pour mettre ces nombres sous la forme exponentielle, cette forme est immédiate, car on a : $1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$; $1-i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

Propriété 1 :

a) Soient **z** et **z'** deux nombres complexes non nuls tels que :

$z = r\,e^{i\theta}$; $z' = r'\,e^{i\theta'}$; $r = |z|$ et $r' = |z'|$; $\theta = \arg z$; $\theta' = \arg z'$.

$zz' = rr'e^{i(\theta+\theta')}$	$\lvert zz'\rvert = \lvert z\rvert \times \lvert z'\rvert$	$\arg(zz') = \arg z + \arg z'$
$\frac{1}{z'} = \frac{1}{r'}e^{-i\theta'}$	$\left\lvert \frac{1}{z'} \right\rvert = \frac{1}{\lvert z'\rvert}$	$\arg(\frac{1}{z'}) = -\arg z'$
$\frac{z}{z'} = \frac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}$	$\left\lvert \frac{z}{z'} \right\rvert = \frac{\lvert z\rvert}{\lvert z'\rvert}$	$\arg(\frac{z}{z'}) = \arg z - \arg z'$
$z^n = r^n e^{in\theta} ; n \in \mathbb{Z}$	$\lvert z^n\rvert = \lvert z\rvert^n$; $n \in \mathbb{Z}$	$\arg(z^n) = n \times \arg z$
$\bar{z} = re^{-i\theta}$	$\lvert \bar{z}\rvert = \lvert z\rvert$	$\arg(\bar{z}) = -\arg z$

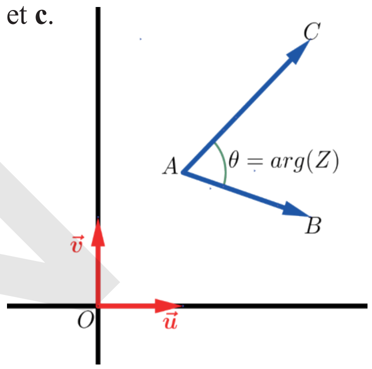
b) Formules d'Euler	c) Formule de Moivre
Les formules d'Euler résultent immédiatement de la définition de $e^{i\theta}$. $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$	Pour tout n de $\mathbb{N}$, la formule de Moivre est : $\mathbf{\cos n\theta + i\sin n\theta = (\cos\theta + i\sin\theta)^n}$. ou encore : $\mathbf{e^{in\theta} = (e^{i\theta})^n}$.

Application :

- La formule de Moivre permet, en particulier, d'exprimer $\mathbf{\cos n\theta}$ et $\mathbf{\sin n\theta}$ en fonction de puissances de $\mathbf{\cos\theta}$ ou de $\mathbf{\sin\theta}$.
- La formule d'Euler permet, complétée par la formule de Newton, de linéariser $(\mathbf{\cos\theta})^n$ et $(\mathbf{\sin\theta})^n$, c'est-à dire les exprimer en fonction de $\mathbf{\cos k\theta}$ ou de $\mathbf{\sin k\theta}$, **k** étant un entier naturel $\mathbf{0 \le k \le n}$.

III. Interprétation géométrique :

1. Quotient de deux nombres complexes :



Soit **A** ; **B** et **C** des points deux à deux distincts d'affixes respectives **a, b** et **c**.

Soit le nombre complexe $\mathbf{Z = \dfrac{c-a}{b-a}}$. On a :

$$|Z| = \frac{AC}{AB} \text{ et } \arg Z = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)\ [2\pi]$$

Exemple 2 :

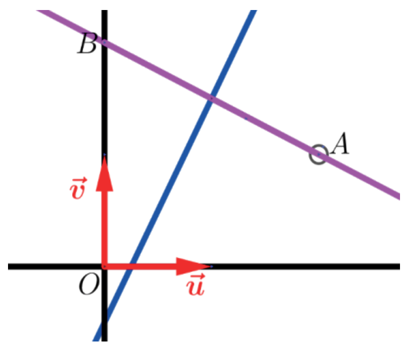
Le plan étant rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Soit **z** un nombre complexe et **Z** le complexe défini par $\mathbf{Z = \dfrac{z-2i}{z-2-i}}$.

On appelle **A** et **B** les points d'affixes respectives **2 + i** et **2i**.

Déterminer et construire l'ensemble des points **M** d'affixes **z** tels que :

a) $|\mathbf{Z}| = \mathbf{1}$; b) **Z** soit réel ; c) **Z** soit imaginaire pur.



On a pour $\mathbf{z \neq 2+i}$ et $\mathbf{z \neq 2i}$, $|Z| = \dfrac{MB}{MA}$ et

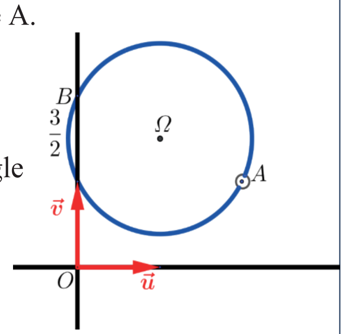
$$\arg Z = \left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right)\ [2\pi].$$

a) $|Z| = 1 \Leftrightarrow \dfrac{MB}{MA} = 1 \Leftrightarrow MB = MA$,

cet ensemble de points est la médiatrice du segment [AB].

b) **Z** est réel $\Leftrightarrow$ $\mathbf{\arg Z = 0\ [\pi]}$ ou **Z = 0** $\Leftrightarrow$

$(\overrightarrow{MA} ; \overrightarrow{MB}) = 0\ [\pi]$ ou **M = B**.L'ensemble cherché est la droite (AB) privée de A.



c) Z est imaginaire pur $\Leftrightarrow$ $\mathbf{\arg Z = \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]}$ ou Z = 0 $\Leftrightarrow$ $(\overrightarrow{MA} ; \overrightarrow{MB}) = \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$

ou M = B. $(\overrightarrow{MA} ; \overrightarrow{MB}) = \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$ ce qui signifie que le triangle AMB est rectangle

en M ;l'ensemble des points M tels que $(\overrightarrow{MA} ; \overrightarrow{MB}) = \dfrac{\pi}{2}(\pi)$ est le cercle

de diamètre $[AB]$ privé de A et de B. Or, dans ce cas B appartient à l'ensemble

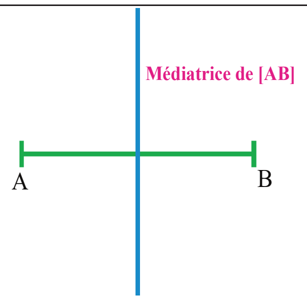
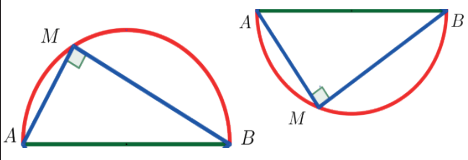
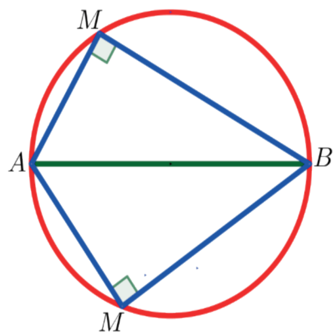
de points cherché, donc l'ensemble des points M tels que :

Z soit imaginaire pur est le cercle de diamètre [AB] privé de A.

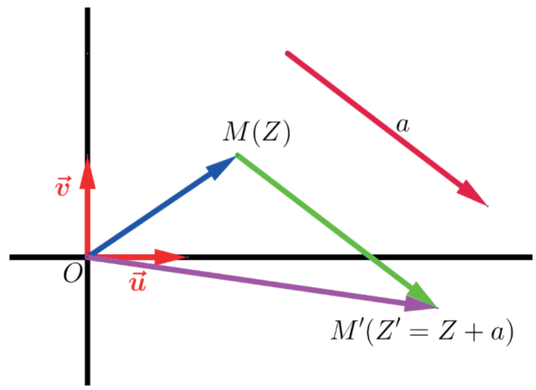
2. Ensembles de points :

Soit z un nombre complexe d'image **M** et **Z** le nombre complexe défini par : $\mathbf{Z = \frac{z-b}{z-a}}$ / $\mathbf{z \neq b}$ **et** $\mathbf{z \neq a}$.

Soit **A** et **B** les points d'affixes respectives **a** et **b**.

Ensemble de points M tels que	**Interprétation**	**Nature**	**Illustration**
$\lvert Z \rvert = 1$	$\mathbf{MB = MA}$	**Droite**	
$\arg(Z) = 0\ [2\pi]$	$(\overrightarrow{MA}\ ;\ \overrightarrow{MB}) = 0\ [2\pi]$	$(AB) \setminus [AB]$	
$\arg(Z) = \pi\ [2\pi]$	$(\overrightarrow{MA}\ ;\ \overrightarrow{MB}) = \pi\ [2\pi]$	$]AB[$	
$\arg(Z) = 0\ [\pi]$	$(\overrightarrow{MA}\ ;\ \overrightarrow{MB}) = 0\ [\pi]$	Droite percée	
$\begin{cases} \arg(Z) = \frac{\pi}{2}\ [2\pi] \\ \text{ou} \\ \arg(Z) = -\frac{\pi}{2}\ [2\pi] \end{cases}$	$\begin{cases} (\overrightarrow{MA}\ ;\ \overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{2} [2\pi] \\ \text{ou} \\ (\overrightarrow{MA}\ ;\ \overrightarrow{MB}) = -\frac{\pi}{2}\ [2\pi] \end{cases}$	l'un des demi-cercles de diamètre $[AB]$, privé de **A** et **B**.	
$\arg(Z) = \frac{\pi}{2}\ [\pi]$	$(\overrightarrow{MA}\ ;\ \overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{2}\ [\pi]$	Cercle de diamètre $[AB]$, privé de **A** et **B**.	

3. Application : $z \mapsto z+a$

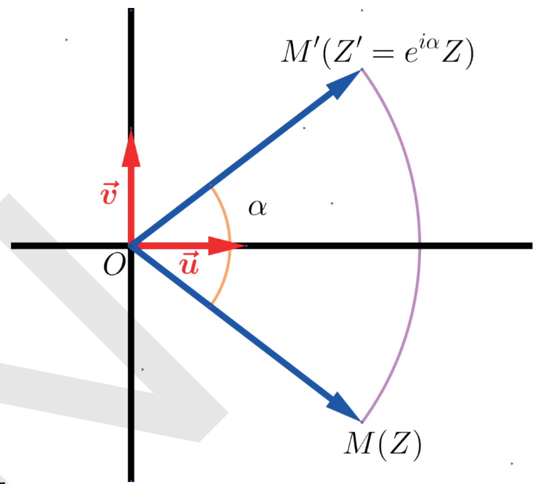


Soit a un nombre complexe et $\vec{w}$ son vecteur image.

Soit, l'application t du plan complexe $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ associant à tout point **M** d'affixe **z** le point **M'** d'affixe $\mathbf{z'=z+a}$

t **est la translation de vecteur** $\vec{w}$.

4. Application : $z \mapsto e^{i\alpha}z$



Soit α une mesure d'angle orienté. $(\vec{u},\overrightarrow{OM})$

Soit l'application $\mathcal{R}$ du plan complexe $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$, associant à tout point **M** d'affixe **z** le point **M'** d'affixe $\mathbf{z'=e^{i\alpha}z}$.

$\mathcal{R}$ **est la rotation de centre O et d'angle** α.

1° Cas particuliers

- Si **z' = iz**, $\mathcal{R}$ est le quart de tour positif ($\mathbf{i = e^{i\frac{\pi}{2}}}$)
- Si **z' = - iz,** $\mathcal{R}$ est le quart de tour négatif ($\mathbf{-i = e^{-i\frac{\pi}{2}}}$)
- Si **z' = -z**, $\mathcal{R}$ est la symétrie centrale de centre O ($\mathbf{-1 = e^{i\pi}}$)

IV. Racines n^ièmes de l'unité :

1. Cas particuliers :

✓ **Cas n = 2**

Soit **z** un nombre complexes tel que : $\mathbf{z^2 = 1}$ ce qui veut dire que :

$\mathbf{(z-1)(z+1)=0}$, d'où $\mathbf{z=1}$ ou $\mathbf{z=-1}$.

Donc les racines carrées de l'unité sont 1 et -1, remarquons que leur somme est nulle.

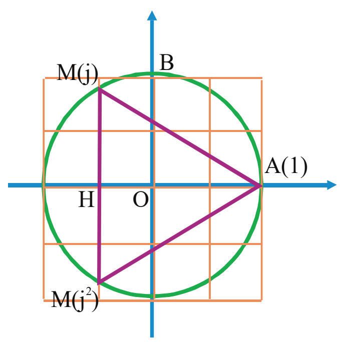
✓ **Cas n = 3**

On cherche à déterminer les nombres complexes z tels que : $\mathbf{z^3 = 1}$.

$$z^3 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = 1 \\ \exists\theta / e^{i3\theta} = e^{i0} \end{cases} \Leftrightarrow \quad 3\theta \equiv 0\ [2\pi], \text{ d'où } \theta = \frac{k2\pi}{3}, \text{ avec } \mathbf{k} \text{ entier relatif.}$$

Les racines troisièmes de l'unité sont donc les complexes de la forme $\mathbf{e^{i\frac{k2\pi}{3}}}$, lorsque k décrit $\mathbb{Z}$.

Posons $\omega_k = e^{i\frac{2k\pi}{3}}$, d'où $\omega_k = (\omega_1)^k$, on a donc



- $\omega_0 = 1$,
- $\omega_1 = e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$; en général on note $\mathbf{j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{2\pi}{3}}}$, $(\omega_1 = \mathbf{j})$
- $\omega_2 = e^{i\frac{4\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$; remarquons que $\omega_2 = \mathbf{j^2 = \bar{j} = \frac{1}{j}}$;
- Les racines cubiques de l'unité sont : $\mathbf{1 ; j ; j^2}$.

Propriété 2 :

- $1+j+j^2=0$
- $z^3-1=(z-1)(z^2+z+1)=(z-1)(z-j)(z-j^2)$
- Les images de ces racines sont les sommets d'un triangle équilatéral inscrit dans le cercle trigonométrique.

2. Cas général :

$z^n=1 \Leftrightarrow |z|=1$ d'où ces racines sont de la forme $e^{i\theta}$ et ils vérifient :

$e^{in\theta}=1=e^{i0}$ c'est-à dire $n\theta \equiv 0 \ [2\pi]$, d'où $\theta=\dfrac{k2\pi}{n}$, avec k entier relatif.

Posons: $\omega_k=e^{i\frac{k2\pi}{n}}$, d'où $\omega_k=(\omega_1)^k$.

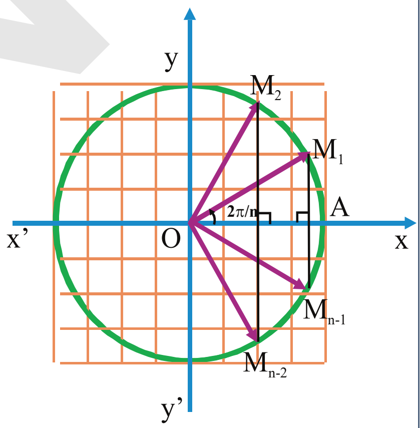
Théorème 2 :

Les racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité sont au nombre de n, elles s'écrivent sous la forme $e^{i\frac{k2\pi}{n}}$ où k est un entier naturel compris entre 0 et n -1 au sens large.

Propriété 3 :

Posons $\omega_1=e^{i\frac{2\pi}{n}}$; soit $S=\sum_{k=0}^{n-1}\omega_1^k$;

- $S=\sum_{k=0}^{n-1}\omega_1^k=\dfrac{1-\omega_1^n}{1-\omega_1}=\dfrac{1-1}{1-\omega_1}=0$;
- Les images des racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité sont les sommets d'un polygone régulier de n côtés inscrit dans le cercle trigonométrique.



V. Racines $n^{\text{ième}}$ complexes d'un nombre complexe :

Soit Z un nombre complexe et n un entier naturel non nul.

On appelle racine $n^{\text{ième}}$ complexe de Z tout nombre z tel que $z^n=Z$

- Si Z = 0, le seul nombre complexe z tel que $z^n=0$ est 0.
- Si $Z\neq 0$, mettons Z et z sous formes trigonométriques : $Z=|Z|e^{i\varphi}$; $z=|z|e^{i\theta}$.

$$z^n=Z \Leftrightarrow |z|^n e^{in\theta}=|Z|e^{i\varphi} \Leftrightarrow \begin{cases}|z|=\sqrt[n]{|Z|}\\ \text{et}\\ n\theta-\varphi=0(2\pi)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}|z|=\sqrt[n]{|Z|}\\ \text{et}\\ \theta=\dfrac{\varphi}{n}+\dfrac{k2\pi}{n}\end{cases}$$ avec k entier relatif.

On en déduit que les racines $n^{\text{ièmes}}$ de Z sont les nombres complexes de la forme :

$\sqrt[n]{|Z|}e^{i(\frac{\varphi}{n}+\frac{k2\pi}{n})}$, lorsque k décrit $\mathbb{Z}$.

Comme $\sqrt[n]{|Z|}e^{i(\frac{\varphi}{n}+\frac{k2\pi}{n})}=\sqrt[n]{|Z|}e^{i\frac{\varphi}{n}}e^{i\frac{k2\pi}{n}}$, posons $z_0=\sqrt[n]{|Z|}e^{i\frac{\varphi}{n}}$, les racines $n^{\text{ièmes}}$ de Z s' écrivent sous la forme :

$z_0e^{i\frac{k2\pi}{n}}$, tel que $z_0^n=Z$ et où $e^{i\frac{k2\pi}{n}}$ est une racine $n^{\text{ième}}$ de l'unité.

Théorème 3 :

Tout nombre complexe non nul $Z = |Z|e^{i\varphi}$ admet **n** racines $n^{\text{ièmes}}$ qui s'expriment sous la forme trigonométrique : $\sqrt[n]{|Z|}e^{i(\frac{\varphi}{n}+\frac{k2\pi}{n})}$ où **k** est un entier naturel compris entre **0** et **n-1**.

Exemple 3 :

1) Déterminer les racines cubiques du nombre complexe 1 + i.

$1+i=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$, d'où les racines cubiques sont sous la forme : $\sqrt[3]{2}e^{i\frac{\pi}{12}}e^{i\frac{k2\pi}{3}}$, pour $0 \le k \le 2$, donc,

$z_0=\sqrt[3]{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$; $z_1=\sqrt[3]{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$; $z_2=\sqrt[3]{2}e^{i\frac{17\pi}{12}}$.

2) Déterminer les racines $n^{\text{ièmes}}$ complexes de **-1**.

$e^{i\pi}=-1$, d'où les racines $n^{\text{ièmes}}$ complexes de **-1** sont sous la forme : $e^{i\frac{\pi}{n}}e^{i\frac{k2\pi}{n}}$, pour $0 \le k \le n-1$.

3) Résoudre l'équation $(\frac{2z+2}{z-1})^3=8$.

$$(\frac{2z+2}{z-1})^3=8 \Leftrightarrow \frac{\left[\frac{(2(z+1))}{z-1}\right]^3}{2^3}=1 \Leftrightarrow (\frac{z+1}{z-1})^3=1 \Leftrightarrow \frac{z+1}{z-1}$$ est une racine cubique de l'unité, d'où

- $\frac{z+1}{z-1}=1$ (rejeté car -1 $\neq$ 1),
- $\frac{z+1}{z-1}=j \Rightarrow z+1=j(z-1) \Rightarrow z(1-j^{"})=-1-j \Rightarrow z = z=-\frac{1+j}{1-j}$,
- $\frac{z+1}{z-1}=j^2 \Rightarrow z+1=j^2(z-1) \Rightarrow z(1-j^2)=-1-j^2 \Rightarrow z=-\frac{1+j^2}{1-j^2}$,

L'ensemble des solutions est donc $S=\left\{-\frac{1+j}{1-j};-\frac{1+j^2}{1-j^2}\right\}$.

Savoir- faire

A. Applications :

Exercice 1 :

Ecrire sous forme trigonométrique les nombres complexes:

$Z_1 = -1 + i$; $Z_2 = 2\sqrt{3} -6i$; $Z_3 = -4$; $Z_4 = 5i$; $Z_5 = -2i$; $Z_6 = 3$

Solution :

Nombre	Module	$\lvert Z\rvert(\frac{a}{\lvert Z\rvert}+i\frac{b}{\lvert Z\rvert})$	arg(Z)	Forme trigonométrique
$Z_1 = -1 + i$	$\lvert Z_1\rvert = \sqrt{(-1)^2+1^2} = \sqrt{2}$	$\sqrt{2}\ (\frac{-1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}})$	$\frac{3\pi}{4}$	$\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$
$Z_2 = 2\sqrt{3} -6i$	$\lvert Z_2\rvert = 4\sqrt{3}$	$4\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}+i\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$	$\frac{-\pi}{3}$	$4\sqrt{3}\left(\cos\frac{-\pi}{3}+i\sin\frac{-\pi}{3}\right)$
$Z_3 = -4$	$\lvert Z_3\rvert = 4$	$4(-\frac{4}{4}+i\frac{0}{4})$	π	$4(\cos\pi+i\sin\pi)$
$Z_4 = 5i$	$\lvert Z_4\rvert = 5$	$5(\frac{0}{5}+i\frac{5}{5})$	$\frac{\pi}{2}$	$5\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$
$Z_5 = -2i$	$\lvert Z_5\rvert = 2$	$2(\frac{0}{2}+i\frac{-2}{2})$	$-\frac{\pi}{2}$	$2\left(\cos\frac{-\pi}{2}+i\sin\frac{-\pi}{2}\right)$
$Z_6 = 3$	$\lvert Z_6\rvert = 3$	$3(\frac{3}{3}+i\frac{0}{3})$	0	$3(\cos 0+i\sin 0)$

Exercice 2 :

Mettre sous forme trigonométrique le nombre complexe $(\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{i}{3})^7$

Solution :

$$\left|\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{i}{3}\right| = \sqrt{(\frac{1}{\sqrt{3}})^2+(\frac{1}{3})^2} = \sqrt{\frac{1}{3}+\frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{3+1}{9}} = \frac{2}{3}.$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{i}{3} = \frac{2}{3}(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}) = \frac{2}{3}(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}),$$

$$(\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{i}{3})^7 = \left(\frac{2}{3}(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})\right)^7 = \frac{128}{2187}(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}), \text{ d'où}$$

$$(\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{i}{3})^7 = \frac{128}{2187}(\cos\frac{-5\pi}{6}+i\sin\frac{-5\pi}{6}).$$

Exercice 3 :

Calculer $(1+i)^{11}$, puis $(-1-i)^{15}$

Solution :

- $1+i=\sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}})=\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$, donc $(1+i)^{11}=(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}})^{11}=32\sqrt{2}e^{i\frac{11\pi}{4}}$.
- D'après l'écriture précédente, on en déduit que : $(-1-i)^{15}=(\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}})^{15}=128\sqrt{2}e^{i\frac{75\pi}{4}}$

Exercice 4 :

Soit $z_1=-3+i\sqrt{3}$; $z_2=\sqrt{2}+i\sqrt{6}$ et $z_3=\sqrt{8}-i\sqrt{8}$ trois nombre complexes.

On pose : $Z=\frac{z_1^3 z_3^4}{z_2^6}$.

1. Ecrire z_1 ; z_2 et z_3 sous forme trigonométrique puis exponentielle.
2. En déduire une forme exponentielle de Z.
3. Calculer, alors la forme algébrique de Z.

Solution :

Voici la réponse aux questions consignées dans ce tableau

Nombre	Forme trigonométrique	Forme exponentielle	Forme algébrique
$z_1=-3+i\sqrt{3}$	$2\sqrt{3}(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6})$	$2\sqrt{3}e^{i\frac{5\pi}{6}}$	$z_1=-3+i\sqrt{3}$
$z_2=\sqrt{2}+i\sqrt{6}$	$2\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})$	$2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}}$	$z_2=\sqrt{2}+i\sqrt{6}$
$z_3=\sqrt{8}-i\sqrt{8}$	$4(\cos\frac{-\pi}{4}+i\sin\frac{-\pi}{4})$	$4e^{i\frac{-\pi}{4}}$	$z_3=2\sqrt{2}-i2\sqrt{2}$
z_1^3	$(2\sqrt{3})^3(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2})$	$(2\sqrt{3})^3e^{i\frac{\pi}{2}}$	$z_1^3=0+i(2\sqrt{3})^3$
z_3^4	$(4)^4(\cos\pi+i\sin\pi)$	$(4)^4e^{i(-\pi)}$	$z_3^4=-(4)^4+0i$
z_2^6	$(2\sqrt{2})^6(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})$	$(2\sqrt{2})^6\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^6$	$z_2^6=(2\sqrt{2})^6+0i$
$Z=\frac{z_1^3z_3^4}{z_2^6}$	$12\sqrt{3}(\cos\frac{-\pi}{2}+i\sin\frac{-\pi}{2})$	$12\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{2}}$	$Z=0-i12\sqrt{3}$

Exercice 5 :

Soit $Z=\frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{e^{i\frac{\pi}{4}}}$. Mettre Z sous forme trigonométrique puis algébrique, en déduire $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

Solution :

On a $Z=\dfrac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{e^{i\frac{\pi}{4}}}=e^{i\frac{\pi}{12}}=\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}$, c'est la forme trigonométrique de Z. D'autre part,

$$\frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{e^{i\frac{\pi}{4}}}=\frac{\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)}{\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$=\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}+i(\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3})$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}+i(\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2})==\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}}{4}+i(\frac{\sqrt{6}}{4}-\frac{\sqrt{2}}{4})=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}+i(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4})$$

Par identification des deux écritures, on trouve : $\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ et $\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

Exercice 6 :

Soit **n** un entier strictement positif

Déterminer pour tout **k** entier i^k, puis calculer $1+i+i^2+\dots+i^{n-1}+i^n$

Solution :

- $\forall k\in\mathbb{N},\ i^{k+4}=i^k$ .Comme tout naturel $k\geq 4$, peut prendre l'une des formes suivantes :

  4p ; 4p +1 ; 4p + 2 ; 4p + 3, Donc , $i^{4p}=1$, $i^{4p+1}=i$, $i^{4p+2}=-1$, $i^{4p+3}=-i$.

  $\forall k\in\mathbb{N},\ i^k\in\{1\ ;\ i\ ;\ -1\ ;\ -i\}$

- Il s'agit de la somme des **(n +1)** termes consécutifs d'une suite géométrique de 1er terme **1** et de raison **i**, donc, $1+i+i^2+\ldots+i^{n-1}+i^n=\dfrac{1-i^{n+1}}{1-i}$.

Exercice 7 :

Etant donné un entier $n\geq 1$ et **x** un réel,

1. Calculer $S=\sum_{k=0}^{n}\cos kx=1+\cos x+\cos 2x+\ldots+\cos nx$

2. En déduire $S'=\sin^2\frac{2\pi}{17}+\sin^2\frac{4\pi}{17}+\ldots+\sin^2\frac{16\pi}{17}$

3. Donner la valeur exacte de la somme $S''=\cos(\frac{\pi}{17})+\cos(\frac{3\pi}{17})+\cos(\frac{5\pi}{17})+\ldots+\cos(\frac{15\pi}{17})$

Solution :

1. La somme $S=\sum_{k=0}^{n}\cos kx=1+\cos x+\cos 2x+\ldots+\cos nx$ est la partie réelle de la somme :

$\sum_{k=0}^{n}e^{ikx}=Re(1+e^{ix}+e^{i2x}+\ldots+e^{inx})$.

On distingue deux cas

- si $x=0\ [2\pi]$, $e^{ix}=1$, d'où le nombre est réel et

$$\sum_{k=0}^{n} e^{ikx} = \mathrm{Re}(1+e^{ix}+e^{i2x}+...+e^{inx}) = n+1.$$

- si $x \neq 0\ [2\pi]$, $e^{ix}\neq 1$, il s'agit de la somme des **(n+1)** premiers termes d'une suite géométrique de 1er terme **1** et de raison e^{ix},

Donc, $\sum_{k=0}^{n} e^{ikx} = (1+e^{ix}+e^{i2x}+...+e^{inx}) = \dfrac{1-e^{i(n+1)x}}{1-e^{ix}}$,

Or, $1-e^{i(n+1)x} = e^{i(\frac{n+1}{2})x}(e^{-i(\frac{n+1}{2})x} - e^{i(\frac{n+1}{2})x}) = -2i\, e^{i(\frac{n+1}{2})x} \sin\dfrac{(n+1)}{2}x$, de même

$1-e^{ix} = e^{i\frac{x}{2}}(e^{i\frac{-x}{2}} - e^{i\frac{x}{2}}) = -2i\, e^{i\frac{x}{2}} \sin\dfrac{x}{2}$, d'où $\dfrac{1-e^{i(n+1)x}}{1-e^{ix}} = \dfrac{e^{i(\frac{n+1}{2})x}}{e^{i\frac{x}{2}}} \dfrac{1}{\sin\frac{x}{2}} \sin(\dfrac{n+1}{2}x)$

$$= \frac{1}{\sin\frac{x}{2}} \sin(\frac{n+1}{2}x) e^{i(\frac{n}{2})x}$$

Donc, ($\mathrm{Re}(\dfrac{1-e^{i(n+1)x}}{1-e^{ix}}) = \mathrm{Re}(\dfrac{1}{\sin\frac{x}{2}} \sin(\dfrac{n+1}{2}x) e^{i(\frac{n}{2})x}) = \dfrac{1}{\sin\frac{x}{2}} \sin(\dfrac{n+1}{2}x)\cos(\dfrac{n}{2})x$.

Finalement $\sum_{k=0}^{n} \cos kx = 1+\cos x+\cos 2x+...+\cos nx = \dfrac{\sin(\frac{n+1}{2})x}{\sin\frac{x}{2}} \cos(\dfrac{nx}{2})$

2. En utilisant la relation : $\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$ en $\alpha = \dfrac{16\pi}{17};\dfrac{14\pi}{17};\dfrac{12\pi}{17};\dfrac{10\pi}{17}$ on peut écrire

$$S' = \sin^2\frac{2\pi}{17} + \sin^2\frac{4\pi}{17} + ... + \sin^2\frac{16\pi}{17} = \sin^2\frac{\pi}{17} + \sin^2\frac{2\pi}{17} + \sin^2\frac{3\pi}{17} + ... + \sin^2\frac{8\pi}{17}.$$

Puis grâce à la relation $\sin^2 x = \dfrac{1-\mathrm{co}2x}{2}$, on obtient

$$S' = \frac{1}{2}\left((1-\cos\frac{2\pi}{17}) + (1-\cos\frac{4\pi}{17}) + ... + (1-\cos\frac{16\pi}{17})\right) = \frac{9}{2} - \frac{1}{2}\left(1+\cos\frac{2\pi}{17} + \cos\frac{4\pi}{17} + ... + \cos\frac{16\pi}{17}\right)$$

D'après la question **1**, en posant $x=\dfrac{2\pi}{17}$, on en déduit que $S' = \dfrac{9}{2} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\cos\frac{8\pi}{17}\sin\frac{9\pi}{17}}{\sin\frac{\pi}{17}}$

3. $S'' = \cos(\dfrac{\pi}{17}) + \cos(\dfrac{3\pi}{17}) + \cos(\dfrac{5\pi}{17}) + ... + \cos(\dfrac{15\pi}{17})$, il suffit de remarquer que :

S''est la partie réelle de la somme: $e^{i\frac{\pi}{17}} + e^{i\frac{3\pi}{17}} + ... + e^{\frac{i15\pi}{17}}$.

Il s'agit de la somme de 8 termes d'une suite géométrique de 1er terme $e^{i\frac{\pi}{17}}$ et de raison $e^{i\frac{2\pi}{17}}$.

$$S'' = \mathrm{Re}\left(e^{i\frac{\pi}{17}}\frac{(1-e^{i\frac{16\pi}{17}})}{(1-e^{i\frac{2\pi}{17}})}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{1-e^{i\frac{16\pi}{17}}}{e^{i\frac{-\pi}{17}}-e^{i\frac{\pi}{17}}}\right) = \mathrm{Re}\left(e^{i8\frac{\pi}{17}}\frac{e^{i8\frac{\pi}{17}}(e^{i-8\frac{\pi}{17}}-e^{i\frac{8\pi}{17}})}{(e^{i\frac{-\pi}{17}}-e^{i\frac{\pi}{17}})}\right) = \mathrm{Re}\left(e^{i8\frac{\pi}{17}}\frac{e^{i8\frac{\pi}{17}}\sin\frac{8\pi}{17}}{\sin\frac{\pi}{17}}\right)$$

$$= \cos\frac{8\pi}{17}\frac{\sin\frac{8\pi}{17}}{\sin\frac{\pi}{17}} = \frac{\frac{1}{2}\sin\frac{16\pi}{17}}{\sin\frac{\pi}{17}} = \frac{1}{2}$$

Exercice 8 :

Exprimer **$(\cos x + i\sin x)^n$** en fonction de **cosx** ou **sinx** dans les cas : **n = 2 ; n = 3 ; n = 4 ; n = 5**.

Solution :

- **Cas n= 2**

On a **$(\cos x + i\sin x)^2 = \cos 2x + i\sin 2x$**, d'après Moivre. Or, le développement direct donne :

$(\cos x + i\sin x)^2 = \cos^2 x - \sin^2 x + 2i\sin x\cos x$., d'où, **$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$**

$\sin 2x = 2\sin x\cos x$

Finalement : **$\cos 2x = = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$** et **$\sin 2x = 2\sin x\cos x$**

- **Cas n = 3**

On a **$(\cos x + i\sin x)^3 = \cos 3x + i\sin 3x$**, d'après Moivre.

Or, le développement direct donne : **$(\cos x + i\sin x)^3 = \cos^3 x + 3i\cos^2 x\sin x - 3\cos x\sin^2 x - i\sin^3 x$**

d'où, **$\cos 3x = \cos^3 x - 3\cos x\sin^2 x$** et **$\sin 3x = 3\cos^2 x\sin x - \sin^3 x$**

en remplaçant **$\sin^2 x$** par **$1 - \cos^2 x$** et **$\cos^2 x$** par **$1 - \sin^2 x$**, on obtient

Finalement : **$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$** et **$\sin 3x = -4\sin^3 x + 3\sin x$**.

- **Cas n = 4**

On a **$(\cos x + i\sin x)^4 = \cos 4x + i\sin 4x$**, d'après Moivre.

Or, le développement direct donne :

$(\cos x + i\sin x)^4 = \cos^4 x + 4i\cos^3 x\sin x - 6\cos^2 x\sin^2 x - 4i\cos x\sin^3 x + \sin^4 x$.

D'où, **$\cos 4x = \cos^4 x - 6\cos^2 x\sin^2 x + \sin^4 x = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1$** et

$\sin 4x = 4\cos^3 x\sin x - 4\cos x\sin^3 x = 2\sin 2x\cos 2x$

Finalement : **$\cos 4x = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1$** et **$\sin 4x = 2\sin 2x\cos 2x$**

- **Cas n = 5**

On a **$(\cos x + i\sin x)^5 = \cos 5x + i\sin 5x$**, d'après Moivre. Or, le développement direct donne :

$(\cos x + i\sin x)^5 = \cos^5 x + 5i\cos^4 x\sin x - 10\cos^3 x\sin^2 x - 10i\cos^2 x\sin^3 x + 5\cos x\sin^4 x + i\sin^5 x$

D'où, **$\cos 5x = \cos^5 x - 10\cos^3 x\sin^2 x + 5\cos x\sin^4 x$** et **$\sin 5x = \sin^5 x - 10\cos^2 x\sin^3 x + 5\cos^4 x\sin x$**.

En remplaçant à chaque fois **$\cos^2 x$** et **$\sin^2 x$** par l'expression correspondante on obtient :

$\cos 5x = \cos^5 x - 10\cos^3 x\sin^2 x + 5\cos x\sin^4 x = \cos^5 x - 10\cos^3 x(1-\cos^2 x) + 5\cos x(1-\cos^2 x)^2$

$= \cos^5 x - 10\cos^3 x + 10\cos^5 x + 5\cos x - 10\cos^3 x + 5\cos^5 x$

$= 16\cos^5 x - 20\cos^3 x + 5\cos x$

De même: $\sin 5x = \sin^5 x - 10\cos^2 x \sin^3 x + 5\cos^4 x \sin x$

$= \sin^5 x - 10(1-\sin^2 x)\sin^3 x + 5(1-\sin^2 x)^2 \sin x$

$= \sin^5 x - 10\sin^3 x + 10\sin^5 x + 5\sin x - 10\sin^3 x + 5\sin^5 x$

$= 16\sin^5 x - 20\sin^3 x + 5\sin x$

Finalement : $\cos 5x = =16\cos^5 x - 20\cos^3 x + 5\cos x$ et $\sin 5x = 16\sin^5 x - 20\sin^3 x + 5\sin x$

Exercice 9 :

Linéariser $\cos^n x$; $\sin^n x$ dans les cas suivant : $n = 2$; $n = 3$; $n = 4$; $n = 5$.

Solution :

Cas n= 2

Il suffit d'utiliser les formules d'Euler et le développement du binôme de Newton.

- $$\cos^2 x = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(e^{i2x}+e^{-i2x}+2\right) = \frac{1}{4}\left(2\text{co}2x+2\right) = \frac{1}{2}\left(\text{co}2x+1\right).$$

- $$\sin^2 x = \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^2 = \frac{-1}{4}\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)^2 = \frac{-1}{4}\left(e^{i2x}+e^{-i2x}-2\right) = \frac{-1}{4}\left(2\text{co}2x-2\right) = \frac{1}{2}\left(1-\text{co}2x\right).$$

Cas n= 3

- $$\cos^3 x = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)^3 = \frac{1}{8}\left(e^{i3x}+3e^{ix}+3e^{-ix}+e^{-i3x}\right) = \frac{1}{8}\left(2\text{co}3x+6\cos x\right)$$
  $$= \frac{1}{4}\left(\text{co}3x+3\cos x\right)$$

- $$\sin^3 x = \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^3 = \frac{i}{8}\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)^3 = \frac{i}{8}\left(e^{i3x}-3e^{ix}+3e^{-ix}-e^{-i3x}\right) = \frac{i}{8}\left(2i\sin 3x-6i\sin x\right)$$
  $$= \frac{-1}{4}\left(\sin 3x-3\sin x\right)$$

Cas n = 4

- $$\cos^4 x = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)^4 = \frac{1}{16}\left(e^{i4x}+4e^{2ix}+6+4e^{-i2x}+e^{-i4x}\right) = \frac{1}{16}\left(2\text{co}4x+8\cos 2x+6\right)$$
  $$= \frac{1}{8}\left(\text{co}4x+4\cos 2x+3\right)$$

- $$\sin^4 x = \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^4 = \frac{1}{16}\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)^4 = \frac{1}{16}\left(e^{i4x}-4e^{2ix}+6-4e^{-i2x}+e^{-i4x}\right) = \frac{1}{16}\left(2\text{co}4x-8\cos 2x+6\right)$$
  $$= \frac{1}{8}\left(\text{co}4x-4\cos 2x+3\right)$$

Cas n = 5

- $\cos^5 x = (\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2})^5 = \frac{1}{32}(e^{ix}+e^{-ix})^5 = \frac{1}{32}(e^{i5x}+5e^{3ix}+10e^{ix}+10e^{-ix}+5e^{-i3x}+e^{-i5x})$

$$= \frac{1}{32}(2co5x+10\cos 3x+20\cos x)$$

$$= \frac{1}{16}(co5x+5\cos 3x+10\cos x)$$

- $\sin^5 x = (\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i})^5 = \frac{(-i)}{32}(e^{ix}-e^{-ix})^5 = \frac{-i}{32}(e^{i5x}-5e^{3ix}+10e^{ix}-10e^{-ix}+5e^{-i3x}-e^{-i5x})$

$$= \frac{-i}{32}(2i\sin 5x+20i\sin x-10i\sin 3x)$$

$$= \frac{1}{16}(\sin 5x-5\sin 3x+10\sin x)$$

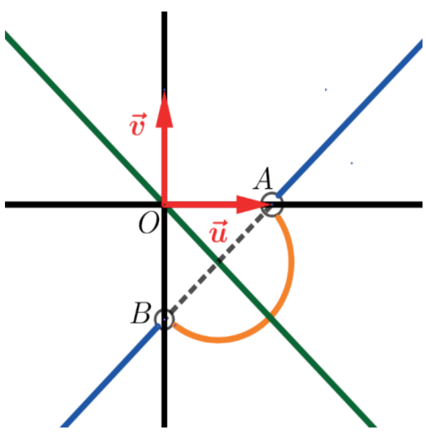
Exercice 10 :

Le plan complexe étant rapporté au repère orthonormal , on désigne par A et B les points d'affixes respectives 1 et –i.

A tout complexe z différent de 1, on associe le complexe **Z** défini par: $\mathbf{Z} = \frac{z+i}{z-1}$.

Déterminer et construire l'ensemble des points **M** d'affixe **z** tels que :

a) $|Z| = 1$; b) Z soit réel strictement positif ; c) $\arg z = \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.



Solution :

a) $|Z| = 1 \Leftrightarrow \left|\frac{z+i}{z-1}\right| = \frac{BM}{AM} = 1 \Leftrightarrow MA = MB \Leftrightarrow$

L'ensemble de points M est la médiatrice du segment [AB].

b) $Z \in \mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow \arg z = 0\ [2\pi] \Leftrightarrow (\overrightarrow{MA}\ ;\ \overrightarrow{MB}) = 0(2\pi) \Leftrightarrow$

L'ensemble de points M est (AB)\[AB].

c) $\arg Z = \frac{\pi}{2}\ [2\pi] \Leftrightarrow (\overrightarrow{MA}\ ;\ \overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{2}(2\pi) \Leftrightarrow$ L'ensemble de points M est le demi-cercle de diamètre $[AB]/\{A\ ;\ B\}$.

Exercice 11

Déterminer les racines quatrièmes de l'unité, puis représenter géométriquement ces racines.

Solution :

Il s'agit de résoudre l'équation $z^4 = 1$.

$$z^4 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = 1 \\ \exists\theta / e^{i4\theta} = e^{i0} \end{cases} \Leftrightarrow \quad 4\theta = 0 \quad [2\pi], \text{ d'où } \theta = \frac{2k\pi}{4}, \text{ avec k entier relatif.}$$

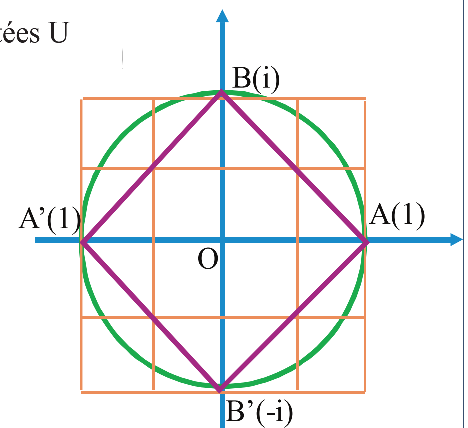
Les racines quatrième de l'unité sont donc les complexes de la forme $e^{i\frac{k2\pi}{4}}$, lorsque k décrit $\mathbb{Z}$.

Posons $\omega_k = e^{i\frac{2k\pi}{4}}$, d'où $\omega_k = (\omega_1)^k$. On a donc

- $\omega_0 = 1$,
- $\omega_1 = e^{i\frac{\pi}{2}} = \mathbf{i}$;
- $\omega_2 = i^2 = \mathbf{-1}$;
- $\omega_3 = i^3 = \mathbf{-i}$
- $\omega_4 = i^4 = 1$; $\omega_5 = i$; $\omega_6 = -1$; $\omega_7 = -i$.

Plus enragement : $\omega_{4p} = i^{4p} = 1$; $\omega_{4p+1} = i^{4p+1} = i$; $\omega_{4p+2} = i^{4p+2} = -1$; $\omega_{4p+3} = i^{4p+3} = -i$.

Nous savons que tout nombre entier relatif a l'une des forme : **4p ; 4p + 1 ; 4p + 2 ; 4p + 3**, avec p entier relatif, les racines quatrième de l'unité sont donc $\{-i ; 1 ; i ; 1\}$, notées U



Remarque :

Les racines déterminées vérifient

les propriétés suivantes :

- $\mathbf{1 + i - 1 - i = 0}$
- **(U_4 ; ×)** est un groupe
- Les images de ces racines

  sont les sommets d'un carré

  inscrit dans le cercle trigonométrique.

×	1	i	-1	-i
1	1	i	-1	-i
i	i	-1	-i	1
-1	-1	-i	1	i
-i	-i	1	i	-1

B. Exercices divers :

1

Déterminer une forme trigonométrique; puis exponentielle des nombres suivants :

$\frac{2-2i}{1+i\sqrt{3}}$; $(1+i)^7$; $(\sqrt{3}-i)^6$; $(1-i)^{18}$;

$\frac{-1+3i\sqrt{3}}{10-2i\sqrt{3}}$; $\frac{(1-i\sqrt{3})(\cos x+i\sin x)}{\cos x+\sin x+i(\cos x-\sin x)}$;

où $x \in \mathbb{R}$

2. Calculer $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}\right)^{30}$ et $\frac{(1+i)^5-1}{(1+i)^5+1}$.

3 1.) Ecrire $-\sqrt{3}+i$ et $1+i$ sous forme trigonométrique,

2.) Prouver que : $\left(\frac{-\sqrt{3}+i}{1+i}\right)^{12}$ est un réel.

4 Déterminer la forme algébrique des complexes z_1 et z_2 tels que :

$$z_1=\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2001} \; ; \; z_2=\left(1+i\sqrt{3}\right)^{11}.$$

5 Calculer de deux façons différentes $(1+i)^n$. En déduire

$S_0 = 1 + C_n^2 - C_n^4 - ... + (-1)^p C_n^{2p} + ...$

$S_1 = C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - ... + (-1)^q C_n^{2q+1} + ...$

6 Dans cet exercice, z désigne le nombre complexe : $\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}$.

1.) Vérifier que : $z^5-1=0$, En déduire la relation : $1+z+z^2+z^3+z^4=0$.

2 .a) Exprimer Z ; Z^2 ; Z^3 ; Z^4 sous forme trigonométrique.

b) Démontrer les égalités :

$$Z+Z^4=2\cos\frac{2\pi}{5} \text{ et } Z^3+Z^4=2\cos\frac{4\pi}{5}$$

3.) Utiliser les résultats des 1.) et 2.) pour trouver une relation entre $\cos\frac{2\pi}{5}$ et $\cos\frac{4\pi}{5}$, puis

montrer que $\cos\frac{2\pi}{5}$ est racine de l'équation

$4x^2+2x-1=0$. Déduire la valeur de $\cos\frac{2\pi}{5}$.

7 Soit **n** un entier strictement positif, θ un réel appartenant à] 0 ; π [:

$S_n = \cos^2\theta + \cos^2\theta \cos 2\theta + ... + \cos^p\theta \cos p\theta + ... + \cos^n\theta \cos n\theta,$

$S'_n = \cos\theta \sin\theta + \cos^2\theta \sin 2\theta + ... + \cos^p\theta \sin p\theta + ... + \cos^n\theta \sin n\theta,$

$\sum_n = S_n + iS'_n$. Montrer que : $\sum_n$ est la somme des **n** premiers termes d'une suite géométrique complexe, dont on donnera le premier terme et la raison. En déduire la valeur de $\sum_n$ puis de S_n en fonction de n et θ. (On montrera que :

$S_n = \frac{\cos^{n+1}\theta \sin n\theta}{\sin\theta}$)

8. Soit $z = 2\sin^2\theta + i\sin 2\theta$ ($\theta \in \mathbb{R}$).

Calculer le module de **z** .En discutant selon les valeurs de θ, calculer un argument de **z**.

9. Soit $\alpha \in]-\pi ; \pi]$; résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$Z^2-2\sin(2a)z+2(1+\cos(2a))=0$ Déterminer le module et un argument de ces solutions.

Pour quelles valeurs de α les deux solutions sont –elles distinctes ?

10 Linéariser : $\cos^2 x \sin^3 x$: $\cos^3 x \sin x$; $\sin^3 x \cos x$.

11 Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, d'unité 2cm.

Soit $z_0=4$; $z_1=\frac{1+i}{2}z_0$; $z_2=\frac{1+i}{2}z_1$;

$z_3=\frac{1+i}{2}z_2$. M_0 ; M_1 ; M_2 et M_3 les images respectives de ces nombres.

1. a) Déterminer la forme trigonométrique de chacun des complexes : z_0 ; z_1; z_2 et z_3.

b) Construire les points M_0 ; M_1 ; M_2 et M_3.

2) On pose : $d_0=|z_1-z_0|$; $d_1=|z_2-z_1|$

$d_2=|z_2-z_1|$; $d_3=|z_3-z_2|$.

a) Interpréter géométriquement chacun des nombres : d_0 ; d_1 ; d_2 et d_3.

b) Montrer que: d_0 ; d_1 ; d_2 et d_3 sont des termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

c) Calculer la longueur de la ligne brisée $M_0M_1M_2M_3$.

12 1) On considère les nombres complexes suivants : $a=\sqrt{3}+i$; $b=\sqrt{2}-i\sqrt{2}$.

2) Déterminer le module et un argument de **a** ; **b** et $\frac{a}{b}$.

3) Soit z = $\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}$.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct (O; $\vec{u}$; $\vec{v}$), avec 4 cm comme unité graphique.

On considère les points M_1 ; M_2 ; M_3 et M_4 d'affixes respectifs z_1 ; z_2 ; z_3 et z_4.

a) Déterminer le module et un argument de z_1 ; z_2 ; z_3 et z_4.

b) En laissant vos traces de construction sur la copie, placer les points M_1 ; M_2 ; M_3 et M_4 dans le plan complexe.

13 On considère l'équation :

1.) $z^3-12z^2+48z-128=0$

Montrer que **8** est racine de cette équation.

2.) Déterminer a et b deux réels tels que :

$z^3-12z^2+48z-128=(z-8)(z^2+az+b)$.

3.) Résoudre l'équation proposée.

14 Soit le polynôme

$P(z)=z^4-14z^3+7z^2-126z+585$.

1. a) Calculer $P(3i)$

b) Montrer que si, z est racine de P, alors $\bar{z}$ est aussi racine de P. Qu'en déduit-on ?

2. Déterminer un trinôme Q(z) à coefficients complexes tel que : $P(z)=(z^2+9)Q(z)$

En déduire toutes les racines de P.

15 On se propose de résoudre l'équation (E) :

$z^3+(\sqrt{3}-i)z^2+(1-\sqrt{3}\,i)z-i=0$.

1)Montrer qu'il existe une solution z_0 de (E) qui est imaginaire pure.

2) Ecrire le membre de gauche de l'équation sous forme $(z - z_0) \times P(z)$, où P(z) est un trinôme à cœfficients complexes. En déduire l'ensemble des solutions de (E).

3) Mettre ces solutions sous forme trigonométrique et les placer sur un graphique.

16 Déterminer un trinôme $P(z)$ à coefficients complexes vérifiant :

$z^3-z^2+z+1=(z+1)P(z)$),

Puis résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$\left(\frac{z-2i}{z+2i}\right)^3+\left(\frac{z-2i}{z+2i}\right)^2+\frac{z-2i}{z+2i}+1=0$$

17 Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct (o ; $\vec{u}$; $\vec{v}$).

On désignera l'affixe d'un point **M** par Z_M.

1) Résoudre l'équation $Z^2-6Z+18=0$.

Placer dans le plan les points B et C dont les affixes sont les solutions de l'équation, B étant le point dont l'affixe Z_B a une partie imaginaire négative.

2) Soit **R** le quart de tour positif de centre O. Montrer que $R(B)=C$.

3) Soit A le point d'affixe $Z_A=3(1-\sqrt{3})$

Calculer un argument du nombre complexe $Z=\frac{Z_C-Z_A}{Z_B-Z_A}$. En déduire la nature du triangle **ABC**, puis construire **A**.

18 Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct (O ; $\vec{u}$; $\vec{v}$).

On désigne par **A**, **B** et **C** les points dont les affixes respectives sont : **2i ; -1 ; i**. Soit **f** l'application de P\{A} dans P qui, à tout point **M** d'affixe **z(** $z\neq 2i$ **)**, associe le point **M'** d'affixe z', telle que: $z'=\frac{z+1}{z-2i}$.

1. Déterminer l'affixe du point C' image de C par **f** : quelle est la nature du quadrilatère **ABCC'** ?

2. Montrer que le point C admet un unique antécédent **C''** par **f**, quelle est la nature du triangle **BCC''** ?

3. Donner une interprétation géométrique de $|z'|$ et $\arg(z')$

4. En déduire les ensembles suivants et les construire :

a) E Ensemble des points **M** dont l'image par **f** a pour affixe un réel strictement négatif.

b) F Ensemble des points **M** dont l'image par **f** a pour affixe un imaginaire pur non nul .

c) G Ensemble des points **M** dont l'image par **f** a pour affixe un imaginaire de module **1** . .

19 Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct (O ; $\vec{u}$; $\vec{v}$). A tout point M du plan, distinct de O on associe le
où I est le milieu du segment [OB].

point M' tel que : $\overrightarrow{OM'} = \dfrac{4}{OM^2}\overrightarrow{OM}$.

On désigne respectivement par Z et Z' les affixes de M et M'. Δ désigne la droite d'équation x = 2. A est le point d'affixe 2.

1. Exprimer Z' à l'aide de Z.
2. Lorsque M appartient à Δ, écrire Z' sous forme algébrique en fonction de la partie imaginaire y de Z.
3. Ecrire sous forme algébrique le nombre complexe $\dfrac{Z'-2}{Z'}$ en fonction de la partie imaginaire y de Z, lorsque **M** appartient à Δ.
4. Lorsque M appartient à Δ et M ≠ A, déterminer $\arg\left(\dfrac{Z'-2}{Z'}\right)$

   En déduire que, pour tout point M de Δ, M' appartient à un ensemble (C) que l'on précisera. Faire une figure.

20 Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O ; $\vec{u}$;$\vec{v}$).

1) On pose: $Z_1 = \dfrac{10\ +4i}{3+\ 7i}$; $Z_2 = (1+i)(1-i)$

   et $Z_3 = \dfrac{7+3i}{5-2i}$

a) Donner la forme algébrique de chacun des nombres Z_1 ; Z_2 et Z_3.
b) Donner la forme trigonométrique de chacun des nombres Z_1 ; Z_2 et Z_3.
c) Placer dans le repère les points **A, B** et **C** d'affixes respectives $Z_A = 1 - i$; $Z_B = 2$ et $Z_C = 1 + i$.
d) Montrer que le triangle **ABC** est rectangle et isocèle ; puis donner la nature du quadrilatère **OABC**.
e) Déterminer et construire l'ensemble Δ des points **M** d'affixe **Z** tel que : $\left|\dfrac{Z}{Z-2}\right| = 1$

2) A tout point M du plan d'affixe Z, (Z ≠ 2), on associe le point M' d'affixe $z' = \dfrac{-2}{z-2}$ Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation $z' = z$.

a) Montrer que pour tout nombre complexe **z**, différent de **2**, on a $|z'-1| = \dfrac{|z|}{|z-2|}$

d) En déduire une relation entre les distances OM, BM et IM' où I est le milieu du segment $[OB]$.

e) Déduire que si **M** décrit Δ, alors **M'** décrit un cercle Γ dont on donnera le centre et le rayon ;

21 Soit $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ et $F : P/\{O\} \to P/\{O\}$

$$f : z \mapsto \frac{4}{\bar{z}} \qquad M(z) \mapsto M'(z')$$

1. Déterminer **F o F**, composée de **F** avec lui-même.
2. Déterminer l'ensemble des points fixes de **F**.
3. a) Démontrer que : $F(M) = M' \Leftrightarrow$
   $\left(\overrightarrow{OM} ; \overrightarrow{OM'}\right) = 0\ [2\pi]$ et $OM \times OM' = 4$
   b) Déterminer l'image du cercle de centre **O** et de rayon **1** par **F**.
4. Soit Ω(0 ; 1). On note (ω) le cercle de centre Ω et de rayon 1.
   a) Démontrer qu'un point M appartient à (ω) ⇔ son affixe z vérifie l'équation complexe : $z\bar{z} + i\bar{z} - i = 0$
   b) Déterminer l'image du cercle (ω) par **F**.

22 1. a) Soit α est un nombre réel.

Résoudre l'équation : $\begin{cases} z \in \mathbb{C} \\ z^2 - 2z\cos\alpha + 1 = 0, \end{cases}$

b) En déduire la forme trigonométrique des solutions de l'équation :

$$\begin{cases} z \in \mathbb{C} \\ z^{2n} - 2z^n\cos\alpha + 1 = 0, \end{cases}$$

Dans laquelle n est un entier naturel non nul donné,

2) Notation : étant donné des nombres complexes : z_0 ; z_1 ; …, z_{n-1}, on note $\prod_{k=0}^{n-1} z_k$ le produit $z_0 \times z_1 \times \ldots \times z_{n-1}$.

On considère le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct (O ; $\vec{u}$; $\vec{v}$).

Pour tout entier naturel non nul **n**, pour tout réel α.Pour tout complexe **z**, on pose :

$$P_\alpha(z) = z^{2n} - 2z^n \cos\alpha + 1.$$

On admet que, pour tout z, α et n ,on a

$$P_n(z) = \prod_{k=0}^{n-1}\left[z^2 - 2z\cos\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + 1\right].$$

a) Calculer $P_\alpha(1)$ et en déduire que :

$$\prod_{k=0}^{n-1}\sin^2\left(\frac{\alpha}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right) = \frac{\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{4^{n-1}}.$$

$H_n(\alpha) = \prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{\alpha}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right)$ b. Montrer que, pour α non nul, on a : $2^{n-1}H_n(\alpha) = \dfrac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2n}\right)}$

c) Quelle est la limite de $H_n(\alpha)$ lorsque α tend vers **0** ?

d) En déduire que, pour tout naturel **n** supérieur ou égal à **2** :

$$\sin\frac{\pi}{n}.\sin\frac{2\pi}{n}...\sin\frac{(n-1)\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

23 1) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation $z^2 - 4z + 13 = 0$ et soient z_1 et z_2 ses solutions ; $\text{Im}(z_1) > 0$.

2) On considère, dans le plan complexe, les points A et B d'affixes respectives $z_A = 1 + z_1$ et $z_B = 1 + z_2$.

a)Ecrire les nombres $z_A = 1 + z_1$ et $z_B = 1 + z_2$ sous forme trigonométrique.

b) Représenter, dans un repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ les points A et B. Déterminer la nature du triangle **OAB**.

c) Déterminer et placer C tel que le quadrilatère **OACB** soit un parallélogramme.

d) Construire l'ensemble des points M du plan d'affixe z tel que le complexe $\dfrac{z - 2 + 2i}{z - 3 - 3i}$ soit imaginaire pur.

24 On considère le plan complexe mini d'un repère orthonormé (O ; $\vec{u}$; $\vec{v}$).

1) Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, chacune des équations suivantes :

$z^2 - 4z + 13 = 0$ (E_1) $z^2 + 6z + 13 = 0$ (E_2)

2) Pour tout nombre complexe z tel que : $z \neq 3 - 2i$ on pose : $f(z) = \dfrac{z - 2 - 3i}{z - 3 + 2i}$.

Calculer α = **f**(3 + i) puis donner son écriture algébrique et trigonométrique.

3) On considère les points A ; B et C d'affixes respectives $z_A = 2 + 3i$; $z_B = 3 - 2i$ et $z_C = 5 + i$

a) Placer dans le repère (O ; $\vec{u}$; $\vec{v}$) les points A; B et C.

b) Calculer $f(z_C)$ puis donner son écriture algébrique et trigonométrique.

En déduire la nature du triangle **ABC**.

c) Déterminer puis construire l'ensemble Γ_1 des points M du plan d'affixe z tels que $|f(z)| = 1$

d) Déterminer puis construire l'ensemble Γ_2 des points M du plan d'affixe z tels que le nombre $f(z)$ soit imaginaire pur.

25 Soit **n** un entier naturel non nul et , $\omega = e^{i\frac{2\pi}{n}}$. On pose, pour z appartenant à $\mathbb{C}$:

$$P(z) = z^{n-1} + z^{n-2} + \ldots + z + 1$$
$$-(z - \omega)(z - \omega^2)\times\ldots\times(z - \omega^{n-1})$$

1) Montrer que P est un polynôme de degré inférieur ou égale à n- 2.

2) Montrer que : ω ; ω^2 ; … ; ω^{n-1} sont n- 1 racines distinctes de P.

Songer aux racines n$^{\text{ièmes}}$ de l'unité.

En déduire que $P(z) = 0$, pour tout **z**, puis que:

$n = (1-\omega)(1-\omega^2)\times\ldots\times(1-\omega^{n-1})$ Montrer, par un calcul de module, que :

$$\sin\frac{\pi}{n}.\sin\frac{2\pi}{n}\ldots\sin\frac{(n-1)\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

Généralités sur les fonctions

CHAPITRE 5

Faire savoir

L'essentiel du chapitre

I. Fonction et courbe :

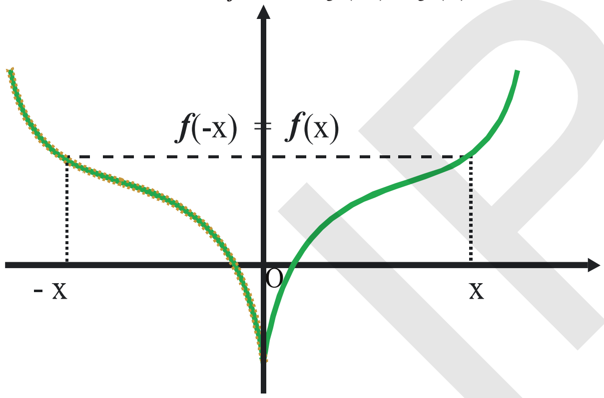
Soit f une fonction, $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal (O ; I ; J).

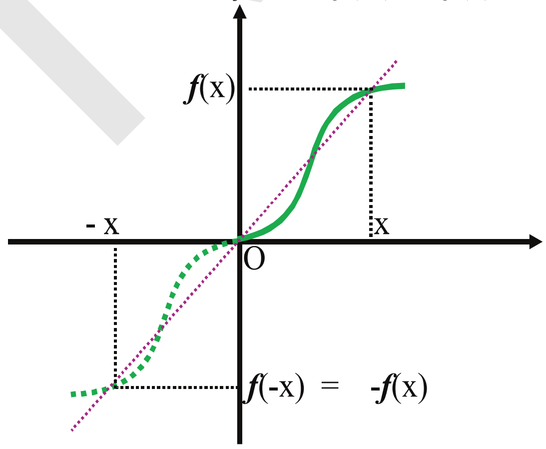
1. Domaine de définition :

On appelle domaine de définition de f l'ensemble : $\{\mathbf{x \in \mathbb{R} / f(x) \ existe}\}$, noté D_f.

Si cet ensemble n'est pas donné dans l'énoncé, il faut le chercher. Ce peut être $\mathbb{R}$, un intervalle, ou une réunion d'intervalles.

2. Parité :

<table>
<tr>
<td>
On dit que la fonction f est paire si ,
• D_f est symétrique par rapport à zéro
• Pour tout $x \in D_f$; on a $f(-x) = f(x)$


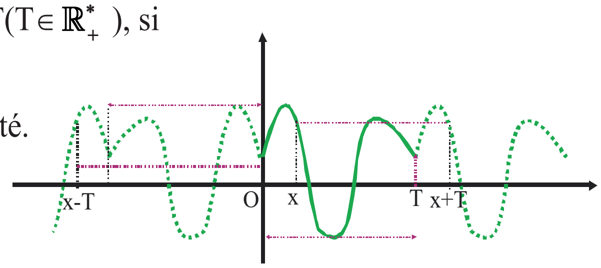
Exemple 1 :
$\mathbf{f} : \mathbf{x \mapsto x^2}$; $D_f =]-\infty ; 0] \cup [0 ; +\infty[$;
$\forall x \in D_f$; $(-x)^2 = (x)^2 = x^2 \Rightarrow \mathbf{f(-x) = f(x)}$;
Donc; f est paire
</td>
<td>
On dit que la fonction f est impaire si
• D_f est symétrique par rapport à zéro
• Pour tout $x \in D_f$; on a $f(-x) = -f(x)$


Exemple 2 :
$\mathbf{f} : \mathbf{x \mapsto x^3}$; $D_f =]-\infty ; 0] \cup [0 ; +\infty[$;
$\forall x \in D_f$; ; $(-x)^3 = -(x)^3 \Rightarrow f(-x) = -f(x)$;
Donc; f est impaire
</td>
</tr>
</table>

3. Périodicité :

On dit qu'une fonction f est périodique de période $T (T \in \mathbb{R}_+^*)$, si

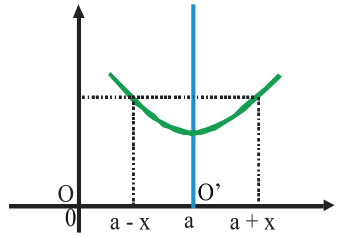
- $\forall x \in D_f ; f(x+T) = f(x)$;
- T est le plus petit élément vérifiant cette propriété.



Alors, le domaine d'étude pourra être réduit à un intervalle de longueur T, puis compléter le tracé par des translations successives de vecteur $T\vec{i}$.

4. Eléments de symétries :

Axe de symétrie :



Soit f une fonction numérique ; D_f son domaine de définition

$\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal

(O. I ; J). Pour démontrer que l'axe Δ d'équation : $x = a$ est un axe de symétrie de $\mathscr{C}$, on peut utiliser l'une des deux méthodes suivantes :

Méthode 1

Démontrer que : $\forall x \in Df$; $f(2a-x) = f(x)$

Exemple 3 :

Soit $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $x \mapsto \dfrac{4}{x(x-4)}$;

La droite d'équation Δ : $x = 2$ est axe de symétrie de la courbe représentative de f car,

$$f(4-x) = \frac{4}{(4-x)(4-x-4)} = \frac{4}{-x(4-x)} = f(x)$$

Méthode 2

Démontrer que f est paire dans le repère (O' ; $\overrightarrow{OI}$; $\overrightarrow{OJ}$) tel que **O'(a ; 0).**

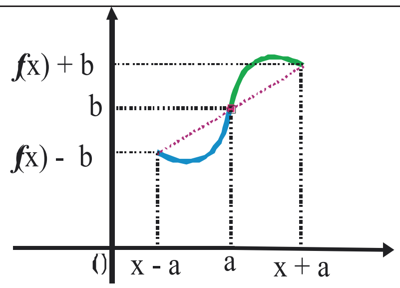
Exemple 4 :

Soit $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $x \mapsto \dfrac{4}{x(x-4)}$; On a : $y = \dfrac{4}{x(x-4)}$; soit : $X = x - 2$ et $Y = y$. Donc ;

$Y = \dfrac{4}{(X-2)(X+2)}$. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $X \mapsto \dfrac{4}{x^2-4}$. La fonction f est paire.

Centre de symétrie :

Pour démontrer que le point Ω(a ; b) est centre de symétrie de $\mathscr{C}$, on peut utiliser l'une des deux méthodes suivantes :



Méthode 1 :

Démontrer que :

$$\begin{cases} D_f \text{ est symétrique par rapport à a} \\ f(2a-x) = 2b - f(x) \end{cases}$$

Exemple 5 :

Soit $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $x \mapsto 2 + \dfrac{3}{x-1}$;

Le point **Ω (1 ; 2)** est centre de symétrie, car

$$\left.\begin{aligned} f(2-x) &= 2 + \frac{3}{2-x-1} = 2 - \frac{3}{x-1} \\ 4 - f(x) &= 4 - (2 + \frac{3}{x-1}) = 2 - \frac{3}{x-1} \end{aligned}\right\} f(2-x) = 4 - f(x)$$

Méthode 2 :

Démontrer que **f** est impaire dans le repère

(O' ; $\overrightarrow{OI}$; $\overrightarrow{OJ}$) tel que **O'(a ; b).**

Exemple 6 :

Soit $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $x \mapsto 2 + \dfrac{3}{x-1}$

Soit : $X = x - 1$; $Y = y - 2$;

Donc l'expression de f dans ce nouveau repère est :

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $X \mapsto \dfrac{3}{X}$; c'est une fonction impaire.

II. Opérations ; formes indéterminées :

Nous rappelons ci-dessous les théorèmes algébriques qui nous renseignent – dans certains cas – sur la limite d'une somme, d'un produit ou d'un quotient.

S1) Somme :

Les fonctions f et g ayant une limite (finie ou infinie), la fonction $f + g$ admet une limite dans chacun des cas décrits dans le tableau ci-contre.

lim g \ lim f	ℓ	$+\infty$	$-\infty$
ℓ'	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	?
$-\infty$	$-\infty$	?	$-\infty$

2) Produit :

Les fonctions f et g ayant une limite (finie ou infinie), la fonction $f \times g$ admet une limite dans chacun des cas décrits dans le tableau ci-contre.

Remarque $\infty \times 0 = ?$

lim g \ lim f	$\ell \neq 0$	$+\infty$	$-\infty$
$\ell' \neq 0$	$\ell \,.\, \ell'$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$+\infty$	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$\pm\infty$	$-\infty$	$+\infty$

3) Quotient :

Les fonctions f et g ayant une limite (finie ou infinie), la fonction $\dfrac{f}{g}$ admet une limite dans chacun des cas décrits dans le tableau ci-contre. $\dfrac{l}{l'}$

lim g \ lim f	$\ell \neq 0$	0	$+\infty$	$-\infty$
0	$\pm\infty$	?	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\ell' \neq 0$	$\dfrac{l}{l'}$	0	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$+\infty$	0	0	?	?
$-\infty$	0	0	?	?

III. Enoncés usuels sur les limites :

1. Comparaison :

Nous admettrons les résultats suivants qui en dehors du dernier permettent de déterminer le comportement lorsque x tend vers a (à fini ou infini) d'une fonction f par comparaison à d'autres fonctions U, V dont le comportement est connu. Quant au dernier il permet le passage à la limite dans une inégalité.

Hypothèse I	**Hypothèse II**	**Conclusion**
Inégalité pour x assez proche de a	Lorsque x tend vers a	
$U(x) \leq f(x)$	U tend vers $+\infty$	f tend vers $+\infty$
$f(x) \leq U(x)$	U tend vers $-\infty$	f tend vers $-\infty$
$\vert f(x) - \ell \vert \leq U(x)$	U tend vers 0	f tend vers ℓ
$U(x) \leq f(x) \leq V(x)$	U et V tendent vers la limite ℓ	f tend vers ℓ
$f(x) \leq g(x$	$f(x)$ et $g(x)$ admettent ***des*** limites en a	$\lim\limits_{x \to a} f(x) \leq \lim\limits_{x \to a} g(x)$

2. Limite d'une fonction composée :

Nous admettons le résultat suivant :

Si ; $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ et $\lim\limits_{y \to b} g(y) = \ell$, alors, $\lim\limits_{x \to a} (g \circ f)(x) = \ell$; a , b et ℓ finis ou infinis.

3. Limite à gauche, Limite à droite :

On dit que f admet ℓ (fini ou infini) comme limite à gauche (à droite) en a si la restriction de f à$]-\infty\,;a]$ (à $[a\,;+\infty[$) admet ℓ comme limite en a, on note alors,

$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \leq a}} f(x) = \ell$ ou $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \ell$; $(\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \geq a}} f(x) = \ell$ ou $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \ell$).

IV. Asymptotes :

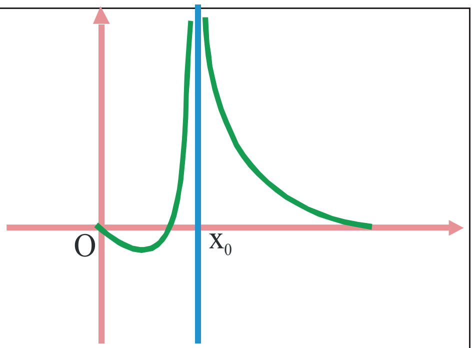
1. Asymptotes parallèles aux axes de repères :

- Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$, on dit que la droite $x = x_0$

est asymptote à $\mathscr{C}$; c'est une droite parallèle à (Oy),

Exemple 7 :

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $x \mapsto \frac{1}{x^2}$; On a : $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$; donc $x = 0$ est une asymptote à $\mathscr{C}$ parallèle à (Oy),



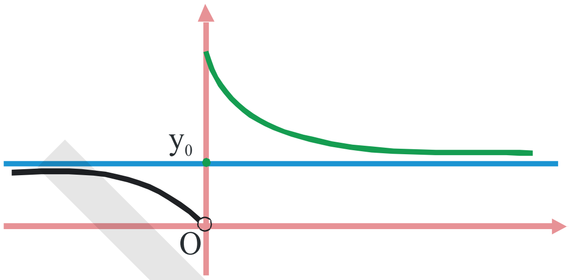
- Si $\lim\limits_{x\to \pm\infty} f(x) = l$, on dit que la droite $y = \ell$

est asymptote à $\mathscr{C}$; c'est une droite parallèle à (Ox).

Exemple 8 :

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $x \mapsto 2 - \frac{1}{x}$; On a : $\lim\limits_{x\to \pm\infty} (2 - \frac{1}{x}) = 2$;

donc $y = 2$ est une asymptote à $\mathscr{C}$,
c'est une droite parallèle à (Ox).



2. Asymptotes obliques :

- Lorsqu'il existe une fonction affine : $x \mapsto ax + b$;

telle que: $\lim\limits_{x\to \pm\infty} \left[f(x) - (ax+b)\right] = 0$,

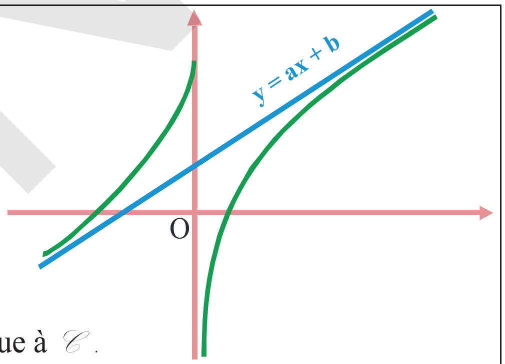
on dit que la droite d'équation : $y = ax + b$

est une asymptote oblique à $\mathscr{C}$.

Exemple 9 :

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $x \mapsto x + 1 - \frac{1}{x-3}$; On a : $\lim\limits_{x\to \pm} \frac{1}{x-3} = 0$;

donc la droite d'équation $y = x + 1$ est une asymptote oblique à $\mathscr{C}$.



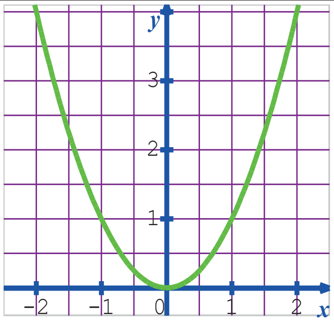
3. Direction asymptotique :

- Si $\lim\limits_{x\to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ et $\lim\limits_{x\to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$

on dit que $\mathscr{C}$ admet une branche parabolique de direction (yy').

Exemple 10 :

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $x \mapsto x^2$;

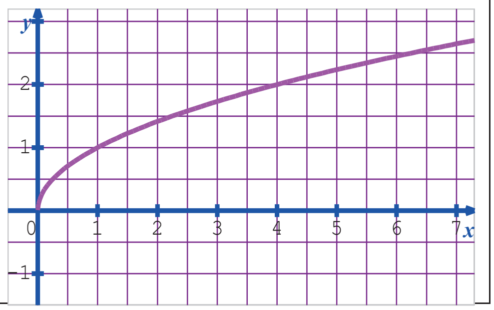


- Si $\lim\limits_{x\to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ et $\lim\limits_{x\to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$

on dit que $\mathscr{C}$ admet une branche parabolique de direction (xx').

Exemple 11:

$f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$; $x \mapsto \sqrt{x}$;



V. Langage de la continuité :

1. Généralité :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant **a**.

- On dit que f est continue en **a**, si f admet une limite finie en **a** égale à $\mathbf{f}(\mathbf{a})$.
- On dit que f est continue sur I, si f est continue sur tout point de I.

2. Prolongement par continuité :

Soit **f** une fonction définie sur un intervalle I contenant a, sauf en a et vérifiant $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ (l réel).

Alors la fonction $\tilde{f}\begin{cases} x \mapsto f(x)\ ;\text{si } x \neq a \\ a \mapsto l \end{cases}$ qui est définie et continue en **a** est appelée le prolongement continu (ou prolongement par continuité) de **f** en a.

3. Fonction continue sur un intervalle :

a. Image d'un intervalle :

- l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.
- L'image d'un intervalle fermé borné $[\mathbf{a}; \mathbf{b}]$ par une fonction continue est un intervalle fermé borné $[\mathbf{m}; \mathbf{M}]$

b. Théorème des valeurs intermédiaires :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I a et b sont deux réels de I tels que $a < b$
Pour tout réel k compris entre f(a) et f(b) l'équation f(x)=k possède au moins une solution dans l'intervalle $[\mathbf{a}; \mathbf{b}]$. En particulier si f(a).f(b)< 0 alors l'équation f(x)=0 admet au moins une solution dans $]a\ \ b[$

c. Théorème :

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I a et b sont deux réels de I tels que $a < b$. Pour tout réel k compris entre f(a) et f(b) l'équation f(x)=k admet une unique solution dans l'intervalle $[\mathbf{a}; \mathbf{b}]$

d.Théorème :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Si f ne s'annule en aucun point de I alors elle a un signe constant sur I

VI. Dérivation et fonction dérivée :

1. Dérivabilité d'une fonction en un réel :

f est une fonction définie sur un intervalle I de centre x_0.

Définition :

Dire que le réel A est le nombre dérivé de **f** en x_0 signifie que l'une ou l'autre des deux conditions suivantes est réalisée :

- La fonction $h : \mapsto \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ a pour limite **A** en x_0.
- Il existe une fonction ε de limite 0 en 0 telle que : pour tout h suffisamment proche de 0 ;

$f(a+h) = f(a)\ +Ah\ + h\varepsilon(h)$.

f est dérivable en x_0 si et seulement si f admet un nombre dérivé en x_0.

Ce nombre dérivé est noté $\mathbf{f'(x_0)}$ et l'on a alors: $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$.

a) Dérivabilité et représentation graphique :

$\mathscr{C}_f$ est la représentation graphique de f, dans le plan rapporté à un repère.

Si f est dérivable en x_0, alors $\mathscr{C}_f$ admet une tangente au point d'abscisse x_0, et le cœfficient directeur de cette tangente est $f'(x_0)$.

Si le rapport $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ a une limite infinie quand h tend vers 0, la fonction f n'est pas dérivable en x_0, mais $\mathscr{C}_f$ admet au point d'abscisse x_0 une tangente parallèle à l'axe **(yy')** (verticale).

b) Dérivée à droite, Dérivée à gauche :

On appelle dérivée à droite en x_0 le nombre : $\ell = \lim\limits_{x \to x_0^+} [\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}]$ s'il existe.

La demi-droite $\begin{cases} y = l(x-x_0)+f(x_0) \\ x \geq x_0 \end{cases}$ est la demi-tangente à droite en $M(x_0\,;f(x_0))$ à $\mathscr{C}_f$.

Les notions de nombre dérivé à gauche et de demi-tangente à gauche se définissent de manière analogue.

Si $\lim\limits_{x \to x_0^+} [\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}] \neq \lim\limits_{x \to x_0^-} [\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}]$ alors f n'est pas dérivable en x_0.

2) Dérivabilité sur un intervalle – Fonction dérivée :

Définition 1 :
Une fonction f est dérivable sur un intervalle I si et seulement si f est dérivable en tout réel de I.

Définition 2 :
f est une fonction dérivable sur un intervalle I. la fonction dérivée de f sur I, notée f', est la fonction définie sur I, qui, à tout réel x de I associe le nombre dérivé de f en x.

a) Formulaires :

E est l'ensemble de dérivabilité de la fonction **f**, **k** un réel, n un entier

f	f '	E
$k\ (k \in \mathbb{R})$	0	$\mathbb{R}$
X	1	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{x}$	$\dfrac{-1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$x^n\ (n \geq 2)$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+^*$
sinx	cosx	$\mathbb{R}$
cosx	-sinx	$\mathbb{R}$
$x^k\ (k \notin \mathbb{Z})$	kx^{k-1}	$\mathbb{R}_+^*$

U et V sont deux fonctions dérivables sur un intervalle **I** ; **k** est un réel, **n** un entier.

f	f '	Conditions
U + V	U' + V'	
kU	kU'	
UV	U'V + UV'	
$\dfrac{1}{V}$	$\dfrac{-V'}{V^2}$	V ne s'annule pas sur I
$\dfrac{U}{V}$	$\dfrac{U'V-UV'}{V^2}$	V ne s'annule pas sur I
U^n	$nU'U^{n-1}$	$n \geq 2$
U^n	$nU'U^{n-1}$	$n \leq 1$ et U ne s'annule pas sur I
$\sqrt{U}$	$\dfrac{U'}{2\sqrt{U}}$	U positive et ne s'annule pas sur I
U^k	$kU'U^{k-1}$	$k \notin \mathbb{Z}$, U positive et ne s'annule pas sur I.

b) Dérivées successives :

Soit une fonction f dérivable sur I, si la fonction f' est dérivable sur I, on note f'' sa fonction dérivée et on l'appelle la dérivée seconde de f sur I.
On définit de même la dérivée troisième, notée f''', la dérivée quatrième, notée $f^{(4)}$; de façon générale, on note la dérivée $n^{\text{-ième}}$ $f^{(n)}$.

Fonction	Dérivée successive	
f(x)=x^m $m>0$	Si $m>n$ $f^{(n)}(x)=\frac{m!}{(m-n)!}x^{m-n}$	Si $m<n$ $f^{(n)}(x)=0$
f(x)=x^n	$f^{(n)}(x)=n!$	
f(x)=$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$	$f^{(n)}(x)=a_n.n!$	
f(x)=$\frac{1}{x}$ (avec $x\neq0$)	$f^{(n)}(x)=(-1)^n\frac{n!}{x^{n+1}}$	
f(x)=sinx	$f^{(n)}(x)=\sin(x+\frac{n\pi}{2})$	
f(x)=cosx	$f^{(n)}(x)=\cos(x+\frac{n\pi}{2})$	

c) Point d'inflexion :

Définition :

Soit f une fonction deux fois dérivable sur $]a-h\ ;\ a+h[$ $h>0$; C_f sa représentation graphique dans un repère orthonormé .Si la dérivée seconde f'' s'annule en a en changeant de signe alors le point I(a ; f(a)) est un point d'inflexion à C_f

Exemple 12 :

Soit f la fonction définie sur par $f(x)=x^4-6x^2+1$ et C_f sa courbe dans un repère orthonormé. Montrer que C_f admet deux points d'inflexions que l'on précisera.

Réponse : f est dérivables deux fois sur $\mathbb{R}$

$f'(x)=4x^3-12x$ et $f''(x)=12x^2-12$ f'' s'annule en 1et-1 en changeant de signe donc C_f admet deux points d'inflexions : $I(1:-4)$ et $J(-1:-4)$

Remarque :

- Si f' s'annule en a en gardant le même signe alors le point d'abscisse a est un point d'inflexion
- Si la courbe traverse sa tangente au point d'abscisse a (la tangente change sa position relative en a) alors le point I(a : f(a)) est un point d'inflexion
- Si la courbe admet une tangente verticale au point d'abscisse a alors le point I(a : f(a)) est un point d'inflexion
- Soit I un centre de symétrie de C_f, courbe d'une fonction f ; si I appartient à C_f alors I un point d'inflexion.

3) Dérivabilité et continuité :

Soit une fonction f définie sur un intervalle I. Si f est dérivable sur I, alors f est continue sur I.

4) Dérivabilité et monotonie :

Théorème :

Soit une fonction f définie sur un intervalle I :

- f est croissante sur I si, et seulement si, $f' \geq 0$ sur I ;
- f est décroissante sur I si, et seulement si, $f' \leq 0$ sur I ;
- f est constante sur I si, et seulement si, $f' = 0$ sur I ;

5) Dérivée d'une fonction composée :

Théorème :

Soit A ; B ; C trois intervalles, f une fonction dérivable de A vers B ; g une fonction dérivable de B vers C. alors $g \circ f$ est une fonction dérivable de A vers C et : $(gof)'=(g'of)\times f'$

C'est-à-dire $\forall$ x$\in$ A, : $(gof)'(x)=g'(f(x))\times f'(x)$.

Exemple 13 :

Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x)=\sqrt{x^2+x+1}$; $h = g \circ f$ / $f(x) = x^2 + x + 1$; $g(x) = \sqrt{x}$

$$h'(x)=g'[f(x)]\times f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{f(x)}}\times f'(x)=\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}$$

6) Dérivée de la bijection réciproque :

Théoreme :

Toute fonction f continue(éventuellement dérivable) et strictement monotone sur un intervalle I est une bijection de I sur J=f(I) donc elle admet une bijection réciproque notée f^{-1}

- Pour tout y de J l'équation f(x)=y admet une unique solution x appartient à I
- $f(x)=y \Leftrightarrow f^{-1}(y)=x$
- $\forall x \in I$ $f^{-1}(f(x))=x$ et $\forall y \in J$ $f(f^{-1}(y))=y$

a) Détermination de $(f^{-1})'$:

Théorème :

Soit f une fonction bijective d'un intervalle **A** dans un intervalle **B**, dérivable en x_0 et telle que : $f'(x_0) \neq 0$. La bijection réciproque f^{-1} est alors dérivable en $y_0 = f(x_0)$ et :

$$(f^{-1})'(y_0)=\frac{1}{f'\circ f^{-1}(y_0)}=\frac{1}{f'(x_0)}.$$

Exemple 14 :

Soit f : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $x \mapsto x^5 + x + 1$. Calculer $(f^{-1})'(1)$ et $(f^{-1})'(3)$.

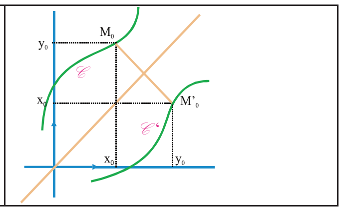
$f(0) = 1$ et $f(1) = 3 \Leftrightarrow f^{-1}(1) = 0$ et $f^{-1}(3) = 1$. $f'(x) = 5x^4 + 1 \Leftrightarrow f'(0) = 1$ et $f'(1) = 6$.

$(f^{-1})'(1) = \dfrac{1}{f'[f^{-1}(1)]} = \dfrac{1}{f'(0)} = \dfrac{1}{1} = 1$; $(f^{-1})'(3) = \dfrac{1}{f'[f^{-1}(3)]} = \dfrac{1}{f'(1)} = \dfrac{1}{6}$.

On peut ***remarquer*** qu'il n'est pas nécessaire de connaître explicitement f^{-1} pour calculer la valeur du nombre dérivée $(f^{-1})'(x_0)$.

b) Interprétation graphique :

Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative d'une bijection f et $\mathscr{C}'$ la courbe représentative de f^{-1}, dans un repère orthonormé.
La courbe $\mathscr{C}'$ est la symétrique de $\mathscr{C}$ par rapport à la première bissectrice (la droite y = x).



7) Inégalité des accroissements finis :

Théorème 1 :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I, a et b deux réels de I tels que : $a \leq b$.
S'il existe deux réels m et M tels que : $\forall x \in I$; $m \leq f'(x) \leq M$, alors $m(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a)$.

Théorème 2 :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I, a et b deux réels de I.
S'il existe un réel M tels que : $\forall x \in I$, $|f'(x)| \leq M$, alors $|f(b) - f(a)| \leq M\,|b - a|$.

Exemple 15 :

$f(x) = \sin x$, en appliquant l'inégalité des accroissements finis à la fonction f sur l'intervalle $[0 ; \frac{\pi}{6}]$;

Montrer que : $\dfrac{\sqrt{3}}{2}x \leq \sin x \leq x$.

$f'(x) = \cos x$; $\forall x \in [0 ; \frac{\pi}{6}]$; $\dfrac{\sqrt{3}}{2} \leq \cos x \leq 1 \leq \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{2} \leq f'(x) \leq 1$.

Savoir- faire

A. Applications :

Exercice 1 : *Quelques résultats théoriques - Règles opératoires sur les fonctions dérivables*

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I et a un point à l'intérieur de I.

Démontrer que si f et g sont des fonctions dérivables en a alors :

1. $f+g$ est dérivable en a.

2. fg est dérivable en a

3. Si g est non nulle au voisinage de a alors $\dfrac{1}{g}$ est dérivable en a.

Solution : *Quelques résultats théoriques - Règles opératoires sur les fonctions dérivables*

Par hypothèse, les accroissements moyens $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ et $\dfrac{g(a+h)-g(a)}{h}$ admettent des limites lorsque h

tend vers 0. On note $f'(a)$ et $g'(a)$ ces limites respectives.

1. On a : $\dfrac{(f+g)(a+h)-(f+g)(a)}{h}=\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}+\dfrac{g(a+h)-g(a)}{h}$

Donc $\dfrac{(f+g)(a+h)-(f+g)(a)}{h}$ admet une limite égale à $f'(a)+g'(a)$ lorsque h tend vers 0.

Ce qui prouve que $(f+g)$ est dérivable en a (et de plus, $(f+g)'(x)=f'(x)+g'(x)$.

2. On a : $\dfrac{(fg)(a+h)-(fg)(a)}{h}=\dfrac{f(a+h)g(a+h)-f(a)g(a)}{h}$

$$=\frac{(f(a+h)g(a+h)-f(a)g(a+h))+(f(a)g(a+h)-f(a)g(a))}{h}$$

$$=\frac{(f(a+h)-f(a))}{h}g(a+h)+f(a)\frac{(g(a+h)-g(a))}{h}.$$

Donc $\dfrac{(fg)(a+h)-(fg)(a)}{h}$ admet une limite égale à $f'(a)g(a)+f(a)g'(a)$ lorsque h tend vers 0.

Ce qui prouve que fg est dérivable en a (et de plus, $(fg)'(a)=(f'g+fg')(a)$).

Soit V un voisinage de a sur lequel g est non nulle. Pour $h\in V$, on a :

$$\frac{\dfrac{1}{g(a+h)}-\dfrac{1}{g(a)}}{h}=-\frac{g(a+h)-g(a)}{h}\times\frac{1}{g(a)g(a+h)}$$

Or, g est continue en a puisque dérivable en a, donc $\lim\limits_{x\to a} g(a+h)=g(a)$

Donc $\dfrac{\dfrac{1}{g(a+h)}-\dfrac{1}{g(a)}}{h}$ admet une limite égale à $-\dfrac{g'(a)}{(g(a))^2}$ lorsque h tend vers 0.

Ce qui prouve que $\dfrac{1}{g}$ est dérivable en a (et de plus, $\left(\dfrac{1}{g}\right)'(a)=-\dfrac{g'(a)}{(g(a))^2}$

Exercice 2 : *Dérivation d'une composition de fonctions dérivables*

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I. Soit v une fonction dérivable sur un intervalle J contenant $u(I)$. Démontrer que la fonction $v \circ u$ est dérivable sur I et pour tout $x\in I$:

$(v \circ u)'(x)=u'(x)\,v'(u(x))$

Solution : ***Dérivation d'une composition de fonctions dérivables***

Soit $x_0 \in I$. On écrit : $\dfrac{(vou)(x)-(vou)(x_0)}{x-x_0} = \dfrac{v(u(x))-v(u(x_0))}{u(x)-u(x_0)} \times \dfrac{u(x)-u(x_0)}{x-x_0}$.

Posons $y_0 = u(x_0)$ et $y = u(x)$: $\dfrac{(vou)(x)-(vou)(x_0)}{x-x_0} = \dfrac{v(y)-v(y_0)}{(y-y_0)} \times \dfrac{u(x)-u(x_0)}{x-x_0}$

Or, v étant dérivable en y_0, on a : $\lim\limits_{y \to y_0} \dfrac{v(y)-v(y_0)}{(y-y_0)} = v'(y_0)$ et u étant dérivable en x_0, on a :

$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{u(x)-u(x_0)}{(x-x_0)} = u'(x_0)$; d'où : $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{(vou)(x)-(vou)(x_0)}{x-x_0} = v'(y_0) \times u'(x_0)$

C'est-à-dire : $(v \text{ o } u)'(x_0) = u'(x_0) \times v'(u(x_0))$

Ceci étant valable pour tout $x_0 \in I$, on en déduit la dérivabilité de v o u sur I et $(v \text{ o } u)'(x) = u'(x)$ $v'(u(x))$

Exercice 3 : *Où l'on applique le théorème de bijection à la dérivée*

Démontrer que l'équation $x^4 + x^3 - x + 1 = 0$ n'a pas de solutions sur $\mathbb{R}$.

Solution : *Où l'on applique le théorème de bijection à la dérivée*

Définissons la fonction f, pour $x \in \mathbb{R}$, par : $f(x) = x^4 + x^3 - x + 1$

La fonction étant polynomiale, elle est indéfiniment dérivable et on a :

$f'(x) = 4x^4 + 3x^2 - 1$ *et* $f''(x) = 12x^2 + 6x = 6x(2x+1)$

Nous en déduisons les variations de la fonction f' :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	|	$-$	|		⁝	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$-\frac{3}{4}$	↘	-1	↗	0	↗	$+\infty$

La fonction f' est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

De plus $f'(0) = -1 < 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = +\infty$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires (de bijection), il existe donc un réel $\alpha \in]0 ; +\infty[$ tel que $f'(\alpha) = 0$.

On en déduit que f' est négative sur $]-\infty ; \alpha]$ et positive sur $[\alpha ; +\infty[$.

La fonction f admet donc, sur $\mathbb{R}$, un minimum en α. Il nous reste à prouver que $f'(\alpha)$ est strictement positif.

Pour cela, encadrons α. On sait que $f'(0) = -1$ et $f'(1) = 6$, donc $\alpha \in]0 ; 1[$. On en déduit :

$0 < \alpha^4 < 1$ et $0 < \alpha^3 < 1$ et $0 < -\alpha + 1 < 1$

En sommant ces trois encadrements : $0 < \alpha^4 + \alpha^3 - \alpha + 1 < 3$. C'est-à-dire : $0 < f(\alpha) < 3$

Le minimum de f, sur $\mathbb{R}$, est strictement positif, donc f l'est aussi.

Par conséquent f ne s'annule pas. Autrement dit, l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4 : *On ne peut être dépassé par plus lent que soit.*

Soient f et g deux fonctions dérivables sur l'intervalle $I = [0 ; 1]$ telles que :

$f(0) = g(0)$ et $f' \leq g'$ sur I.

Démontrer que $f \leq g$ sur I. (On pourra étudier les variations de $g - f$)

Solution : *On ne peut être dépassé par plus lent que soit.*

Calculons la dérivée de la fonction $g - f$: $(g - f)' = g' - f'$

Comme $f' \leq g'$ sur I, on a : $g' - f' \geq 0$ sur I. La fonction $g - f$ est donc croissante sur I.

Ce qui signifie :

pour tous réels u et v de I : $u < v \Rightarrow (g - f)(u) \leq (g - f)(v)$

C'est-à-dire : pour tous réels u et v de I : $u < v \Rightarrow g(u) - f(u) \leq g(v) - f(v)$

En particulier avec $u = 0$, on a : pour tout v de I : $g(0) - f(0) \leq g(v) - f(v)$

Et comme $f(0) = g(0)$: pour tout v de I : $0 \leq g(v) - f(v)$

C'est-à-dire : pour tout v de I : $0 \leq g(v) - f(v)$. Ce qui signifie : $f \leq g$ sur I.

Exercice 5 :

Une compagnie aérienne vend des billets d'avion Paris- Rome à 580euros. La compagnie propose une remise sur les prix suivant les conditions suivantes :si le nombre de passagers atteint 200, alors toute augmentation de cinq nouveaux passagers entraine une remise de 10 euros sur tous les billets. La capacité de l'avion est 300 places. Quel est le nombre de passagers pour lequel la recette de la compagnie est maximale ? Quel est alors le prix du billet ?

Solution :

Soit $\mathbf{5x}$ l'augmentation des passagers avec $x \in [0 ; 20]$, le nombre de passagers est donc $\mathbf{200+5x}$ et le prix de billet sera $\mathbf{580-10x}$ et la recette $\mathbf{R(x)=(200+5x)(580-10x)}$.

Pour déterminer la recette maximale, on dérive la fonction $\mathbf{R(x)}$:

$\mathbf{R'(x)=5(580-10x)-10(200+5x)=900-100x}$; alors $\mathbf{R'(x)=0 \Rightarrow x=9.}$

x	0		9		20
$R'(x)$		+		−	
$R(x)$		↗	120050	↘	

La recette est maximale pour $x = 9$, dans ce cas *le nombre de passagers est* **245** et le prix du billet est **490** euros.

La recette maximale est : $\mathbf{R(9)=245 \times 490=120050}$

Exercice 6 : *Deux fonctions continues qui commutent sur un segment ont un point fixe commun*

Soient f et g deux fonctions continues sur le segment $I = [0, 1]$ telles que $g \circ f = f \circ g$.

Le but de l'exercice est de démontrer qu'alors, il existe un réel ℓ de $[0, 1]$ tel que $f(\ell) = g(\ell)$.

1. Question préliminaire

Soit φ la fonction définie sur $[0, 1]$ par $\varphi(x) = f(x) - x$.

Démontrer qu'il existe un réel $a \in [0, 1]$ tel que : $\varphi(a) = 0$. On a donc $f(a) = a$. On dit que a est un point fixe de f.

Dans la suite du problème (questions 2, 3 et 4), **on suppose qu'il n'existe pas de réel ℓ dans [0, 1] tel que $f(\ell) = g(\ell)$** et on déduit une contradiction. (Il s'agit d'un raisonnement par l'absurde).

2. On note h la fonction définie sur I par $h = f - g$. Démontrer que h est de signe constant.

3. Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$

a. Démontrer la suite (u_n) est bornée.

b. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est un point fixe de f. (C'est à dire : $f(u_n) = u_n$)

c. En déduire que la suite (u_n) est monotone.

d. En déduire que la suite (u_n) converge vers un réel $\ell \in [0, 1]$. (On ne cherchera pas à calculer ℓ)

4. Dans cette question, nous allons en déduire une contradiction

a. Démontrer que $f(\ell) = \ell$

b. Démontrer que $g(\ell) = \ell$

c. En déduire une contradiction.

5. Conclure.

Solution : *Deux fonctions continues qui commutent sur un segment ont un point fixe commun*

Soient f et g deux fonctions continues sur le segment $I = [0, 1]$ telles que $g \circ f = f \circ g$.

Le but de l'exercice est de démontrer qu'alors, il existe un réel ℓ de [0, 1] tel que $f(\ell) = g(\ell)$.

1. Cette fonction φ est continue sur I (différence de fonctions continues) et $\varphi(0) = f(0) > 0$ et $\varphi(1) = f(1) - 1 < 0$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel $a \in [0 ; 1]$ tel que $\varphi(a) = 0$, c'est-à-dire : $f(a) = a$. Donc f admet (au moins) un point fixe a dans [0 ; 1]

2. Cette fonction h est continue sur I (différence de fonctions continues).

Si h n'était pas de signe constant, on pourrait trouver des réels α et β dans [0, 1] tels que : $h(\alpha) \leq 0$ et $h(\beta) \geq 0$

Du théorème des valeurs intermédiaires, on déduirait l'existence d'un réel c compris entre α et β tel que : $h(c) = 0$

Ce qui est contraire à l'hypothèse. Donc h est de signe constant.

3. Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$

a. Comme $u_0 \in I$ et g est à valeurs dans I, la suite (u_n) est bien définie d'où : $u_n \in I$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

La suite (u_n) est donc bornée par 0 et 1.

b. Considérons la propriété $\wp$, définie pour $n \in \mathbb{N}$, par : $\wp(n)$: $f(u_n) = u_n$

- Comme $u_0 = a$ est un point fixe de f, on a $\wp(0)$. La propriété $\wp$ est donc initialisée en 0.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\wp(n)$. Alors : $f(u_{n+1}) = f(g(u_n)) = g(f(u_n))$(car $g \circ f = f \circ g$).
$= g(u_n) = u_{n+1}$.

D'où $\wp(n+1)$.

La propriété $\wp$ est donc héréditaire à partir du rang n.

Du principe de raisonnement par récurrence, on en déduit que la propriété $\wp$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$: pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est un point fixe de f.

c. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, examinons la différence $u_{n+1} - u_n$:

$u_{n+1} - u_n = g(u_n) - u_n = g(u_n) - f(u_n) = h(u_n)$

Or, d'après la question 2., h est de signe constant, donc la suite (u_n) est monotone.

d. La suite (u_n) est monotone est bornée par 0 et 1. Dans tous les cas, elle converge donc vers un réel $\ell \in I$.

4. a. D'après la question 3.b., on a : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(u_n) = u_n$

En passant à la limite lorsque n tend vers $+\infty$: $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = \ell$.

Or, f est continue en ℓ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\ell)$, d'où : $f(\ell) = \ell$.

b. Par définition, on a : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = g(u_n)$

En passant à la limite lorsque n tend vers $+\infty$: $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} g(u_n)$.

Or, g est continue en ℓ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} g(u_n) = g(\ell)$, d'où : $g(\ell) = \ell$.

c. On a donc : $h(\ell) = f(\ell) - g(\ell) = \ell - \ell = 0$. Ce qui contredit l'hypothèse faite avant la question 2.

5. L'hypothèse en question est donc fausse. Par conséquent : il existe un réel ℓ dans I tel que : $f(\ell) = g(\ell)$.

B. Exercices divers :

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} & ; si\ x<0\\[2mm] \dfrac{x^3\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)}{1+x^2} & ;\ si\ x>0\end{cases}$$

1) a) Montrer que $\forall x>0$, on a : $|f(x)|\leq x^3$; en déduire $\lim\limits_{0^+} f(x)$

b) Montrer que f admet un prolongement par continuité g en 0. Définir g.

2) Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}$.

3) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\pi$.

4) Soit h la fonction définie sur $]-\infty;1[$ par

$$h(x)=f\left(\sqrt{\frac{1}{1-x}}\right).$$

Montrer que h est continue sur $]-\infty;1[$ puis calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)$ et $\lim\limits_{x\to1^-} h(x)$.

2. Pour tout $n\geq1$, on appelle f_n la fonction définie sur [0 ; 1] par :

$$f_n(x)=x^n+x^{n-1}+\ldots+x^2+x.$$

1) Quel est le sens de variation de f_n.

Exprimer $f_n(x)$ à l'aide du symbole $\sum$.

2) Montrer que l'équation $f_n(x)=1$ a une unique solution que l'on notera a_n.

3) Montrer que ; en déduire que pour tout $n\geq1$, on a : $a_n>\dfrac{1}{2}$

4) Montrer que pour tout $n\geq1$, $f_{n+1}(a_n)=a_n^{\,n+1}+1$. En déduire que : $a_{n+1}\leq a_n$.

5) Montrer que la suite (a_n) converge vers une limite L et que $\dfrac{1}{2}\leq L$. En déduire que pour tout $n\geq1$, $1-\dfrac{1}{2^n}\leq f_n(L)$

6) Montrer que pour tout $n\geq1$, $f_n(L)\leq1$.

En déduire la limite de la suite $(f_n(L))$

7) Montrer que $f_n(L)=L\dfrac{1-L^n}{1-L}$. En déduire que $\dfrac{L}{1-L}=1$, puis la valeur de L.

3. Soit g la fonction définie sur $[1;+\infty[$ par :

$$g(x)=x^3-x-1.$$

1) a) dresser le tableau de variation de g

b) Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet dans $[1;+\infty[$ une unique solution α et que $1{,}3<\alpha<1{,}4$

c) Montrer que $\sqrt{\dfrac{1+\alpha}{\alpha}}=\alpha.$

2) Soit la fonction définie sur $[1;+\infty[$ par :

$$f(x)=\sqrt{\frac{1+x}{x}}.$$

a) Montrer que f est dérivable sur $[1;+\infty[$ et que pour tout x de $[1;+\infty[$: $f'(x)=-\dfrac{1}{2x^2}\sqrt{\dfrac{x}{1+x}}$

b) Montrer que pour tout x de $[1;+\infty[$,

$$-\frac{1}{2} \le f'(x) \le 0.$$

c) En déduire que pour tout x de $[1\,;+\infty[$

$$-\frac{x}{2}+\frac{3}{2}\alpha \le f'(x) \le \alpha.$$

4. Soit la fonction définie sur $\mathbf{I}=\left[\frac{\pi}{2}\,;\pi\right[$

par : $f(x)=1+3\cos^2 x$.

On désigne par Γ_f la courbe de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) a) Dresser le tableau de variation de f.

b) Montrer que f réalise une bijection de $\left[\frac{\pi}{2}\,;\pi\right[$ sur un intervalle que l'on déterminera.

2) a) Etudier la dérivabilité de f^{-1} à droite en 1.

b) Montrer que f^{-1} est dérivable sur $]1\,;4[$.

c) Montrer que $\forall x \in]1\,;4[$, on a :

$$\left(f^{-1}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{-x^2+5x-4}}.$$

d) Montrer que $\forall x \in \left]\frac{7}{4}\,;\frac{13}{4}\right[$, on a :

$$\frac{1}{3} \le \left(f^{-1}\right)'(x) \le \frac{2}{3}.$$

3) a) Calculer $f\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ et $f\left(\frac{5\pi}{6}\right)$

b) Montrer que $f^{-1}(x)=x$ admet dans $\left]\frac{7}{4}\,;\frac{13}{4}\right[$ une solution unique α.

c) Tracer Γ_f et $\Gamma_{f^{-1}}$ dans le même repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

4) Montrer que $\forall x \in \left]\alpha\,;\frac{13}{4}\right[$, on a :

$$\frac{1}{3}(x+2\alpha) \le f^{-1}(x) \le \frac{1}{3}(2x+\alpha).$$

5. Soit f la fonction définie sur $]-1\,;1[$

par : $f(x)=-1+\cos\left(\frac{\pi}{2}(x+1)\right)$.

1) a) Montrer que f réalise une bijection de $]-1\,;1[$ sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $\left(f^{-1}\right)'(x)=\frac{-2}{\pi\left[(x+1)^2+1\right]}$.

2) On pose $F(x)=f^{-1}(x-1)+f^{-1}\left(\frac{1}{x}-1\right)$.

a) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

Calculer $F'(x)$.

b) En déduire que pour tout $x\in\mathbb{R}^*_+$; $F(x)=-1$ et pour tout $x\in\mathbb{R}^*_-$; $F(x)=1$.

3) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose :

$$U_n=\sum_{k=1}^{n}\left(f^{-1}\left(\frac{1}{k}\right)+f^{-1}\left(-\frac{1}{k}\right)\right) \text{ et } W_n=\frac{1}{n}U_n.$$

a) Montrer que :

$$f^{-1}\left(\frac{1}{k}\right)+f^{-1}\left(-\frac{1}{k}\right)=-1 \quad \forall n\in\mathbb{N}^*$$

b) $\forall n\in\mathbb{N}^*$; $U_n=n-f^{-1}\left(-\frac{1}{n}\right)$.

En déduire que (W_n) est convergente et donner sa limite.

6. Soit la fonction définie sur $\mathbf{I}=\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[$

par : $f(x)=\frac{1+\cos x}{\cos x}$.

On désigne par Γ_f la courbe de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) Etudier les variations de f et tracer Γ_f.

2) Montrer que f est une bijection de $\mathbf{I}$ sur un intervalle à déterminer. Donner le domaine de dérivabilité de f^{-1} fonction réciproque de f.

3) Montrer que :

$$x \in \mathbf{I},\ f'(x) = (f(x)-1)\sqrt{(f(x))^2 - f(x)}.$$

En déduire l'expression de $\left(f^{-1}\right)'(x)$ en fonction de x.

4) Retrouver cette expression par le calcul direct.

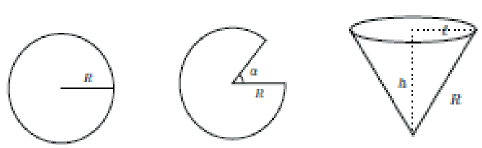
7. La période d'un pendule formé d'une tige homogène de masse m, de longueur L, mobile autour d'un axe horizontal perpendiculaire à la tige en un point situé à la distance x de centre de gravité est : $T(x) = 2m\sqrt{\frac{L^2}{12gx} + \frac{x}{g}}$.

a) Déterminer $T(x)$ pour $m = 1\,kg$ et $L = 2\,m$

b) En déduire la distance x pour que la période T soit minimale.

c) Quelle est cette période ?

8. Dans un disque en carton de rayon R, on découpe un secteur angulaire correspondant à un angle de mesure α radians.



On superpose les bords afin de créer un cône de révolution. On souhaite choisir l'angle α pour obtenir un cône de volume maximal.

On appelle ℓ le rayon de la base circulaire de ce cône et h sa hauteur.

On rappelle que :

- le volume d'un cône de révolution de base un disque d'aire A et de hauteur h est $\frac{1}{3}\mathsf{A}h$.
- la longueur d'un arc de cercle de rayon r et d'angle θ, exprimé en radians, est rθ.

1) On choisit R = 20 cm.

a) Montrer que le volume du cône, en fonction de sa hauteur h, est

$$\mathbf{V\,(h)} = \frac{1}{3}\pi(400 - h^2)h.$$

b) Justifier qu'il existe une valeur de h qui rend le volume du cône maximum.

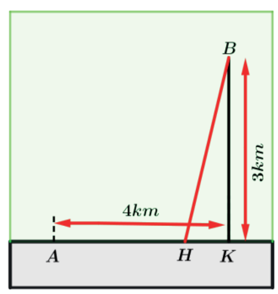
Donner cette valeur.

c) Comment découper le disque en carton pour avoir un volume maximum ?

Donner un arrondi de α au degré près.

2) L'angle α dépend-il du rayon R du disque en carton ?

9. Une voiture 4×4 doit aller d'un point A situé sur une route à un point B en traversant unchamp



Sachant que sa vitesse sur la route est $\mathbf{40km/h}$ et que sa vitesse à travers le champ est $\mathbf{20km/h}$, déterminer la position du point H pour que temps mis pour aller de A à B soit minimal.

10. Un lac a la forme d'un trapèze **ABCD** de bases $[\mathbf{AD}]$ et $[\mathbf{BC}]$ et de hauteur $[\mathbf{AB}]$ dont les dimensions en kilomètre sont $\mathbf{AB} = \mathbf{BC} = 1$ et $\mathbf{AD} = 0{,}5.$ Une route longe $[\mathbf{BC}]$ et $[\mathbf{CD}]$, un véhicule amphibie part de A pour se rendre en C. Pour cela, il peut traverser une partie du lac et ensuite emprunter la route. Sa vitesse dans l'eau est 30km/h et sa vitesse sur la route est 50km/h.

1) Dans cette question, on suppose que le véhicule sort du lac en un point M du segment $[BC]$.On pose $x = BM$ et on note $f(x)$ la durée en minutes du trajet.

   a) Montrer que :

$$f(x) = 2\sqrt{1+x^2} + \frac{6}{5}(1-x)$$

   b) Dresser le tableau de variation de f sur $[0;1]$

2) On suppose que le véhicule sort du lac en un point N du segment $[CD]$.

On note l'abscisse du point N dans la repère orthonormal $(A;\overrightarrow{BC};\overrightarrow{AB})$ et $g(x)$ la durée en minutes du trajet.

   a. Démontrer que :

$$g(x) = 2\sqrt{5x^2 - 4x + 1} + \frac{6}{\sqrt{5}}(1-x).$$

   b. Dresser le tableau de variation de g sur $\left[\frac{1}{2};1\right]$

3) Déduire des questions précédentes le trajet dont la durée est minimale et préciser cette durée.

11. Soit f une fonction dérivable sur $[a ; b]$.

On suppose que $p \leq f'(x) \leq q$.

1. Montrer que la fonction ϕ définie par : $\phi(x) = f(x) - px$ est croissante.

2. En déduire que $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} - p \geq 0$.

3. Etablir l'*encadrement des accroissements finis* $p \leq \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq q$.

12. Soit f une fonction dérivable sur $[a ; b]$.

On suppose que $|f'(x)| \leq M$.

1. Etablir l'*inégalité des accroissements finis* $|f(b)-f(a)| \leq M(b-a)$.

2. Quelle est la distance maximale qu'un véhicule ne dépassant pas 130km/h peut parcourir en une heure ?

13. Soit f une fonction dérivable sur $[a ; b]$ dont la dérivée est elle-même continue.

1. Montrer que f' possède un minimum $f'(\alpha)$ et un maximum $f'(\beta)$.

Déduire d'un des résultats vus précédemment que $f'(\alpha) \leq \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq f'(\beta)$.

2. Montrer en appliquant le théorème des valeurs intermédiaires qu'il existe $c \in [a ; b]$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$ (*égalité des accroissements finis*).

3. Retrouver dans ce cas qu'une fonction dont la dérivée est strictement positive est strictement croissante.

Ce résultat est plus subtil à prouver dans le cas où f est simplement dérivable.

CHAPITRE 6

Fonctions ln et exp

Faire savoir

L'essentiel du chapitre

I. Fonction logarithme Népérien :

1. Notion de fonction logarithme Népérien :

Définition :

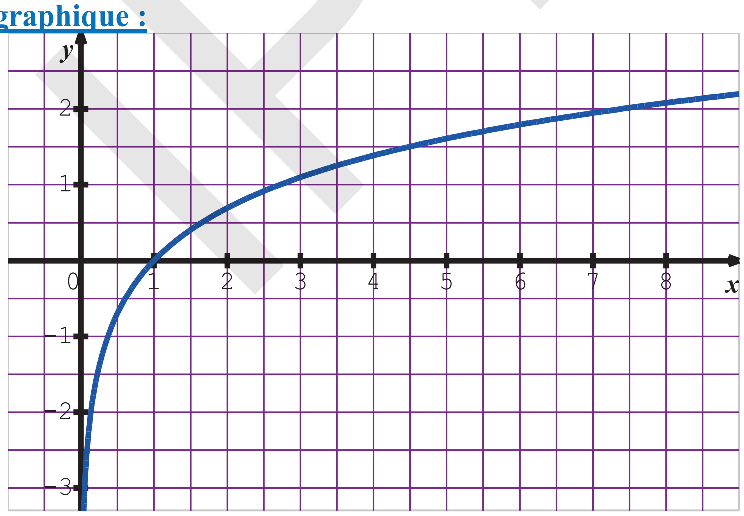
La fonction logartihme néperien notée **ln** est la fonction dérivable sur $]0\,;+\infty[$, dont la dérivée est : $x \mapsto \frac{1}{x}$ et vérifiant $\ln 1 = 0$.

2. Premières propriétés :

- le domaine de définition de **ln** est $]0\,;+\infty[$
- la fonction **ln** est strictement croissante sur $]0,+\infty[$
- le signe de $\ln x$ est immédiatement fourni par le sens de variation

x	0		1		$+\infty$
$\ln x$		$-$	0	$+$	

3. Représentation graphique :



4. Autres propriétés :

Théorème 1 :

Pour tous réels strictement positifs a et b et pour tout entier relatif **p** on a :

- $\ln ab = \ln a + \ln b$ et $\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln b$; $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$
- $\ln a^p = p \ln a$ et $\ln\sqrt{a} = \frac{1}{2}\ln a$; $\ln\sqrt[n]{a} = \frac{1}{n}\ln a$

Théorème 2 :

Pour tout réel m l'équation $\ln x = m$ a une solution unique dans] 0 ; + ∞ [. Ainsi la fonction $\ln$ est une bijection de] 0 ; + ∞ [dans $\mathbb{R}$.

Le nombre réel sulotion de l'équation $\ln x = 1$ est noté e et on a : $e = 2,718281828\ldots$

D'où $\ln e^p = p$ (**e** est appelé base du logarithme néperien).

5. Limites :

Théorème 3 :

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln x}{x-1} = 1$
- $\lim\limits_{x \to 0^+} x \ln x = 0$
- $\lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{\ln(1+h)}{h} = 1$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

6. Dérivée et Primitive :

Théorème 4 :

1) La fonction $\ln u$ est dérivable sur tout intervalle où u est dérivable et u(x) > 0, et on a :

$$\left[\ln u(x)\right]' = \frac{u'(x)}{u(x)}.$$

2) La fonction $\dfrac{u'}{u}$ admet come primitive

$$\begin{cases} \ln u & \text{où } u(x) > 0 \\ \ln(-u) & \text{où } u(x) < 0 \end{cases}$$

II. Fonction exponentielle :

1. Notion de fonction exponentielle :

Définition :

La fonction exponentielle est la bijection réciproque de la fonction logarithme, elle est notée exp(x) ou e^x. Ainsi, $\begin{cases} y = \exp(x) \\ x \text{ réel} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \ln y \\ y > 0 \end{cases}$

2. Premières propriétés :

- **exp** est définie sur $\mathbb{R}$ et $\exp > 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.
- $\exp(0) = 1$; $\exp(1) = e$; $\exp(-1) = \dfrac{1}{e}$.
- Pour tout réel x ; $\ln(\exp x) = x$ et pour tout réel $x > 0$ $\exp(\ln x) = x$

3. Autres propriétés :

Théorème 5 :

Pour tout réel **a** et **b** et pour tout entier **n** :

- $\exp(a + b) = \exp(a).\exp(b)$.
- $\exp(a - b) = \dfrac{\exp a}{\exp b}$ et $\exp(-b) = \dfrac{1}{\exp b}$
- $\exp(na) = [\exp(a)]^n$; $n \in \mathbb{Z}$ et $\exp(\dfrac{a}{n}) = \sqrt[n]{\exp(a)}$; $n \geq 1$

4. Limites :

Théorème 6 :

- $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$;
- $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$;
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} x e^x = 0$;
-

5. Dérivée :

exp est dérivable (donc continue) sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x : **exp'(x) = exp(x) =** e^x.
L'approximation affine au voisinage de **0** de la fonction exponentièlle est : $h \mapsto 1+h$.
Si **u** est une fonction dérivable sur un intervalle **I** , alors e^u est dérivable sur **I** et pour tout **x** de **I** :
$(e^u)'(x) = u'(x)e^{u(x)}$.

III. Puissance d'un nombre strictement positif :

Pour tout a> 0 et pour tout réel b on pose : $a^b = e^{b\ln a}$ (a^b se lit **a** puissance **b**).
Cette définition donne un sens à des expressions telle que : $3^{1,8}$; $51^{-\sqrt{2}}$; π^e ; 2^π.
Mais le logarithme exige dans a^b que : (**a> 0**).

1. Règle de calcul :

Pour tous réels **a** et **a'** strictement positifs et quels que soient **b** et **c** :

- $a^b \times a^c = a^{b+c}$; $a^{-b} = \dfrac{1}{a^b}$; $a^b \times a'^b = (a\,a')^b$; $(a^b)^c = a^{bc}$; $\ln\left(a^b\right) = b\ln a$

Définition :
Pour tout réel **a** strictement positif $x \mapsto a^x$, appelée fonction exponentielle de base **a** est la fonction $x \mapsto e^{x\ln a}$. Elle est définie et à valeurs positives sur $\mathbb{R}$, elle est dérivable sur $\mathbb{R}$, de fonction dérivée : $x \mapsto (\ln a)a^x$

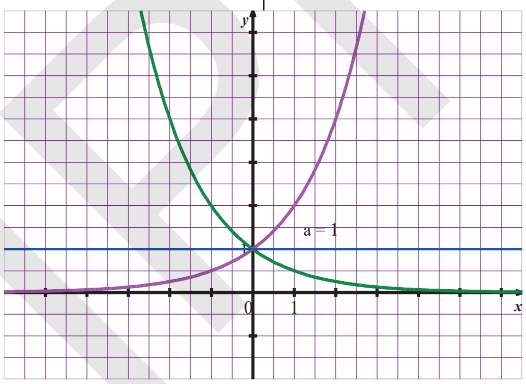
2. Tableaux de variations, courbes représentatives :

a > 1

x	$-\infty$	1	$+\infty$
a^x	0	↗	$+\infty$

0 < a <1

x	$-\infty$		$+\infty$
a^x	$+\infty$	↘	0



3. Croissance comparée des fonctions exponentielles, puissances entières et logarithme :

Pour tout entier naturel n ;

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^n} = 0$

Fonction logarithme de base a :

- On appelle fonction logarithme de base **a** $(a>0 \text{ et } a\neq 1)$ la fonction notée $\log_a$ et définie sur] 0 ; + ∞ [par : $\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$; $\log_a$ est dérivable sur] 0 ; + ∞ [et sa dérivée est $\left(\log_a x\right)' = \dfrac{1}{x\ln a}$
- Sur $]0,+\infty[$, la fonction $\log_a$ est strictement croissante si **a>1** (resp. décroissante $a \in]0;1[$)
- On appelle fonction logarithme décimal (**a=10**)la fonction notée log et définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $\log x = \dfrac{\ln x}{\ln 10}$.

Remarque : On peut procéder autrement : on définit la fonction exponentielle comme étant l'unique fonction **f** dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que: **f ' = f** et **f(0) = 1**, puis on définit la fonction logarithme népérien comme étant la bijection réciproque de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$.

Savoir-faire

A. Applications :

Exercice 1 :

a) Résoudre l'équation $\ln\left(x^2+x+1\right)=0$ et l'inéquation $\ln\left(x^2+x+1\right)<0$.

b) Simplifier $\ln a^2b^3$; $6\ln\frac{1}{\sqrt[3]{a^2b}}$; $\frac{\ln(\sqrt{5}+1)+\ln(\sqrt{5}-1)}{2}$.

c) Résoudre : • $\ln\left(x-2\right)\left(x-1\right)=\ln 2$ • $\ln\left(x-2\right)+\ln\left(x-1\right)=\ln 2$.

Solution :

a) Résolution demandée

- $\ln\left(x^2+x+1\right)=0 \Leftrightarrow x^2+x+1=1 \Rightarrow x(x+1)=0$; $S=\{0\ ;\ -1\}$.
- $\ln\left(x^2+x+1\right)<0 \Rightarrow x^2+x+1<1 \Rightarrow x(x+1<0$; $S =]0 ; 1[$.

b) Simplification cherchée

- $\ln(a^2b^3)=\ln a^2+\ln b^3=2\ln a+3\ln b$ • $6\ln(\frac{1}{\sqrt[3]{a^2b^3}})=-6\ln(\sqrt[3]{a^2b^3})=-2\ln(a^2b^3)=-4\ln a-6\ln b$
- $\frac{\ln(\sqrt{5}+1)+\ln(\sqrt{5}-1)}{2}=\frac{1}{2}\ln\left((\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)\right)=\frac{1}{2}\ln 4=\ln 2$.

c) Résolution demandée

- $\ln\left(x-2\right)\left(x-1\right)=\ln 2$; l'ensemble de définition $E =]-\infty\ ;\ 1[\cup]2\ ;\ +\infty[$ Ainsi, $x\in E$;

  et

  $(x-2)(x-1) = 2 \Leftrightarrow x\in E$ et $x = 0$ et $x = 3$. L'équation (1) à pour solution **0** et **3**.
- $\ln\left(x-2\right)+\ln\left(x-1\right)=\ln 2$; l'équation (2) n'admet que $x = 3$ pour solution (elle n'est définie que pour $x> 2$).

Exercice 2 :

a) Simplifier les écritures :

- $a=\ln(\sqrt{e})$ • $e^{-\ln 3}=b$ • $c=e^{\ln 2-\ln 5}$ • $d=\ln\sqrt{e^3}$ • $f=\sqrt[3]{e^4}\times(\sqrt[3]{e})^2$ • $f=\frac{e^3\sqrt{e}}{e^{1,2}\sqrt[3]{e}}$

b) Résoudre les équations.

- $\left(e^x-1\right)\left(e^x-2\right)=0$; • $e^{-x^2-12x-35}=1$; • $e^{2x}+e^x-42=0$.

Solution :

a) Simplification cherchée

- $a=\ln(\sqrt{e})=\frac{1}{2}\ln e=\frac{1}{2}$; • $b=e^{\ln\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}$; • $c=e^{\ln 2-\ln 5}=\frac{e^{\ln 2}}{e^{\ln 5}}=\frac{2}{5}$;
- $d=\ln\sqrt{e^3}=\ln e^{\frac{3}{2}}=\frac{3}{2}$ • $f=\sqrt[3]{e^4}\times(\sqrt[3]{e})^2=\sqrt[3]{e^4}\times\sqrt[3]{e}\times\sqrt[3]{e}=\sqrt[3]{e^4\times e\times e}=\sqrt[3]{e^6}=e^2$;
- $g=\frac{e^2\sqrt{e}}{e^{1,2}\sqrt[3]{e}}=\frac{e^2e^{\frac{1}{2}}}{e^{1,2}e^{\frac{1}{3}}}=\frac{e^{\frac{5}{2}}}{e^{\frac{23}{15}}}=e^{\frac{5}{2}-\frac{23}{15}}=e^{\frac{29}{30}}$.

b) Résolution demandée

- $\left(e^x-1\right)\left(e^x-2\right)=0 \Rightarrow e^x=1$ ou $e^x=2 \Rightarrow x=0$ ou $x=\ln 2$.
- $e^{-x^2-12x-35}=1 \Rightarrow -x^2-12x-35=0 \Rightarrow x^2+12x+35=0 \Rightarrow x=-7$ ou $x=-5$.
- $e^{2x}+e^x-42=0$; Posons $t=e^x \Rightarrow t^2+t-42=0 \Rightarrow t=6 \Rightarrow x=\ln 6$; ou $t=-7$ (rejetée car $t>0$)

Exercice 3 :

Déterminer le domaine de chacune des fonctions suivantes puis calculer leurs dérivées

1) $f(x)=\ln(x^2-1)$; 2) $f(x)=\ln(\cos x)$; 3) $f(x)=e^{x^2+2x+1}$; 4) $f(x)=e^{\sin x}$.

Solution :

1) f est définie sur $]-\infty\,;-1[\,\cup\,]1\,;+\infty[$ et

$$f'(x)=\frac{2x}{x^2-1}\ ;$$

2) f est définie sur $\mathbb{R}\backslash\left\{k\frac{\pi}{2};k\in\mathbb{Z}^*\right\}$ et

$$f'(x)=\frac{-\sin x}{\cos x}=-\tan x$$

3) f est définie sur $\mathbb{R}$ et $f'(x)=(2x+2)e^{x^2+2x+1}$.

4) f est définie sur $\mathbb{R}$ et $f'(x)=(\cos x)e^{\sin x}$.

Exercice 4 :

Chercher les primitives des fonctions **f** sur **I** :

1) $f(x)=\tan x$ $\left(x\in\left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[\right)$; 2) $f(x)=\frac{1}{1+e^x}$ $(x\in\mathbb{R})$; 3) $f(x)=f(x)=\frac{1}{3^x}$ $(x\in\mathbb{R})$.

Solution :

1) $f(x)=\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{-(\cos x)'}{\cos x}\Rightarrow F(x)=-\ln\cos x+c$

2) $f(x)=\frac{1}{1+e^x}$; $1-f(x)=\frac{e^x}{1+e^x}\Rightarrow F(x)=x-\ln(1+e^x)+c$

3)) $f(x)=\frac{1}{3^x}=\left(\frac{1}{3}\right)^x=e^{x\ln\frac{1}{3}}=e^{(-\ln 3)x}\ \Rightarrow\ F(x)=\frac{-1}{\ln 3}e^{(-\ln 3)x}+c=\frac{-1}{\ln 3}\times\frac{1}{3^x}+c$

Exercice 5 :

Etudier et représenter graphiquement les fonctions :

1) $f(x)=x-1+\ln\left(\frac{x-2}{x+2}\right)$; 2) $f(x)=(x+1)^2e^{-x}$

Solution :

1) $f(x)=x-1+\ln\left(\frac{x-2}{x+2}\right)$

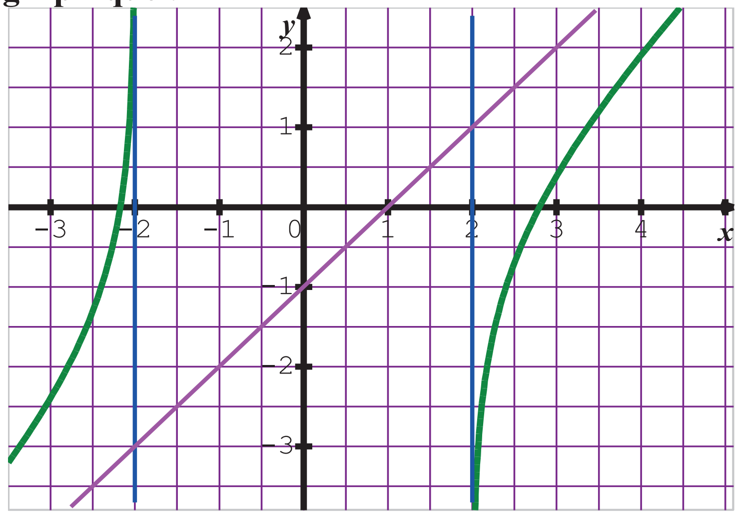
- $D_f=\,]-\infty;-2[\,\cup\,]2\,;+\infty[$ • $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ • $\lim\limits_{x\to(-2)^-}f(x)=+\infty$ • $\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=-\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

$f'(x)=1+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}=\frac{x^2}{x^2-4}$, **f(x)' > 0** et donc **f(x)** est croissante sur D_f.

- **x = -2 ; x = 2** sont des asymptotes verticales. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x-2}{x+2}\right)=0\Rightarrow y=x-1$ est une asymptote oblique à $\mathscr{C}$ en $+\infty$. De plus : sur l'intervalle **]2 ; + ∞ [** ; $\frac{x-2}{x+2}<1\Rightarrow$ $\ln\left(\frac{x-2}{x+2}\right)<0$; il en découle que $\mathscr{C}_f$ est au dessous de Δ.
- **Tableau de variation :**

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f(x)'$		$+$				$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$		$-\infty$	↗	$+\infty$

- **Représentation graphique :**

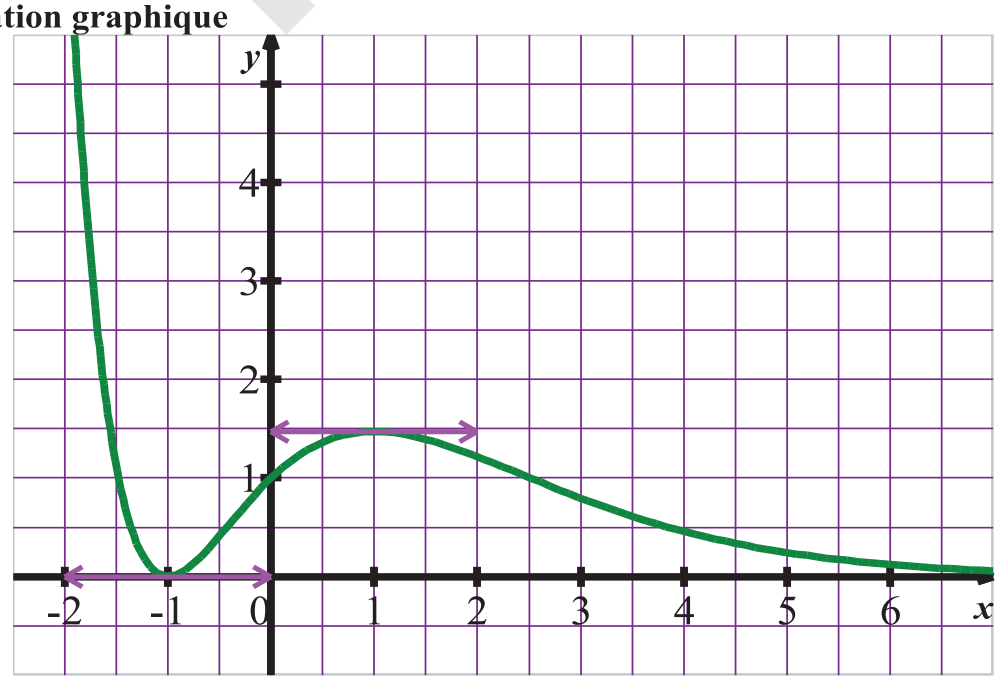


2) $\mathbf{f(x)=(x+1)^2e^{-x}}$

- $D_f = \mathbb{R}$ • $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ • $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$
- $\mathbf{f'(x)=2(x+1)\,e^{-x}-(x+1)^2\,e^{-x} \Rightarrow f'(x)=(1-x^2)e^{-x}}$
- $\mathbf{f'(x)}$ est du signe de $\mathbf{(1-x^2)}$.
- **Tableau de variation**

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f(x)'$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{4}{e}$	$\searrow$	0

- $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$; $\mathscr{C}_f$ admet une branche parabolique de direction (Oy).
- **Représentation graphique**



B. Exercices divers :

1 Le but de l'exercice est d'obtenir l'encadrement polynomial suivant de la fonction exponentielle :

Pour tout $x \leq 0$; $1+x \leq e^x \leq 1+x+\frac{x^2}{2}$.

On note f la fonction : $x \mapsto 1+x+\frac{x^2}{2} - e^x$.

1) Déterminer f' et f''. Quelle remarque peut-on faire sur les valeurs prises en 0 par f ; f' et f'' ?

2) Compléter le tableau suivant :

x	$-\infty$ 0
Signe de f''	
Sens de f'	
Signe de f'	
Sens de f	
Signe de f	

En déduire le résultat souhaité

3) Quel encadrement de $e^{-0,01}$ obtient-t-on ?

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1) $3^{2x} = 2^{3x}$; 2) $3^{2x} - 3^{x+1} + 2 = 0$

3. Dresser le tableau de variation et tracer l'allure de la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f :

1) $f(x) = 2{,}3^x$; 2) $f(x) = \frac{1}{2^x}$; 3) $f(x) = \frac{1}{3}e^{x\ln 3}$

4. m étant un nombre réel, on note f_m la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$f_m(x) = \frac{x^2-1}{2} - m\ln x$ et $\mathscr{C}_m$ sa courbe.

1.a) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f_m(x)$

b) Suivant les valeurs de **m** déterminer $\lim\limits_{x\to 0} f_m(x)$.

2.) Déterminer $f'_m(x)$; Donner suivant les valeurs de m les différents tableaux de variations.

3.) Démontrer que toutes les courbes $\mathscr{C}_m$ passent par un point A.

4.) Tracer $\mathscr{C}_0$; $\mathscr{C}_4$ et $\mathscr{C}_1$ sur un même graphique.

5. Soit la fonction : $f(x) = \frac{-x^2\ln x}{1+x}$;

$0 < x \leq 1$ et $f(0) = 0$.

A) Etude d'une fonction auxiliaire : Soit $u(x) = \frac{1+x}{2+x} + \ln x$; pour $0 < x \leq 1$.

1) Etudier les variations de $U(x)$ et donner $U(1)$ et $\lim\limits_{x\to 0} U(x)$.

En déduire que $U(x) = 0$ admet une solution β telle que $0{,}54 \leq \beta \leq 0{,}55$

B) Etude de la fonction f et sa représentation

1) Montrer que f est continue en 0 ; Est-elle dérivable en 0 ?

2) Dresser le tableau de variation de f.

3) Construire la représentation graphique de f dans un repère orthonormal avec les tangentes aux points 0 et 1 (unité 10 cm sur (Ox) et 20cm sur (Oy)).

6. Soit f la fonction définie sur $[2\ +\infty[$ par :

$f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2-4})$; on désigne par C_f sa courbe dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$

1.a-Montrer que f est dérivable sur $]2,+\infty[$

b-Etudier la dérivabilité de f à droite de 2 interpréter graphiquement

c-Dresser le tableau de variation de

2.a- Etudier la position relative de C_f et la droite D : y =x

b- Construire C_f

3. a- Montrer que f réalise une bijection de $]2,+\infty[$ sur un intervalle J à préciser

b- Construire dans le même repère la courbe C' de f^{-1} la réciproque de f.

7. Soit f la fonction numérique définie par :

$f(x) = e^{\frac{1}{x}}\sqrt{x(x+2)}$.

a) Montrer que si $x > 0$, alors $f(x) > 0$.

b) Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$\begin{cases} u_0 > 0 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

Montrer que la suite (u_n) est croissante ; (u_n) est-elle majorée ?

8. 1.) On considère les fonctions définies sur $]0\,;1[$ par :

$f(x) = e^x - (x+1)$ et $g(x) = (1-x)e^x - 1$

a. Etudier les variations des fonctions f et g.

b. En déduire que :

$\forall x \in]0\,;1[\,; 1+x \prec e^x \prec \frac{1}{1-x}$.

c. Montrer que :

$$\forall x \succ 1\ ;\ \ln\left(\frac{1+x}{x}\right) \prec \frac{1}{x} \prec \ln\left(\frac{x}{x-1}\right).$$

2.) On considère la suite définie (u_n) donnée par : $u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{np}$; où $p \in \mathbb{N}^*$.

a. Montrer que (u_n) est une suite convergente.

b. Calculer la limite de la suite (u_n).

9. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{|x-1|}\, e^{\frac{1}{x}}\ ; & si\ x \neq 0 \\ 0\ ;\ si\ x = 0 \end{cases}$$ et C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$.

1. a. Etudier la continuité de f en 0 et en 1.

b. Etudier la dérivabilité f en 1.

c. Montrer que f est dérivable à gauche de 0.

2. a. Pour tout x non nul et différent de 1, calculer $\ln(f(x))$ et en déduire $\frac{f'(x)}{f(x)}$

b. Etudier le sens de variation de f.

3. Etudier la limite de $f(x)$ puis celle de $\frac{f(x)}{x}$ en $-\infty$ et $+\infty$. Interpréter les résultats

4. Dresser le tableau de variation de f puis la représenter graphiquement

10. Etude d' une famille de fonctions

PARTIE A :

1. Étudier le sens de variation de la fonction h_1 définie sur l'intervalle $]0\ ;+\infty[$ par :

$h_1(x) = x - \ln x$.

Montrer que pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0\ ;+\infty[$ on a : $h_1(x) > 0$

2. On définit sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ la fonction f_1 par : $f_1(x) = \frac{x}{x-\ln x}$.

a) Étudier le sens de variation de la fonction f_1.

b) Étudier les limites de f_1 aux bornes de l'intervalle $]0\ ;+\infty[$ et dresser le tableau des variations de f_1.

3. On considère la fonction φ_1 définie sur l'intervalle $[0\ ;+\infty[$ par :

$$\begin{cases} \varphi_1(0) = 0,\ si\ x = 0 \\ \varphi_1(x) = f_1(x),\ \ si\ x \neq 0 \end{cases}$$

a) Montrer que φ_1 prolonge de f_1 par continuité en 0.

b) Étudier la dérivabilité de φ_1 en 0.

En donner une interprétation graphique.

c) Tracer la représentation graphique C_1 de φ_1 dans un repère orthonormé (unité : 4 cm).

PARTIE B :

Dans cette partie, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1. Étudier le sens de variation de la fonction h_n définie sur l'intervalle $]0\ ;+\infty[$ par :

$h_n(x) = x^n - \ln x$.

En déduire que pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0\ ;+\infty[$ on a : $h_n(x > 0)$.

2. On définit sur l'intervalle $]0\ ;+\infty[$ la fonction f_n par : $f_n(x) = \frac{x}{x^n - \ln x}$.

a) On définit sur l'intervalle $]0\ ;+\infty[$ la fonction g_n par : $g_n(x) = 1 + (1-n)x^n - \ln x$.

i) Montrer g_n est strictement décroissante sur l'intervalle $]0\ ;+\infty[$.

ii) Montrer l'existence d'un unique réel a_n de $]0\ ;+\infty[$ tel que $g_n\ (a_n) = 0$.

iii) Comparer les nombres a_n et 1.

Quelle est la valeur de a_2 ?

b) Démontrer que pour tout x de l'intervalle $]0\ ;+\infty[$ on a : $f_n'(x) = \frac{x g_n(x)}{(x^n - \ln x)^2}$.

c) En déduire le sens de variation de f_n.

d) Étudier les limites de f_n aux bornes de $]0;+\infty[$ et dresser le tableau des variations de f_n. **(On ne cherchera pas à calculer la valeur de l'extremum).**

e) Préciser la valeur de $f_2(a_2)$, puis tracer la représentation graphique C_2 de φ_2 dans un repère orthonormé (unité : 4 cm).

CHAPITRE 7

Calcul intégral

Faire savoir

L'essentiel du chapitre

I. Primitives :

1. Notion de primitive :

Définition :

Soit une fonction f continue sur un intervalle I. On appelle primitive de f sur I, toute fonction F dérivable sur I, telle que pour tout x de I : $F'(x) = f(x)$.

2. Propriétés des primitives :

Théorème 1 :

Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.

Théorème 2 :

Si une fonction f admet une primitive F sur un intervalle I, alors toute fonction $\mathbf{G} : x \mapsto \boldsymbol{F}(\mathbf{x})+\mathbf{k}$, où k est un réel, est une primitive de f sur I toutes les primitives de f sur I sont de cette forme.

Théorème 3 :

Si la fonction f admet des primitives sur I, il existe une seule primitive **G** vérifiant $\mathbf{G(x_0) = y_0}$, $\mathbf{x_0}$ appartient à I et $\mathbf{y_0}$ étant un réel donné.

Exemple 1 :

Soit la fonction $f : x \mapsto (2x-1)(x^2-x+1)^4$.

Déterminer la primitive F de f qui vérifie $F(1) = 2$. La fonction f est une fonction polynôme définie et continue sur $\mathbb{R}$. En posant $U(x) = x^2-x+1$, f s'écrit $U' \times U^4$, donc F est de la forme $\frac{1}{5}U^5 + k$ d'où

$F(x) = \frac{1}{5}(x^2-x+1)^5 + k$. $F(1) = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{5}(1-1+1)^5 + k = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{5} + k = 2 \Leftrightarrow k = 2 - \frac{1}{5} = \frac{9}{5}$,

Donc $F(x) = \frac{1}{5}(x^2-x+1)^5 + \frac{9}{5}$.

3. Primitives des fonctions usuelles :

Fonction	Primitive	Domaine de définition des primitives
$x \mapsto a$ ($a \in \mathbb{R}$)	$x \mapsto ax + k$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^n$ ($n \in \mathbb{N}$)	$x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1} + k$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{1}{x^n}$ $(n \in \mathbb{N}^*; n \neq 1)$	$x \mapsto \frac{-1}{(n-1)x^{n-1}} + k$	$\mathbb{R}^*$
$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$	$x \mapsto 2\sqrt{x} + k$	$\mathbb{R}_+^*$
$x \mapsto \cos x$	$x \mapsto \sin x + k$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \sin x$	$x \mapsto -\cos x + k$	$\mathbb{R}$

$x \mapsto \frac{1}{x}$	$x \mapsto$ Lnx+k	$]0\,;+\infty[$
$x \mapsto 1+\tan^2 x$	$x \mapsto$ tanx+k	$\mathbb{R}/\left\{\frac{\pi}{2}+2k\pi;\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

4. Primitives des fonctions composées :

f est une fonction continue sur I

Si *f* est de la forme	Alors *F* est de la forme	Si *f* est de la forme	Alors *F* est de la forme
$U'U^n$ ($n \in \mathbb{N}$)	$\frac{1}{n+1}U^{n+1}+k$	$U'(x)\left(1+\tan^2 U(x)\right)$	$\tan U(x)+k$
$\frac{U'}{U^n}(n\in\mathbb{N}^*;n\neq 1)$	$-\frac{1}{(n-1)U^{n-1}}+k$	$\frac{U'(x)}{U(x)}$	$\ln U(x)+k$
$\frac{U'}{\sqrt{U}}$	$2\sqrt{U}+k$	$U'(x)\ e^{U(x)}$	$e^{U(x)}+k$
U'cosU	sinU +k	$U'(x)\ \ln U(x)\ ;U(x)\geq 0$	$U(x)\ln U(x)-U(x)+k$
U'sinU	$-$cosU + k		

II. Notion d'intégrale :

Définition :

a et **b** sont deux réels d'un intervalle **I** et **f** une fonction continue sur **I.**

L'intégrale de **a** à **b** de la fonction **f** est le réel $F(b)-F(a)$, où **F** est une primitive quelconque de **f** sur **I.**

Notation :

L'intégrale de a à b de la fonction **f** se note $\int_a^b f(t)dt$ et se lit : ''somme de **a** à **b** de **f(t)dt** ''

Dans cette écriture, la lettre t est une variable muette qui peut être remplacée par n'importe quelle autre lettre, hormis a, b et *f*, déjà choisies pour désigner des objets précis.

On peut écrire : $\int_a^b f(t)dt=\int_a^b f(u)du=\int_a^b f(x)dx=...$

On écrit souvent le réel **F(b)–F(a)** sous la forme condensée : $[F(t)]_a^b$, et on écrit : $\int_a^b f(t)dt=[F(t)]_a^b$

Exemple 2 : $\int_0^{\pi}\sin(t)dt=[-\cos(t)]_0^{\pi}=-\cos\pi\ +\ \cos 0=1+1=2$.

III. Intégrale et primitive :

Théorème 4 :

F est une fonction continue sur un intervalle **I**.

La primitive de *f* qui s'annule en un point **a** de **I** est la fonction **G** définie sur **I** par :

$G(x)=\int_a^x f(t)dt$.

Exemple 3 :

La fonction ln est sur]0 ; +∞ [la primitive, nulle en **1**, de la fonction $t\mapsto\frac{1}{t}$, donc pour tout réel

$x>0\ ;\ \ln x=\int_1^x\frac{dt}{t}$.

A retenir

La dérivée sur I de la fonction $G:\ x\mapsto\int_a^x f(t)dt$ est la fonction $g:\ x\mapsto f(x)$; donc **G'(x) = f(x).**

Théorème 5 :

f est une fonction continue sur un intervalle **J.** ***u et v deux fonctions dérivables sur I telles que*** $f(I)=J$. La fonction F définie par : $F(x)=\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt$ et sa dérivée est $F'(x)=v'(x)\,f(v(x))-u'(x)\,f(u(x))$

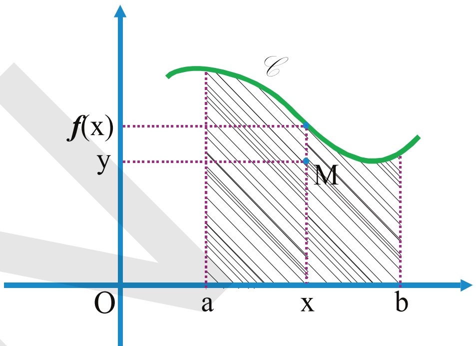
Exemple 4 :

Soit la fonction F définie sur $[-1\,;1]$, par $F(x)=\int_{\cos(x)}^{\sin(x)}\sqrt{1-t^2}dt.$ Les conditions du théorème 2 sont vérifiées et donc : $F'(x)=(\sin x)'\sqrt{1-(\sin x)^2}-(\cos x)'\sqrt{1-(\cos x)^2}=(\cos x)^2+(\sin x)^2=1.$

IV. Aires et Intégrales :

Théorème 6 :

f est une fonction continue et positive sur l'intervalle [a ; b], C est la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$. Alors, l'aire du domaine limité par C , l'axe des abscisses et les droites d'équations : $x=a$ et $x=b$ est $\int_a^b f(t)dt$



Remarque 1 :

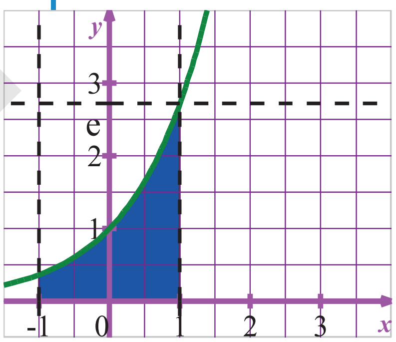
Le domaine D peut aussi être décrit comme :

l'ensemble des points **M(x ; y)** avec $\begin{cases} a\le x\le b \\ 0\le y\le f(x)\end{cases}$

Exemple 5 :

$f(x)=e^x$, C_f est la représentation graphique de f dans un repère orthogonal.

Calculer l'aire A du domaine limité par C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équations : $x=-1$ et $x=1$.



$A=\int_{-1}^{1} f(t)dt=\int_{-1}^{1}e^x dx=\left[e^x\right]_{-1}^{1}=e-\frac{1}{e}\simeq$ 2,35 unités d'aires.

V. Propriétés de l'intégrale :

1. Linéarité :

Théorème 7 :

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I. a et b deux réels de I, et α et β deux réels quelconques, alors ; $\int_a^b(\alpha f+\beta g)(t)dt=\alpha\int_a^b f(t)dt+\beta\int_a^b g(t)dt$.

Exemple 6 :

$$\int_0^{\pi}(2\sin t-3t)dt=2\int_0^{\pi}\sin t\,dt-3\int_0^{\pi}t\,dt=2\left[-\cos t\right]_0^{\pi}-3\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{\pi}=4-3\frac{\pi^2}{2}$$

2. Relation de Chasles :

Théorème 8 :

f est une fonction continue sur un intervalle I. Pour tous réels **a ; b ; c** de **I**, on a :

$\int_a^c f(t)dt=\int_a^b f(t)dt+\int_b^c f(t)dt$.

En posant $a=b=c$ dans le théorème précédent on obtient : $\int_a^a f(t)dt=0$.

En utilisant ce théorème avec : $a=c$, on obtient : $\int_a^b f(t)dt=-\int_b^a f(t)dt$.

3. Comparaison d'intégrales :

Théorème 9 :

f est une fonction continue sur un intervalle **I**. **a** et **b** sont deux réels de **I** avec $\mathbf{a \le b}$:

Si f est positive sur I, alors $\int_a^b f(t)dt \ge 0$.

Remarque 2 :

Si f est négative sur I, alors $\int_a^b f(t)dt \le 0$.

Conséquences :

Si f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle I, si a et b sont deux réels de I, avec $a \le b$ et

Si $f \le g$ sur I alors, $\int_a^b f(t)dt \le \int_a^b g(t)dt$

4. Intégrales et valeur absolue :

Théorème 10 :

Si f est une fonction continue sur un intervalle [a ; b] On a : $\left|\int_a^b f(t)dt\right| \le \int_a^b |f(t)|dt$

5. Inégalité de la moyenne :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. a et b appartiennent à I (a < b).

Si, sur l'intervalle [a ; b], on a : $m \le f \le M$, alors : $m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M$.

6. Valeur moyenne :

Définition :

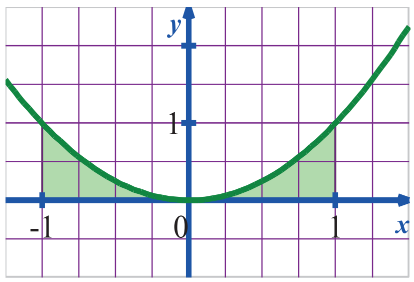
f est une fonction continue sur l'intervalle [a ; b], avec a < b.

la valeur moyenne de f sur [a ; b] est le réel $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$.

VI. Propriétés des intégrales de fonctions paires, impaires, périodiques :

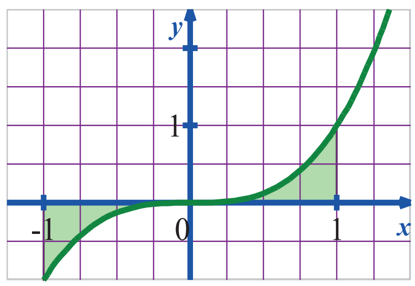
1) Si f est une fonction continue et paire sur un intervalle I de centre zéro, alors, pour tout a de I :

$\int_{-a}^{a} f(t)dt = 2\int_0^a f(t)dt$.



Exemple 7 :

$$\int_{-1}^{1} t^2dt = 2\int_0^1 t^2dt = 2\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$$



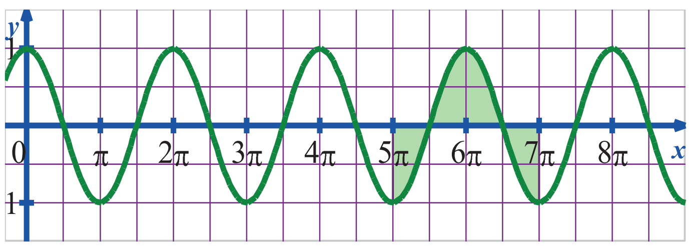
2) Si f est une fonction continue et impaire surun intervalle I de centre zéro, alors, pour tout a de I : $\int_{-a}^{a} f(t)dt = 0$

Exemple 8 :

$\int_{-1}^{1} t^3dt = 0 \quad ; \int_{-\pi}^{\pi} \sin tdt = 0$

3) Si f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et de période T, alors, pour tout réel a :

$\int_a^{a+T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt$



Exemple 9 :

$\int_{5\pi}^{7\pi} \cos tdt = \int_0^{2\pi} \cos tdt = [\sin t]_0^{2\pi} = 0$.

VII. Calculs d'intégrales :

1. Utilisation de primitives :

La connaissance d'une primitive **F** de la fonction **f** sur [a ; b] permet le calcul de $\int_a^b f(t)dt$;

$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$ (D'après la définition de l'intégrale).

Exemple 10 :

Calculons l'intégrale : $J = \int_0^2 (x\sqrt{x^2+3})\,dt$.

On remarque que la fonction h définie par : $h(x) = x\sqrt{x^2+3}$, peut s'écrire : $h = \frac{1}{2} f^{\frac{1}{2}} f'$, une primitive de $f^{\frac{1}{2}} f'$ est $\frac{2}{3} f^{\frac{3}{2}}$; donc une primitive H de h sur $\mathbb{R}$ est

$H(x) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3}(x^2+3)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}(x^2+3)^{\frac{3}{2}}$; D'où : $J = H(2) - H(0) = \frac{7}{3}\sqrt{7} - \sqrt{3}$.

2. Changement de variable :

λ et μ sont deux nombres réels, $\lambda \neq 0$.

Soit **f** une fonction continue sur I. **a** et **b** deux réels tels que : $\lambda a + \mu \in I$ et $\lambda b + \mu \in I$,

calculons $\int_a^b f(\lambda x + \mu)dx$, connaissant une primitive **F** de **f** .

Puisque f a pour primitive F, alors $x \mapsto F(\lambda x + \mu)$ a pour dérivée $x \mapsto \lambda f(\lambda x + \mu)$.

Donc, $x \mapsto f(\lambda x + \mu)$ a pour primitive $x \mapsto \frac{1}{\lambda} F(\lambda x + \mu)$, ce qui donne le résultat cherché :

$$\int_a^b f(\lambda x + \mu)dx = \frac{1}{\lambda}\left[F(\lambda x + \mu)\right]_a^b = \frac{1}{\lambda}\left[F(\lambda b + \mu) - F(\lambda a + \mu)\right].$$

Exemple 11 :

calculer $\int_1^2 \frac{1}{(2x+1)^2} dx$. ; La fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est continue sur $]0,+\infty[$; $2x+1 \in]0,+\infty[$, pour $x \in]0,+\infty[$ .Puisque $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ a pour primitive $x \mapsto \frac{-1}{x}$,alors $x \mapsto \frac{-1}{2x+1}$ a pour dérivée :

$x \mapsto 2 \times \frac{1}{(2x+1)^2}$ et $x \mapsto \frac{1}{(2x+1)^2}$ a pour primitive $x \mapsto \frac{-1}{2} \times \frac{1}{2x+1}$; donc :

$$\int_1^2 \frac{1}{(2x+1)^2} dx = \left[\frac{-1}{2} \times \frac{1}{2x+1}\right]_1^2 = \frac{-1}{10} + \frac{1}{6} = \frac{1}{15}.$$

3. Intégration par parties :

Théorème 11 :

Si f et g sont deux fonctions dérivables sur l'intervalle I, si les fonctions dérivées f' et g' sont continues sur I, alors, pour tous réels a et b de I, on a :

$$\int_a^b f(t)g'(t)dt = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)dt$$

Exemple 12 :

Calculer : $\mathbf{I} = \int_0^\pi x\sin x dx$ et $\mathbf{J} = \int_1^2 x\ln x dx$.

Calcul de I = $\int_0^\pi x\sin x dx$ Posons : $f(x) = x$ et $g'(x) = \sin x$. Donc ; $f'(x) = 1$ et $g(x) = -\cos x$. D'où :

$$\mathbf{I} = \int_0^\pi x\sin x dx = [-x\cos x]_0^\pi - \int_0^\pi (-\cos x)dx = [-x\cos x]_0^\pi + [\sin x]_0^\pi = \pi$$

Calcul de $\mathbf{J} = \int_1^2 x\ln x dx$: Posons : $f(x) = \ln x$ et $g'(x) = x$. Donc $f'(x) = \frac{1}{x}$ et $g(x) = \frac{x^2}{2}$

D'où $\mathbf{J} = \int_1^2 x\ln x dx = \left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x}{2}dx$

$$= \left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^2 - \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^2 = 2\ln 2 - \frac{3}{4}$$

VIII. Calcul d'aires et de volumes :

1. Calcul d'aires :

Soient f et g deux fonctions continues sur [a ; b], telles que : pour tout x de [a ; b], $f(x) \le g(x)$. dans un repère orthonormé, l'aire de la surface limitée par les représentations graphiques de f et g et les deux droites d'équations respectives x = a et x = b est A = $\int_a^b [g(x) - f(x)]dx$.

Exemple 13 :

Soient f et g deux fonctions définies par :

$f(x) = x^2 - 2x + 2$; $g(x) = -x^2 + 6$.

Calculons l'aire A de la surface limitée par les deux courbes

C_f et C_g (courbes respectives de f et g dans un repère orthonormé).

Nous avons : $f'(x) = 2x - 2$; $g'(x) = -2x$

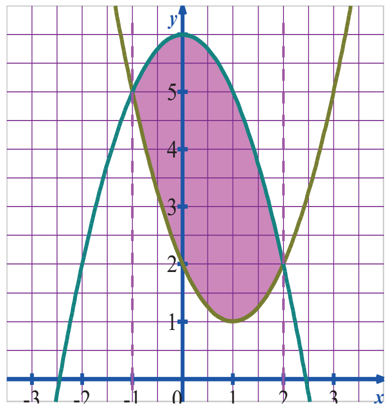


Tableau de variation de f

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

Tableau de variation de g

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	-	
$g(x)$	$-\infty$	↗	6	↘	$-\infty$

En plus, les abscisses des points d'intersections vérifient l'équation : $x^2-2x+2=-x^2+6$, soit

$2x^2-2x-4=0$, d'où $x^2-x-2=0$, on en déduit les coordonnées des points

d'intersections $A(-1;5)$ et $B(2\,;2)$ Sur l'intervalle [-1 ; 2] $f(x)\leq g(x)$; donc :

$$A=\int_{-1}^{2}[g(x)-f(x)]dx=\int_{-1}^{2}(-x^2+6-x^2+2x-2)dx=\int_{-1}^{2}(-2x^2+2x+4)dx\,;$$

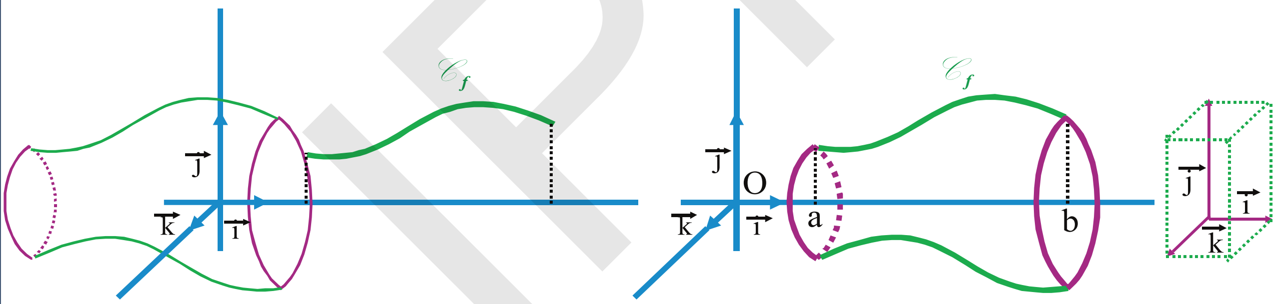
$$A=\left[\frac{-2}{3}x^3+x^2+4x\right]_{-1}^{2}=\left[\frac{-16}{3}+4+8\right]-\left[\frac{2}{3}+1-4\right]=9(\text{unités d'aires})$$

2. Calcul de volumes :

L'espace est rapporté à un repère orthogonal $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$.

Soient f une fonction dérivable sur un intervalle I, et a , b des réels de I tels que $a\leq b$.

Le solide de révolution engendré par la rotation de C_f autour de l'axe des abscisses, et limité par les plans d'équation x = a ; x = b, a pour volume : $\int_a^b \pi\left(f(t)\right)^2dt$ **unité de volume**.



L'unité de volume est celle du pavé droit d'arêtes [O ; A] ; [O ; B] et [O ; C].

Exemple 14 :

Soit C la courbe représentative de la fonction $x\mapsto e^x$. Par rotation autour de l'axe $(O\,;\vec{i})$, le domaine plan limité par, la droite $(O\,;\vec{i})$ et les droites d'équations x = -1 et x = 1 engendre un solide de révolution, noté S .

Calculons le volume de S. La fonction $x\mapsto e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et en particulier sur [-1 ; 1].

Le volume de S est :

$$\int_{-1}^{1}\pi(e^x)^2dx=\int_{-1}^{1}\pi e^{2x}dx=\pi\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_{-1}^{1}=\frac{\pi}{2}(e^2-\frac{1}{e^2})\simeq 11{,}394\ \text{UV}$$

Savoir-faire

A. Applications :

Exercice 1 :

Déterminer la primitive F de la fonction f : $x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ vérifiant $F(1) = 1$.

Solution :

f est définie et continue sur $\mathbb{R}$, elle admet donc des primitives sur $\mathbb{R}$.

f s'écrit sous la forme : $\dfrac{1}{2}\dfrac{U'}{\sqrt{U}}$ (en posant $U(x) = x^2 + 1$), les primitives de f sont sous la forme : $\sqrt{U}+k$. Donc $F(x) = \sqrt{x^2+1}+k$.

$F(1) = 1 \Leftrightarrow \sqrt{2}+k = 1 \Leftrightarrow k = 1 - \sqrt{2}$, d'où $F(x) = \sqrt{x^2+1}+1-\sqrt{2}$.

Exercice 2 :

Calculer les intégrales A ; B ; C et D proposées :

$$A=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\cos x dx \quad ; \quad B = \int_0^1 \frac{4x^3+8x}{(x^4+4x^2+2)}dx$$

$$C=\int_1^2 \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}dx \quad ; \quad D = \int_1^e \frac{\ln x}{x}dx$$

Solution :

- La fonction f définie par $f(x) = \sin^2 x \cos x$ peut s'écrire $f(x) = U'U^2$ / $U(x) = \sin x$.

  Donc f a pour primitive $F = \dfrac{U^3}{3}$, d'où $A = \left[\dfrac{\sin^3 x}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \dfrac{1}{3}$.

- La fonction f définie par $f(x) = \dfrac{4x^3+8x}{(x^4+4x^2+2)^3}$ peut s'écrire $f(x) = \dfrac{U'(x)}{U^3(x)}$; avec $U(x) = x^4 + 4x^2 +2$.

  Donc, f a pour primitive $F = \dfrac{-1}{2U^2}$; d'où $B = \left[\dfrac{-1}{2(x^4+4x^2+2)^2}\right]_0^1 = \dfrac{-1}{98}+\dfrac{1}{8} = \dfrac{45}{392}$.

- La fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$ peut s'écrire $f = -U'e^U$; avec $U(x) = \dfrac{1}{x}$.

  Donc f a pour primitive : $F = - e^U$, d'où $C = \left[-e^{\frac{1}{x}}\right]_1^2 = -e^{\frac{1}{2}}+e = e-\sqrt{e}$.

- La fonction f définie par $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ peut s'écrire $f = U'U$ / $U(x) = \ln x$.

  Donc f a pour primitive $F = \dfrac{U^2}{2}$, d'où $D = \left[\dfrac{\ln^2 x}{2}\right]_1^e = \dfrac{1}{2}\left[\ln^2 e - \ln^2 1\right] = \dfrac{1}{2}$.

Exercice 3 :

Calculer les intégrales proposées à l'aide d'une intégration par parties.

$$A=\int_0^{\pi} x\cos x dx \quad ; \quad B=\int_{-1}^{0}(x+2)e^{x+1}dx \quad ; \quad C=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} x^2\sin x dx.$$

Solution :

- $A=\int_0^{\pi} x\cos x dx$; Posons $U'(x)=\cos x \Rightarrow U(x)=\sin x$; $V(x)=x \Rightarrow V'(x)=1$.

Donc ; A = $\left[x\sin x\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\sin x\,dx=\left[x\sin x\right]_0^{\pi}-\left[-\cos x\right]_0^{\pi}=-2$.

- $B=\int_{-1}^{0}(x+2)e^{x+1}dx$; Posons $f'(x)=e^{x+1}\Rightarrow f(x)=e^{x+1}$; $g(x)=x+2\Rightarrow g'(x)=1$.

Donc ; B = $\left[(x+2)e^{x+1}\right]_{-1}^{0}-\int_{-1}^{0}e^{x+1}dx=\left[(x+2)e^{x+1}\right]_{-1}^{0}-\left[e^{x+1}\right]_{-1}^{0}$

$$=\left[2e-1\right]-\left[e-1\right]=2e-1-e+1=e.$$

- $C=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}x^2\sin x\,dx$. Posons $f'(x)=\sin x\Rightarrow f(x)=-\cos x$; $g(x)=x^2\Rightarrow g'(x)=2x$,

Donc; C = $\left[-x^2\cos x\right]_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}-\int_{-1}^{0}-2x\cos x\,dx=\left[x^2\cos x\right]_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}+2\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}x\cos x\,dx$.

Calculons maintenant : $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}x\cos x\,dx$ en utilisant une deuxième intégration par parties .

Posons $U'(x)=\cos x\Rightarrow U(x)=\sin x$; $V(x)=x\Rightarrow V'(x)=1$.

Donc ; $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}x\cos x\,dx=\left[x\sin x\right]_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}-\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\sin x\,dx=\left[x\sin x\right]_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}+\left[\cos x\right]_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}$

$$=\frac{\pi}{3}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\pi}{3}\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)-\cos\left(\frac{-\pi}{3}\right)=0\ ;$$

D'où C = $\left[-x^2\cos x\right]_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}+2\times0=-\left(\frac{\pi}{3}\right)^2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+\left(-\frac{\pi}{3}\right)^2\cos\left(\frac{-\pi}{3}\right)=0$.

Remarque :

Nous pouvions trouver la valeur de cette intégrale directement en remarquant que C est de la forme $\int_{-a}^{a}f(x)dx$; avec f impaire.

Exercice 4 :

Soit la fonction f définie par $f(x)=\cos^4 x$.

a) Linéariser f en utilisant les formules d'Euler.

b) Calculer l'intégrale A définie par A = $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 x\,dx$.

Solution :

a) Pour tout réel, on a : $\cos x=\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$, donc

$$f(x)=\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^4=\frac{1}{2^4}\left(e^{i4x}+4e^{i3x}e^{-ix}+6e^{i2x}e^{-i2x}+4e^{ix}e^{-i3x}+e^{-i4x}\right)$$

$$=\frac{1}{16}\left(e^{i4x}+4e^{i2x}+6+4e^{-i2x}+e^{-i4x}\right)=\frac{1}{8}\left(\frac{e^{i4x}+e^{-i4x}}{2}+4\frac{e^{i2x}+e^{-i2x}}{2}+3\right)=\frac{1}{8}\cos 4x+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{3}{8}.$$

b) A = $\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{8}\cos 4x+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{3}{8}\right)dx=\left[\frac{1}{32}\sin 4x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{3}{8}x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{3\pi}{16}$.

Exercice 5 :

Calculer la valeur moyenne de la fonction f entre a et b dans les deux cas suivants :

a) $f(x)=3x^2$; a = 0 ; b = 2 ; b) $f(x)=\sin x$; a = 0 ; b = 2π.

Solution :

a) m = $\dfrac{1}{2-0}\int_0^2 3x^2dx=\dfrac{1}{2}\left[x^3\right]_0^2=\dfrac{1}{2}\left[8-0\right]=4$;

b) $m = \dfrac{1}{2\pi - 0}\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin x dx = \dfrac{1}{2\pi}\left[-\cos x\right]_0^{2\pi} = \dfrac{1}{2\pi}\left[-\cos 2\pi + \cos 0\right] = \dfrac{1}{2\pi} \times 0 = 0$.

Exercice 6 :

Majorer et minorer : $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$, puis déduisez-en que la suite (I_n) converge vers 0.

Solution :

$0 \le x \le 1 \Rightarrow 1 \le 1 + x \le 2 \Rightarrow \dfrac{1}{2} \le \dfrac{1}{1+x} \le 1 \Rightarrow \dfrac{x^n}{2} \le \dfrac{x^n}{1+x} \le x^n$;

Donc ; $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{2} dx \le \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx \le \int_0^1 x^n dx \Rightarrow \left[\frac{x^{n+1}}{2(n+1)}\right]_0^1 \le I_n \le \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 \Rightarrow \frac{1}{2(n+1)} \le I_n \le \frac{1}{(n+1)}$.

Puisque $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2(n+1)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(n+1)} = 0$, alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$ (Théorème des Gendarmes).

Donc (I_n) converge vers 0.

Exercice 7 :

Trouver une primitive sur l'intervalle] 0 ; +∞ [de la fonction $\ln x$.

Solution :

La fonction lnx est continue sur] 0 ; +∞ [, elle a donc des primitives. Sa primitive nulle en 1 est la fonction F définie sur] 0 ; +∞ [par : $F(x) = \displaystyle\int_1^x \ln t dt$.

Pour calculer cette intégrale, nous utiliserons une intégration par parties.

Posons : $f'(t) = 1 \Rightarrow \quad f(t) = t$; $\quad g(t) = \ln t \Rightarrow g'(t) = \dfrac{1}{t}$;

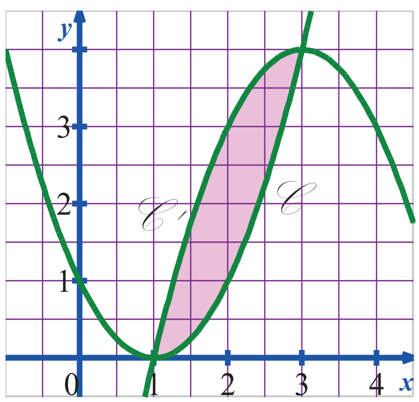
Donc ; $F(x) = \left[t \ln t\right]_1^x - \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t} t dt = \left[t \ln t\right]_1^x - \int_1^x dt = \left[t \ln t\right]_1^x - \left[t\right]_1^x \Rightarrow F(x) = x\ln x - x + 1$.

Exercice 8 :

Soitent C et C ' les courbes respectives des fonctions $f(x) = (x-1)^2$ et $g(x) = -x^2 + 6x - 5$

a) Déterminer l'intersection de C et C' ; puis tracer C et C' dans un repère orthonormé.

b) Calculer l'aire du domaine défini par $\begin{cases} 1 \le x \le 3 \\ f(x) \le y \le g(x) \end{cases}$



Solution :

a) Coordonnées des points d'intersection : (1 ; 0) ; et (3 ; 4).

b) $A = \displaystyle\int_1^3 (g(x) - f(x))dx = \int_1^3 (-x^2 + 6x - 5 - x^2 + 2x - 1)dx$

$= \displaystyle\int_1^3 (-2x^2 + 8x - 6)dx = \left[\frac{-2x^3}{3} + 4x^2 - 6x\right]_1^3$

$= \left(\dfrac{-54}{3} + 36 - 18\right) - \left(\dfrac{-2}{3} + 4 - 6\right) = \dfrac{8}{3} UA = \dfrac{8}{3} 0,25 = \dfrac{2}{3} cm^2$.

Exercice 9 :

r et h sont deux réels strictement positifs.

Soit la fonction f définie sur l'intervalle [0 ; h] par : $f(x) = \dfrac{r}{h} x$.

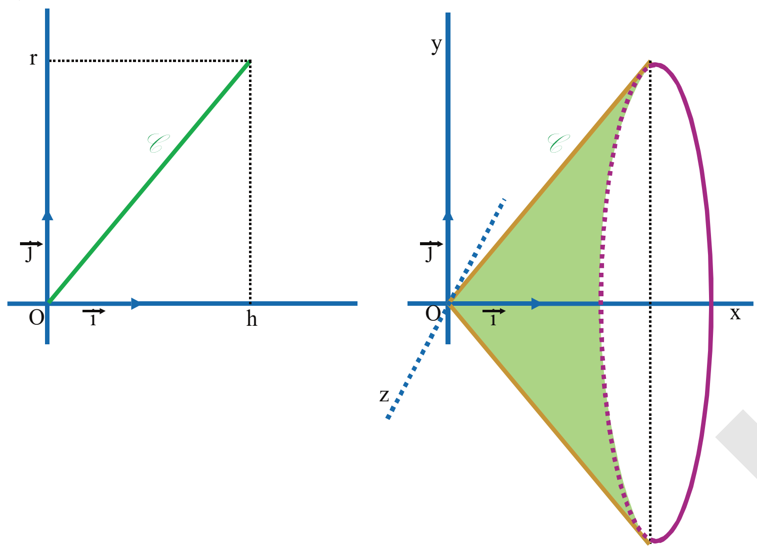
a) Tracer la courbe C de f dans un repère orthonormé (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$).

Le solide engendré par la rotation de C autour de l'axe (O ; $\vec{i}$) est un cône de révolution de hauteur h et sa base a pour rayon r.

b) Calculer le volume V de ce cône.

Solution :

a) Voici la construction demandée



b) $V = \int_0^h \pi f^2(x)dx = \int_0^h \pi \frac{r^2}{h^2} x^2 dx = \pi \frac{r^2}{h^2} \int_0^h x^2 dx = \pi \frac{r^2}{h^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h = \pi \frac{r^2}{h^2} \times \frac{h^3}{3} \Rightarrow V = \frac{\pi r^2 h}{3}$.

Exercice 10 :

Soit F une fonction définie sur $[1;+\infty[$ par : $F(x) = \int_1^x \frac{1-\cos t}{t^2} dt$.

1. a. Montrer que est croissante sur $[1;+\infty[$

b. Montrer que F est majorée par 2 sur $[1;+\infty[$

c. En déduire que F admet une limite L au voisinage de $+\infty$

2. Soit **G** la fonction définie sur $[1;+\infty[$ par : $G(x) = \int_1^x \frac{\sin t}{t} dt$.

Montrer, à l'aide d'une intégration par partie que $G(x) = F(x) + \frac{1-\cos x}{x} + \cos 1 - 1$

En déduire que **G** possède une limite finie en $+\infty$.

Solution :

1. **a.** Sur $[1;+\infty[$, la fonction F est la primitive de $f(t) = \frac{1-\cos t}{t^2}$ qui s'annule pour $x = 1$.

De plus cette fonction est positive sur $[1;+\infty[$ car $-1 \le \cos x \le 1$. On en déduit que, pour tout $x \ge 1$, $F'(x) = \frac{1-\cos x}{x^2}$ et par suite F est croissante sur $[1;+\infty[$.

b. Pour tout $t \ge 1$, $\left|\frac{1-\cos t}{t^2}\right| \le \frac{2}{t^2}$, il en résulte que : $\left|\int_1^x \frac{1-\cos t}{t^2} dt\right| \le 2\int_1^x \frac{dt}{t^2}$, pour $x \ge 1$.

Le résultat découle $2\int_1^x \frac{dt}{t^2} = 2\left[\frac{1}{t}\right]_x^1 = 2 - \frac{2}{x} \le 2$.

c. La fonction F est croissante et majorée sur $[1;+\infty[$, on en déduit que cette fonction admet une limite finie L finie en $+\infty$.

2. Posons $\mathbf{u} = \frac{1}{t}$ donc : $\mathbf{u'} = -\frac{1}{t^2}$ et $\mathbf{v'} = \sin t$ donc : $\mathbf{v} = 1 - \cos x$. On peut alors écrire :

$$G(x) = \int_1^x \frac{\sin t}{t} dt = \left[\frac{1-\cos t}{t}\right]_x^1 + \int_1^x \frac{1-\cos t}{t^2} dt.$$ On en déduit que :

$$G(x) = F(x) + \frac{1-\cos x}{x} + \cos x - 1 \text{ ; pour tout } x \geq 1.$$

On sait que la fonction admet une limite finie L finie en $+\infty$. De plus $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1-\cos x}{x}\right) = 0$,

car $0 \leq \frac{1-\cos x}{x} \leq \frac{2}{x}$ pour tout $x \geq 1$. Le résultat en découle.

Exercice 11 :

On pose pour tout entier naturel $n \geq 1$, $I_n = \int_0^2 \frac{x^n}{\sqrt{x^2+4}} dx$.

1. Calculer l'intégrale I_1.

2. Montrer que $I_n = \int_0^2 x^{n-2}\sqrt{x^2+4}\,dx - 4I_{n-2}$; $\forall n \geq 3$

3. Prouver, à l'aide d'une intégration par parties que : $nI_n = 2^n\sqrt{2} - 4(n-1)I_{n-2}$; $\forall n \geq 3$.

En déduire les valeurs de I_1 et I_5

Solution :

On pose pour tout entier naturel $n \geq 1$, $I_n = \int_0^2 \frac{x^n}{\sqrt{x^2+4}} dx$.

1. La fonction $x \mapsto \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}$ est continue et sa primitive est $x \mapsto \sqrt{x^2+4}$, donc :

$$I_1 = \int_0^2 \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} dx = \left[\sqrt{x^2+4}\right]_0^2 = \sqrt{8} - 2 = 2\sqrt{2} - 2.$$

2. On remarque qu'on peut écrire $\frac{x^n}{\sqrt{x^2+4}} = \frac{x^{n-2}(x^2+4) - 4x^{n-2}}{\sqrt{x^2+4}}$, *pour tout* $n \geq 3$ *et pour tout* $x \in \mathbb{R}$.

$$I_n = \int_0^2 \frac{x^n}{\sqrt{x^2+4}} dx = \int_0^2 \frac{x^{n-2}(x^2+4) - 4x^{n-2}}{\sqrt{x^2+4}} dx = \int_0^2 x^{n-2}\sqrt{x^2+4}\, dx - 4I_{n-2} \; (*)$$

3. Intégrons par parties l'intégrale $\int_0^2 x^{n-2}\sqrt{x^2+4}\, dx$. On pose

$u(x) = \sqrt{x^2+4}$ *et* $v'(x) = x^{n-2}$, il vient que :

$$\int_0^2 x^{n-2}\sqrt{x^2+4}\, dx = \left[\frac{x^{n-1}}{n-1}\sqrt{x^2+4}\right]_0^2 - \frac{1}{n-1}\int_0^2 x^{n-1}\frac{x}{\sqrt{x^2+4}} dx.$$

On en déduit que $\int_0^2 x^{n-2}\sqrt{x^2+4}\, dx = \frac{2^n\sqrt{2}}{n-1} - \frac{I_n}{n-1}$. En reportant dans l'égalité $(*)$ on

obtient : $nI_n = 2^n\sqrt{2} - 4(n-1)I_{n-2}$; **pour tout** $n \geq 3$.

De cette formule, on en déduit $I_3 = \frac{16 - 8\sqrt{2}}{3}$ et $I_5 = \frac{224\sqrt{2} - 256}{15}$.

B. Exercices divers :

1. Dans les deux cas suivants, linéariser la fonction f et déterminer une primitive F de f sur $\mathbb{R}$:

a) $f(x) = \cos^4 x$; b) $f(x) = \sin^6 x$

2. Calculer les intégrales :

$$I=\int_{-3}^{2} 2x^4\,dx \ ;\ J=\int_0^{\Pi}\sin 2t\,dt \ ;\ K=\int_3^1 \frac{dx}{1+x}$$

$$L=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}\left(1+\tan^2 u\right)du \ ;\ M=\int_0^2 e^x dx \ ;\ N=\int_1^2 \frac{dx}{x^2}$$

3. Calculer les intégrales :

$$A=\int_0^1 t\sqrt{t^2+1}\,dt \ ;\ B=\int_1^4 \frac{x+1}{x^2+2x+3}dx;$$

$$C=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{e^{\frac{1}{t^2}}}{t^3}dt \quad ;\ D=\int_0^1 \frac{2x}{(x^2+1)^2}dx$$

$$E=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin^3 x}dx \quad ;\ F=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos x\,dx$$

4. Transformer les fonctions à l'aide d'une formule trigonométrique et calculer l'intégrale :

$$a)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\,dx \ ;\ b)\int_0^{\pi}\cos^3 x\,dx \ ;\ c)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5 x\,dx;$$

$$d)\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sin^3 2x\,dx \ ;\ e)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\cos^5 x\,dx$$

$$E=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin^3 x}dx$$

5. Linéariser pour calculer les intégrales :

$$I=\int_0^{\pi}\sin^4 x\,dx \quad ;\quad J=\int_0^{2\pi}\sin^2 x\cos^4 x\,dx\ ;$$

$$K=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\sin^4 x\,dx \ ;\ L=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^6 x\,dx$$

6. Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'une intégration par parties :

$$A=\int_0^{\pi} x\sin x\,dx \quad ;\ B=\int_1^{e}\ln t\,dt;$$

$$C=\int_{-1}^{0}(2x+1)e^{-x}dx \ ;\ D=\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2}dx$$

$$E=\int_1^2 x\ln x\,dx \quad ;\ F=\int_5^{10}\frac{x}{\sqrt{x-1}}dx$$

7. A l'aide de deux intégrations par parties successives, calculer les intégrales A et B définies

par : $A=\int_0^1 x^2e^x dx$; $B=\int_0^{\pi} e^x\sin x\,dx$.

8. Soit $A=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos^2 x\,dx$; $B=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin^2 x\,dx$

a) Calculer A + B ;

b) Calculer A – B par intégration par parties.

c) Déduire des questions a)et b) les valeurs de **A** et **B**.

9. 1) Etudier la fonction numérique f qui, au réel x associe : $f(x)=\frac{1}{x\ln x}$, puis tracer sa représentation graphique dans un repère orthonormé.

2) Déterminer l'aire du domaine constitué par les points M(x ; y), dont les coordonnées vérifient : $\begin{cases}2\le x\le e^2\\ 0\le y\le f(x)\end{cases}$

10. Pour tout naturel n, on pose $I_n=\int_0^1 t^n e^t dt$.

a) A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que l'on a :

pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $I_n = e - n\,I_{n-1}$

b) Calculer I_0, puis I_1 ; I_2 ; I_3.

11. $I_n=\int_0^e(\ln x)^n dx$, où **n** est un entier naturel non nul.

a) En utilisant une intégration par parties, trouvez une relation entre I_{n-1} et I_n.

b) Déduisez- en la valeur de I_4.

12 1) Soit **f** la fonction définie pour $x \neq 1$

par : $f(x)=\frac{x^3-3x^2+x}{1-x}$;

a) Déterminer les réels **a ; b ; c ; d** tels que l'on ait, pour tout $x \neq 1$:

$$f(x)=ax^2+bx+c+\frac{d}{1-x}.$$

b) Calculer : $I=\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx$.

2) Calculer, à l'aide d'une intégration par parties : $J=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(3x^2-6x+1\right)\ln(1-x)dx$

13 D est l'ensemble des points M(x ; y) du plan tels que : $\begin{cases}0\le x\le\pi\\0\le y\le\sin x\end{cases}$

1) L'unité graphique est 2cm. Représenter D. Calculer l'aire de D en unités d'aire, puis en cm^2.

2) L'unité est $\frac{6}{\pi}$ cm sur l'axe des abscisses et 4 cm sur l'axe des ordonnées. Représenter D. Quelle est l'aire de D en cm^2 ?

14 f est la fonction $x\mapsto\frac{1}{x}$. D est le domaine délimité par la courbe C de f, la droite des abscisses, les droites d'équations : $x=1$ et $x=e$. L'unité graphique est 3cm.

a) Représenter D

b) b) Calculer l'aire de D en cm^2.

15 Soit f la fonction définie par :
$f(x)=(x+2)e^{-x}$.
Etudier f et construire sa courbe représentative dans un plan rapporté à un repère orthonormé.
2) Calculer l'aire de la partie de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ définie par : $\begin{cases}0\le x\le\lambda\\0\le y\le f(x)\end{cases}$ où λ est un réel strictement positif.
Quelle est la limite de cette aire lorsque λ tend vers +∞ ?

16 a) Donner le tableau de variation de la fonction $f:[0\,;\pi]\mapsto\sin^2 x$.
Tracer la courbe C_f de f (l'unité graphique est 9 cm) dans un repère orthonormé.
b) Montrer que pour tout réel x :
$\sin^4 x=\frac{3}{8}-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}\cos 4x$.
c) Calculer le volume en cm^3 du solide S engendré par la révolution autour de la droite des abscisses (Ox) de la plaque définie par :
$\begin{cases}0\le x\le\pi\\0\le y\le\sin^2 x\end{cases}$

17 Dans les cas suivants, calculer la valeur moyenne de la fonction f entre a et b.

a) $f(x)=\cos x$; $a=\frac{\pi}{4}$; $b=\frac{3\pi}{4}$;

b) $f(x)=\frac{1}{x^2}$; $a=1$; $b=2$;

c) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x+1}}$; $a=0$; $b=8$;

d) $f(x)=e^{-x}$; $a=0$; $b=e$.

18 Dans chaque cas, déterminer une primitive de f sur l'intervalle I.

a) $f(x)=xe^{2x}$; $I=\mathbb{R}$;

b) $f(x)=x^2\ln x$; $I=[1;\ +\infty[$

c) $f(x)=(1+x)\ln x$; $I=]0;1]$;

d) $f(x)=e^x\cos x$; $I=\mathbb{R}$;

19. On considère les intégrales :
$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{(\cos x)^2}$; $J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{(\cos x)^4}$.

1.a) Quelle est la dérivée de la fonction tangente ?
b) Calculer I .
2.a) Soit la fonction
$f:[0\,;\frac{\pi}{4}]\to\mathbb{R}$. $x\mapsto\frac{\sin x}{\cos^3 x}$

Démontrer que f est dérivable sur $[0\,;\frac{\pi}{4}]$ et que, pour tout x appartenant à cet intervalle :
$f'(x)=\frac{3}{\cos^4 x}-\frac{2}{\cos^2 x}$
b) Déduisez du calcul précédent une relation entre I et J, puis calculer J

20. On considère la fonction numérique de la variable réelle **x** définie par : $f(x)=2x-1+\frac{e^x}{e^x-1}$.

1. Préciser l'ensemble de définition de f et étudier ses variations.
Montrer que sa représentation graphique C admet deux asymptotes obliques d'équations : $y=2x-1$; et $y=2x$.
2. Construire C dans un repère orthonormé

Mat 7 M AC.indd 100 20/01/46 02:16:44

$(O;\vec{i};\vec{j})$ (prendre 2 cm comme unité).

Démontrer que le point $\Omega\left(0\,;-\frac{1}{2}\right)$ est un centre de symétrie pour C.

3. Soit α un réel supérieur à $\ln 2$. Calculer l'aire, A_α du domaine plan limitée par C et les droites d'équation $y = 2x$; $x = \ln 2$ et $x = \alpha$. Ecrire A_α sous la forme $A_\alpha = \ln\varphi(\alpha)$ et étudier la limite de la fonction : $\alpha \mapsto A_\alpha$ lorsque α tend vers +∞.

21. On considère la fonction définie par :

$$h(x) = \frac{1}{9-x^2}.$$

1. Déterminer a et b tels que pour tout x de

$$IR/\{-3\,;3\};\ h(x) = \frac{a}{3-x} + \frac{b}{3+x}.$$

2. Calculer l'intégrale : $I = \int_{-1}^{1} \frac{1}{9-x^2}\,dx$.

3. En faisant le changement de variable $x = \cos 2t$, en déduire la valeur de

l'intégrale $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2t}{9-\cos^2 2t}\,dt$.

22. Soit (U_n) la suite numérique définie par :

$$U_0 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x+1}} ;\forall n \in \mathbb{N}^*, U_n = \int_0^1 \frac{x^n dx}{\sqrt{x+1}}$$

1. Soit f la fonction telle que: $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^n}\right)$.Déterminer la fonction dérivée de f, calculer U_0.
2. Calculer U_1. calculer U_2 à l'aide d'une intégration par parties.
3. Démontrer que:

$\forall x \in [0\,;1],\ 0 \le \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} \le x^n$. En déduire que la suite (U_n) converge vers **0**.

23. 1.Déterminer, en indiquant soigneusement dans chacun des cas l'ensemble de définition, toutes les primitives des fonctions :

a) $x \mapsto (\ln x)^\alpha / x \quad (\alpha \in R)$;
b) $x \mapsto (\sin x)e^x$

2. Calculer les intégrales suivantes:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t^3}{1-t}dt,\ \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^3 t\,dt,\ \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin t}{\cos t+\sin t}dt$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x \ln(1+\cos x)dx,\ \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^3 t\cos t}{\cos 2t+1}dt.$$

24. Soit f une fonction continue sur $[a\,;b]$ telle que : $f(b+a-x) = f(x)$, pour tout $x \in [a\,;b]$

1. Quelle propriété possède la courbe représentative de cette fonction ?
2. On pose $t = a + b - x$, utiliser ce changement de variable pour transformer $\int_a^b xf(x)dx$
3. En déduire que : $\int_a^b xf(x)dx = \frac{b+a}{2}\int_a^b f(x)dx$

25. a. On définit, pour tout entier n>0 et tout

$$x > 0 : \phi_n = \int_1^x \ln^n t\,dt$$

Déterminer une relation de récurrence entre les fonctions ϕ_n et ϕ_{n-1}. Donner l'expression de ϕ_n.

26. Le volume d'un solide est donné par la somme des aires des sections de ce solide par des plans parallèles.
Par exemple, imaginer que l'on coupe un saucisson en tranches ; pour le reconstituer, on rassemble toutes les tranches.

1. On considère le cylindre d'équation : $x^2 + y^2 = 1$.
   Calculer le volume intérieur du cylindre

Mat 7 M AC.indd 101 20/01/46 02:16:45

compris entre z = 1 et z = 4.

2. On considère la boule de centre O et de rayon r, dont on cherche le volume V.

   a.) Montrer que $v = 2\int_0^r \pi(r^2 - z^2)dz$.

   b.) En déduire V.

   (On pourra remarquer que la dérivée du volume d'une boule donne sa surface et que la dérivée de l'aire d'un disque donne son périmètre. Un hasard sans doute...)

3. On considère le cône plein d'équation : $x^2 + y^2 \leq z^2$.

   a.) Montrer que l'aire d'une section horizontale de ce cône vaut πz^2 .

   b.) En déduire le volume du cône entre $z = 0$ et $z = 2$.

27. 1. Montrer que, pour tout x réel on a $1 - 2a\cos x + a^2 > 0$.

Soit n un entier $n = 2$. Montrer que :

$$\prod_{k-1}^{n} \ln(1 - 2a\cos\frac{2k\pi}{n} + a^2) = \prod_{k-1}^{n}(a - e^{\frac{2ik\pi}{n}})(a - e^{-\frac{2ik\pi}{n}})$$

En déduire que :

$$\prod_{k-1}^{N} \ln(1 - 2a\cos\frac{2k\pi}{n} + a^2) = (a^n - 1)^2$$

3. Calculer $I = \int_0^{2\pi} \ln(1 - 2a\cos t + a^2)dt$ comme limite de somme dite de Riemann.

28. 1.Calculer les intégrales :

$$\int_0^1 \frac{t}{t + \sqrt{1+t}}dt, \ \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1 - x^2}\,dx, \ \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1 + x^2}\,dx$$

2. On considère la fonction F définie par :

$$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{4}\right], \ F(x) = \int_0^x \sqrt{\cos 2t}\,dt$$

   a. Montrer, sans chercher à calculer l'intégrale, que F est impaire.

   b. Montrer que $\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$, $0 \leq F(x) \leq x$

   c. Montrer que F est dérivable sur $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$.

   Que valent $F'(0)$ et $F'\left(\frac{\pi}{4}\right)$?

   d. En déduire un tracé sommaire du graphe de F (on a $F\left(\frac{\pi}{4}\right) \simeq 0,599$).

3. Montrer que les fonctions G et H définies par : $G(x) = \int_0^x \frac{dt}{2+\sin(t^2)}$

   et $H(x) = \int_{3x}^{\sin 4x} \cos(t^2)dt$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et calculer leurs dérivées.

29. 1. On considère la fonction définie par :

$$F(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln x}$$

   a. Déterminer l'ensemble D de définition de F et le signe de F sur D.

   b. Montrer que F est dérivable sur D,

   c. Calculer la dérivée de F et en déduire le sens de variation

2. Soit g une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et soit G la fonction définie par $G(x) = \int_{x-1}^{x+1} g(t)\,dt$

   a. Montrer que la fonction G est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

   b. Déterminer toutes les fonctions f telles que F soit constante.

30. On considère la fonction F définie par :

$$F(x) = \int_x^{2x} \frac{t^2}{t^2 + \sin^2 t}dt$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction F.

2. Montrer que, pour x non nul : $F(-x) = -F(x)$ et que F est prolongeable en une fonction continue en 0.

3. Montrer que la fonction F ainsi prolongée est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et étudier son sens de variation.

4. Etudier la limite de F quand tend vers $\pm\infty$. Tracer approximativement le graphe de F.

CHAPITRE 8

Equations différentielles

Faire savoir

L'essentiel du chapitre

I. Notion d'équation différentielle :

Soit f une fonction dérivable autant de fois que c'est nécessaire sur un intervalle I.

Définition :

On appelle équation différentielle toute équation qui lie f à ses dérivées successives.

Degré d'une équation différentielle :

Le degré d'une équation différentielle est l'ordre supérieur de la dérivée figurant dans cette équation.

Une équation est dite du premier degré lorsqu'elle lie la fonction et sa dérivée première.

Une équation est dite du second degré lorsqu'elle lie la fonction, sa dérivée première et sa dérivée seconde. etc.

L'inconnue dans une équation différentielle est une fonction. Ces fonctions sont notées d'habitude « **y** ».

Résoudre une équation différentielle c'est trouver toutes les fonctions qui la vérifient.

II. L'équation y' +ay = 0 (a réel) :

Théorème 1 :

Les fonctions solutions de l'équation différentielle du premier degré $y' + ay = 0$ (a réel) sont les fonctions $x \mapsto Ae^{-ax}$ (A réel quelconque).

Il existe une unique solution de cette équation vérifiant la condition initiale $y(x_0) = y_0$ (x_0 et y_0 des réels donnés).

Cette fonction est la fonction : $x \mapsto y_0 e^{-a(x-x_0)}$.

III. L'équation y'' +ay' +by = 0 (a, b des réels)

1. Les équations de référence :

Théorème 2 :

Equations de référence (ω un réel non nul)	**fonctions solutions** (A , B réels quelconques)
$y'' = 0$	$y = Ax + B$
$y'' - \omega^2 y = 0$	$y = Ae^{\omega x} + Be^{-\omega x}$
$y'' + \omega^2 y = 0$	$y = A\cos\omega x + B\sin\omega x$

2. Résolution de l'équation du second degré y'' + ay' + by = 0 :

L'idée générale

- Procéder à un changement de fonction pour ramener la résolution de cette équation différentielle à une équation de référence.
- Exprimer alors les solutions de l'équation différentielle et les interpréter à l'aide de l'équation caractéristique associée à savoir l'équation du second degré $r^2 + ar + b = 0$ (inconnue r).

Le changement de fonction :

Soit y une fonction affine sur $\mathbb{R}$, et α un réel, on définit alors la fonction Z par $Z = ye^{-\alpha x}$,

les rudiments de calcul différentiel permettent d'avancer que :
y est une solution de l'équation différentielle **y''+ ay' + by = 0** équivaut à : Z est solution de l'équation :

$Z'' + (a + 2\alpha)Z' + (\alpha^2 + a\alpha + b)Z = 0$. Prendre $\alpha = -\frac{a}{2}$ s'impose ; nous voilà amenés à une équation de référence, résumons :

$$y'' + ay' + b = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} Z = ye^{-\frac{a}{2}x} \\ Z'' = (\frac{a^2 - 4b}{4})Z \end{cases} \quad (E)$$

L'équation caractéristique :
Considérons l'équation du second degré $r^2 + ar + b = 0$, d'inconnue r appelée équation caractéristique, le discriminant de cette équation est égal à $a^2 - 4b$, de ce fait l'ensemble (E) des solutions précédentes s'écrit :

$$(E')\begin{cases} y = Ze^{-\frac{a}{2}x} \\ Z'' = (\frac{\Delta}{4})Z \end{cases}$$; Il n'y a plus qu'à résoudre grâce au théorème 2 l'équation de référence

$Z'' = (\frac{\Delta}{4})Z$ et a interpréter les résultats obtenus à l'aide des racines de l'équation caractéristique.

IV. Les résultats :

Théorème 3 :

Equation caractéristique $r^2 + ar + b = 0$	Fonctions solutions $(y'' + ay' + by = 0)$
2 racines réelles distinctes r_1 ; r_2.	$y = Ae^{r_1x} + Be^{r_2x}$
1 racine réelle double r	$y = (Ax + B)e^{rx}$
2 racines complexes conjuguées $\alpha + i\beta$; $\alpha - i\beta$;	$y = e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x)$

Démonstration

- $\Delta > 0$: Ecrivons $\Delta = \omega^2$; ω un réel non nul.

Les racines de l'équation caractéristique sont alors : $r_1 = \frac{-a+\omega}{2}$; $r_2 = \frac{-a-\omega}{2}$.

De, $Z'' = (\frac{\Delta}{4})Z$ et du théorème 2 nous tirons : $A\,e^{\frac{\omega}{2}x} + Be^{-\frac{\omega}{2}x}$ (A ; B réels)

Avec $Z = y\,e^{\frac{a}{2}x}$, il vient : $y = Ae^{(\frac{-a+\omega}{2})x} + Be^{(\frac{-a-\omega}{2})x}$; soit $y = Ae^{r_1x} + Be^{r_2x}$ (A ; B réels).

- $\Delta = 0$: la racine double de l'équation caractéristique est $r = -\frac{a}{2}$.

Nous avons, alors **$Z'' = 0$** d'où **$Z = Ax + B$** (A, B réels)

La relation $y = Z\,e^{-\frac{a}{2}x} = Ze^{rx}$ conduit immédiatement à $y = (Ax + B)e^{rx}$ (A, B réels).

- $\Delta < 0$: Ecrivons cette fois $\Delta = -\omega^2$; ω réel non nul.

Les racines de l'équation caractéristique sont alors,

$r_1 = \frac{-a+i\omega}{2}$; $r_2 = \frac{-a-i\omega}{2}$

Avec $Z'' = -(\frac{\omega}{2})^2 Z$ et le théorème 2 il vient :

$Z = (A\cos\frac{\omega}{2}x + B\sin\frac{\omega}{2}x)$ **(A ; B réels),** puis $y = e^{\frac{-a}{2}x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x)$; (A ; B réels) ;

dès lors qu'on écrit : $r_1 = \alpha + i\beta$; $r_2 = \alpha - i\beta$ ($\alpha = \frac{-a}{2}$; $\beta = \frac{\omega}{2}$).

V. Avec les conditions initiales :

Théorème 4 :

Il existe une unique solution de l'équation différentielle **y'' + ay' + by = 0** satisfaisant aux conditions initiales **:** $y(x_0) = y_0$: $y'(x_0) = y'_0$; x_0 ; y_0 ; y'_0 des réels donnés.

VI. Equation avec second membre :

Exemple 1 :

I) Soit l'équation différentielle (E) $y' - 2y = e^x$. 1) Vérifier que la fonction **g :** $x \mapsto -e^x$ est solution de (E). 2) Montrer qu'une fonction ***f*** est solution de (E). si et seulement si ***f*** – **g** est solution de $y' - 2y = 0$ (E') 3) Résoudre E' puis E.	II) On considère l'équation différentielle (1) : $y'' - y' - 6y = -6x - 1$ 1) Déterminer un polynôme ***g*** du premier Degré solution de (1). 2) Démontrer qu'une fonction f est solution de (1) si et seulement si ***f*** – ***g*** est solution de l'équation différentielle $y'' - y' - 6y = 0$ (2). 3) En déduire les solutions de (1).
Réponse :	**Réponse :**
Avec $g(x) = -e^x$, il vient $g'(x) = -e^x$, d'où $g'(x) - 2g(x) = e^x$, la fonction $g(x) = -e^x$ est donc solution de E. Comme $g'(x) - 2g(x) = e^x$ pour tout réel x, il est équivalent de dire $f'(x) - 2f(x) = e^x$ ou $f'(x) - 2f(x) = g'(x) - 2g(x)$ d'une autre manière : ***f*** solution de E $\Leftrightarrow$ $(f-g)' - 2(f-g) = 0$. Ainsi ***f*** est solution de E $\Leftrightarrow f - g$ solution de (E'). Les fonctions solutions de l'équation $y' - 2y = 0$ étant les fonctions : $x \mapsto Ae^{2x}$ **(A réel)**. On en déduit que les solutions de(E) sont les fonctions $A(e^{2x} - e^x)$.	Posons $g(x) = ax + b$ avec a, b réels, la fonction $x \mapsto (ax+b)$ est solution de (1) signifie que : $-a - 6(ax + b) = -6x - 1$; on en déduit aisément que a = 1 ; b = 0 ; la fonction $x \mapsto x$ est solution de (1). L'égalité $g''(x) - g'(x) - 6g(x) = -6x - 1$ vraie pour tout x, montre que ***f*** solution de (1) équivaut à $f'' - f' - 6f = g'' - g' - 6g$ ou encore $(f-g)'' - (f-g)' - 6(f-g) = 0$. Ceci établi l'équivalence ***f*** est solution de (1) $\Leftrightarrow$ $f - g$ est solution de (2) les solutions de $y'' - y' - 6y = 0$ sont les fonctions $x \mapsto Ae^{3x} + Be^{-2x}$. On en déduit que les solutions de (1) sont les fonctions : $x \mapsto Ae^{3x} + Be^{-2x} + x$: A et B réels quelconques.

Savoir-faire

A. Applications :

I. Exemples prototypes :

Exemple 1 : Résoudre : $y''-3y'-4y=0$	Exemple 2 : Résoudre : $y''+4y'+4=0$
Réponse :	**Réponse :**
L'équation caractéristique $r^2 -3r -4 = 0$ admet deux solutions réelles : $r_1 = -1$; $r_2 = 4$. Les fonctions solutions de l'équation différentielle $y''-3y'-4y=0$ sont les fonctions : $x \longmapsto Ae^{-x}+Be^{4x}$, A et B des réels quelconques	L'équation caractéristique $r^2+4r+4=0$ admet une solution réelle double r = -2. Les solutions de l'équation différentielle $y''+4y'+4=0$ sont les fonctions $x \mapsto (Ax+B)e^{-2x}$ (A ; B réels quelconques).

Exemple 3 :

Résoudre : **$y''+2y'+5y=0$**

Réponse :

Les racines de l'équation caractéristique

$r^2+2r+5=0$ sont les complexes conjuguées :

$-1+2i$ et $-1-2i$.

Nous en déduisons les fonctions solutions de cette équation différentielle qui sont

$x \mapsto e^{-x}(A\cos 2x + B\sin 2x)$ (**A ; B** réels).

Exemple 4 :

1) Déterminer la fonction y telle que :	2) Le plan étant muni d'un repère orthonormal
$y''+2y'+2y=0$; $y(0)=1$; $y'(0)=-1$.	(xOy), existe-t-il une fonction f ayant les propriétés suivantes et si oui l'expliciter : *f* est solution de **E : $y''-3y'+2y=0$** la courbe représentative de *f* passe le point A(0 ; 1) et admet en ce point une tangente parallèle à (Ox).
Réponse :	**Réponse :**
L'équation caractéristique : $r^2+2r+2=0$ a pour solution $-1+i$ et $-1-i$. Les solutions de l'équation sont alors $y=e^{-x}(A\cos x+B\sin x)$ Les conditions : $y(0)=1$ et $y'(0)=-1$ conduisent à A = 1 et B = 0, donc la fonction cherchée est : $f(x)=e^{-x}\cos x$	Les conditions ci-dessus peuvent être résumées en :**f** est solution de **$y''-3y'+2=0$** et **$f(0)=1$; $f'(0)=0$**. Le théorème 4 affirme l'existence et l'unicité d'une telle fonction. **Explicitons** L'équation caractéristique $r^2 -3r+2=0$ a pour racines 1 et 2. Il existe donc deux réels A et B tels que **$f(x)=Ae^x+Be^{2x}$**. Les conditions **$f(0)=1$** et **$f'(0)=0$** conduisent à **$A+B=1$** et **$A+2B=0$** d'où **$A=2$** et **$B=-1$**. La fonction *f* est alors définie par **$f(x)=2e^x-e^{2x}$**.

II. Situations conduisant à une équation différentielle :

A) Chute libre d'un corps :

Un corps de masse m lâché sans vitesse initiale subit en chute libre une force de freinage d'intensité F proportionnelle à la vitesse v : F = -kv (où k coefficient de forme est positif).

1) Montrer que la fonction du temps $\mathbf{x \mapsto v(t)}$ est une solution sur [0 ; +∞[de l'équation différentielle $\mathbf{y' + \frac{k}{m} y = g}$ (où g est l'accélération de la pesanteur).

2) Trouver une fonction constante solution de cette équation. En déduire que : $\mathbf{V(t) = \frac{mg}{k}(1 - e^{\frac{-k}{m}t})}$, et interpréter $\mathbf{v = \frac{mg}{k}}$.

Solution :

Le bilan des forces appliquées sur le corps se résume au poids et à la force de freinage.

Le théorème fondamental de la dynamique permet alors d'écrire la relation (valable à chaque instant t) : mg –kv(t) = mγ(t) (où γ(t) est l'accélération à l'instant t).

En tenant compte de $\gamma(t) = v'(t)$ on obtient $v'(t) + \frac{k}{m} v(t) = g$.

Il est facile de voir que la fonction constante $t \mapsto \frac{mg}{k}$ est une solution particulière de l'équation différentielle (1) : $y' + \frac{k}{m} y = g$. Comme la solution générale de l'équation sans second membre est

$y = Ae^{-\frac{k}{m}t}$,

la solution générale de (1) est : $t \mapsto Ae^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k}$,

la condition initiale $v(0) = 0$ conduit à : $A = \frac{-mg}{k}$,

d'où l'expression de **v** : $v(t) = \frac{mg}{k}\left(1 - e^{\frac{-k}{m}t}\right)$,

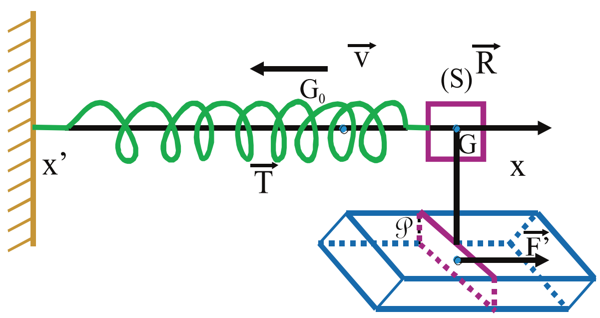
on vérifie que $\lim\limits_{t \to +\infty} v(t) = v = \frac{mg}{k}$,

v apparaît donc comme la vitesse limite du corps.

B) Oscillateurs mécaniques amortis :

On considère le dispositif ci-contre, le solide (S) de masse m peut coulisser sans frottement suivant un axe horizontal ; le solide est muni d'une palette de masse négligeable trempant dans un liquide , la force de frottement qu'exerce le liquide sur la palette est proportionnelle à la vitesse de cette dernière, elle est de la forme :

$\vec{F}' = -f\,\vec{v}$.



- La raideur du ressort est égale à k.
- Ecrire l'équation différentielle du mouvement.

Solution :

1. Choix du repère

L'axe horizontale (xx') est muni d'un repère $(O\ ;\ \vec{i}\ )$ où O est le point G_O correspondant à la position du centre d'inertie G du solide. Lorsque le ressort n'est pas tendu.

La position de g est alors repérée en fonction du temps t par son abscisse x(t) dans un repère :

$\overrightarrow{G_0G_t} = x(t).\vec{i}$.

2. L'équation du mouvement

- Bilan des forces exercées sur le système ''Solide ; Palette''.

Ce système est soumis à son poids $\vec{P}$, à la réaction $\vec{R}$ de l'axe orthogonal à l'axe, à la force $\vec{T}$ exercée par le ressort : $\vec{T} = -k\,\overrightarrow{G_0G} = -k\, x(t).\vec{i}$ et enfin à la force $\vec{F}'$ exercée par le liquide :

$\vec{F}' = -f\vec{v} = -fx'(t).\vec{i}$.

Le théorème du centre d'inertie conduit à écrire $\vec{P} + \vec{R} + \vec{T} + \vec{F}' = m\,\vec{a}_G$; où $\vec{a}_G$ est le vecteur accélération de **G** : $\vec{a}_G = x''(t).\vec{i}$.

Par projection orthogonale sur l'axe $(O\ ;\ \vec{i}\ )$ on obtient : $-kx(t) - fx'(t) = mx''(t)$

Soit $mx'' + fx' + kx = 0$; et c'est l'équation du mouvement.

C) Radioactivité & datation avec carbone 14 :

On note $f(t)$ le nombre d'atomes de carbone **14** existant à l'instant **t** dans un échantillon de matière organique. On montre que la fonction **f** vérifie pour tout réel **t** : $f'(t) = -kf(t)$ et $f(0) = N_0$ où **k** est un réel strictement positif (constante radioactive de l'élément).

1°) Donner l'expression de $f(t)$ en fonction de N_0, **k** et **t** .

2°) On appelle période (ou demi-vie) de l'élément radioactif le temps **T** au bout duquel la moitié des atomes se sont désintégrés. Sachant que $k = 1.238\times10^{-4}$ et que **t** est évalué en années, déterminer la demi-vie du carbone**14.**

3°) Le carbone**14** est renouvelé constamment chez les êtres vivants ; à la mort de ceux-ci l'assimilation cesse et le carbone**14** présent se désintègre. Des archéologues ont trouvé des fragments d'os dont la teneur en carbone**14** est **40%** de celle d'un fragment d'os actuel de mêmemasse, pris comme témoin. Calculer l'âge de ces fragments.

Solution :

1°) La fonction **f** est solution de l'équation différentielle : $y' + ky = 0$. Elle est de la forme

$f(t) = Ae^{-kt}$. A l'instant t = 0 : $f(0) = Ae^{-k\times0} = N_0$ donc $A = N_0$. Par suite : $f(t) = N_0\, e^{-kt}$.

2°) La demi-vie du carbone 14 est T telle que $f(T) = N\ e^{-kT} = \frac{1}{2}N_0$ Soit $-kT = -\ln 2$.

$$\text{Donc : } T = \frac{\ln 2}{k} = \frac{\ln 2}{1,238\times10^{-4}} \cong 5599\ \textit{ans}.$$

3°) $f(t) = N_0\, e^{-kt} = 0.4\times N_0 \Leftrightarrow -kt = \ln(0,4)$, donc : $t = \frac{\ln(0,4)}{k} = \frac{\ln(0,4)}{1,238\times10^{-4}} \cong 7401.$

B. Exercices divers :

1. Résoudre les équations différentielles

1) $y' - 3y = 0$; 2) $y' + \frac{1}{2}y = 0$; 3) $5y' - 2y = 0$

4) $\frac{2}{3}y' + y = 0$; 5) $3y' + 4y = 0$; 6) $2y' + y\sqrt{2} = 0$

2. Résoudre les équations différentielles et déterminer la solution qui vérifie la condition initiale :

1) $y' + 2y = 0$; $y(0) = 1$; 2) $y' - 5y = 0$; $y(2) = 7$
3) $2y' - 3y = 0$; $y(2) = e$; 4) $7y' + 4y = 0$; $y(7) = e^5$
5) $y' + 0{,}5y = 0$; $y(2) = 1$; 6) $0{,}4y' - 1{,}5y = 0$; $y(0) = 1$
7) $y'\sqrt{2} - y = 0$; $y(0) = e^2$; 8) $y' - \pi y = 0$; $\ln(y(2)) = \pi$

3. Résoudre les équations différentielles

1) $y'' = y$; 2) $y'' + y = 0$;
3) $y'' - 2y = 0$ 4) $y'' + 3y = 0$;
5) $y'' - 4y' + 3y = 0$; 6) $y'' + y' + y = 0$;
7) $y'' + 4y' - 5y = 0$ 8) $y'' + 4y' + 5y = 0$.
9) $y'' - 2y' + y = 0$; 10) $y'' - 0{,}1y' - 0{,}2y = 0$.
11) $y'' - 4y' + 7y = 0$; 12) $y'' - 4y' - 4y = 0$;
13) $2y'' - 5y' - 3y = 0$; 14) $2y'' + y'\sqrt{2} + y = 0$;
15) $4y'' + 4y' + y = 0$; 16) $9y'' + 6y' + y = 0$;

4. Résoudre les équations différentielles et déterminer la solution qui vérifie les conditions initiales données.

1) $y'' + 4y = 0$; $y(\frac{\pi}{2}) = -1$; $y'(\frac{\pi}{2}) = 1$;
2) $y'' - \pi y = 0$; $y(0) = \pi$; $y'(0) = \pi$;
3) $y'' + 9y = 0$; $y(\pi) = 1$; $y'(\pi) = 0$;
4) $4y'' + 121y = 0$; $y(0) = 1$; $y'(0) = 11$;
5) $y'' - y' - 2y = 0$; $y(1) = 1$; $y'(1) = 0$;
6) $y'' - 2y' + 5y = 0$; $y(\pi) = 0$; $y'(\pi) = -1$;
7) $y'' + y' + \frac{1}{4}y = 0$; $y(0) = 0$; $y'(0) = 1$;
8) $y' - 4y' - 13y = 0$; $y(0) = 2$; $y'(0) = 0$;
9) $2y'' + y' - 10y = 0$; $y(1) = 1$; $y'(1) = 0$;
10) $4y'' - 8y' + 5y = 0$; $y(0) = 1$; $y'(0) = 0$;
11) $y'' - 4y' = 0$; $y(0) = 8$; $y'(0) = 4$
12) $y'' - 9y' = 0$; $y(0) = 1$; $y'(0) = 2$;
13) $8y'' = y'$; $y(0) = 1$; $y'(0) = \frac{1}{2}$;
14) $5y'' - 3y' = 0$; $y(0) = 1$; $y'(0) = 1$;

a) Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' - y' - 2y = 0$

b) Déterminer les solutions ***g*** qui vérifient ***g***$(0) = 3$ et ***g***$'(0) = 0$.

c) Déterminer le signe de ***g***(x).

6. On considère l'équation différentielle :
$g''(x) - 2g'(x) + g(x) = 0$.
Où ***g*** désigne une fonction numérique définie et deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ que l'on cherche à déterminer ***g***' et ***g***'' sont la dérivée et la dérivée seconde de ***g***(x).

1) Résoudre cette équation différentielle
2) Déterminer la solution de cette équation qui vérifie les deux conditions suivantes :
- La courbe représentant cette fonction passe par le point I $(0 ; 4)$,
- La tangente à cette courbe en ce point a pour cœfficient directeur le nombre 2. (le plan étant muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{I} ; \vec{J})$).

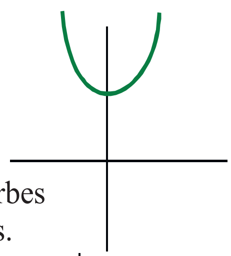
7. 1) Montrer que si y est une solution d'une équation différentielle du second degré $y'' + ay' + by = 0$ (a , b réels), Il en est de même que la dérivée y'.

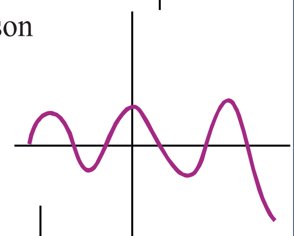
2) En déduire qu'une primitive de la fonction de la forme $x \mapsto e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x)$ (A ; B ; α ; β réels) est encore de la forme $x \mapsto e^{\alpha x}(\lambda\cos\beta x + \mu\sin\beta x)$ (λ et μ réels).

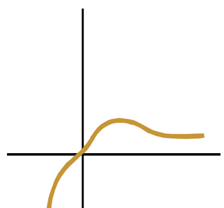
8. On a considéré une solution de chacune des équations différentielles suivantes :

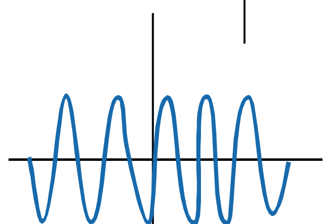
1) $y'' + 2y' + y = 0$;
2) $y'' - 2y' + 2y = 0$
3) $0{,}01y'' + y = 0$;
4) $0{,}01y'' - y = 0$.

Les figures ci-contre donnent sommairement l'allure des courbes représentatives de ces fonctions. Associer chaque courbe à son équation différentielle.









9 Expliciter la fonction solution de :

$$\begin{cases} y''+\pi y'-e^{1995}y=0 \\ y(0)=y'(0)=0 \end{cases}$$

10 Résoudre les équations différentielles avec second membre:

1) $y' = x + \sin x$; 2) $y' = \sin 3x$; 3) $xy' = 1$

4) $y'\sqrt{x} = 1$; 5) $y'' = 2x^3 - 5x2 + 7x - 1$

6) $y'' = \sin x + \cos x$; 7) $y'' = e^{2x} + e^{-2x}$;

8) $y'' = 1 + \tan^2 x$

11. On souhaite résoudre l'équation différentielle (E) suivante sur $\mathbb{R}$:

$(1-x)y'-y=x$.

a) Résoudre l'équation (E) sur $I_1 =]-\infty; 1[$

et sur $I_2 =]1; +\infty[$

On suppose qu'il existe une solution de l'équation (E) sur, notée f.

b. Calculer f(0)

c. En utilisant a),donnerl'expression de f sur $\mathbb{R}$

d. Montrer que f est solution de l'équation (E)

12 On considère l'équation différentielle

$f''(x) - 3f'(x) + 2f(x) = 8x^2 - 24x$ (E)

où f désigne une fonction numérique définie et deux fois dérivable que l'on cherche à déterminer, f' et f'' sa dérivée 1ère et sa dérivée seconde.

1. Déterminer les nombres réels a ; b et c pour que la fonction numérique définie par :

$g(x) = ax^2 + bx + c$ soit solution de l'équation (E_1) dans $\mathbb{R}$. Démontrer que la fonction f est solution de (E_1) si et seulement si la fonction $h = f - g$ est solution de l'équation différentielle :

$h'' - 3h' + 2h = 0$ (E_2)

2. Résoudre (E_2). En déduire les solutions de l'équation différentielle (E_1).

Déterminer la solution particulière φ de l'équation (E_1) telle que : $\varphi(0) = 0$; $\varphi'(0) = 0$.

13 On se propose de résoudre l'équation différentielle : $y' - 2y = \dfrac{-2}{1+e^{-2x}}$ (E).

1) Soit g une fonction dérivable et f la fonction définie par $f(x) = g(x)e^{2x}$. Montrer que f est solution de (E) si et seulement si

$$g'(x) = \frac{-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$$

2) En déduire toutes les solutions de (E).

14 A) Soit (E) l'équation différentielle du second ordre : $y'' - 3y' + 2y = 0$ (E).

1.a) Quelles sont les solutions de (E) ?

b) Quelle est la solution de (E) dont la courbe représentative $\mathscr{C}$ admet au point d'abscisse x = 0 la même tangente que la courbe $\mathscr{C}'$ représentative de $y = e^{2x}$. On dit que $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ sont tangentes.

2) Représenter dans un même repère orthonormé les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ dont on précisera les positions relatives.

3) λ étant un réel strictement positif, soit h_λ les fonctions telles que : $h_\lambda(x) = -2\lambda e^{2x} + 2\lambda e^x$

a) Montrer que h_λ est solution de (E).

b) Soit $\mathscr{C}_\lambda$ la courbe représentative de h_λ

Montrer que les courbes $\mathscr{C}_\lambda$ sont tangentes en leur point commun.

c) Préciser les positions relatives de $\mathscr{C}_\lambda$ et $\mathscr{C}$

B) Soit E' l'équation différentielle :

$y''-3y'+2y=-x^2+x+2$ (E').

1) Trouver un polynôme du second degré (***P***) solution de l'équation (E).

2) On pose : $f(x) = g(x) - \frac{1}{2}x^2 - x$.

Montrer que **f** est solution de E' si et seulement si g est solution de E. En déduire les fonctions **f** solutions de (E').

15 Résoudre l'équation différentielle $y''' + y'' = 0$ (poser Z= y'' et résoudre l'équation différentielle dont Z est solution).

16 Du double au triple

Une grandeur (non nulle) **y** évolue à une vitesse proportionnelle à elle-même. On sait que cette grandeur double tous les dix ans. Combien de temps lui faut-il pour tripler ?

17. Pour chacune des équations différentielles, déterminer une fonction g de la forme indiquée qui soit solution de l'équation (E), puis montrer qu'une fonction f est solution de (E) si et seulement si $(f-g)$ est une solution de l'équation sans second membre associée à (E), enfin déterminer toutes les solutions de (E).

1) $2y'+3y=6x^2-7x+2$ (E); g est un polynôme de degré 2

2) $y'+2y=e^{-2x}$ (E) ; $g : x \mapsto (ax+b)e^{-2x}$ (a,b réels)

3) $y'+y=\sin x$ (E); g: $x \mapsto \lambda \sin x+\mu \cos x$ (λ,μ réels)

4) $2y' - 3y = 6(x2 +x -1)$ (E) ; g : $x \mapsto P(x)e^{-3x}$;

où P étant un polynôme

5) a) $y' + y = x^3 +2$ (E_1) ; b) $y'' -4y = x^3 -1$

(E_2) g polynôme de degré 3.

6) a) $y'' + 2y'+ 5y = \sin x$ (E_1)

b) $y'' + 2\sqrt{3}\,y'- y = \cos x$ (E_2)

$g : x \mapsto \lambda\cos x + \mu\sin x$

7) $y'' - 5y' +6y = 3e^{4x}$; (E) ; $g : x \mapsto Ae^{4x}$

(A réel).

8) $y'' - 5y' +6y = 5e^{2x}$; (E) ;

$g : x \mapsto (Ax + B)e^{2x}$; (A ; B réels).

18 Soient (E) les équations différentielles :

$y'-y=-e^x$ **et** (Eo) **:** $y'-y=0$.

1° Vérifier que la fonction définie par :

$\mathbf{f(x)=(3-x)e^x}$ est solution de **(E).**

2° Résoudre l'équation différentielle **(Eo).**

3° Montrer que la fonction u est solution de **(E)** si et seulement si $\mathbf{u-u_0}$ est solution de **(Eo).**

4° En déduire les solutions de **(E).**

5° Déterminer la solution **f** de **(E)** qui s'annule en **1**.

19 Résoudre les équations différentielles du premier degré suivantes :

$\mathbf{x^3y'+x^2y=1}$; $\mathbf{y'-y\ln x=x^x}$;

$\mathbf{y'+2y=xe^{-x}}$ $\mathbf{y'+2y=xe^{-2x}}$;

$\mathbf{y'+y=x\cos x}$

20 Loi de refroidissement de Newton

La loi de refroidissement de Newton s'énonce ainsi : *"la vitesse de refroidissement d'un corps inerte est proportionnelle à la différence de température entre ce corps et le milieu ambiant"*.

On suppose que la température de l'air ambiant est constante égale à 25°C. Dans ces conditions, la température d'un corps passe de 100°C à 70°C en 15 minutes. Au bout de combien de temps se trouvera-t-il à 40°C ?

21* Dissolution d'une substance

Une substance se dissout dans l'eau.
On admet que la vitesse de dissolution est proportionnelle àla quantité non encore dissoute. À l'instant $t = 0$ (t en minutes), on place 20 grammes de cette substance dans une grande quantité d'eau. Sachant que les dix premiers grammes se dissolvent en cinq minutes, donner une expression de la quantité dissoute f(t), en grammes, en fonction de t.

22* Modèle de Verhulst - Loi logistique continue

On repique des plants de 10 cm de haut sous une serre. On sait que la taille maximale de ces plantes est de 1m.

On note f(t) la taille, en m, d'un plant après t jours. (On a donc f(0) = 0,1).

Le modèle de Verhulst consiste à considérer que la vitesse de croissance de la plante évolue suivant la relation :

$\mathbf{f'(t)= af(t)(1-f(t))}$ où a est une constante dépendant des conditionsexpérimentales.

Autrement dit, f est une solution, sur $\mathbb{R}_+$, de l'équation différentielle : $\mathbf{y'=ay(1-y)}$.

1° On pose, pour tout t de $\mathbb{R}_+$: $\mathbf{z(t)=\dfrac{1}{f(t)}}$.

Déterminer une équation différentielle satisfaite par z,

puis la résoudre (sur $\mathbb{R}_+$). En déduire que

pour tout réel t de $\mathbb{R}_+$ on a : $\mathbf{f(t)=\dfrac{1}{9e^{-at}+1}}$

2° On observe qu'au bout de 15 jours, la plante mesure 19 cm. Calculer a (on arrondira à 10^{-2}près).

3° Étudier la limite de f en $+\infty$ et préciser son sens de variation.

4) Représenter graphiquement la fonction f.

5) Au bout de combien de jours, la plante dépassera-t-elle 90 cm de haut ?

23 Résoudre les équations différentielles du premier degré suivantes :

$\mathbf{y''-4y'+3y=e^{2x}}$; $\mathbf{y''+y'+y=x^3}$;

$\mathbf{y''+2y'+3y=xe^x}$ $\mathbf{y''-2y'+2y=e^x\sin x}$

24* Soit (E) l'équation différentielle

$9y''+\pi^2 y=0$

1) Résoudre l'équation différentielle (E) :

2) On considère par f la solution particulière de (E) dont la courbe représentative, dans un repère orthonormé passe par le point $P(1; -\sqrt{2})$ et admet en ce point une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

a) En utilisant les données ci-dessus, préciser $f(1)$ et $f'(1)$

b) Déterminer f

c) Vérifier que :

$f(x)=\sqrt{2}\cos[\frac{\pi}{3}(x+2)]$, pour tout réel x.

Montrer que f est périodique, de période 6.

25* **1.** On souhaite résoudre l'équation différentielle (E) de second ordre suivante à coefficients non constants :

$(x+1)y''+(2x-1)y'+(x-2)y=0.$

a) Poser $z=y'+y$. Montrer que z vérifie une équation différentielle du premier ordre.

b) Résoudre cette équation et en déduire les solutions de (E).

2. Résoudre l'équation différentielle :

$(1+x^2)y''-(1+x^2-2x)y'+2xy=0.$

26* On considère l'équation différentielle :

$y^{(3)}-6y''+12y'-8y=0\ (E)$

1) Vérifier que la fonction $y=e^{2x}$ est solution de (E)

2) Soit la fonction f trois fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et g la fonction $g(x)=f(x)\ e^{-2x}$

a) Démontrer que f est solution de (E) si et seulement si : $g^{(3)}=0$

b) En déduire sur $\mathbb{R}$ les solutions de (E)

27* Etude et représentation d'une solution d'une équation différentielle

PARTIE A :

1) On considère l'équation différentielle :

$y''+2y'+y=0$ (E).

Déterminer les solutions générales de (E)

2) Soit (E') l'équation différentielle

$y''+2y'+y=2e^{-x}$

a) Vérifier que la fonction $h(x)=x^2e^{-x}$ est une solution de (E')

b) Démontrer que la fonction f est solution de (E') si et seulement si $g=f-h$ est une solution de (E)

c) Déterminer toutes les solutions de (E)

d) Déterminer la solution de (E') qui vérifie $f(0)=4$ et $f'(0)=0$

PARTIE B :

1) Etudier les variations et tracer la courbe de la fonction $f(x)=(2+x)^2e^{-x}$

2) En remarquant que f est une solution de (E'), déterminer une primitive F de f sur $\mathbb{R}$ en calculant $\int_0^x (f''(t)+2f'(t)+f(t))dt$

3) On pose $I_n=\int_0^n f(t)dt$.

a) Exprimer I_n en fonction de n et interpréter graphiquement le résultat.

b) Etudier la convergence de la suite I_n puis en déduire l'aire de l'ensemble des points $M(x,y)$ du plan tels que :

$x\le 0$ et $0\le y\le f(x)$

CHAPITRE 9

Calcul vectoriel 1

Faire savoir

L'essentiel du chapitre

I. Angles orientés dans le plan orienté :

1) Modulo [2π] et modulo [π] :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls

- $(\vec{u}\,;\vec{v}) = \alpha\ [2\pi] \Leftrightarrow (\vec{u}\,;\vec{v}) = \alpha + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
- $(\vec{u}\,;\vec{v}) = \alpha\ [\pi] \Leftrightarrow (\vec{u}\,;\vec{v}) = \alpha + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
- $(\vec{u}\,;\vec{v}) = \alpha\ (\pi) \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l}(\vec{u}\,;\vec{v}) = \alpha \quad (2\pi)\\ \textbf{ou}\\ (\vec{u}\,;\vec{v}) = \alpha + \pi\ (2\pi)\end{array}\right.$

2) Double d'un angle orienté :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls, $2(\vec{u}\,;\vec{v})$ est toujours mesuré modulo 2π

3) Remplacement par un vecteur colinéaire :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls

- $\forall\, k \in \mathbb{R}_+^* : (\vec{u}\,;\vec{v}) = (\vec{u}\,;k\vec{v}) = (k\vec{u}\,;\vec{v})$
- $\forall k \in \mathbb{R}_-^* : (\vec{u}\,;\vec{v}) = (\vec{u}\,;k\vec{v}) + \pi = (k\vec{u}\,;\vec{v}) + \pi,$
- $\forall\, k \in \mathbb{R}^* : (\vec{u}\,;\vec{v}) = (\vec{u}\,;k\vec{v}),$ $= (k\vec{u}\,;\vec{v})\ ;\ [\pi]$
- $\forall k \in \mathbb{R}^* : : 2(\vec{u}\,;\vec{v}) = 2(\vec{u}\,;k\vec{v}) = 2(k\vec{u}\,;\vec{v}),$

4) Colinéarité – Orthogonalité :

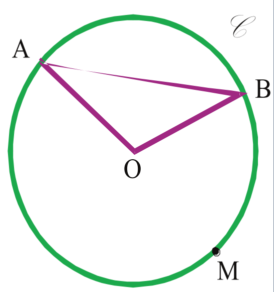
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls

- $(\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires$) \Leftrightarrow (2(\vec{u}\,;\vec{v}) = 0)$
- $(\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux$) \Leftrightarrow (2(\vec{u}\,;\vec{v}) = \pi)$

5) Théorème de l'angle inscrit :

Théorème :

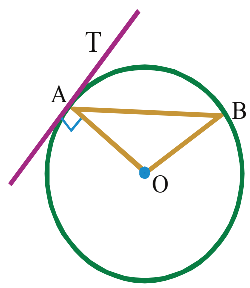
Soient [AB] une corde sur un cercle $\mathscr{C}$ de centre **O**.
Pour tout point **M** de $\mathscr{C}$ (différent de **A** et **B**) on a :
$2(\overrightarrow{MA}\,;\overrightarrow{MB}) = (\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OB})\ [2\pi]$.



6) Théorème de la tangente

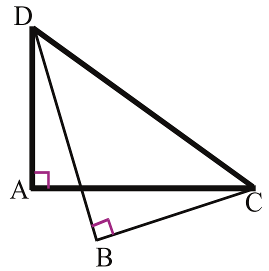
Théorème :

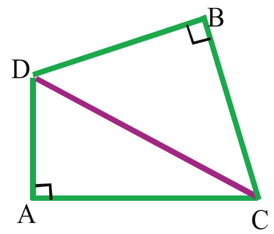
Soit [AB] une corde sur un cercle $\mathscr{C}$ de centre **O**.
Pour tout point **T** distinct de **A**, de la tangente à $\mathscr{C}$ en **A**, on a : $2(\overrightarrow{AT}\,;\overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OB})\ [2\pi]$



II. Cocyclicité remarquable :

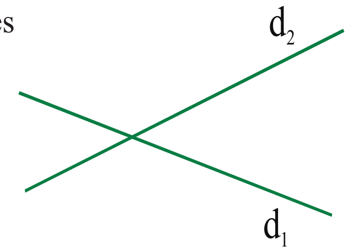
Les sommets de deux triangles rectangles de même hypoténuse sont cocycliques





Angles orientés de droites :

Soient d_1 et d_2 deux droites $(d_1 ; d_2)$ et $(d_2 ; d_1)$ désignent les deux angles orientés définis par d_1 et d_2.



- $(d_1 ; d_2) = (\vec{u}_1 ; \vec{u}_2)$ où $\vec{u}_1$ un vecteur directeur de d_1 ;
  $\vec{u}_2$ un vecteur directeur de d_2 ;
- $(d_1 ; d_2) = -(d_2 ; d_1)$
- Un angle orienté de deux droites est toujours mesuré modulo π
- L'écriture (AB ; CD) désigne un angle orienté de deux droites (AB) et (CD) lorsqu'elles sont définies : $(\mathbf{AB} ; CD) = (\mathbf{BA} ; CD) = (\mathbf{AB} ; DC)$
- d étant une droite, on a: $(d; d) = 0$
- $d_1 ; d_2 ; d_3$ étant trois droites, on : $(d_1 ; d_2) = (d_1 ; d_3) + (d_3 ; d_2)$ (Relation de Chasles)
- $d_1 ; d_2$ étant deux droites, on : (d_1 et d_2 sont parallèles) $\Leftrightarrow$ $(d_1 ; d_2) = 0$

  (d_1 et d_2 sont perpendiculaires) $\Leftrightarrow$ $(d_1 ; d_2) = \dfrac{\pi}{2}$
- Les points A ; B ; C ; D sont cocycliques ou alignés si et seulement si **(CA ; CB) = (DA ; DB)**.
- Trois points distincts deux à deux **A ; B ; C** sont alignés si et seulement si **(AB ; BC) = 0**.

III. Barycentre dans le plan ou dans l'espace :

1) Barycentre de (n) points pondérés :

Soit A un point du plan ou de l'espace, soit α un réel.

Le couple $(A ; \alpha)$ est- appelé point pondéré.

Soient $(A_1 ; \alpha_1) ; (A_2 ; \alpha_2) ;\dots ; (A_n ; \alpha_n)$ (n) points pondérés dans le plan ou dans l'espace, avec $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n \neq 0$.

Le point G est le barycentre du système $\{(A_k ; \alpha_k) , 1 \leq k \leq n\}$ si et seulement si $\sum_{k=1}^{k=n} \alpha_k \overrightarrow{GA_k} = \vec{0}$.

Lorsque $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = \alpha$, avec $\alpha \neq 0$, alors G est appelé isobarycentre des points $A_1 ; A_2 ; \dots ; A_n$.

Des opérations qui conserve G :

- **Homogénéité**
  En multipliant tous les réels $\alpha_1 ; \alpha_2 ; \dots ; \alpha_n$ par un même réel non nul, alors G est conservé.
- **Associativité**
  En remplaçant certains points par leur barycentre partiel affecté de la somme non nulle de leurs coefficients, alors G est conservé.

2) Fonction vectorielle de Leibniz :

Soient $A_1 ; A_2 ; \dots A_n$; n points dans le plan ou dans l'espace. Soit $\alpha_1 ; \alpha_2 ; \dots ; \alpha_n$; n réels.

Pour tout point M du plan ou de l'espace, on pose : $\mathbf{f}(\mathbf{M}) = \sum_{k=1}^{k=n} \alpha_k \overrightarrow{MA_k}$. **f** ainsi définie est appelée fonction vectorielle de Leibniz associée au système : $\{(A_k ; \alpha_k) , 1 \leq k \leq n\}$.

En plus

Si	Alors
$\sum\limits_{k=1}^{k=n} \alpha_k \neq 0$	$f(M) = (\sum\limits_{k=1}^{k=n} \alpha_k)\overrightarrow{MG}$ avec, $G = \text{bar}\left\{(A_k\ ;\ \alpha_k)\ ,\ 1 \leq k \leq n\right\}$ **Exemple :** $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 5\overrightarrow{MG}$ Avec $G = \textbf{bar}\begin{array}{c\|c\|c\|c} A & B & C & D \\ \hline 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}$
$\sum\limits_{k=1}^{k=n} \alpha_k = 0$	**Exemple :** **f**(M) est indépendant de M $f(M) = 3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD} = f(A)$ $= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DA}$

3) Barycentre de deux points :

Soit A ; B deux points distincts donnés dans le plan ou dans l'espace,

Soit α ; β deux réels donnés tels que : $\alpha + \beta \neq 0$

$G = \text{bar}\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline \alpha & \beta \end{array}$; $\alpha + \beta \neq 0 \Leftrightarrow \alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \dfrac{\beta}{\alpha + \beta}\overrightarrow{AB}$

$G = \text{bar}\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline \alpha & \beta \end{array}$; $\alpha + \beta \neq 0 \Leftrightarrow$ G ; A ; B sont alignés

$G = \text{bar}\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline \alpha & \beta \end{array}$; $\alpha + \beta \neq 0 \Leftrightarrow$ G Appartient à la droite (AB).

4) Barycentre de trois points :

Soit A ; B ; C trois points dans le plan ou l'espace, Soit α ; β ; γ trois réels tels que : $\boldsymbol{\alpha + \beta + \gamma \neq 0}$

$G = \text{bar}\begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \hline \alpha & \beta & \gamma \end{array}$; $\alpha + \beta + \gamma \neq 0 \Leftrightarrow \alpha\,\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} = \vec{0}$

$G = \text{bar}\begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \hline \alpha & \beta & \gamma \end{array}$; $\alpha + \beta + \gamma \neq 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \dfrac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AB} + \dfrac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AC}$

$G = \text{bar}\begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \hline \alpha & \beta & \gamma \end{array}$; $\alpha + \beta + \gamma \neq 0 \Leftrightarrow$ G ; A ; B ; C sont coplanaires.

5) Affixe d'un barycentre dans le plan complexe :

Soient A_1 ; A_2 ; …A_n ; n points dans le plan complexe, d'affixe respectives Z_1 ; Z_2 ; …Z_n .

Soit α_1 ; α_2 ; … ; α_n ; n réels tels que : $\sum_{k=1}^{k=n} \alpha_k \neq 0$,

$$G = \text{bar } \{(A_k \; ; \; \alpha_k) \; , \; 1 \leq k \leq n\} \text{ si et seulement si } Z_G = \frac{\sum_{k=1}^{k=n} \alpha_k Z_k}{\sum_{k=1}^{k=n} \alpha_k} .$$

IV. Déterminant dans le plan :

1) Déterminant dans une base quelconque :

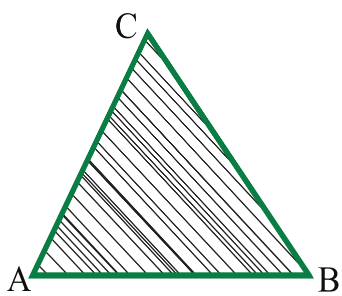
Soit une base quelconque $(\vec{i} \; ; \; \vec{j})$ dans le plan vectoriel

Si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ alors le déterminant de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le réel noté det($\vec{u}$; $\vec{v}$), et on a

- $\det(\vec{u} \; ; \; \vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = x.y' - x'y$
- $\det(\vec{v} \; ; \vec{u}) = -\det(\vec{u} \; ; \; \vec{v})$
- $\det(\alpha\vec{u} \; ; \vec{v}) = \det(\vec{u} \; ; \alpha\vec{v}) = \alpha \det(\vec{u} \; ; \; \vec{v})$; $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$.
- $\det(\vec{u} \; ; \vec{0}) = \det(\vec{0} \; ; \; \vec{u}) = 0$
- $\det(\vec{u} \; ; \vec{v} + \vec{w}) = \det(\vec{u} \; ; \; \vec{v}) + \det(\vec{u} \; ; \; \vec{w})$
- $(\vec{u}$ **et** $\vec{v}$ **sont colinéaires**$) \Leftrightarrow \det(\vec{u} \; ; \; \vec{v}) = 0$

2) Une autre expression de déterminant de deux vecteurs dans une base orthonormale :

Soient $(\vec{i} \; ; \; \vec{j})$ une base orthonormale ; $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls ; $\det(\vec{u} \; ; \; \vec{v}) = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \sin(\vec{u} \; ; \; \vec{v})$

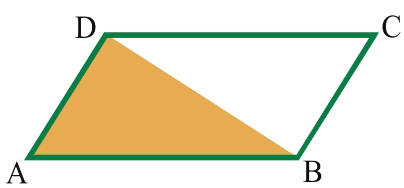


a) Aire d'un triangle dans le plan :

Soit **ABC** un triangle d'aire S. On a :

$$S = \frac{1}{2}\left|\det(\overrightarrow{AB} \; ; \; \overrightarrow{AC})\right| = \frac{1}{2}\left|\det(\overrightarrow{BA} \; ; \; \overrightarrow{BC})\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left|\det(\overrightarrow{CA} \; ; \; \overrightarrow{CB})\right|$$



b) Aire d'un parallélogramme dans le plan :

Soit **ABCD** un parallélogramme d'aire S,

on a $S = \left|\det(\overrightarrow{AB} \; ; \; \overrightarrow{AD})\right|$.

Savoir-faire

A. Applications :

Exercice 1 :

1) Dans un plan complexe, on considère quatre points **A ; B ; C ; D** distincts deux à deux et non alignés trois à trois.
On désigne par **a ; b ; c ; d** leurs affixes respectives.
Montrer que **A ; B ; C ; D** sont cocycliques si et seulement si $(\frac{d-a}{c-a})(\frac{c-b}{d-b})$ est un réel non nul.

2) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal (O ; $\vec{u}$; $\vec{v}$), on donne les points A(2) ; B(4i) ; C(3 + 3i). Montrer que les points O ; A ; B ; C sont cocycliques.

Solution :

1) A ; B ; C ; D sont cocycliques $\Leftrightarrow (\overrightarrow{AC} ; \overrightarrow{AD}) = (\overrightarrow{BC} ; \overrightarrow{BD})\ [\pi]$

$$\Leftrightarrow \arg(\frac{d-a}{c-a}) = \arg(\frac{d-b}{c-b})\ [\pi]$$

$$\Leftrightarrow \arg(\frac{d-a}{c-a}) - \arg(\frac{d-b}{c-b}) = 0\ [\pi]$$

$$\Leftrightarrow \arg\left[(\frac{d-a}{c-a})(\frac{c-b}{d-b})\right] = 0[\pi]$$

$$\Leftrightarrow (\frac{d-a}{c-a})(\frac{c-b}{d-b}) \in \mathbb{R}^*$$

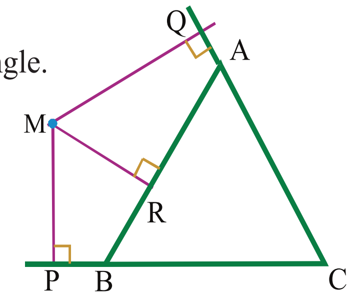
2) $$\left(\frac{Z_A - Z_0}{Z_B - Z_0}\right)\left(\frac{Z_B - Z_C}{Z_A - Z_C}\right) = \left(\frac{2}{4i}\right)\left(\frac{4i-3-3i}{2-3-3i}\right) = \left(\frac{1}{2i}\right)\left(\frac{-3+i}{-1-3i}\right)$$

$$= \frac{-3+i}{6-2i} = \frac{(-3+i)(6+2i)}{40} = \frac{-20}{40} = \frac{-1}{2} \in \mathbb{R}^*$$

Donc, les points O ; A ; B ; C sont cocycliques.

Exercice 2 :

ABC un triangle. M un point du plan distinct des sommets du triangle.
M se projette orthogonalement sur
(CB) ; (CA) ; (AB) respectivement en P ; Q ; R.



1) Montrer que : $(MA ; MB) = (CA ; CB) + (PR ; QR)$
2) En déduire que les points P ; Q ; R sont alignés si et seulement si, M appartient au cercle circonscrit au triangle **ABC**.

Solution :

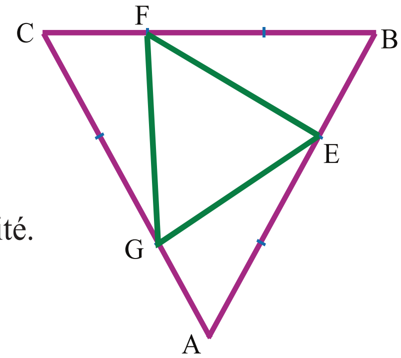
1) $(MA ; MB) = (MA ; MR) + (MR ; MB)$ (Chasles)
$= (QA ; QR) + (PR ; PB)$ (les points M ; A ; Q ; R d'une part et les points M ; B ; P ; R d'autre part sont les sommets de deux triangles rectangles de même hypoténuse), d'où
$(MA ; MB) = (CA ; QR) + (PR ; CB)$
$= (CA ; CB) + (PR ; CB) + (CB ; QR)$ (Chasles)
$= (CA ; CB) + (PR ; QR)$ (Chasles)

Donc ; $(MA ; MB) = (CA ; CB) + (PR ; QR)$.

2) Les points P ; Q ; R sont alignés $\Leftrightarrow (PR ; QR) = 0 \Leftrightarrow (MA ; MB) = (CA ; CB)$
$\Leftrightarrow$ les points M ; A ; B ; C sont cocycliques.

Donc les points P ; Q ; R sont alignés si et seulement si M appartient au cercle circonscrit au triangle ABC. (Dans ce cas : la droite (PQR) est appelée la droite de Simson définie par le point M relativement au triangle ABC).

Exercice 3 :



ABC un triangle.

E= $\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 1 & 2 \end{array}$; F= $\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline 1 & 2 \end{array}$;G= $\begin{array}{c|c} C & A \\ \hline 1 & 2 \end{array}$

On désigne par a ; b ; c ; e ; f ; g les affixes respectives des points A ; B ; C ; E ; F ; G dans le plan complexe.

Montrer que les triangles ABC et EFG ont le même centre de gravité.

Solution :

L'affixe du centre de gravité de ABC est $\mathbf{\frac{a+b+c}{3}}$

L'affixe du centre de gravité de EFG est $\mathbf{\frac{e+f+g}{3}}$. Or $e = \mathbf{\frac{a+2b}{3}}$; $\mathbf{f = \frac{b+2c}{3}}$; $\mathbf{g = \frac{c+2a}{3}}$.

Donc, $\mathbf{\frac{e+f+g}{3} = \frac{\frac{3a+3b+3c}{3}}{3} = \frac{a+b+c}{3}}$. Donc, ABC et EFG ont même centre de gravité.

Exercice 4 :

dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal (O ; $\vec{\mathbf{u}}$; $\vec{\mathbf{v}}$)

on donne les points : A(2 + i) ;B(1 + 2i) ; C(3 + 3i).

L'unité graphique est le centimètre.

1. Calculer l'aire S du triangle ABC.
2. Calculer AB et AC.
3. Déduire de ce qui précède la valeur exacte du sinus de l'angle $\hat{\mathbf{A}}$ géométrique du triangle ABC.

Solution :

1) $S = \frac{1}{2}\left|\mathbf{det}(\overrightarrow{\mathbf{AB}} ; \overrightarrow{\mathbf{AC}})\right| \mathbf{cm^2}$; Or $\overrightarrow{\mathbf{AB}}\begin{pmatrix} \mathbf{1-2} \\ \mathbf{2-1} \end{pmatrix} = \overrightarrow{\mathbf{AB}}\begin{pmatrix} \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$ **et** $\overrightarrow{\mathbf{AC}}\begin{pmatrix} \mathbf{3-2} \\ \mathbf{3-1} \end{pmatrix} = \overrightarrow{\mathbf{AC}}\begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \end{pmatrix}$;

Donc, $\mathbf{det}(\overrightarrow{\mathbf{AB}} ; \overrightarrow{\mathbf{AC}}) = \begin{vmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} \end{vmatrix}$ = -2– 1 = -3. D'où, $S = \frac{3}{2}$ cm^2.

2) AB $= \left|\mathbf{Z_B - Z_A}\right| = \left|\mathbf{1+2i-2-i}\right| = \left|\mathbf{-1+i}\right| = \sqrt{\mathbf{2}}$;

AC $= \left|\mathbf{Z_A - Z_C}\right| = \left|\mathbf{2+i-3-3i}\right| = \left|\mathbf{-1-2i}\right| = \sqrt{\mathbf{5}}$;

3) On a: $S = \frac{1}{2}$ AB × AC × sin **A** cm^2 $= \frac{\sqrt{10}}{2}$ sin **A** cm^2 $= \frac{3}{2}$ cm^2, d'où, sin **A** $= \frac{3}{\sqrt{10}}$

B. Exercices divers :

1. Montrer qu'un parallélogramme inscrit dans un cercle est un rectangle.

2. Montrer que les symétriques de l'orthocentre H d'un triangle ABC par rapport à ses côtés appartiennent au cercle Γ circonscrit à ce triangle.

2) On pose $\Gamma_1 = S_{AB}(\Gamma)$; $\Gamma_2 = S_{AC}(\Gamma)$; $\Gamma_3 = S_{BC}(\Gamma)$.

Montrer que les cercles : Γ_1 ; Γ_2 ; Γ_3 . sont concourantes en un point à préciser.

3. On construit un quadrilatère ABCD. I est le point d'intersection de ses diagonales.

P ; Q ; R ; S sont les projetés orthogonaux de I respectivement sur (AB) ; (BC) ; (CD) ; (DA).

Montrer les relations :

- $(PS\ ;\ PQ) = (AD\ ;\ AC) + (BD\ ;\ BC)$
- $(PQ\ ;\ RS) = (CB\ ;\ CA) + (DB\ ;\ DA)$

2) En déduire que P ; Q ; R ; S sont cocycliques si et seulement si (AC) et (BD) sont orthogonaux.

4. ABC un triangle de cercle circonscrit $\mathscr{C}$ de centre O. la tangente à $\mathscr{C}$ en C coupe (AB) en T. Soit D le symétrique de C par rapport à (AB). Les droites (AD) et (BC) se coupent en E.

Démontrer que les points B ; D ; E ; T sont cocycliques.

5. Dans le plan complexe, on donne les points A ; B ; C ; D d'affixes respectives :

3 + i ; 1 + 5i ; 4 + 4i ; 1 + i.

1) Démontrer que les points A ; B ; C ; D sont cocycliques.

2) Soit G = $\begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \hline 1 & 1 & 2 \end{array}$

Calculer l'affixe du point G.

6. Le plan complexe P est muni d'un repère $(O\ ;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v})$, on note f l'application qui a tout point M d'affixe Z ≠ -1 ; associe le point M' d'affixe Z' tel que :

$Z' = \dfrac{1}{\overline{Z}+1} - 1$. Soit I le point d'affixe -1.

7. **TRAP** est un trapèze, dont les bases **(TR)** et **(AP)** vérifient $\overrightarrow{RT} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AP}$.

Déterminer des réels α ; β ; γ de sorte que :

P = Bar $\begin{array}{c|c|c} A & R & T \\ \hline \alpha & B & \gamma \end{array}$

8. Soient trois points A ; B ; C non alignés et soit un réel k de l'intervalle [-1 ; 1]. On considère G_k le barycentre du système :

$\left\{(A\ ;\ k^2+1)\ ;\ (B\ ;\ k)\ ;(C\ ;\ -k)\right\}$.

1) Représenter les points A ; B ; C, le milieu de [BC] et construire les points G_1 et G_{-1}.

2) Justifier l'existence de G_k, pour tout k de [-1 ; 1] et démontrer que : $\overrightarrow{AG_k} = \dfrac{-k}{k^2+1}\overrightarrow{BC}$

3) Soit N un point de la droite (BC). N peut-il être un point G_k ? Justifier.

4) Etablir le tableau des variations de la fonction **f** définie sur [-1 ; 1] par : $f(x) = \dfrac{-x}{x^2+1}$.

5) En déduire l'ensemble des points G_k, lorsque k décrit [-1 ; 1].

9. 1) Construire un triangle ABC tel que : AC = 15 ; AB = 9 ; BC = 32.

Quelle est sa nature ?

2) Déterminer et construire l'ensemble Δ des points M du plan tels que : $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

3) Déterminer et construire l'ensemble Γ des points M du plan tels que : $\left\|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = \left\|\overrightarrow{CA}\right\|$

4) Démontrer que Γ est aussi caractérisée par : $\left\|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = \left\|\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\|$.

10 Soit ABCD un tétraèdre, on considère :

K = bar $\{(A;2)\ ;\ (D;1)\}$ et

G = bar $\{(B\ ;\ 2)\ ;\ (C\ ;\ 2)\ ;\ (D\ ;-1)\}$.

Montrer que le milieu **I** du segment [GK] appartient au plan (ABC).

1) Vérifier que pour tout point M distinct de I, on a, M' qui est distinct de I.

2) Déterminer $(\overrightarrow{IM}\ ;\ \overrightarrow{IM'})$. que peut-on en déduire pour les points I ; M ; M' ?

$H = \text{bar}\ \{(B\ ;\ 2)\ ;\ (C\ ;\ -3)\}$.

1) Démontrer que F ; G ; H sont alignés ?

2) Les points B ; C ; F ; G sont-ils coplanaires.

11 Le théorème de Ménélaus (vers l'an 100).

On considère un triangle ABC et trois points P ; Q ; R sur (BC), (AC) et (AB) respectivement, distincts des points A ; B ; C.

1) Justifier l'existence des trois réels non nuls, p ; q ; r tels que :

$P = \text{bar}\ \{(B\ ;\ 1)\ ;\ (C\ ;\ -p)\}$;

$Q = \text{bar}\{(C\ ;\ 1)\ ;\ (A\ ;\ -q)\}$

$R = \text{bar}\{(A\ ;\ 1)\ ;\ (B\ ;\ -r)\}$

2) Dans le repère (A ; $\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AC}$), déterminer les coordonnées des points R ; Q, puis P.

3) Déterminer det($\overrightarrow{PQ}\ ;\ \overrightarrow{PR}$) . En déduire que les points P ; Q ; R sont alignés si et seulement si pqr = 1.

4) Application

On donne R symétrique de B par rapport à A et Q milieu de [AC]. (RQ) coupe (BC) en P. Quelle est la position de P sur la droite (BC) ?

12 Dans l'espace, comparer l'isobarycentre des quatre sommets d'un tétraèdre avec celui des sommets du tétraèdre formé des centres de gravité de chacune de ses faces.

13 Montrer les propriétés du déterminant suivant :

$\det(\vec{u}\ ;\ \vec{0}) = 0$ • $\det(\vec{v}\ ;\ \vec{u}) = -\det(\vec{u}\ ;\vec{v})$;

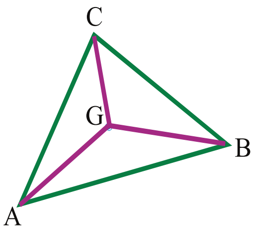
• $\det(\alpha\vec{u};\vec{v}) = \det(\vec{u}\ ;\alpha\vec{v}) = \alpha\det(\vec{u}\ ;\vec{v})\ ;\forall\alpha\in\mathbb{R}$

• $\det(\vec{u}\ ;\ \vec{v}+\vec{w}) = \det(\vec{u}\ ;\ \vec{v}) + \det(\vec{u}\ ;\ \vec{w})$

14 ABC un triangle. G un point situé à l'intérieur de ce triangle.

1) On se propose de montrer que :

$G = \text{bar}\ \begin{array}{|c|c|c|}\hline A & B & C \\ \hline \text{Aire GBC} & \text{Aire GCA} & \text{Aire GAB} \\ \hline\end{array}$



On pose $x = \det(\overrightarrow{GB}\ ;\ \overrightarrow{GC})$;

$y = \det(\overrightarrow{GC}\ ;\ \overrightarrow{GA})$;

$z = \det(\overrightarrow{GA}\ ;\ \overrightarrow{GB})$.

a) Expliquer pourquoi x ; y ; z ont le même signe.

b) On pose : $\vec{u} = x\overrightarrow{GA} + y\overrightarrow{GB} + z\overrightarrow{GC}$.

$E = \text{bar}\ \{(A\ ;\ -1)\ ;\ (B\ ;\ 2)\ ;\ (C\ ;-3)\}$;

F milieu de [ED].

$G = \text{bar}\ \{(A\ ;\ 1)\ ;\ (D\ ;\ 2)\}$;

Montrer que $\vec{u}$ est colinéaire à chacun des vecteurs $\overrightarrow{GA}\ ;\ \overrightarrow{GB}\ ;\ \overrightarrow{GC}$. En déduire la valeur de $\vec{u}$ et conclure

2) Application

a) Soit G le centre de gravité de ABC.

Montrer que aire(GBC) = aire(GCA) = aire (GAB).

En déduire que: $G = \text{bar}\ \begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ 1 & 1 & 1 \end{array}$

b) Soit **I** le centre du cercle inscrit au triangle ABC. Soit r le rayon de ce cercle.

Vérifie que :

• $\text{aire(GBC)} = \dfrac{rbc}{2}$

• $\text{aire(GCA)} = \dfrac{rca}{2}$

• $\text{aire(GAB)} = \dfrac{rab}{2}$

En déduire que :

$I = \text{bar}\ \begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ BC & CA & AB \end{array}$

c) Soit H l'orthocentre du triangle ABC.

Montrer que : $\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HC}.\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{HA}.\overrightarrow{HB}$

En déduire que: $H = \text{bar}\ \begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \tan\hat{A} & \tan\hat{B} & \tan\hat{C} \end{array}$

CHAPITRE 10

Calcul vectoriel 2

Faire savoir

L'essentiel du chapitre

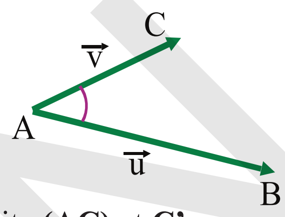
I. Produit scalaire de deux vecteurs dans le plan ou dans l'espace :

1) Définitions (équivalentes) – Orthogonalité :

- Soit $\vec{u}$ un vecteur ; $\vec{u}.\vec{o} = \vec{o}.\vec{u} = 0$
- Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls ;

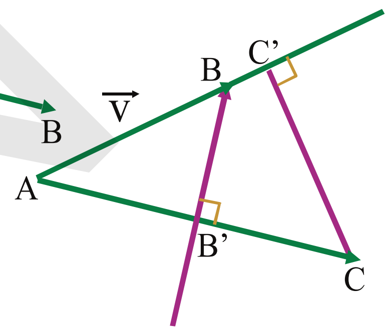
avec $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$; $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

On a : $\vec{u}.\vec{v} = AB \times AC \times \cos B\hat{A}C$.



- Avec **B'** le projeté orthogonal de **B** sur la droite **(AC)** et **C'** projeté orthogonal de **C** sur la droite **(AB),**

On a : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overline{AB'} \times \overline{AC} = \overline{AB} \times \overline{AC'}$



- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u}.\vec{v} = 0$
- Avec : $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$; $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ dans un repère orthonormal du plan on a : $\vec{u}.\vec{v} = x.x' + y.y'$

$\vec{u} \perp \vec{v}$ si et seulement si $x.x' + y.y' = 0$.

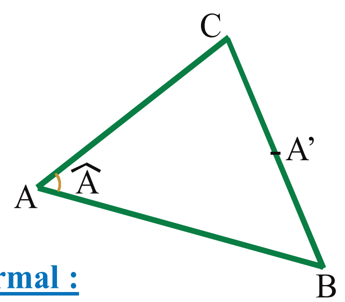
- Avec $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$; $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ dans un repère orthonormal de l'espace on a : $\vec{u}.\vec{v} = x.x' + y.y' + z.z'$.

$\vec{u} \perp \vec{v}$ si et seulement si $x.x' + y.y' + z.z' = 0$.

2) Relations fondamentales dans un triangle :

Soit **ABC** un triangle, **A'** milieu de **[BC].**

- $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos \hat{A}$
- $AB^2 + AC^2 = 2AA'^2 + \dfrac{BC^2}{2}$.



3) Distance dans le plan ou l'espace muni d'un repère orthonormal :

- Si $A(x_A ; y_A)$; $B(x_B ; y_B)$ dans un repère orthonormal du plan,

alors $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

- Si $A(x_A ; y_A ; z_A)$; $B(x_B ; y_B ; z_B)$ dans un repère orthonormal de l'espace,

alors $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$.

4) Equation cartésienne d'une droite dans le plan, où dans l'espace :

- Soit $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ un vecteur non nul donné dans une base orthonormale du plan.

L'ensemble des points **M(x ; y)** tels que : $\mathbf{ax + by + c = 0}$, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}$ (donné) est une droite de vecteur normal $\vec{n}$.

- Soit $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ un vecteur non nul donné dans une base orthonormale de l'espace.

L'ensemble des points **M(x ; y ; z)** tels que $\mathbf{ax + by + cz + d = 0}$, $\mathbf{d} \in \mathbb{R}$ (donné) est un plan de vecteur normal $\vec{n}$.

5) Distance d'un point à une droite, d'un point à un plan :

- Soit $A(x_0 ; y_0)$ un point donné et $\mathcal{d}$ une droite donnée d'équation cartésienne $\mathbf{ax + by + c = 0}$, dans un repère orthonormal du plan

Soit H le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{d}$ alors, On a :

AH est la distance de **A** à $\mathcal{d}$ et $\mathbf{AH} = \dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

- Soit $A(x_0 ; y_0 ; z_0)$ un point donné et $\mathcal{P}$ un plan donné d'équation cartésienne $\mathbf{ax + by + cz + d = 0}$, dans un repère orthonormal de l'espace.

Soit **H** le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{P}$ alors.

(Si $A \in \mathcal{P}$ alors $\mathbf{H = A}$ et Si $A \notin \mathcal{P}$ alors $H \in \mathcal{P}$ **et** $\overrightarrow{AH}$ est un vecteur normal de $\mathcal{P}$).

On a : **AH** est la distance de A à $\mathcal{P}$ et $\mathbf{AH} = \dfrac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

6) Fonction scalaire de Leibniz :

Soient $A_1 ; A_2 ; \dots ; A_n$ n points dans le plan ou dans l'espace. Soient $\alpha_1 ; \alpha_2 ; \alpha_3 ; \dots ; \alpha_n$ **n** réels.

Pour tout point **M** du plan ou de l'espace, on pose : $\varphi(M) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \left\|\overrightarrow{MA_k}\right\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k MA_k^2$.

f ainsi définie est appelée fonction scalaire de Leibniz associée au système $\{(A_k ; \alpha_k) \; ; \; 1 \le k \le n\}$.

En plus

Si	Alors
$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \neq 0$	($\varphi(M) = \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k\right) MG^2 + \varphi(G)$, $G = \text{bar}\{(A_k ; \alpha_k) \; ; \; 1 \le k \le n\}$. Exemple $\varphi(M) = MA^2 + 2MB^2 + MC^2 + MD^2 = 5MG^2 + \varphi(G)$ Avec $G = \text{bar} \begin{array}{c\|c\|c\|c} A & B & C & D \\ \hline 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}$
$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 0$	$\varphi(M) = 2\overrightarrow{MI}.\vec{u} + \varphi(I)$, où **I** est un point quelconque et $\vec{u} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \overrightarrow{IA_k}$ qui ne dépend pas de **I**. Par exemple : $\varphi(M) = 3MA^2 - MB^2 - MC^2 - MD^2 = 2\overrightarrow{MA}.\vec{u} + \varphi(A)$, avec $\vec{u} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DA}$.

En plus, avec :

- k réel
- L_k l'ensemble des points **M** du plan tels que $\varphi(M) = k$
- S_k l'ensemble des points **M** de l'espace tels que $\varphi(M) = k$

On a :

Si	**Alors**	
$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \neq 0$	L_k est • soit vide, • soit réduit à **G**. • soit un cercle de centre **G**	S_k est • soit vide • soit réduit à **G** • soit une sphère de centre **G**
$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 0$	$\forall k \in \mathbb{R}$; L_k est une droite de vecteur normal $\vec{u}$.	$\forall k \in \mathbb{R}$; S_k est un plan de vecteur normal $\vec{u}$.
	$\vec{u}$ étant le vecteur $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \overrightarrow{MA_k}$	

7) Equation cartésienne d'un cercle, d'une sphère, d'un cylindre, d'un cône :

- Soit $\Omega(x_0 ; y_0)$ dans un repère orthonormal du plan et **R** un réel strictement positif.

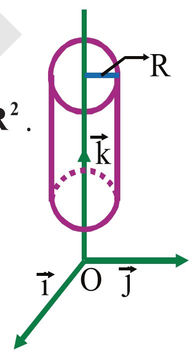
L'ensemble **M(x ; y)** tels que: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$ est le cercle de centre Ω et de rayon **R**.

- Soit $\Omega(x_0 ; y_0 ; z_0)$ dans un repère orthonormal de l'espace et R un réel strictement positif.

L'ensemble $M(x ; y ; z)$ tels que: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$ est la sphère de centre Ω et de rayon R.

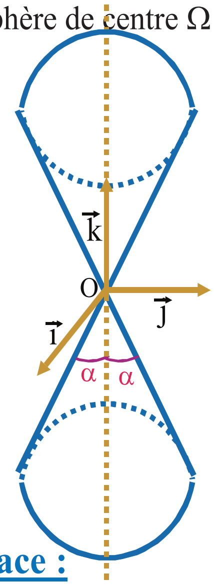
- L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$.

Le cylindre de rayon R, admettant l'axe des côtes pour axe de révolution, a pour équation cartésienne : $x^2 + y^2 = R^2$.



- L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$.

Un cône de révolution de sommet O, admettant l'axe des côtes pour axe de révolution, a pour équation cartésienne : $x^2 + y^2 - \beta z^2 = 0$,
où β est un réel strictement positif.
(β = tan²α où 2α est l'angle au sommet du cône).



II. Représentation paramétrique de droites et de plans dans l'espace :

Position relative de droites et de plans dans l'espace

1) Equation paramétrique d'une droite dans l'espace :

- L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$.

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ un vecteur non nul donné. Soit $A(x_0 ; y_0 ; z_0)$ un point donné.

L'ensemble des points M(x ; y ; z) tels que : $\left| \begin{array}{l} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \quad t \in \mathbb{R} \\ z = z_0 + ct \end{array} \right.$ est la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.

2) Représentation paramétrique d'un plan où dans l'espace :

- L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\vec{j}\ ;\vec{k})$.

Soit $\vec{u}_1\begin{pmatrix}a_1\\b_1\\c_1\end{pmatrix}$; $\vec{u}_2\begin{pmatrix}a_2\\b_2\\c_2\end{pmatrix}$ deux vecteurs non colinéaires donnés.

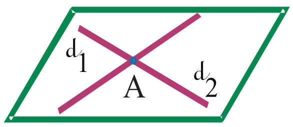
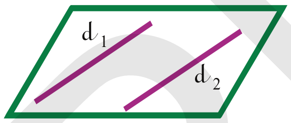
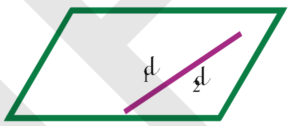
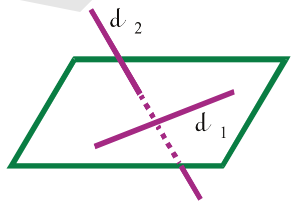
Soit $A(x_0\ ;\ y_0\ ;\ z_0)$ un point donné. L'ensemble des points $M(x\ ;\ y\ ;\ z)$ tels que:

$$\begin{cases} x = x_0 + a_1t_1 + a_2t_2 \\ y = y_0 + b_1t_1 + b_2t_2 \ ;\ (t_1;t_2) \in \mathbb{R}^2 \\ z = z_0 + c_1t_1 + c_2t_2 \end{cases}$$

est le plan contenant A et de vecteurs directeurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$.

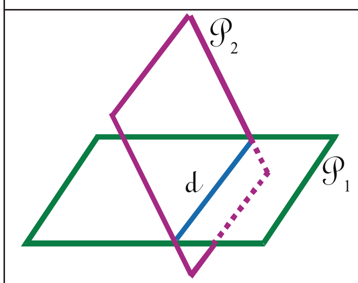
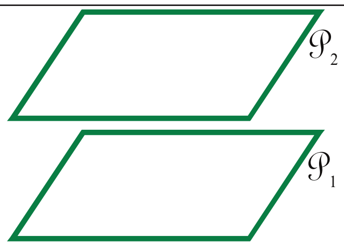
3) Positions relatives de deux droites dans l'espace :

Soient d_1 et d_2 deux droites dans l'espace.

Coplanaires		non coplanaires
Sécantes  $d_1 \cap d_2 = \{A\}$	Strictement parallèles (d_1 // d_2)  $d_1 \cap d_2 = \varnothing$  $d_1 = d_2$ Confondues	Aucun plan ne contient les deux droites  $d_1 \cap d_2 = \varnothing$

4) Positions relatives de deux plans dans l'espace :

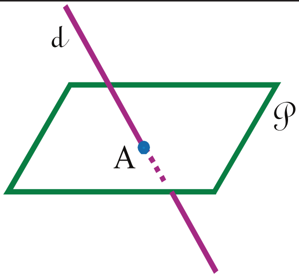
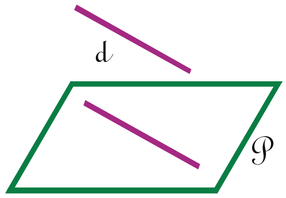
Soient $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ deux plans dans l'espace

Sécants	Parallèles ($\mathcal{P}_1$ // $\mathcal{P}_2$)	
 $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 = d$	 $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 = \varnothing$ (strictement parallèles)	 $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_2$. Confondues

Les théorèmes de la géométrie plane s'appliquent dans tout plan de l'espace.

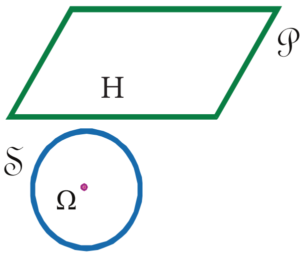
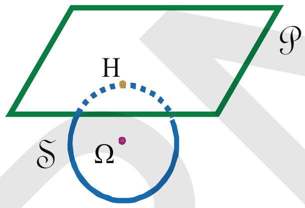
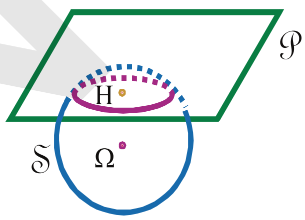
5) Positions relatives d'une droite d'un le plan où dans l'espace :

Soit d une droite et $\mathscr{P}$ un plan de l'espace.

Sécants	Parallèles ($d // \mathscr{P}$)	
 $d \cap \mathscr{P} = \{A\}$.	 d incluse dans $\mathscr{P}$. ($d \subset \mathscr{P}$)	d est parallèle strictement à une droite incluse dans $\mathscr{P}$.  $d \cap \mathscr{P} = \varnothing$.

6) Positions relatives d'une sphère et d'un plan dans l'espace :

Soit $\mathscr{S}$ une sphère de centre Ω et de rayon R Soit $\mathscr{P}$ un plan. Soit H le projeté orthogonal de Ω sur $\mathscr{P}$.

Disjoints	Sécants	
 $\Omega H > R$ $\mathscr{S} \cap \mathscr{P} = \varnothing$.	 $\Omega H = R$ $\mathscr{S} \cap \mathscr{P} = \{H\}$.	 $\Omega H < R$ $\mathscr{S} \cap \mathscr{P} = \mathscr{C}$ (un cercle)

III. Orientation de l'espace – Produit vectoriel :

L'observateur d'Ampère met ses pieds en O, la tête dirigée dans le sens du vecteur $\vec{k}$, son regard dans le sens du vecteur $\vec{i}$; il lève la main gauche qui correspond alors au sens du vecteur $\vec{j}$ sur la figure 1.

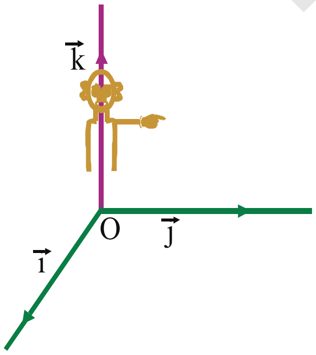


Fig. 1

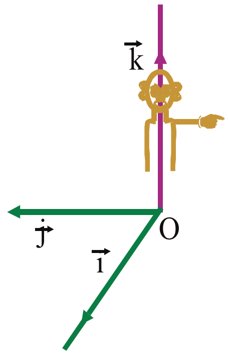


Fig.2

La main gauche et le vecteur $\vec{j}$ sont dans le même demi espace de frontière (xoz).

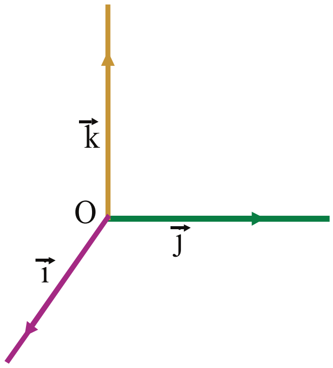
La main gauche et le vecteur $\vec{j}$ nesont pas dans le même demi espace de frontière (xoz).

Alors, le repère $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$ sur la figure 1 est un repère direct de l'espace et la base $(\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$ est une base directe et le repère $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$ sur la figure 2 est un repère indirect de l'espace et la base $(\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$ est une base indirecte.

1) Orientation de l'espace :

L'espace est orienté lorsque on y distingue ces deux types de repères :

- repères directs
- repères indirects
- La représentation standard d'un repère direct $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$ de l'espace est



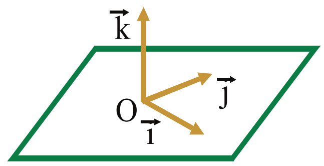
2) Orientation d'un plan dans l'espace :

Soit $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$ un repère d'un plan $\mathcal{P}$ de l'espace.

Soit $\vec{k}$ un vecteur normal à $\mathcal{P}$.

Si : le repère $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$ est un repère direct de l'espace,

alors : le repère $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$ est un repère direct du plan $\mathcal{P}$.



3) Produit vectoriel de deux vecteurs :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs $\vec{u}\wedge\vec{v}$ ($\vec{u}$ **vectoriel** $\vec{v}$) est un vecteur.

Si	alors
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires	$\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{0}$
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires	• La direction de $\vec{u}\wedge\vec{v}$: $\vec{u}\wedge\vec{v}$ est normal au plan de base $(\vec{u};\vec{v})$. • Le sens de $\vec{u}\wedge\vec{v}$: $(\vec{u}\,;\,\vec{v}\,;\,\vec{u}\wedge\vec{v})$ est une base directe. • La norme de $\vec{u}\wedge\vec{v}$ $\lVert\vec{u}\wedge\vec{v}\rVert=\lVert\vec{u}\rVert\lVert\vec{v}\rVert\left\lvert\sin(\vec{u}\,;\vec{v})\right\rvert$

Propriétés :

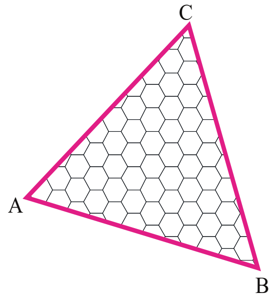
Quels que soient les vecteurs $\vec{u}\,;\vec{v}\,;\,\vec{w}$ et le réel α :

- $\vec{v}\wedge\vec{u}=-\vec{u}\wedge\vec{v}$ • $(\alpha\vec{u})\wedge\vec{v}=\vec{u}\wedge(\alpha\vec{v})=\alpha(\vec{u}\wedge\vec{v})$ • $\vec{u}\wedge(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\wedge\vec{v}+\vec{u}\wedge\vec{w}$
- Soit $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$ un repère orthonormal direct de l'espace, on a :
-
  - $\vec{i}\wedge\vec{j}=\vec{k}$ ▪ $\vec{j}\wedge\vec{k}=\vec{i}$ ▪ $\vec{k}\wedge\vec{i}=\vec{j}$
  - $\vec{j}\wedge\vec{i}=-\vec{k}$ ▪ $\vec{k}\wedge\vec{j}=-\vec{i}$ ▪ $\vec{i}\wedge\vec{k}=-\vec{j}$
- Si $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ dans un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$ de l'espace, alors
  - $x_{\vec{u}\wedge\vec{v}}=\begin{vmatrix}y & y'\\ z & z'\end{vmatrix}=yz'-zy'$ ▪ $y_{\vec{u}\wedge\vec{v}}=\begin{vmatrix}z & z'\\ x & x'\end{vmatrix}=zx'-xz'$ ▪ $z_{\vec{u}\wedge\vec{v}}=\begin{vmatrix}x & x'\\ y & y'\end{vmatrix}=xy'-yx'$

- **Aire d'un triangle :**

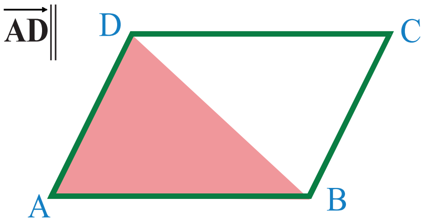
Soit **ABC** un triangle d'aire $\mathcal{S}$ on a :

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\| = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{BC}\right\| = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{CA} \wedge \overrightarrow{CB}\right\|$$



- **Aire d'un parallélogramme :**

Soit **ABCD** un parallélogramme d'aire $\mathcal{S}$ on a : $\mathbf{S} = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}\right\|$



IV. Projection :

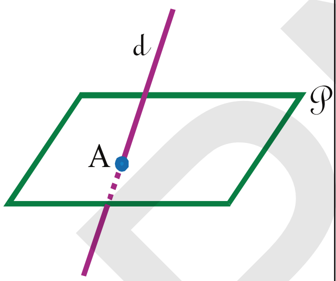
1) Projections dans l'espace (projections ponctuelles) :

Soit $\mathcal{P}$ un plan et $\mathcal{d}$ une droite tels que : $\mathcal{P} \cap \mathcal{d} = \{A\}$.

- La projection p_1 sur $\mathcal{P}$ parallèlement à $\mathcal{d}$ est définie par :

$M \in \mathcal{P} \Leftrightarrow p_1(M) = M$;

$M \in \mathcal{d} \Leftrightarrow p_1(M) = A$;



$(M \notin \mathcal{P} \cup \mathcal{d};\ p_1(M) = M')$

$\Leftrightarrow\ (M' \in \mathcal{P}$ et $(MM') \,//\, \mathcal{d})$

- $p_1 \circ p_1 = p_1$

- La projection p_2 sur $\mathcal{d}$ parallèlement à $\mathcal{P}$ est définie par :

$M \in \mathcal{d} \Leftrightarrow p_2(M) = M$;

$M \in \mathcal{P} \Leftrightarrow p_2(M) = A$;

$(M \notin \mathcal{d} \cup \mathcal{P};\ p_2(M) = M') \Leftrightarrow$

$(M' \in \mathcal{d}$ et $(MM') \,//\, \mathcal{P})$

- $p_2 \circ p_2 = p_2$

❖ La projection ponctuelle conserve le barycentre.

2) La projection vectorielle :

Soit p une projection ponctuelle et A un point donné d'image A' par p. Notons M' l'image par p d'un point M quelconque.

On appelle projection vectorielle associée à **p**, l'application notée ρ définie par : $\rho(\overrightarrow{AM}) = \overrightarrow{A'M'}$.

Quels que soient les vecteurs $\vec{u}$ **et** $\vec{v}$ et pour tout réel α, on a :

$\rho\left(\vec{u}+\vec{v}\right) = \rho\left(\vec{u}\right) + \rho\left(\vec{v}\right)$ et $\rho\left(\alpha\vec{u}\right) = \alpha\rho\left(\vec{u}\right)$.On résume ces propriétés en disant que ρ est une application linéaire.

Savoir- faire

A. Applications :

Exercice 1 :

ABCD un carré de centre **O**. On pose **AB = a** (a> 0).

1) Déterminer et construire l'ensemble Γ des points **M** du plan tels que : $\mathbf{MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 4a^2}$.

2) Déterminer et construire l'ensemble Δ des points M du plan tels que : $\mathbf{MA^2 + MB^2 + MC^2 - 3MD^2 = -4a^2}$.

3) Que représente Δ pour Γ?

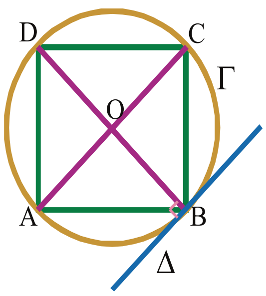
Solution :

1) On a $O = \text{bar}\begin{array}{c|c|c|c} A & B & C & D \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}$

$AA^2 + AB^2 + AC^2 + AD^2 = a^2 + 2a^2 + a^2 = 4a^2$

Donc, Γ est le cercle de centre O passant par A,

d'où (Γ est le cercle circonscrit au carré ABCD).



2) on a : 1 + 1 + 1 – 3 = 0, donc Δ est une droite de vecteur normal

$\overrightarrow{\mathbf{MA}} + \overrightarrow{\mathbf{MB}} + \overrightarrow{\mathbf{MC}} - 3\overrightarrow{\mathbf{MD}} = \overrightarrow{\mathbf{DA}} + \overrightarrow{\mathbf{DB}} + \overrightarrow{\mathbf{DC}} = \overrightarrow{\mathbf{DB}} + \overrightarrow{\mathbf{DB}} = 2\overrightarrow{\mathbf{DB}}$

D'où Δ est une droite perpendiculaire à la droite (BD).

Or ; $BA^2 + BB^2 + BC^2 - 3BD^2 = a^2 + a^2 - 3(2a^2) = -4a^2$,

donc B∈Δ, d'où Δ est la perpendiculaire à (BD) en B.

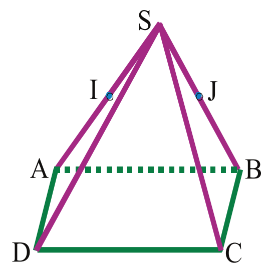
3) Δ est la tangente à Γ en B.

Exercice 2 :

La pyramide **SABCD** est à base rectangulaire.

I et J les milieux respectifs de [SA] et [SB].

Déterminer l'intersection des plans (DIJ) et (SAC).



Solution :

On a : I ∈plan (DIJ) ; or I ∈(SA) et (SA) ⊂ plan(SAC) ; donc I ∈plan(SAC),

d'où I ∈ plan(SAC) ∩ plan(DIJ).

On a : C ∈plan (SAC); or (DC) // (AB) et (AB) // (IJ), donc (DC) // (IJ), d'où (DC) // plan (DIJ); or D∈plan (DIJ), donc (DC) ⊂ plan (DIJ), d'où C∈plan (DIJ), donc C∈plan (DIJ) ∩ plan(SAC).

Donc l'intersection des plans (DIJ) et (SAC) est la droite (IC).

Exercice 3 :

L'espace est rapporté à un repère orthonormal .

Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation x + y + 3 = 0.

Soit Γ l'ensemble d'équation : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x = 0$.

1 Montrer que Γ est une sphère, préciser son centre Ω, et ses coordonnées.

2 Déterminer la position relative de Γ et $\mathcal{P}$.

3 Déterminer les plans tangents à Γ et parallèles à $\mathcal{P}$.

Solution :

1) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 + z^2 = (1)^2$; donc Γ est la sphère de rayon R = 1 et de centre $\Omega(1\ ;0\ ;0)$.

2) La distance de Ω au plan $\mathcal{P}$ est : $\dfrac{|1+0+3|}{\sqrt{(1)^2+(1)^2+(0)^2}} = \dfrac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} > R$; donc $\mathcal{P} \cap \Gamma = \varnothing$.

1) Un plan est parallèle à $\mathcal{P}$ si et seulement si il a une équation de la forme $x + y + d = 0$; $d \in \mathbb{R}$.

Le plan est tangent à Γ si et seulement si $\dfrac{|1+0+d|}{\sqrt{(1)^2+(1)^2+(0)^2}} = R = 1$

$\Leftrightarrow |1+d| = \sqrt{2} \Leftrightarrow 1 + d = \sqrt{2}$ ou $1 + d = -\sqrt{2} \Leftrightarrow d = -1 + \sqrt{2}$ ou $d = -1 - \sqrt{2}$.

Donc, il existe deux plans tangents à Γ et parallèles à $\mathcal{P}$ qui sont :

$\mathcal{P}_1 : x + y - 1 + \sqrt{2} = 0$ et $\mathcal{P}_2 : x + y - 1 - \sqrt{2} = 0$.

Exercice 4 :

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal direct $(O\ ;\vec{i}\ ;\vec{j}\ ;\vec{k})$, on donne les points :
$A(1\ ;1\ ;0)$; $B(1\ ;0\ ;1)$; $C(-1\ ;1\ ;1)$.

1. Montrer que les points A ; B ; C ne sont pas alignés.
2. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).
3. Déterminer une représentation paramétrique de la droite d orthogonale au plan (ABC) en A.

Solution :

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1-1\\0-1\\1-0\end{pmatrix} = \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1-1\\1-1\\1-0\end{pmatrix} = \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$.

Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ sont :

- Abscisse : $\begin{vmatrix}-1 & 0\\0 & 1\end{vmatrix} = -1$; • Ordonnée : $-\begin{vmatrix}0 & -2\\1 & 1\end{vmatrix} = -2$; • Côte : $\begin{vmatrix}0 & -2\\-1 & 0\end{vmatrix} = -2$;

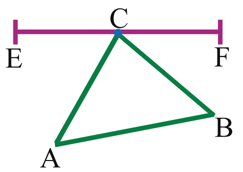
Donc ; $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$; d'où les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires, donc les points A ; B ; C ne sont pas alignés.

1) $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est un vecteur normal du plan (ABC), donc (ABC) a une équation de la forme ;
$-x - y - 2z + d = 0$, or $A \in$ plan (ABC), donc $-1 -1 + d = 0$ d'où $d = 2$.
Donc, une équation cartésienne du plan (ABC) est $x + y + 2z - 2 = 0$.

2) Un vecteur directeur de la droite d a pour coordonnées $\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$, or d passe par le point A ; donc une représentation paramétrique de d est : $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + t \ ;\ t \in \mathbb{R}. \\ z = 2t \end{cases}$

B. Exercices divers :

1. ABC un triangle isocèle en C.
Le point C est le milieu du segment [EF].
Montrer que :
$AE^2 + AF^2 = BE^2 + BF^2$.



2. $\mathscr{C}$ un cercle de diamètre [OB]. A un point de $\mathscr{C}$ distinct de O et B. H est le projeté orthogonal de A sur (OB). Une droite passant par O distincte de (OB) coupe (AH) en N et recoupe $\mathscr{C}$ en M. Montrer que $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON} = OA^2$.

3. A l'extérieur d'un triangle ABC, on construit les carrés ACEF et BCDG.

1) Montrer que : $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{CE}$ et que $\overrightarrow{CE}.\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CD}$.
2) En déduire que les segments [BE] et [AD] sont orthogonaux et de même longueur.

4. L'espace est muni d'un repère ort orthonormal direct $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\right)$. On considère le plan :
$\mathscr{P}_1 : x + y + 1 = 0$; $\mathscr{P}_2 : x - y + z = 0$.

1) Montrer que $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont orthogonaux.
   Soit $\mathscr{d}$ leur droite d'intersection, donner une représentation paramétrique de $\mathscr{d}$.
2) Soit A(1 ; 1 ; 1), déterminer les distances de A à $\mathscr{P}_1$; $\mathscr{P}_2$ puis à $\mathscr{d}$.

5. ABCD un carré direct de centre O, et de côté AB = a (a > 0).
E est le symétrique de C par rapport à D.

1) Faire une figure.
2) Déterminer les ensembles suivants Γ_1 ; Γ_2 ; Γ_3 ; Γ_4 des points M du plan : $M\in\Gamma_1 \Leftrightarrow \left\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = a$; $M\in\Gamma_2 \Leftrightarrow$ $MA^2 - MB^2 + MC^2 = a^2$; $M\in\Gamma_3 \Leftrightarrow$ $(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MD}).(2\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0$; $M\in\Gamma_4$ $\Leftrightarrow \left\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{ME}\right\| = \left\|\overrightarrow{MD} - \overrightarrow{MC}\right\|$

Que remarquez-vous sur ces ensembles ?

3) Soit $k\in\mathbb{R}^*$. Soit f définie par : $f(M) = M' \Leftrightarrow$ $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + (1-k)\overrightarrow{MC}$
Pour quelles valeurs de k, f_k est elle une
b) Soit $k\in\mathbb{R}^* \setminus \{1\}$, Montrer que f_k admet un seul point invariant Ω_k.
Reconnaître f_k et donner ses éléments caractéristiques.
c) Déterminer et construire le lieu géométrique du point Ω_k lorsque k décrit $\mathbb{R}^* \setminus \{1\}$.
d) si $k = \dfrac{1}{2}$, déterminer et construire le lieu géométrique du centre de gravité G du triangle DMM' lorsque M décrit le cercle de diamètre [CE].

6. L'espace est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\right)$. Soit $\mathscr{d}$ la droite passant par le point A(1 ; -1 ; 2) et de vecteur directeur $\vec{u} = 3\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ et $\mathscr{d}'$ la droite passant par le point B(8 ; -1 ; 3) et de vecteur directeur $\vec{v} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$.

Démontrer que les droites $\mathscr{d}$ et $\mathscr{d}'$ sont coplanaires.

7. L'espace est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\right)$.

On Considère le cylindre $\mathscr{C}$ d'axe (O ; $\vec{k}$) qui passe par le point A(-3 ; 4 ; 2).

1) Déterminer une équation cartésienne de $\mathscr{C}$.
2) Soit le plan $\mathscr{P}$ d'équation y = p ($p\in\mathbb{R}$).
   Déterminer les valeurs du réel p pour que :
   a) $\mathscr{P}$ coupe $\mathscr{C}$ suivant une droite
   b) $\mathscr{P}$ coupe $\mathscr{C}$ suivant deux droites

8. L'espace est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\right)$. On considère le plan $\mathscr{P}$: y = 2 ; la sphère $\mathscr{S}$ de centre O et de rayon 3, et le cylindre $\mathscr{C}$ de révolution d'axe (Oy) et de rayon 2.
Déterminer les intersections :
$\mathscr{P}\cap\mathscr{S}$; $\mathscr{P}\cap\mathscr{C}$; $\mathscr{S}\cap\mathscr{C}$.

9. L'espace est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\ ;\ \vec{k}\right)$. On donne **A(2 ; 0 ; 3) ; B(1 ; 2 ; -1) ; C(5 ; -2 ; 1)**.

1) Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$,
2) Les points A ; B ; C sont-il alignés ?
Sinon, déterminer une équation cartésienne du plan **(ABC).**

Déterminer une représentation paramétrique de translation

10 ABC un triangle. 1) Montrer que : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CA} \wedge \overrightarrow{CB}$

2) En déduire que : $\dfrac{AB}{\sin\hat{C}} = \dfrac{AC}{\sin\hat{B}} = \dfrac{BC}{\sin\hat{A}}$

11 ABCDEFGH un cube.
L'espace est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(A\ ;\ \overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AD}\ ;\ \overrightarrow{AE}\right)$.

Déterminer les vecteurs :
$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AE}$; $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{BD} \wedge \overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AG}$

12 Soit ABCD un tétraèdre, on note respectivement B' ; C' ; D' les centres de gravités des triangles ACD ; ABD et ABC.
1) Montrer que les droites (B'D') et (BD) sont parallèles
2) Démontrer que les plans (BCD) et (B'C'D') sont parallèles.

13 On considère dans le plan $\mathcal{P}$ un triangle ABC non équilatéral. On pose : a = BC ; b = AC et c = AB. Soit O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC, G son centre de gravité et H son orthocentre. A' ; B' ; C' les milieux respectifs des segments [BC] ; [CA] ; [AB].
1) a) Montrer que le point N définie par : $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ est confondue avec H.
b) En déduire que les points O ; G ; H sont alignés.
2) Montrer que le vecteur $\vec{u}$ définie par : $\vec{u} = a^2\overrightarrow{BC} + b^2\overrightarrow{CA} + c^2\overrightarrow{AB}$ est différent de $\vec{0}$.
3) Soit f l'application définie de $\mathcal{P}$ dans $\mathbb{R}$ qui a tout point M associe le réel :
$f(M) = a^2\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{MA'} + b^2\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{MB'} + c^2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{MC'}$.
a) Déterminer l'image f(O) du point O.
b) Montrer que $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{GA'} = \dfrac{1}{6}(b^2 - c^2)$.
Calculer de manière analogue $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{GB'}$ et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{GC'}$
c) En déduire la valeur de f(G)
d) Montrer que $f(M) = \overrightarrow{MO}.\vec{u}$.
e) Déterminer l'ensemble des points M du plan $\mathcal{P}$ tel que f(M) = 0
f) Déterminer alors f(H).

14 ABC un triangle rectangle en A.
On pose AC = a ; AB = 2a (a > 0). Soit $m \in \mathbb{R}^*$.
On pose : $G_m = \text{bar}\begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \hline m & -1 & 1 \end{array}$
1) Construire G_1.
2) Déterminer l'ensemble E_1 des points G_m lorsque m décrit $\mathbb{R}^*$.
3) Déterminer les ensembles suivants :
a) E_2 des points M du plan tel que : $\left\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = \left\|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right\|$.
b) E_3 des points M du plan tel que : $MA^2 - MB^2 + MC^2 = 8a^2$.
c) E_4 des points M du plan tel que : $MA^2 - MB^2 + MC^2 = 9a^2$.
d) E_5 des points M du plan tel que : $-3a^2 \leq MA^2 - MB^2 + MC^2 \leq 9a^2$.

15 ABCDEFGH un pavé dans l'espace.
1) Montrer que : $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$
2) Soit I le point où la droite (AG) perce le plan (BDE)
a) En utilisant la projection sur (AG) dans la dire-ction du plan (BDE), montrer que : $\overrightarrow{AI} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AG}$.

En utilisant la projection sur le plan (BDE) dans la direction de la droite (AG), montrer que le point I est le centre de gravité du triangle BDE.

16 Soit $f(z) = \dfrac{1}{2}\left(z + i\bar{z}\right)$

1) Préciser $f \circ f$ et déterminer les ensembles :

$I_f = \{z \in \mathbb{C} / f(z) = z\}$;

$N_f = \{z \in \mathbb{C} / f(z) = 0\}$.

2) Soit F l'application du plan complexe, dans lui-même qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $f(z)$.

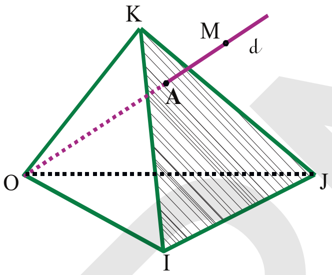
a) Préciser $F \circ F$ et déterminer les ensembles :

$D = \{M \in P / F(M) = M\}$;

$\Delta = \{M \in P / F(M) = O(\text{origine du plan complexe})\}$.

b) Démontrer que pour tout $M \in \mathcal{P}$, le point $f(M)$ appartient à D et que pour $M \notin D$, la droite $(M\,F(M))$. est parallèle à Δ.
En déduire que F est une projection et donner ses éléments caractéristiques

17 Soit OIJK un tétraèdre et d une droite passant par O qui est sécante au plan IJK en A. Soit M un point de la droite d.



Construire le point d'intersection N du plan (OIJ) et de la parallèle à (OK) passant par M.

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$. $\mathcal{P}$ est le plan d'équation :
$3x + 2y - z = 0$ et D la droite définie par M(m ; 5 ; 1) et $\vec{v}\begin{pmatrix} n \\ 11 \\ 2 \end{pmatrix}$, m ; n deux réels.

Pour quelles valeurs de m et n la droite D est elle

1) Contenue dans $\mathcal{P}$?

2) Parallèle strictement à $\mathcal{P}$?

18 L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$. $\mathcal{P}$ est le plan d'équation : $x + 2y - z + 1 = 0$ et D la droite qui passe par A(-1 ; 0 ; 2) et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1) Vérifier que $\mathcal{P}$ et D ne sont pas parallèles.

2) f est la projection sur le plan $\mathcal{P}$ parallèlement à la droite D.
Déterminer les coordonnées de l'image par f d'un point M de coordonnés (x ; y ; z).

3) g est la projection sur la droite D parallèlement au plan $\mathcal{P}$.
Déterminer les coordonnées de l'image par g d'un point M de coordonnés (x ; y ; z).

19 L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$.

f est l'application qui au point M(x ; y ; z) associe le point M'(x' ; y' ;z') tel que :

$$\begin{cases} x' = -y - z + 1 \\ y' = -2x - y - 2z + 2 \\ z' = x + y + 2z - 1 \end{cases}$$

1) Déterminer l'ensemble $\mathcal{P}$ des points invariants par f.

2) Démontrer que pour tout point M le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est colinéaire à un vecteur $\vec{u}$ que l'on précisera.

3) m est le point d'intersection de $\mathcal{P}$ avec la droite qui passe par M et de vecteur directeur $\vec{u}$, montrer que : $\overrightarrow{Mm} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MM'}$.
En déduire la nature de f.

CHAPITRE 11

Transformations 1

Faire savoir

L'essentiel du chapitre

I. Transformation dans le plan P :

1) Notion de transformation :

Définition :

On appelle une transformation dans le plan $\mathcal{P}$ toute bijection f de $\mathcal{P}$ sur lui-même.

- L'image d'un point M dans le plan par une transformation f est notée $f(M)$ et si $f(M) = M$, alors on dit que M est un point invariant de f.

- L'identité du plan ou application identique du plan $\mathcal{P}$ est la transformation dans $\mathcal{P}$, notée $id_{\mathcal{P}}$

  et définie par : $\forall M \in \mathcal{P} : id_{\mathcal{P}}(M) = M$.

- Toute transformation f admet une transformation réciproque notée en général f^{-1}, définie par : $\forall M \in \mathcal{P};\ f(M) = M' \Leftrightarrow f^{-1}(M') = M$.

- La composée de deux transformations f et g est une transformation : $\forall M \in \mathcal{P} : f \circ g(M) = f[g(M)]$; $g \circ f(M) = g[f(M)]$.

- L'opération o n'est pas commutative : $f \circ g \neq g \circ f$ (en général).
- L'opération o est associative ; f ; g ; h étant trois transformations : $f \circ g \circ h = (f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.
- $id_{\mathcal{P}}$ est l'élément neutre de l'opération o ; f étant une transformation :

  $f \circ id_{\mathcal{P}} = id_{\mathcal{P}} \circ f = f$

- f étant une transformation :

  $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = id_{\mathcal{P}}$.

- f et g étant deux transformations : $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$
- f ; g ; h étant trois transformations :
  $g = f \Leftrightarrow h \circ g = h \circ f$.
  $g = f \Leftrightarrow g \circ h = f \circ h$.
  $g \circ f = h \Leftrightarrow g = h \circ f^{-1}$.

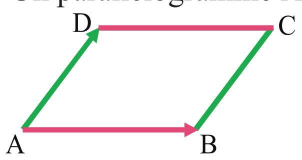
2) Des transformations usuelles dans le plan :

a) Translation :

- Une translation a un seul élément caractéristique qui est son vecteur (un vecteur donné $\vec{u}$), on la note $\mathbf{t}_{\vec{u}}$
- $\mathbf{t}_{\vec{u}}(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{u}$ | • $(\mathbf{t}_{\vec{u}})^{-1} = \mathbf{t}_{(-\vec{u})}$; | • $\mathbf{t}_{\vec{0}} = \mathbf{id}_P$;
- Si $\vec{u} \neq \vec{0}$, alors $\mathbf{t}_{\vec{u}}$ n'a pas de point invariant ; A et B sont deux points donnés ; $\mathbf{t}_{\overrightarrow{AB}}$ est l'unique translation qui transforme A en B.
- $\mathbf{t}_{\overrightarrow{AB}}(M) = M' \Leftrightarrow$ ABM'M est un parallélogramme.

Une figure de translation

- Un parallélogramme ABCD



$t_{\overrightarrow{AB}} : \left| \begin{array}{l} A \mapsto B \\ D \mapsto C \end{array} \right.$; $t_{\overrightarrow{AD}} : \left| \begin{array}{l} A \mapsto D \\ B \mapsto C \end{array} \right.$

b) Homothétie :

- Une homothétie a deux éléments caractéristiques qui sont : son centre (un point donné Ω), son rapport (un réel non nul donné k), On la note $H_{(\Omega\,;\,k)}$; $H_{(\Omega\,;\,k)}(\Omega) = \Omega$

  $H_{(\Omega\,;\,k)}(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M'} = k\,\overrightarrow{\Omega M}$,
- $(H_{(\Omega\,;\,k)})^{-1} = H_{(\Omega\,;\,\frac{1}{k})}$.
- $H_{(\Omega\,;\,1)} = id_{\mathcal{P}}$.
- $H_{(\Omega\,;\,-1)} = S_\Omega$ (symétrie centrale de centre Ω)
- Si $k \neq 1$, alors $H_{(\Omega\,;\,k)}$ a un seul point invariant qui est son centre Ω.

En plus ;

Si $M \neq \Omega$ et $H_{(\Omega\,;\,k)}(M) = M'$, alors les points Ω ; M ; M' sont alignés.

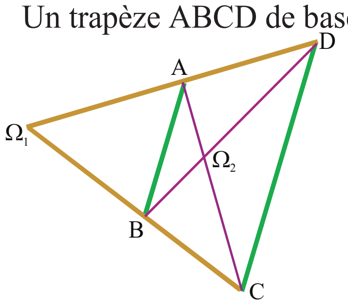
- Soit $H_{(\Omega\,;\,k)} : \left| \begin{array}{l} A \mapsto A' \\ B \mapsto B' \end{array} \right.$ alors $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$.
- A ; B ; C étant trois points alignés ; $H_{(A\,;\,B \to C)}$; désigne l'homothétie de centre A qui transforme B en C,

son rapport est $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \begin{cases} \dfrac{AC}{AB} & \text{si } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AC} \text{ sont de même sens} \\ -\dfrac{AC}{AB} & \text{si } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AC} \text{ sont de sens contraire} \end{cases}$

- $[H_{(A\,;\,B \to C)}]^{-1} = H_{(A\,;\,C \to B)}$.

Une figure d'homothétie :

Un trapèze ABCD de bases (AB) et (CD)



$\{\Omega_1\} = (AD) \cap (BC)$; $\{\Omega_2\} = (AC) \cap (BD)$

$H_1(\Omega_1\,;\,A \mapsto D) : \left| \begin{array}{l} A \mapsto D \\ B \mapsto C \end{array} \right.$; de rapport $\dfrac{CD}{AB}$

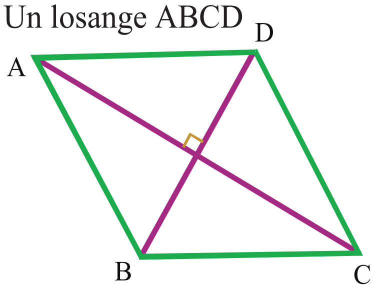
$H_2(\Omega_2\,;\,A \mapsto C) : \left| \begin{array}{l} A \mapsto C \\ B \mapsto D \end{array} \right.$; de rapport $-\dfrac{CD}{AB}$

c) Réflexion (symétrie orthogonale) :

- Une réflexion a un seul élément caractéristique qui est son axe (une droite Δ), elle est notée S_Δ.
- $S_\Delta(M) = M \Leftrightarrow M \in \Delta$ (les points invariants de S_Δ sont les points de la droite Δ).
- $M \notin \Delta$ et $S_\Delta(M) = M' \Leftrightarrow \Delta$ est la médiatrice de [MM'],
- $S^{-1}_\Delta = S_\Delta$
- $S_\Delta \circ S_\Delta = id_{\mathcal{P}}$.
- A et B étant deux points distincts, la réflexion d'axe la médiatrice de [AB] est l'unique réflexion qui transforme A en B.

Une figure de réflexion :

Un losange ABCD



$$S_{AC} : \left| \begin{array}{l} A \mapsto A \\ C \mapsto C \\ B \mapsto D \\ D \mapsto B \end{array} \right. \quad ; \quad S_{BD} : \left| \begin{array}{l} B \mapsto B \\ D \mapsto D \\ A \mapsto C \\ C \mapsto A \end{array} \right.$$

d) Rotation :

Une rotation a deux éléments caractéristiques qui sont son centre (un point donné Ω), son angle (un réel donné α), on la note $R_{(\Omega\,;\,\alpha)}$.

- $R_{(\Omega\,;\,\alpha)}(\Omega) = \Omega$
- $M \neq \Omega$ et $R_{(\Omega\,;\,\alpha)}(M) = M' \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} \Omega M = \Omega M' \\ \text{et} \\ (\overrightarrow{\Omega M}\,;\overrightarrow{\Omega M'}) = \alpha\ [2\pi] \end{array} \right.$
- $[R_{(\Omega\,;\,\alpha)}]^{-1} = R_{(\Omega\,;\,-\alpha)}$

En plus

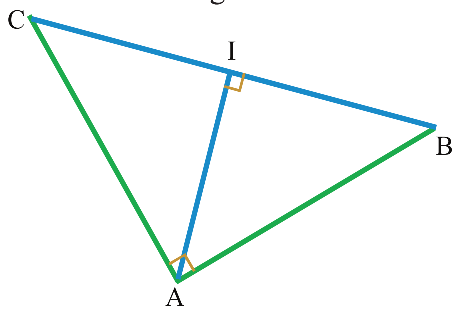
Si	**alors**
$\alpha = 0\,;\ [2\pi]$	$R_{(\Omega\,;\,\alpha)} = id_P$.
$\alpha = \pi\,;\ [2\pi]$	$R_{(\Omega\,;\,\alpha)} = S_\Omega$ (symétrie centrale de centre Ω)
$\alpha \neq 0\,;\ [2\pi]$	$R_{(\Omega\,;\,\alpha)}$ a un seul point invariant qui est son centre Ω.

On a	**Si et seulement si**
$M \neq \Omega$ et $R_{(\Omega;\,\frac{\pi}{2})}(M) = M'$	le triangle $\Omega MM'$ est isocèle rectangle direct en Ω.
$M \neq \Omega$ et $R_{(\Omega;\,-\frac{\pi}{2})}(M) = M'$	le triangle $\Omega MM'$ est isocèle rectangle indirect en Ω.
$M \neq \Omega$ et $R_{(\Omega;\,\frac{\pi}{3})}(M) = M'$	le triangle $\Omega MM'$ est équilatéral direct
$M \neq \Omega$ et $R_{(\Omega;\,-\frac{\pi}{3})}(M) = M'$	le triangle $\Omega MM'$ est équilatéral indirect

- Si R est une rotation d'angle $\alpha \neq 0$, qui transforme A en B, alors le centre de R appartient à la médiatrice de [AB].
- Si **R** est la rotation d'angle α qui transforme A en A' et B et B' deux points tels que : AB = A'B' et $(\overrightarrow{AB}\,;\ \overrightarrow{A'B'}) = \alpha$, alors R transforme B en B'.

Des figures de rotation

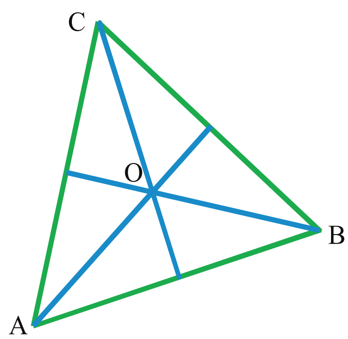
- ABC un triangle isocèle direct en A, I milieu de [BC].



$$R_{(A\,;\,\frac{\pi}{2})} : \left| \begin{array}{l} A \mapsto A \\ B \mapsto C \end{array} \right.$$

$$R_{(I\,;\,\frac{\pi}{2})} : \left| \begin{array}{l} I \mapsto I \\ C \mapsto A \\ A \mapsto B \end{array} \right.$$

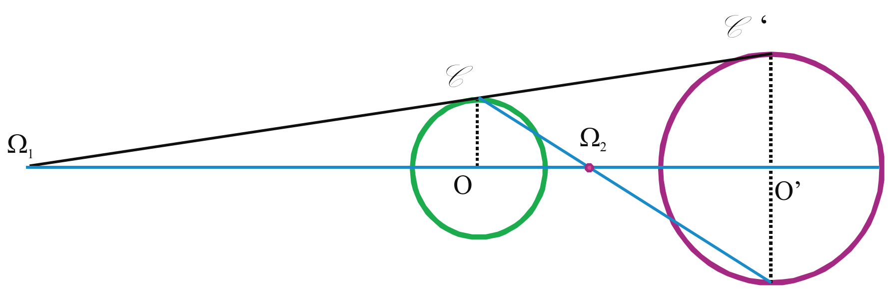
- ABC un triangle équilatéral direct de centre O.



$$R_{(A\,;\,\frac{\pi}{3})} : \left| \begin{array}{l} A \mapsto A \\ B \mapsto C \end{array} \right. \;;\; R_{(B\,;\,\frac{\pi}{3})} : \left| \begin{array}{l} B \mapsto B \\ C \mapsto A \end{array} \right. \;;\; R_{(C\,;\,\frac{\pi}{3})} : \left| \begin{array}{l} C \mapsto C \\ A \mapsto B \end{array} \right. \;;$$

$$R_{(O\,;\,\frac{2\pi}{3})} : \left| \begin{array}{l} O \mapsto O \\ A \mapsto B \\ B \mapsto C \\ C \mapsto A \end{array} \right.$$

- Chacune des quatre transformations citées en haut, conserve : le parallélisme, l'orthogonalité, le barycentre, le milieu, l'alignement, les angles géométriques et le contact.
- Chacune des quatre transformations, transforme
  - une droite d en une droite d' (dans le cas d'une translation ou d'une homothétie, on a d // d'.
  - un segment [AB] en le segment [A'B'] où A' et B' sont les images respectives de A et B.
  - un cercle $\mathscr{C}$ en un cercle $\mathscr{C}$'(le centre de $\mathscr{C}$' est l'image du centre de $\mathscr{C}$).



$\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}$' deux cercles de centres respectifs O et O' et de rayons respectifs, r et r' ($r \neq r'$).

Il existe deux homothéties seulement qui transforment $\mathscr{C}$ en $\mathscr{C}$' l'une de centre

$\Omega_1 = \text{bar}\begin{array}{c|c} O & O' \\ \hline -r' & r \end{array}$ et de rapport $\frac{r'}{r}$; l'autre de centre $\Omega_2 = \text{bar}\begin{array}{c|c} O & O' \\ \hline r' & r \end{array}$ et de rapport $-\frac{r'}{r}$

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v})$

On a	Si et seulement si
$f : M(Z) \to M'(Z')$ $Z' = Z + b$; avec $b \in \mathbb{C}$ donné	f : est la translation de vecteur d'affixe b.
$f : M(Z) \to M'(Z')$ $Z' = kZ + b$; avec $k \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$; $b \in \mathbb{C}$, donné	f : est l'homothétie de rapport k et de centre le point d'affixe $\omega = \dfrac{b}{1-k}$. En plus, $Z' - \omega = k(Z - \omega)$.
$f : M(Z) \to M'(Z')$ $Z' = aZ + b$; avec $a \in \mathbb{C}^* \setminus \{1\}$; $b \in \mathbb{C}$, $\|a\| = 1$; a et b donnés	f : est la rotation d'angle $\alpha = \arg(a)$ et de centre le point d'affixe $\omega = \dfrac{b}{1-a}$. En plus : $Z' - \omega = e^{i\alpha}(Z - \omega)$.

3) **Des composées :**

a) **Composées de translations et d'homothéties :**

Composée de	
Deux translations	$t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}} = t_{(\vec{u}+\vec{v})}$ et $t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}} = t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{u}}$
Deux homothéties de mêmes centres	$H_1 = H_{(\Omega_1\,;\,k_1)}$; $H_2 = H_{(\Omega_1\,;\,k_2)}$ $H_1 \circ H_2 = H(\Omega_1\,;\,k_1k_2)$ et $H_1 \circ H_2 = H_2 \circ H_1$.
Deux homothéties de centres distincts	$H_1 = H_{(\Omega_1\,;\,k_1)}$; $H_2 = H_{(\Omega_2\,;\,k_2)}$ **Si** — **alors** $k_1k_2 = 1$: $H_1 \circ H_2$ et $H_2 \circ H_1$ sont chacune une translation de vecteur colinéaire à $\overrightarrow{\Omega_1\Omega_2}$ $k_1k_2 \neq 1$: $H_1 \circ H_2$ et $H_2 \circ H_1$ sont chacune une homothétie de rapport k_1k_2 et de centre appartenant à la droite $(\Omega_1\Omega_2)$.
D'une homothétie et d'une translation	$t = t_{\vec{u}}$ et $H = H(\Omega; k)$; $\vec{u} \neq \vec{0}$; $k \neq 1$. $t \circ H$ et $H \circ t$ sont chacune une homothétie de rapport k et dont le centre appartient à la droite passant par Ω et de vecteur directeur $\vec{u}$.

b) **Composées de deux réflexions :**

Composée de	
Deux réflexions d'axes strictement parallèles	S_Δ et $S_{\Delta'}$ avec $\Delta // \Delta'$ $S_\Delta \circ S_{\Delta'}$ et $S_{\Delta'} \circ S_\Delta$ sont deux translations réciproques. $S_{\Delta'} \circ S_\Delta = t_{2\overrightarrow{IJ}}$; avec $I \in \Delta$; $J \in \Delta'$; $(IJ) \perp \Delta$.
Deux réflexions d'axes sécants	S_Δ et $S_{\Delta'}$ avec Δ et Δ' sécants, $S_\Delta \circ S_{\Delta'}$ et $S_{\Delta'} \circ S_\Delta$ sont deux rotations réciproques, avec $\{\Omega\} = \Delta \cap \Delta'$ on a : $S_\Delta \circ S_{\Delta'} = R(\Omega\,;\,2(\Delta',\Delta))$

En plus

- Toute translation t de vecteur non nul $\vec{u}$ peut s'écrire (d'une infinité de manières) $t = S_{\Delta'} \circ S_\Delta$ avec Δ une droite de vecteur normal $\vec{u}$ et $\Delta' = t_{\frac{1}{2}\vec{u}}(\Delta)$.
- Toute rotation $R(\Omega\,;\,\alpha)$ d'angle non nul α, peut s'écrire (d'une infinité de manières) $R(\Omega\,;\,\alpha) = S_{\Delta'} \circ S_\Delta$ avec Δ une droite passant par Ω et $\Delta' = R_{(\Omega,\frac{1}{2}\alpha)}(\Delta)$.

c) Composées de translations et de rotations :

Composée de	
Deux rotations de même centre	$R_1 = R\,(\Omega\,;\alpha_1)$; $R_2 = R\,(\Omega\,;\alpha_2)$ $R_2 \circ R_1 = R\,(\Omega\,;\alpha_1+\alpha_2)$ et $R_2 \circ R_1 = R_1 \circ R_2$
Deux rotations de centres différents	$R_1 = R\,(\Omega_1\,;\alpha_1)$; $R_2 = R\,(\Omega_2\,;\alpha_2)$ **Si** : $\alpha_1 + \alpha_2 = 0\,;[2\pi]$ — **alors** : $R_1 \circ R_2$ et $R_2 \circ R_1$ sont chacune une translation **Si** : $\alpha_1 + \alpha_2 \neq 0\,;[2\pi]$ — **alors** : $R_1 \circ R_2$ et $R_2 \circ R_1$ sont chacune une rotation d'angle $\alpha_1 + \alpha_2$.
Une translation et une rotation	$t = t_{\vec{u}}$ et $R = R_{(\Omega,\alpha)}$; $t \circ R$ et $R \circ t$ sont chacune une rotation d'angleα.

II. Des transformations usuelles dans l'espace :

1) L'application identique dans l'espace $\mathscr{E}$:

Elle est notée $id_{\mathscr{E}}$. $\forall$ M $\in \mathscr{E}$: $id_{\mathscr{E}}$(M) = M

2) Translation et homothétie dan l'espace $\mathscr{E}$:

a) Comme dans le plan, une translation dans l'espace a un seul élément caractéristique qui est son vecteur (un vecteur $\vec{u}$ donné) ; $t_{\vec{u}}(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.

- L'image d'une droite est une droite parallèle
- L'image d'un plan est un plan parallèle

b) Comme dans le plan, une homothétie dans l'espace a deux éléments caractéristiques qui sont son centre (un point donné Ω) et son rapport (un réel non nul donné k).

Elle est notée $H_{(\Omega\,;\,k)}$. $H_{(\Omega\,;\,k)}(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$.

- un point et son image sont alignés avec le centre.
- l'image d'une droite est une droite parallèle.
- l'image d'un plan est un plan parallèle
- une symétrie centrale de centre Ω est une homothétie de même centre et de rapport -1 ;

  ($S_\Omega = H_{(\Omega\,;\,-1)}$).

3) Réflexion :

Une réflexion dans l'espace a un seul élément caractéristique qui est son plan (un plan donné).
Elle est notée, $S_{\mathscr{P}}$.

- $S_{\mathscr{P}}(M) = M \Leftrightarrow M \in \mathscr{P}$ (les points invariants de $S_{\mathscr{P}}$ sont les points du plan $\mathscr{P}$).
- $M \notin \mathscr{P}$ et $S_{\mathscr{P}}(M) = M' \Leftrightarrow \mathscr{P}$ est le plan médiateur de [MM'].
- $(S_{\mathscr{P}})^{-1} = S_{\mathscr{P}}$
- $S_{\mathscr{P}} \circ S_{\mathscr{P}} = id_{\mathscr{E}}$
- Soient $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ deux plans parallèles ;

  $S_{\mathscr{P}} \circ S_{\mathscr{P}'} = t_{2\overrightarrow{IJ}}$ (tels que : $I \in \mathscr{P}'$; $J \in \mathscr{P}$ et $\overrightarrow{IJ}$ un vecteur normal de $\mathscr{P}$).

4) Rotation :

Une rotation dans l'espace a deux éléments caractéristiques qui sont, son axe (une droite donnée Δ) et son angle (un réel donné α).

Elle est notée $\boldsymbol{R}\ (\Delta\ ;\ \alpha)$.

si	alors
$\alpha = 0\ ;\ [2\pi]$	$\boldsymbol{R}\ (\Delta\ ;\ \alpha) = id_{\mathscr{E}}$
$\alpha = \pi\ ;\ [2\pi]$	$\boldsymbol{R}\ (\Delta\ ;\ \alpha)$ est appelé un demi-tour d'axe Δ

- Si $\alpha \neq 0\ \ [2\pi]$; $\boldsymbol{R}_{(\Delta\ ;\ \alpha)}(M) = M \Leftrightarrow M \in \Delta$

  (les points invariants de $\boldsymbol{R}_{(\Delta\ ;\ \alpha)}$ sont les points de son axe Δ).

- $M \notin \Delta$ et $\boldsymbol{R}_{(\Delta\ ;\ \alpha)}(M) = M' \Leftrightarrow$

  $\begin{cases} mM = mM' \\ (\overrightarrow{mM}\ ;\ \overrightarrow{mM'}) = \alpha(2\pi) \end{cases}$ avec m le point où Δ perce le plan orthogonal à Δ contenant M.

- Soit ABC un triangle équilatéral de centre O.

  Une rotation $\boldsymbol{R}$, dans l'espace, laisse globalement invariant le triangle (ABC) si et seulement si son axe est la droite Δ orthogonale au plan (ABC) en O.

  En plus, l'angle de **R** est soit 0 ; soit $\frac{2\pi}{3}$, soit $-\frac{2\pi}{3}$.

- Soit $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ deux plans sécants suivant une droite Δ, $S_{\mathscr{P}} \circ S_{\mathscr{P}'}$ et $S_{\mathscr{P}'} \circ S_{\mathscr{P}}$, sont chacune une rotation d'axe Δ.

- En plus une rotation, une réflexion conservent les volumes.

- Une homothétie de rapport k multiplie les volumes par $|k^3|$.

Savoir-faire

A. Applications :

Exercice 1 :

Dans cette figure O ; A ; B ; C sont alignés. O ; A' ; B' ; C' sont alignés.

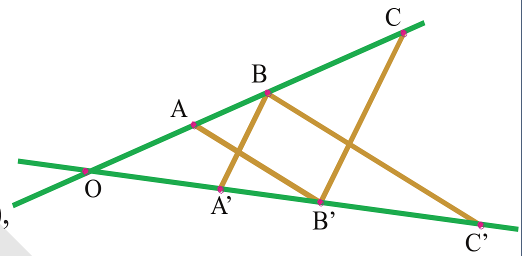
(AB') et (BC') sont parallèles et (BA') et (CB') sont parallèles.

On se propose de montrer que (AA') et (CC') sont parallèles.

Soit $H_1 = H(O\ ;\ A \rightarrow B)$; $H_2 = H(O\ ;B \rightarrow C)$

1. Déterminer $H_2 \circ H_1$ (A) et $H_1 \circ H_2$(A')

2. Conclure.



Solution :

1) $\boldsymbol{H_2 \circ H_1}$ (A) = $\boldsymbol{H_2}$ [$\boldsymbol{H_1}$ (A)] = $\boldsymbol{H_2}$ (B) = C.

$\boxed{\boldsymbol{H_2 \circ H_1} (A) = C}$

$\boldsymbol{H_1 \circ H_2}$(A') = $\boldsymbol{H_1}$ [$\boldsymbol{H_2}$(A')] . Or $\boldsymbol{H_2}$(B) = C et (BA') // (CB'),

donc $\boldsymbol{H_2}$((BA')) = (CB'), d'où $\boldsymbol{H_2}$(A') est le point d'intersection

de (CB') avec (OA'), qui est B'.

Donc, $\boldsymbol{H_1 \circ H_2}$(A') = $\boldsymbol{H_1}$(B'), or $\boldsymbol{H_1}$ (A) = B et (AB') // (BC').

Donc, $\boldsymbol{H_1}$(AB')= (BC'), donc $\boldsymbol{H_1}$(B') est le point d'intersection de (BC') avec (OB') qui est C'.

Donc, $\boxed{\boldsymbol{H_1 \circ H_2} (A') = C'}$

2) Comme $\boldsymbol{H_1}$ et $\boldsymbol{H_2}$ ont le même centre, donc $\boldsymbol{H_2 \circ H_1} = \boldsymbol{H_1 \circ H_2}$,

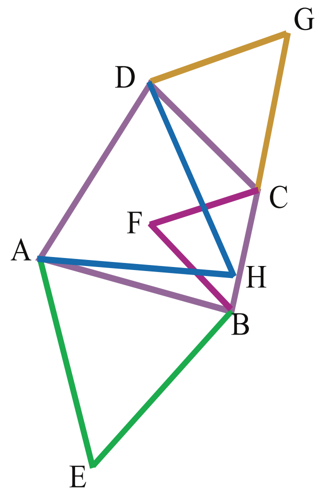
Or une homothétie transforme une droite en une droite parallèle, donc $\boxed{(AA') // (CC')}$.

Exercice 2 :

ABCD un quadrilatère direct,

AEB et CGD deux triangles équilatéraux directs.

BFC et DHA deux triangles équilatéraux indirects.



Soit $\boldsymbol{R_1 = R\left(A, \frac{\pi}{3}\right)}$ et $\boldsymbol{R_2 = R\left(C, -\frac{\pi}{3}\right)}$. On pose $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{R_2 \circ R_1}$.

1) Quelle est la nature de la transformation $\boldsymbol{f}$?

2) Déterminer $\boldsymbol{f}$(E) et caractériser $\boldsymbol{f}$.

3) Déterminer $\boldsymbol{f}$(H).

En déduire la nature du quadrilatère EFGH.

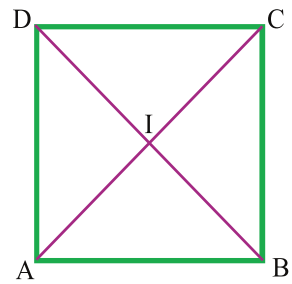
Solution :

1) Comme $\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = 0$, donc $\boldsymbol{f}$ est une translation

2) $\boldsymbol{f}$(E) = $\boldsymbol{R_2 \circ R_1}$ (E) = $\boldsymbol{R_2}$ (B) = F ; donc $\overrightarrow{EF}$ est le vecteur de $\boldsymbol{f}$.

3) $\boldsymbol{f}$(H) = $\boldsymbol{R_2 \circ R_1}$ (H) = $\boldsymbol{R_2}$(D) = G, donc $\overrightarrow{HG} = \overrightarrow{EF}$, donc EFGH est un parallélogramme.

Exercice 3 :



ABCD un carré direct de centre I. Soit $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{t}_{\overrightarrow{AD}}$; $\boldsymbol{R_1} = \boldsymbol{R}(A, -\frac{\pi}{2})$;

$\boldsymbol{R_2} = \boldsymbol{R}(B, -\frac{\pi}{2})$; On pose $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{t} \circ \boldsymbol{R_1}$ et $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{R_2} \circ \boldsymbol{R_1}$.

1) Déterminer $\boldsymbol{f}(A)$ et caractériser la transformation $\boldsymbol{f}$
2) Déterminer $\boldsymbol{g}(A)$ et caractériser la transformation $\boldsymbol{g}$.
3) Dans le plan complexe, on désigne par a, b, c, d les affixes respectives des points A, B, C, D. Exprimer c et d à l'aide de a et b.

Solution :

1) $\boldsymbol{f}(A) = \boldsymbol{t} \circ \boldsymbol{R_1}(A) = \boldsymbol{t}(A) = D$.

Or $\boldsymbol{f}$ est la composée d'une translation et d'une rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$,

Donc, $\boldsymbol{f}$ est une rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

Or $\boldsymbol{f}(A) = D$ et $IA = ID$ et $(\overrightarrow{IA} ; \overrightarrow{ID}) = -\frac{\pi}{2}$, Donc I est le centre de $\boldsymbol{f} = R(I ; -\frac{\pi}{2})$.

2) $\boldsymbol{g}(A) = \boldsymbol{R_2} \circ \boldsymbol{R_1}(A) = \boldsymbol{R_2}(A) = C$.

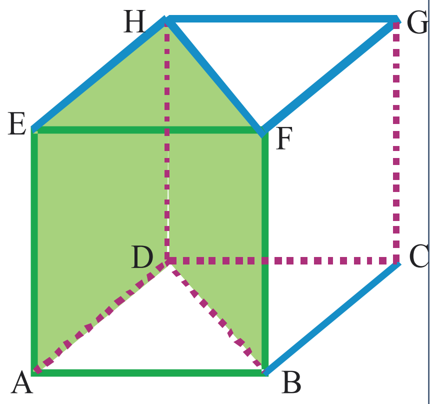
Or $-\frac{\pi}{2} \ -\frac{\pi}{2} = -\pi = \pi \quad (2\pi)$,

Donc, $\boldsymbol{g}$ est une rotation d'angle π; donc $\boldsymbol{g}$ est une symétrie centrale,
Or $\boldsymbol{g}(A) = C$ et I milieu de [AC], donc I est le centre de $\boldsymbol{g}$.
Donc $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{S_I}$.

3) Comme : $\boldsymbol{R}(B, -\frac{\pi}{2}) : A :\mapsto C$; donc $c - b = e^{-i\frac{\pi}{2}}(a - b)$; donc $c = -ia + ib + b$;

Comme $D = \mathrm{Bar}\begin{array}{c|c|c|}A & B & C \\ \hline 1 & -1 & 1\end{array}$; Donc, $d = a - b + c = a - ia + ib$.

Exercice 4 :



ABCDEFGH est un cube.
$(A ; \overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AD} ; \overrightarrow{AE})$ est un repère orthonormal direct de l'espace.
Soit $\mathcal{P}$ le plan (ABE), $\mathcal{P}'$ le plan (ACE).
On pose : $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{S}_{\mathcal{P}'} \circ \boldsymbol{S}_{\mathcal{P}}$
1)Quelle est la nature de la transformation $\boldsymbol{f}$.
2)Déterminer $\boldsymbol{f}(B)$ et caractériser $\boldsymbol{f}$.

Solution :

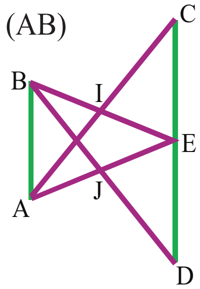
1) Comme les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont sécants suivants la droite (AE), donc : $\boldsymbol{f}$ est une rotation d'axe (AE).
2) $\boldsymbol{f}(B) = \boldsymbol{S}_{\mathcal{P}'} \circ \boldsymbol{S}_{\mathcal{P}}(B) = \boldsymbol{S}_{\mathcal{P}'}(B) = \mathcal{D}$, (car c'est le plan médiateur de [BD]).
Or, $(A, \overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AD} ; \overrightarrow{AE})$ est un repère orthonotmal direct de l'espace.

Donc, $(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2}$; l'angle de $\boldsymbol{f}$ est $\frac{\pi}{2}$.

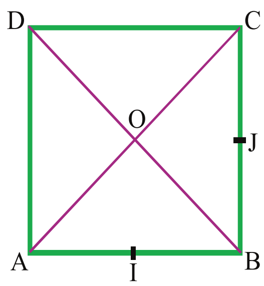
Donc ; $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{R}((AE) ; \frac{\pi}{2})$.

B. Exercices divers :

1. Les droites (AB) et (CD) sont parallèles.
I milieux de [AC] ; J milieux de [BD] ;
Montrer que les droites (IJ) et (AB) sont parallèles.
Indication : utiliser les es homothéties :
H_1(I ; A$\mapsto$C) et
H_2(J, D$\mapsto$B).



2. ABCD est un carré direct de centre O.
I et J les milieux respectifs de [AB] et [BC].
1) Caractériser S_{OI} o S_{AD} ; S_{CD} o S_{OJ} ; S_{AB} o S_{AC} ; S_{AC} o S_{BD}.
2) Ecrire de deux façons différentes sous la forme de la composée de deux réflexions : $t_{\overrightarrow{BA}}$; $t_{\overrightarrow{AC}}$; $t_{\overrightarrow{OC}}$;
$R(O;\frac{\pi}{4})$; $R(C;\frac{\pi}{4})$; S_O .



3. ABCD un parallélogramme direct, IAB un triangle isocèle rectangle indirect ; BCEF et AGHD deux carrés indirects de centre respectifs J et K.

Soit R la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

1) Déterminer R(B), R (C) ; R (F) et R (E).
2) En déduire que R (J) = K, puis donner la nature du triangle IJK.

4. ABCD un parallélogramme direct, EBA et FCB deux triangles isocèles rectangles directs en E et F respectivement.
On se propose de montrer que le triangle DEF est isocèle rectangle en E.
Méthode 1 : Soit $t = t_{\overrightarrow{AB}}$; $R = R_{(B\,;\,-\frac{\pi}{2})}$.

On pose $g = R \circ t$.
a) Quelle est la nature de la transformation g ?
Déterminer g(A) et caractériser g.
b) Déterminer f(D) et conclure.
Méthode 2 : On désigne par a ; b ; c ; d ; e ; f les affixes respectives des points A, B, C, D, E, F dans le plan complexe.
a) Exprimer d, e, f à l'aide de a ; b ; c.
b) Evaluer $\frac{d-e}{f-e}$, puis conclure.

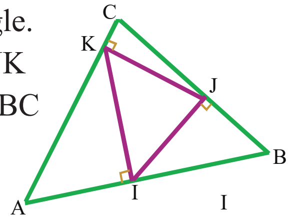
Caractériser la transformation f dans chacun des cas :
1) f : M(Z) $\mapsto$ M'(Z') ; 2) f : M(Z) $\mapsto$ M'(Z')
Z' = Z + 2 + i ; Z' = iZ +1
3) f : M(Z) $\mapsto$ M'(Z'); 4) f : M(Z) $\mapsto$ M'(Z')
$Z' = (\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i)Z$; $Z' = \overline{Z}$;
5) f : M(Z) $\mapsto$ M'(Z') ; 6) f : M(Z) $\mapsto$ M'(Z')
Z' =-iZ ; $Z' = -\overline{Z}$;
7) f : M(Z) $\mapsto$ M'(Z') ; $Z' = \frac{1}{2}Z + i$

5. Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre O et D une droite qui coupe ce cercle en deux points A et B.
1) Construire le symétrique orthogonal $\mathscr{C}$' de $\mathscr{C}$ par rapport à la droite $\mathscr{D}$ et démontrer qu'il existe une unique translation qui transforme $\mathscr{C}$ en $\mathscr{C}$'.
2) Démontrer que l'image de A par la translation t est le point A' diamétralement opposé à B sur $\mathscr{C}$.
3) Soit M un point quelconque sur le cercle $\mathscr{C}$ et M' son image par la translation t. Quel rôle joue le point B pour le triangle AMM' ?
Justifier.

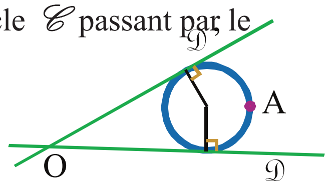
6. On donne dans le plan deux points A et B et une droite $\mathscr{D}$ distincte de la droite (AB).
Un point M décrit la droite $\mathscr{D}$. On appelle N le symétrique de A par rapport au milieu du segment [BM]. Déterminer le lieu géométrique du point N lorsque M décrit la droite $\mathscr{D}$.

7. Soit A et B deux points distincts du plan $\mathscr{P}$. soit $\mathscr{C}$ un cercle du plan qui est tangent à la droite (AB) en A. On note O le centre de $\mathscr{C}$ et G le centre de gravité du triangle ABO. Déterminer le lieu géométrique de chacun des points O et G lorsque le cercle $\mathscr{C}$ prend toutes les positions possibles en restant tangent à (AB) en A.

8. Soit ABC un triangle. Construire un triangle IJK inscrit dans le triangle ABC et dont les cotés sont perpendiculaires à ceux de ABC



9 Soient $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ deux droites sécantes en O et un point A n'appartient ni à $\mathscr{D}$, ni à $\mathscr{D}'$.Construire un cercle $\mathscr{C}$ passant par le point A et tangent aux deux droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$.



10 On considère trois triangles équilatéraux OAB, OCD, OEF. On suppose que les angles

$(\overrightarrow{OA}\ ;\ \overrightarrow{OB})$;$(\overrightarrow{OC}\ ;\ \overrightarrow{OD})$;$(\overrightarrow{OE}\ ;\ \overrightarrow{OF})$ ont pour mesure principale $\frac{\pi}{3}$. Soit P ; Q ; R les milieux respectifs de [BC] ;[DE] ; [FA]. On se propose de montrer que le triangle PQR est équilatéral. Soit P' ; Q' ; R' les points tels que les quadrilatères BOCP' ; DOEQ' ; FOAR' soient des parallélogrammes.

1) Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$,

on pose : $\boldsymbol{f} = r \circ \boldsymbol{t}_{\overrightarrow{BO}}$.

a) Quelle est la nature de ***f***, déterminer ***f***(B) et caractériser ***f***.

b) Déterminer ***f***(P'). En déduire la nature du triangle AP'D.

2) On pose : $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{t}_{\overrightarrow{OA}} \circ r \circ \boldsymbol{t}_{\overrightarrow{DO}}$.

a) Déterminer ***g***(D) et caractériser ***g***.

b) Déterminer g(Q'). En déduire la nature du triangle Q'R'.Conclure.

11 Dans le plan, A et B sont deux points distincts donnés.

$r_A = \boldsymbol{R}(A, -\frac{\pi}{3})$; et $M' = r_A(M)$ pour tout point M du plan . $r_B = \boldsymbol{R}(B, \frac{2\pi}{3})$ et $M'' = r_B(M)$ pour tout point M du plan.

1) Montrer que le point J milieu de [M'M''] est fixe dans le plan et que J appartient au cercle de diamètre [AB].

2.) a) Montrer que pour tout point M distinct de A et B on a :

1) Montrer que le point J milieu de [M'M''] est fixe dans le plan et que J appartient au cercle de diamètre [AB].

2.) a) Montrer que pour tout point M distinct de A et B on a :

$$(\overrightarrow{MM'}\ ;\ \overrightarrow{MM''}) = (\overrightarrow{MM'}\ ;\ \overrightarrow{MM''}) - \frac{\pi}{2}.$$

b) En déduire l'ensemble Γ des points M du plan tels que M ; M' ; M'' soient alignés.

12 Dans le plan orienté, on considère trois cercles Γ_1 ; Γ_2 ; Γ_3 de même rayon concourants en un point K, de centre respectifs M ; N ; P tels que :

- Γ_1 et Γ_2 se recoupent en A ;
- Γ_2 et Γ_3 se recoupent en B ;
- Γ_3 et Γ_1 se recoupent en C ;

1) Faire une figure ;

2) On pose $r_1 = S_{KB} \circ S_{KA}$; $r_2 = S_{KP} \circ S_{KC}$, $\boldsymbol{f} = S_{KB} \circ S_{KA} \circ S_{KC}$.

a) Déterminer la nature des transformations r_1 et r_2

b) Déterminer $r_1(M)$ et $r_2(M)$. Que peut-on en déduire ?

c) En déduire que ***f*** est une réflexion dont on précisera l'axe.

3)a) Montrer que $(\overrightarrow{KA}\ ;\ \overrightarrow{KB}) = (\overrightarrow{KC}\ ;\ \overrightarrow{KP})$, (π) et écrire deux relations semblables.

slation de vecteur $\overrightarrow{DC}$; soit r la rotation de

centre D et d'angle $\frac{\pi}{3}$. On pose $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{t}_2 \circ r \circ \boldsymbol{t}_1$.

a) Montrer que ***R*** est une rotation dont on déterminera l'angle.

b) Déterminer ***R***(B) et en déduire le centre de ***R***.

c) Déterminer ***R***(G) et en déduire le but de l'exercice.

b) Vérifier que : $(\overrightarrow{KA}\ ;\ \overrightarrow{BC}) = \frac{\pi}{2}\ \ (\pi)$.

c) En déduire que K est l'orthocentre du triangle ABC.

Mat 7 M AC.indd 143 20/01/46 02:17:09

13 On donne deux triangles ABC et DEF équilatéraux directs. Soit G et H deux points tels que les quadrilatères EDBG et CDFH soient des parallélogrammes.

Le but de l'exercice est de montrer que le triangle AGH est équilatéral direct.

1) Construire une figure soignée.

2) Soit t_1 la translation de vecteur $\overrightarrow{BD}$; t_2 la translation de vecteur $\overrightarrow{DC}$; soit r la rotation de centre D et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

On pose $\boldsymbol{R} = t_2 \circ r \circ t_1$.

a) Montrer que $\boldsymbol{R}$ est une rotation dont on déterminera l'angle.

b) Déterminer $\boldsymbol{R}$(B) et en déduire le centre de $\boldsymbol{R}$.

c) Déterminer $\boldsymbol{R}$(G) et en déduire le but de l'exercice.

3) Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$ soient les nombres complexes a ; b, c, d, e, f, g et h affixes respectives des points A, B, C, D, E, F, G. et H.

a) Montrer que $c - a = e^{i\frac{\pi}{3}}(b - a)$, puis exprimer $(f - d)$ en fonction de $(e - d)$.

b) Exprimer g en fonction des nombres e ; d ; b, puis h en fonction de c ; d ; f.

c) Montrer que $h - a = e^{i\frac{\pi}{3}}(g - a)$ et en déduire le but de l'exercice.

14 On considère un triangle ABC. Soit I ; J ; K les milieux respectifs de [BC] ; [CA] ; [AB]. G est le centre de gravité du triangle ABC. A tout point M du plan, on associe ses symétriques P ; Q ; R respectivement par rapport à I ; J ; K.

1) Montrer que G est le centre de gravité du triangle ABC.

2) Démontrer que les segments [BQ] ; [CR] et [AP] sont concourants en leur milieu qu'on désignera par O.

3) Démontrer que les points M ; G ; O sont alignés.

15 ABCDEFGH est un cube de centre O. On note I le centre de gravité du triangle DEH et J celui du triangle ABG.

Démontrer que les points I ; O ; J sont alignés

16 Dan un tétraèdre ABCD, I est le milieu de l'arête [CD], M un point de la droite (AI).

Le plan parallèle au plan (ABC) passant par M coupe la droite (CD) en N.

Le plan parallèle au plan (ABD) passant par M coupe la droite (CD) en P.

En utilisant une homothétie de centre I, démontrer que I est le milieu du segment [NP].

17 ABCDEFGH est un cube d'arête a et de centre O.

1) Montrer que les triangles BED et CHF sont équilatéraux.

2) Soit I et J les centres respectifs de BED et CHF,

a) Montrer que $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{GJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{GA}$,

b) En déduire que $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{JG}$ et que O est le milieu de [IJ].

3) Soit $\boldsymbol{S_1}$ la réflexion de plan (BAG) et $\boldsymbol{S_2}$ la réflexion de plan (DAG).

On pose $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{S_1} \circ S_2$.

a) Montrer que $\boldsymbol{f}$ est une rotation, puis déterminer $\boldsymbol{f}$(G) et $\boldsymbol{f}$(A). Que peut-on en déduire ?

b) Montrer que la droite (AG) est orthogonale aux deux plans (BED) et (CHF).

c) Montrer que $\boldsymbol{f}$ globalement chacun des deux triangles (BED) et (CHF).

En déduire l'angle de $\boldsymbol{f}$ relativement à un axe orienté dont on précisera l'orientation.

CHAPITRE 12

Transformations 2

Faire savoir

L'essentiel du chapitre

I. Isométrie dans le plan :

1) Notion d'isométrie :

Définition :

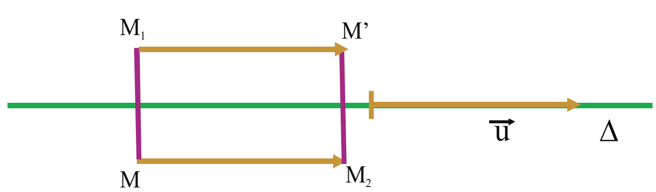
On appelle isomètrie plane ou isomètrie dans le plan, toute transformation dans le plan qui conserve la distance.

Par exemple : une translation, une rotation, une refléxion.

- $id_{\wp}$ est une isomètrie
- la reciproque d'une isomètrie est une isomètrie
- la composée de deux isométries est une isomètrie.
- si A est un point invariant d'une isométrie f.
  alors, A appartient à la médiatrice de tout segment de la forme [MM'] avec M un point quelconque du plan non invariant par f et $M' = f(M)$.
- si A et B sont deux points distincts invariants par une isométrie f, alors tout point de la droite (AB) est invariant par f.
- une isométrie ayant trois points non alignés invariants est l'identité du plan.
- une isométrie conserve l'aire, le produit scalaire,
- l'image d'un cercle par une isométrie est un cercle de même rayon.

2) Symétrie glissante :

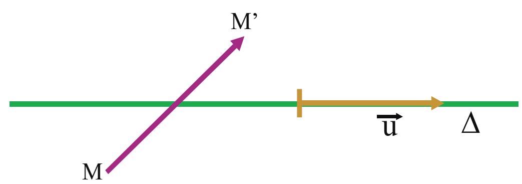
- Une symétrie glissante a deux éléments caractéristiques qui sont : son vecteur (un vecteur non nul $\vec{u}$ donné) son axe (une droite Δ donnée dirigée par $\vec{u}$).
- la forme réduite d'une symétrie glissante f de vecteur $\vec{u}$ et d'axe Δ est :



$f = S_\Delta \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{u}} \circ S_\Delta$;

$f(M) = t_{\vec{u}} \circ S_\Delta(M) = t_{\vec{u}}(M_1) = M'$;

$f(M) = S_\Delta \circ t_{\vec{u}}(M) = S_\Delta(M_2) = M'$.



- une isométrie glissante est une isométrie.
- une isométrie glissante n'a pas de point invariant.
- si f est une symétrie glissante d'axe Δ et $f(M) = M'$;
  alors : le milieu de [MM'] appartient à Δ.
- si f est une symétrie glissante de vecteur $\vec{u}$, alors $f \circ f = t_{2\vec{u}}$
- la réciproque d'une symétrie glissante d'axe Δ et de vecteur $\vec{u}$ est la symétrie de même axe Δ et de vecteur $-\vec{u}$.

3) Forme réduite d'une isométrie dans le plan :

- Toute isométrie dans le plan est soit une translation soit une rotation soit une réflexion soit une symétrie glissante.
- Une isomérie f ($f \neq id_{\wp}$) ayant un point invariant A est une rotation de centre A ou une reflexion d'axe passant par A.
- Une isomètrie f ($f \neq id_{\wp}$) ayant deux points distincts invariants A et B est la reflexion d'axe (AB).

4) Déplacement dans le plan :

- On appelle déplacement dans le plan, toute isomètrie qui conserve les angles orientés.
- La réciproque d'un déplacement est un déplacement
- La composée de deux déplacements est un déplacement,
- La forme réduite d'un déplacement dans le plan est soit une translation soit une rotation.
- Si A et B deux points distincts d'images respectives A' et B' par un déplacement f , alors AB = A'B' et $(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{A'B'}) = \alpha$, où α est l'angle de f ($\alpha = 0$, si f est une translation).
- La forme complexe d'un déplacement f d'angle α est: f : $M(Z) \mapsto M'(Z)$; $Z' = e^{i\alpha}Z + b$; $\alpha \in \mathbb{R}$; $b \in \mathbb{C}$
- Si A, B, A', B' sont quatre points tels que : A ≠ B et AB = A'B', alors, il existe un dépalcement unique f qui transforme A en A' et B en B'.

5) Antidéplacement dans le plan :

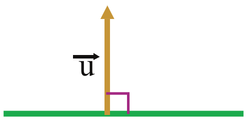
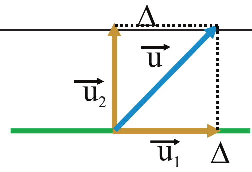
- On appelle antidéplacement dans le plan, toute isomètrie qui transforme les angles orientés en leurs opoosés.
- La réciproque d'un antidépalcement est un antidéplaement,
- La composée de deux antidépalcements est un dépalcement
- La composée d'un déplacement et d'un antidépalcement est un antidépalcement,
- La forme réduite d'un antidéplacement dans le plan est soit une réflexion soit une symétrie glissante.
- Si A, B, A', B' sont quatre points tels que : A≠B et AB = A'B' alors, il existe un antidépalcement unique qui transforme A en A' et B en B'.

6) Isométrie vectorielle :

Soit f une isométrie dans le plan et A un point donné d'image A' par f.
Notons M' l'image par f d'un point M quelconque.
On appelle isométrie vectorielle associée à f, l'application notée φ définie par : $\varphi(\overrightarrow{AM}) = \overrightarrow{A'M'}$.
L'isométrie vectorielle φ associée à une isométrie f a les propriétés suivantes :

- linéarité : $\varphi(\vec{u}+\vec{v}) = \varphi(\vec{u}) + \varphi(\vec{v})$; $\varphi(\alpha\vec{u}) = \alpha\varphi(\vec{u})$; (α un réel).
- conservation du produit scalaire : $\varphi(\vec{u}).\varphi(\vec{v}) = \vec{u}.\vec{v}$
- Effet sur le déterminant (dans une B. O): det $\left|\varphi(\vec{u});\varphi(\vec{v})\right| = \begin{cases} \det(\vec{u}\ ;\vec{v}) \text{ si } f \text{ est un dépalcement} \\ -\det(\vec{u}\ ;\vec{v})\ ;\ \text{sinon} \end{cases}$
- L'isométrie vectorielle associée à une translation est id$\mathscr{V}$ (identité vectorielle).

- L'isométrie vectorielle associée à une réflexion d'axe Δ est la réflexion vectorielle φ définie par :

Si	**alors**
 $\vec{\mathbf{u}}$ dirige Δ	$\varphi(\vec{\mathbf{u}}) = \vec{\mathbf{u}}$
$\vec{\mathbf{u}}$ est normal à Δ 	$\varphi(\vec{\mathbf{u}}) = -\vec{\mathbf{u}}$
$\vec{\mathbf{u}}$ oblique à Δ $\vec{\mathbf{u}} = \vec{\mathbf{u}}_1 + \vec{\mathbf{u}}_2$, avec $\vec{\mathbf{u}}_1$ qui dirige Δ et $\vec{\mathbf{u}}_2$ orthogonal à $\vec{\mathbf{u}}_1$ 	$\varphi(\vec{\mathbf{u}}) = \vec{\mathbf{u}}_1 - \vec{\mathbf{u}}_2$

- L'isométrie vectorielle associée à une rotation d'angle α est la rotation vecrorielle d'angle α.

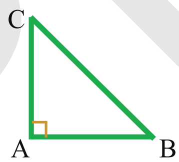
$\forall\ \vec{\mathbf{u}} \neq \vec{\mathbf{0}}$; $\varphi(\vec{\mathbf{u}}) = \vec{\mathbf{v}}$ **si et seulement si** $\|\vec{\mathbf{u}}\| = \|\vec{\mathbf{v}}\|$ **et** $(\vec{\mathbf{u}}\ ;\ \vec{\mathbf{v}}) = \alpha\ (2\pi)$.

- φ^{-1} est la rotation vectorielle d'angle $-\alpha$.
- si φ est la roation vectorielle d'angle π, alors, $\forall\ \vec{\mathbf{u}} \in V$: $\varphi(\vec{\mathbf{u}}) = -\vec{\mathbf{u}}$

Figures de rotations vectorielles :

Avec φ la rotation vectorielle d'angle $\frac{\pi}{2}$ on a :

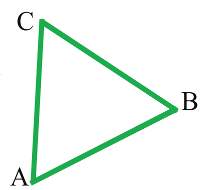
$\varphi(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AC}$; $\varphi(\overrightarrow{AC}) = -\overrightarrow{AB}$.



- ABC un triangle isocèle rectangle direct.

Avec la roation vectoreille d'angle $\frac{\pi}{3}$ on a :

$\varphi(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AC}$; $\varphi(\overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{BA}$; $\varphi(\overrightarrow{CA}) = \overrightarrow{CB}$.



- ABC un triangle équilatéral direct.

II. Similitude directe dans le plan :

1) Notion de similitude :

Définition :

Soit k un réel strictement positif donné. On appelle similitude plane directe ou similitude directe dans le plan, toute transformation qui multiplie la distance par k et conserve les angles orientés, k est appelé le rapport de la similitude.

- la réciproque d'une similitude de rapport k est une similitude de rapport $\frac{1}{k}$.
- la composée de deux similitudes directes de rapports k et k' est une similitude de rapport kk'.
- toute similitude de rapport k est la composée d'une homothétie de rapport k et d'un déplacement ; l'angle α du déplacement est l'angle de la similitude.
- la réciproque d'une similitude d'angle α est une similitude d'angle $-\alpha$.
- la composée de deux similitudes d'angles α_1 et α_2 est une similitude d'angle $\alpha_1 + \alpha_2$.

- l'image d'une droite par une similitude d'angle $\frac{\pi}{2}$ **ou** $-\frac{\pi}{2}$ est une droite qui lui est perpendiculaire.
- l'image d'un cercle de centre Ω et de rayon R par une similitude est le cercle de centre Ω' (l'image de Ω par cette similitude) et de rayon kR.
- si une similitude de rapport k et d'angle α transforme A en A'et B en B' (A ≠ B), alors, $k = \frac{A'B'}{AB}$ **et** $\alpha = (\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{A'B'})$.
- une similitude multiplie l'aire par k^2 .
- soit S une similitude de rapport k et d'angle α

Si	**alors**
$k = 1$	S est un déplacement
$k = 1$ et $\alpha = 0$	S est une translation
$k = 1$ et $\alpha \neq 0$	S est une rotation d'angle α
$k = 1$ et $\alpha = \pi$	S est une symétrie centrale
$k \neq 1$ et $\alpha = 0$	S est une homothétie de rapport k
$k \neq 1$ et $\alpha = \pi$	S est une homothétie de rapport -k

- une similitude conserve : le parallélisme ; l'orthogonalité, le barycentre, le milieu, l'alignement, les angles géométriques, les angles orientés, le contact.

2) Forme complexe d'une similitude :

$f : M(Z) \mapsto \mathbf{M'(Z')}$; $Z' = aZ + b$; $a \in \mathbb{C}^*$; $b \in \mathbb{C}$; a et b donnée ⇔ f est une similitude de rapport | a | et d'angle arg(a).

En plus,

si	alors
$a = 1$	f est la translation de vecteur d'affixe b
$a \neq 1$	f admet un seul point invariant appelé son centre, qui est le point Ω d'affixe $\omega = \frac{b}{1-a}$. f a trois éléments caractéristiques qui sont : • son centre : Ω(ω), • son rapport | a | • son angle : arg (a). et avec f une similitude de centre Ω d'affixe ω, de rapport k et d'angle α, on a : $f : M(Z) \mapsto \mathbf{M'(Z')} \Leftrightarrow Z' - \omega = ke^{i\alpha}(Z - \omega)$.

- si A, B, A’, B’ sont quatre points tels que A $\neq$ B et A’$\neq$ B’, alors : il existe une similitude unique qui transforme A en A’ et B en B’.

3) A propos des similitudes à centre :

- une similitude de centre Ω, de rapport k et d’angle α st notée $S_{(\Omega\,;\,k\,;\,\alpha)}$.
- $[S_{(\Omega\,;\,k\,;\,\alpha)}]^{-1} = S_{(\Omega\,;\,\frac{1}{k}\,;-\alpha)}$
- la composée de deux similitude S_1 et S_2 de même centre Ω est une similitude de même centre Ω, et $S_1 \circ S_2 = S_2 \circ S_1$
- $S_{(\Omega\,;\,k\,;\,\alpha)} : M \mapsto M' \Leftrightarrow \dfrac{\Omega M'}{\Omega M} = k$ et $(\overrightarrow{\Omega M}\,;\,\overrightarrow{\Omega M'}) = \alpha$
- la forme réduite de $S_{(\Omega\,;\,k\,;\,\alpha)}$ est $R_{(\Omega\,;\,\alpha)} \circ H_{(\Omega\,;\,k)} = H_{(\Omega\,;\,k)} \circ R_{(\Omega\,;\,\alpha)}$ avec

  $R_{(\Omega\,;\,\alpha)}$: rotation de centre Ω et d’angle α.

  $H_{(\Omega\,;\,k)}$: homothétie de centre Ω et de rapport k.

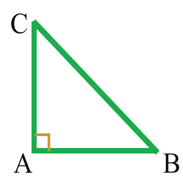
- soit A, B, C trois points tels que : A $\neq$ B et A $\neq$ C.

La similitude de centre A qui transforme B en C est notée $S_{(A\,;\,B\to C)}$, son rapport $\dfrac{AC}{AB}$; son angle est $(\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AC})$.

- $[S_{(A\,;\,B\to C)}]^{-1} = S_{(A\,;\,C\to B)}$

- **Figures de similitude**

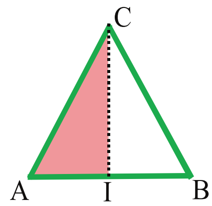
ABC un triangle isocèle rectangle direct en A.



$S_{(B;\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\pi}{4})}\left|\begin{array}{l}B\to B\\ C\to A\end{array}\right.$; $S_{(C;\sqrt{2};\frac{\pi}{4})}\left|\begin{array}{l}C\to C\\ A\to B\end{array}\right.$.

Demi triangle équilatéral

ABC un triangle équilatéral direct., I milieu de [AB].



$S_{(C;\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{\pi}{6})}\left|\begin{array}{l}C\to C\\ A\to I\end{array}\right.$; $S_{(A;\,2\,;\,\frac{\pi}{3})}\left|\begin{array}{l}A\to A\\ I\to C\end{array}\right.$.

Savoir-faire

A. Applications :

Exercice 1 :

Soient A et B deux points distincts et I milieu de [AB].
Déterminer les isométries du plan qui laissent globalement invariant le segment [AB].

Solution :

f une isométrie qui laisse globalement invariant [AB] $\Leftrightarrow f\left[A;B\right]\rightarrow\left[A;B\right]$; donc f (I) = I (car f conserve le milieu).
Donc f est soit une rotation de centre I soit une réflexion d'axe passant par I.

f rotation		f réflexion	
Si	**alors**	**Si**	**alors**
f(A) = A ; f(A) = B	$f = id_{\mathcal{P}}$ $f = S_I$ symétrie centrale de centre I.	f(A) = A ; f(A) = B	$f = S_{IA} = S_{AB}$ $f = S_\Delta$; Δ médiatrice de [AB].

Donc : les isométries demandées sont $\left\{id_P\ ;\ S_I\ ;\ S_{AB}\ ;\ S_\Delta\right\}$

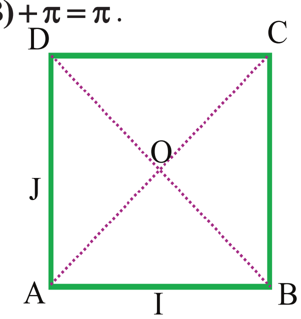
Exercice 2 :

ABCD un carré direct de centre O.
I et J les milieux respectifs de [AB] et [AD].
1.a) Montrer qu'il existe un déplacement unique f_1 qui transforme A en C et B en D.
Caractériser f_1.
b) Montrer qu'il existe un déplacement unique f_2 qui transforme A en B et J en I. caractériser f_2.
2.a) Montrer qu'il existe un antidéplacement g_1 unique qui transforme I en I et D en C.
Caractériser g_1.
b) Montrer qu'il existe un antidéplacement g_2 unique qui transforme D en A et A en B.
Caractériser g_2.
3) On pose $g = g_1 \circ g_2$.
Déterminer g(J) et g(D), puis donner la nature et les éléments caractéristiques de la transformation g.

Solution :

1.a) Comme AB = CD ; donc il existe un déplacement unique f_1,

qui transforme : $\left|\begin{array}{l} A \mapsto C \\ B \mapsto D \end{array}\right.$; l'angle de f_1 est $(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{CD}) = (\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AB}) + \pi = \pi$.



Donc; f_1 est une rotation d'angle π, d'où f_1 est une symétrie centrale.
Or f_1 (A) = C et O est le milieu de (AC].
Donc O est le centre de f_1, d'où $f_1 = S_O$.

b) Comme AJ = $\frac{1}{2}$ AD = $\frac{1}{2}$ AB = BI, donc il existe un déplacement unique f_2

qui transforme $\left|\begin{array}{l} A \mapsto B \\ J \mapsto I \end{array}\right.$; l'angle de f_2 est $(\overrightarrow{AJ}\ ;\ \overrightarrow{BI}) = (\overrightarrow{AD}\ ;\ \overrightarrow{BA}) = (\overrightarrow{BC}\ ;\ \overrightarrow{BA}) = \frac{\pi}{2}$,

donc f_2 est une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$, Or OA = OB et $(\overrightarrow{OA}\ ;\ \overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{2}$; f_2(A)= B ; d'où O est le centre de f_2. Donc $f_2 = R_{(O\ ;\ \frac{\pi}{2})}$.

2.a) Comme $ID^2 = IA^2 + AD^2 = IB^2 + BC^2 = IC^2$,

Donc $ID = IC$, d'où il existe un antidéplacement unique g_1 qui transforme $\left|\begin{array}{l}\mathbf{I} \mapsto \mathbf{I} \\ \mathbf{D} \mapsto \mathbf{C}\end{array}\right.$.

Or g_1 a un point invariant (qui est I)
Donc, g_1 n'est pas une symétrie glissante, d'où g_1 est une réflexion. Or $g_1(D) = C$.
Donc, l'axe de g_1 est la médiatrice de [DC] ou de [AB] qui est la droite (OI).
Donc, $g_1 = S_{OI}$.

b) Comme : DA = AB,

Donc : il existe un antidéplacement unique g_2 qui : $\left|\begin{array}{l}\mathbf{D} \mapsto \mathbf{A} \\ \mathbf{A} \mapsto \mathbf{B}\end{array}\right.$.

Or les droites (DA) et (AB) ne sont pas parallèles, donc g_2 n'est pas une réflexion, donc g_2 est une symétrie glissante.
Or J est le milieu de [DA] et I est le milieu de [AB], donc la droite (IJ) est l'axe de g_2.
Comme , $g(J) = I$ (par la conservation du milieu).
Donc, $\overrightarrow{JI}$ est le vecteur de g_2. Donc $g_2 = S_{IJ} \circ t_{\overrightarrow{JI}} = t_{\overrightarrow{JI}} \circ S_{IJ}$.

3) $g(J) = g_1 \circ g_2\,(J) = g_1(I) = I$; $g(D) = g_1 \circ g_2\,(D) = g_1(A) = B$.
Or, g est la composée de deux antidéplacements, donc g est un déplacement.

Or, l'angle de g est $(\overrightarrow{JD}\ ;\ \overrightarrow{IB}) = (\overrightarrow{DA}\ ;\ \overrightarrow{DC}) - \pi = \frac{\pi}{2} - \pi = -\frac{\pi}{2}$.

Donc, g est une rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$. Or $g(D) = B$ et $AD = AB$ et $(\overrightarrow{AD}\ ;\ \overrightarrow{AB}) = -\frac{\pi}{2}$,

Donc A est le centre de g, d'où , $g = R_{(A\,;\,-\frac{\pi}{2})}$.

Exercice 3 :

ABCD un carré direct de centre O.

I et J milieux respectifs de [BC] et [AD]. On pose AB = a ; (a > 0).

1.a) Montrer qu'il existe une similitude unique S_1 qui transforme C en O et I en A.

Déterminer l'angle et le rapport de S_1.

b) Soit Ω le centre de S_1.

Montrer que les points Ω, O, C , D d'une part et les points Ω, I, A , C d'autre part sont cocycliques.

Placer le point Ω après avoir préciser sa position.

2) Soit S_2 la similitude directe qui transforme B en O et O en J.

a) Déterminer les éléments caractéristiques de S_2.

b) Soit M un point du plan et $M' = S_2(M)$.

Déterminer le lieu géométrique du point M' lorsque M décrit le segment [OC].

c) On suppose que A, B, M sont alignés.

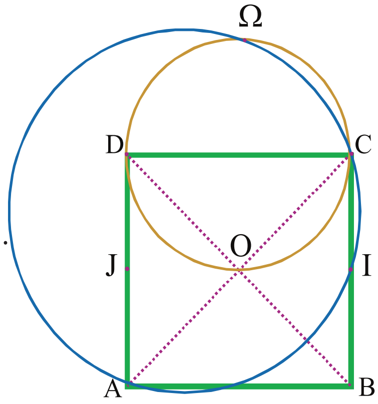
Montrer que les points A ; C ; M' sont alignés.

3) On pose $t = S_2 \circ S_1$.

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation t.

Mat 7 M AC.indd 151 20/01/46 02:17:13

Solution :



1.a) Comme : C $\neq$ I et O $\neq$ A.

Donc, il existe une similitude unique S_1 qui transforme

$\left| \begin{array}{l} \mathbf{C \mapsto O} \\ \mathbf{I \mapsto A} \end{array} \right.$; l'angle de S_1 est $(\overrightarrow{\mathbf{CI}}\ ;\ \overrightarrow{\mathbf{OA}}) = (\overrightarrow{\mathbf{CB}}\ ;\ \overrightarrow{\mathbf{CA}}) = -\frac{\pi}{4}$.

le rapport de S_1 est $\dfrac{\mathbf{OA}}{\mathbf{CI}} = \dfrac{\frac{\mathbf{a}\sqrt{2}}{2}}{\frac{\mathbf{a}}{2}} = \sqrt{2}$.

b) Comme S_1(C) = O, donc dans la question 1.b)

$(\overrightarrow{\Omega\mathbf{C}}\ ;\ \overrightarrow{\Omega\mathbf{O}}) = -\frac{\pi}{4}$ **, Or** $(\overrightarrow{\mathbf{DC}}\ ;\ \overrightarrow{\mathbf{DO}}) = (\overrightarrow{\mathbf{DC}}\ ;\ \overrightarrow{\mathbf{DB}}) = -\frac{\pi}{4}$, D'où, $(\overrightarrow{\Omega\mathbf{C}}\ ;\ \overrightarrow{\Omega\mathbf{O}}) = (\overrightarrow{\mathbf{DC}}\ ;\ \overrightarrow{\mathbf{DO}})$.

Donc ; les points Ω ; O ; C ; D sont cocycliques.

Comme S_1(I) =A , donc $(\overrightarrow{\Omega\mathbf{I}}\ ;\ \overrightarrow{\Omega\mathbf{A}}) = -\frac{\pi}{4}$ .Or $(\overrightarrow{\mathbf{CI}}\ ;\ \overrightarrow{\mathbf{CA}}) = (\overrightarrow{\mathbf{CB}}\ ;\ \overrightarrow{\mathbf{CA}}) = -\frac{\pi}{4}$;

Donc $(\overrightarrow{\Omega\mathbf{I}}\ ;\ \overrightarrow{\Omega\mathbf{A}}) = (\overrightarrow{\mathbf{CI}}\ ;\ \overrightarrow{\mathbf{CA}})$; d'où les points Ω ; I ; A ; C sont cocycliques.

Donc, Ω est le point distinct de C, intersection du cercle circonscrit au triangle IAC avec le cercle circonscrit au triangle OCD (cercle de diamètre [CD]).

2.a) Comme $\left| \begin{array}{l} (\overrightarrow{\mathbf{AB}}\ ;\ \overrightarrow{\mathbf{AO}}) = (\overrightarrow{\mathbf{AO}}\ ;\ \overrightarrow{\mathbf{AJ}}) = \frac{\pi}{4} \\ \dfrac{\mathbf{AO}}{\mathbf{AB}} = \dfrac{\mathbf{AJ}}{\mathbf{AO}} = \mathbf{cos}\,\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array} \right.$; donc :

- le centre de S_2 est A ;
- l'angle de S_2 est $\frac{\pi}{4}$
- le rapport de S_2 est $\frac{\sqrt{2}}{2}$

b) Comme $(\overrightarrow{\mathbf{AC}}\ ;\ \overrightarrow{\mathbf{AD}}) = \frac{\pi}{4}$ **et** $\dfrac{\mathbf{AD}}{\mathbf{AC}} = \mathbf{cos}\,\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; donc S_2(C) = D ; Or S_2(O) = J ; donc le lieu géométrique de M' est le segment [JD], lorsque M décrit le segment [OC].

c) On a : S_2 $\left| \begin{array}{l} \mathbf{A \mapsto A} \\ \mathbf{B \mapsto O} \\ \mathbf{M \mapsto M'} \end{array} \right.$; donc les points A ; O ; M' sont alignés (conservation de l'alignement), Or les points A ; O ; C sont alignés ; donc les points A ; C ; M' sont alignés.

3) t est une similitude d'angle $-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \mathbf{0}$ et de rapport $(\sqrt{2})(\frac{\sqrt{2}}{2})$ = 1. Donc t est une translation,

Or t(C) = S_2 o S_1 (C) = S_2 (O) = J. Donc : t est la translation de vecteur $\overrightarrow{\mathbf{CJ}}$.

Exercice 4 :

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v})$. Soit $\theta \in [0\,;\,\frac{\pi}{2}]$.

f_θ défini par : $f_\theta : M(Z) \mapsto M'(Z')$; $Z' = (1 + i\tan\theta)Z$.

1) Suivant les valeurs de θ.

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f_θ.

2) Lorsque $\theta \in \left]0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$.

Montrer que pour tout point $M \neq O$, le triangle OMM' est rectangle.

3) Soit A(1 ; 0) et $A_\theta = f_\theta(A)$.

Déterminer l'ensemble des points A_θ lorsque θ varie dans $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$.

Solution :

1) Si θ = 0 ; alors Z' = Z , donc $f_\theta = \boldsymbol{Id}_{\wp}$;

Si $\theta \neq 0$; alors $1 + i\tan\theta = \frac{1}{\cos\theta}e^{i\theta}$ et $\frac{1}{\cos\theta} > 0$;

Donc $Z' = \frac{1}{\cos\theta}e^{i\theta}Z$ et $f_\theta(0) = 0$.

Donc, f_θ est la similitude de centre O, d'angle θ et de rapport $\frac{1}{\cos\theta}$.

2) $\frac{Z-Z'}{Z} = \frac{Z-(1+i\tan\theta)Z}{Z} = 1 - 1 - i\tan\theta = -i\tan\theta$,

Donc $(\overrightarrow{MO}\,;\,\overrightarrow{MM'}) = \arg(-i\tan\theta) = -\frac{\pi}{2}$;

d'où OMM' est rectangle en M.

3) $A_\theta = f_\theta(A)$;

- si θ = 0 ; alors $A_\theta = A$.
- si $\theta \in \left]0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$, alors le triangle OAA_θ est rectangle en A, avec $(\overrightarrow{OA}\,;\,\overrightarrow{OA_\theta}) = \theta$ et $\theta \in \left]0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$.

Donc lorsque θ varie dans $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$, l'ensemble des points A_θ est la demi-droite d'origine A,

d'équation $\begin{cases} x = 1 \\ y \geq 0 \end{cases}$

B. Exercices divers :

1. Soit A et B deux points distincts dans le plan Déterminer les isométries qui transforment A en B.

2. ABC un triangle équilatéral direct de centre O. Déterminer les isométries qui laissent le triangle ABC globalement invariant .

3. ABC un triangle rectangle en A. I et J les milieux respectifs de [AC] et [BC].
On pose : $f = t_{\overrightarrow{AC}} \circ S_{AB}$. Montrer que **f** est une réflexion et préciser son axe.

4. ABCD un carré de centre O. I milieu de [AD]. On pose $f = t_{\overrightarrow{AC}} \circ S_{AB}$.
Montrer que f est une symétrie glissante et préciser son axe et son vecteur.

5. ABCD un carré direct de centre O. I et J les milieux respectifs de [AB] et [AD].

1. a) Montrer qu'il existe un déplacement unique f_1 qui transforme A en B et D en C. Caractériser f_1.

b) Montrer qu'il existe un déplacement unique f_2 qui transforme A en B et J en I. Caractériser f_2.

2. a) Montrer qu'il existe un antidéplacement unique g_1 qui transforme I en I et D en C. Caractériser g_1.

b) Montrer qu'il existe un antidéplacement unique g_2 qui transforme D en A et A en B. Caractériser g_2.

6 Dans le plan orienté on considère un triangle équilatéral direct ABC de côté a.
Soit G le centre de gravité de ce triangle et soit D le symétrique de A par rapport à C.

1) Faire une figure qui sera complétée au fur et à mesure.

2. a) Prouver qu'il existe une unique rotation r qui transforme A en C et B en D.

b) Préciser un angle de r et déterminer son centre E, puis le placer sur la figure.

3) Prouver que les points A ; B ; D et E sont cocycliques, préciser le centre et le rayon de ce cercle, puis le construire.

4) Soit S la similitude directe de centre B qui transforme D en C.

a) Déterminer un angle et le rapport de S

b) Déterminer l'image du triangle BDE par $S \circ S$

5) On pose : $f = r \circ S$ et $g = S \circ r$

a) Préciser et construire :
$f(B)$; $f(E)$; $g(B)$; $g(A)$.

b) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f et g.

c) Démontrer que les cercles de diamètres respectifs [AG] ; [BC] ; [CE] ; [DB] ont un point commun. Quelle est la particularité de ce point ?.

7. $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ sont deux cercles sécants en A et B de centres respectifs O et O'. S la similitude de centre A qui transforme O en O'.

1) Déterminer l'image de $\mathscr{C}$ par S, Justifier.

2) Soit $B' = S(B)$.
Montrer que la droite (BB') est tangente à $\mathscr{C}$.
Soit $M \in \mathscr{C} \setminus \{A ; B\}$.

3) Montrer que les points B ; M ; M' sont alignés.

8. Soit ABC un triangle isocèle rectangle direct en A. Soit $\sum$ **et** Γ les deux cercles de centres respectifs B et C et passant par le point A et se recoupent en un point G. Soit D le point diamétralement opposé à A sur $\sum$.

1. a) Faire une figure que l'on complétera au fur et à mesure.

b) Montrer qu'il existe une rotation unique r qui transforme A en D et C en B et déterminer ses éléments caractéristiques.

2) Soit M un point de Γ distinct de G.
On pose $r(M) = M'$.
La droite (GM) coupe $\sum$ en N' et la droite (GM') coupe Γ en N.

a) Construire les deux points R et S tels que les quadrilatères M'GMR et N'GNS soient des carrés, puis déterminer les éléments caractéristiques de la similitude directe S qui transforme M en R et N en S.

b) Montrer que la droite (RS) passe par un point fixe, lorsque M décrit Γ privée de G.

3) Soit S' la similitude directe qui transforme D en B et B en C.

On appelle I le centre de S'.

a)Déterminer l'angle et le rapport de S'.

b) Montrer que: $(\overrightarrow{ID}\ ;\ \overrightarrow{IB}) = (\overrightarrow{GD}\ ;\ \overrightarrow{GB})\ [\pi]$ (1)

et que : $(\overrightarrow{ID}\ ;\ \overrightarrow{IC}) = (\overrightarrow{AD}\ ;\ \overrightarrow{AC})\ [\pi]$ (2)

c) Déduire de (1) et de (2) la position de I et déterminer la nature du quadrilatère ACID.

4) On pose : $f = S \circ S'$.

Montrer que f est une homothétie et préciser son rapport et son centre.

9. Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC de sens direct de côté a. Les points A ; F ; G sont définis par :

$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{CG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$; Faire une figure que l'on complétera au fur et à mesure.

2. a) Montrer qu'il existe une unique rotation r telle que r(A) = B et r(E) = F.

b) Déterminer l'angle et le centre de r.

c) Montrer que EFG est un triangle équilatéral et calculer son aire en fonction de a.

3) Soit S la similitude directe de centre O qui transforme A en E.

a) Montrer que S(B) =F, puis déterminer S(C).

b) Calculer le rapport de S.

c) Soit α une mesure de l'angle de S, déterminer la valeur exacte de cosα.

4) Soit I ; J ; K ; L les points définis par :

I est l'intersection des segments [AF] et [BG]

J est l'intersection des segments [BG] et [CE]

K est l'intersection des segments [CE] et [AF].

a) Montrer que IJK est un triangle équilatéral.

b) Montrer que :

$$I = \text{bar}\begin{array}{|c|c|}\hline A & F \\ \hline 4 & 3 \\ \hline\end{array} = \text{bar}\begin{array}{|c|c|}\hline A & F \\ \hline 1 & 6 \\ \hline\end{array}$$

c) En déduire l'aire du triangle IJK en fonction de a.

10 Le plan est rapporté à un repère orthonormal (O ; $\vec{u}$; $\vec{v}$).

f : M(Z) $\mapsto$ M'(Z') ; Z' = (1+ i)Z +1.

1) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f.

2) Soit Ω le point d'affixe i .

Montrer que pour M $\neq \Omega$, le triangle ΩMM' est isocèle rectangle.

3) Soit Γ l'ensemble des points M(x ; y) tels que : $x^2 + y^2 - 2y = 0$, et $\Gamma' = f(\Gamma)$

a) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de Γ .

b) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de Γ'. Construire Γ et Γ'.

11 ABCD un carré direct de centre I.

J le milieu de [AI]. Soit S_1 la similitude directe qui transforme A en I et B en J.

1) Déterminer le rapport et un angle de S.

2) Construire C' = S (C) et D' = S(D).

3) Démontrer que le centre Ω de S appartient au cercle de diamètre [AD] et au cercle circonscrit au triangle ABJ, placer Ω.

12 ABCD et DEFG deux carrés directs tels que E est le milieu de [CD].

1) Soit S la similitude directe de centre D qui transforme A en B.

a) Déterminer les éléments caractéristiques de S.

b) Déterminer S(E) et la mesure principale de l'angle ($\overrightarrow{AE}$; $\overrightarrow{BF}$).

2) Soit K le point d'intersection des droites (AE) et (BF).

a) Montrer que les cercles de diamètres [BD] et [DF] se recoupent en K.

b) En déduire que les droites (KD) et (BF) sont perpendiculaires et que les points C ; G ; K sont alignés.

13 ABCD un carré direct de centre I. Soit P un point de (BC) distinct de B. les droites (AP) et (CD) se coupent en Q. La perpendiculaire à (AP) en A coupe (BC) en R et (CD) en T.

1) Soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Déterminer l'image de la droite (BC), puis les images des points P et B par r.

2) On désigne par N et M les milieux respectifs de [PT] et [QR]. Soit S la similitude directe de centre A de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$

a) Determiner S(B) ; S(R) ; S(P).

b) Déterminer le lieu géométrique du point N lorsque P décrit la droite (BC) privée de B.

c) En déduire que les points M ; N ; B ; D ; I sont alignés.

14 Dans le plan orienté, on considère un triangle équilatéral ABC direct de coté a.

Soit D et E les images respectives de A et B par la symétrie de centre C. Soit I le milieu du segment [BC].

1) Faire une figure (qui sera complétée au fur et à mesure).

2. a) Montrer qu'il existe une similitude directe S1 de centre B et qui transforme D en A. Déterminer l'angle et le rapport de S_1.

b) Soit M un point de la droite (DE) distinct de D et de E.

Déterminer le lieu géométrique du point M' image de M par S_1. Construire M'à partir d'une position donnée de M sur (DE), puis démontrer que les points M' ; M ; B et E sont cocycliques quelque soit la position de M sur (DE).

3) Soit S_2 la similitude directe qui transforme I en B et E en D.

a) Déterminer l'angle et le rapport de S_2.

b) Déterminer le centre de S_2

4) On pose $\mathbf{f} = S_1 \circ S_2$.

a) Montrer que **f** est une similitude directe, puis donner son angle et son rapport.

b) Montrer que le centre Ω de **f** est le point d'intersection du cercle de diamètre [BE] avec un deuxième cercle Γ que l'on déterminera.

Construire Ω.

15 ABC un triangle direct, I, J, K les milieux respectifs de [BC], [CA], [AB]. APB est isocèle rectangle en P direct.

CQA est isocèle rectangle en Q direct.

1) Faire une figure.

2) On se propose de montrer que le triangle IPQ est isocèle rectangle direct en I.

Soit φ la rotation vectorielle d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

a) Déterminer $\varphi(\overrightarrow{IP})$.

b) Conclure.

16 ABC un triangle direct. APR ; BQC ; CRA des triangles équilatéraux directs. G est le centre de gravité de ABC.

1) Faire une figure

2) On se propose de montrer que ABC et PQR ont le même centre de gravité G.

Soit la rotation vectorielle d'angle $\frac{\pi}{3}$.

a) Déterminer $\varphi(\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BQ}+\overrightarrow{CR})$.

b) En déduire la valeur du vecteur $\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BQ}+\overrightarrow{CR}$ et conclure.

17 On donne deux triangles ABC ; DEF équilatéraux directs. Soit G et H les points tels que EDBG et CDFH sont des parallélogrammes.

Le but de l'exercice est de montrer que le triangle AGH est équilatéral direct.

Soit φ la rotation vectorielle d'angle $\frac{\pi}{3}$.

Montrer que $\varphi(\overrightarrow{AG}) = \overrightarrow{AH}$ et en déduire le but de l'exercice.

CHAPITRE 13

Courbes paramétrées

Faire savoir

L'essentiel du chapitre

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. Notion de courbe paramétrée :

Définition :

Soient deux fonctions numériques f et g définies sur un même intervalle I.
L'ensemble des points M(t) de coordonnées (f(t) ; g(t)), où t appartient à I, est une courbe paramétrée dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$ $t \in I$. La varaiable t est le paramètre (il peut être désigné par une autre lettre). Le point M(t) de coordonées (f(t) ; g(t)) est appelé point de paramètre t :

$\overrightarrow{OM(t)} = f(t).\vec{i} + g(t).\vec{j}$.

Il n'est pas obligatoire de s'attacher aux notations f et g. On écrira par exemple : soit la courbe de représentation paramétrique : $\begin{cases} x(t) = \dfrac{t^2}{1+t^2} \\ y(t) = \dfrac{t^3}{1+t^2} \end{cases}$

Exemple 1 :

Dans le repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, une représentation paramétrique du cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon R est : $\begin{cases} x(\theta) = R\cos\theta \\ y(\theta) = R\sin\theta \end{cases}$; $\theta \in [0\ ;\ 2\pi]$.

2. Tangente à une courbe paramétrée :

Définition :

Soit $\mathcal{C}$ une courbe paramétrée : $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$; $t \in I$

Soit M(t_0) ($t_0 \in$I) un point de $\mathcal{C}$.

Si $\begin{cases} f \text{ et } g \text{ sont dérivables en } t_0 \\ \text{le vecteur : } \vec{V}(t_0) = f'(t).\vec{i} + g'(t).\vec{j} \text{ n'est pas nul.} \end{cases}$

Alors, la droite passant par le point M(t_0) et de vecteur directeur $\vec{V}(t_0)$ est la tangente à $\mathcal{C}$ au point M(t_0).

Le vecteur $\vec{V}(t) = x'(t).\vec{i} + y'(t).\vec{j}$ s'appelle le vecteur dérivé en t , ou encore le vecteur tangent à la courbe en M(t).

Exemple 2 :

$\mathcal{C}$ est la courbe définie, dans un repère orthonormal $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ par la représentation paramétrique :

$\begin{cases} x(t)=\cos t \\ y(t)=\sin 2t \end{cases}$; $t\in[0\ ;\ 2\pi[$. Les fonctions $f: t\mapsto \cos t$ et $g:\mapsto \sin 2t$, sont dérivables en $t_0 = \frac{\pi}{2}$.

et l'on a $f'\left(t_0\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1$ et $g'\left(t_0\right)=2\cos 2t_0=2\cos\pi=-2$. La courbe $\mathcal{C}$ admet donc une tangente au point M_0 correspondant au paramètre $t_0=\frac{\pi}{2}$.Cette tangente est la droite qui passe par le point $M_0\left(0;0\right)$.

Donc le point O, et dont un vecteur directeur est $\vec{T}(-1;-2)$. Une équation cartésièenne de la tangente est donc, $\begin{vmatrix} x & -1 \\ y & -2 \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow -2x+y=0$.

3. Interprétation cinématique :

$\mathcal{C}$ est la courbe paramétrique dont une représentation paramétrique est :

$\begin{cases} x=f(t) \\ y=g(t) \end{cases}$; $t\in I$.

Un point matériel M se déplace dans le plan, et à chaque insatnt t de l'intervelle I, ses coordonnées x et y sont données par :

$x=f(t)$ et $y=g(t)$ où f et g sont deux fonctions deux foix dérivables sur I.

$\mathcal{C}$ est la trajéctoire du point M(t).

A l'instant t_0, M occupe la position $M_0(t_0)$ et on suppose : $(f'(t)\ ,g'(t)\ )\ \neq (\ 0\ ;\ 0)$.

Le vecteur dérivé : $\vec{V}(t_0)=f'(t_0).\vec{i}+g'(t_0).\vec{j}$ est le vecteur vitesse instantanée du point mobile M (t) à l'instant t_0.

Le vecteur $\overrightarrow{a(t_0)}=\overrightarrow{v'(t_0)}=f''(t_0).\vec{i}+g''(t_0).\vec{j}$ est appelé vecteur accélération du point mobile M à l'instant t_0.

4. Construction d'une courbe paramétrée :

a) Elimination du paramètre :

Soit la courbe paramétrée définie par la représentation paramétrique :

$\begin{cases} x(t)=\cos(t) \\ y(t)=\sin(t) \end{cases}$; $t\in\left[0\ ;\ 2\pi\right]$. Il est clair que $x^2\left(t\right)+y^2\left(t\right)=1$ et que le point $M(t)\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ appartient à la courbe d'équation $x^2+y^2=1$, c'est –à-dire le cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 1.

Il n'est pas toujours posssibles d'éliminer, comme ci-dessus, le paramètre.

Il faut, donc, savoir comment tracer une courbe paramétrée.

b) Comment tracer une courbe paramétrée ?

Nous allons tracer la courbe paramétrée $\mathcal{C}$ définie dans le repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$, par :

$\begin{cases} x=\cos 3t=f(t) \\ y=\sin 2t=g(t) \end{cases}$; $t\in\mathbb{R}$

Les fonctions f et g sont de période 2π.

Les valeurs du paramètre **t** et **t + 2π** donnent le même point de la courbe.
Il suffit de faire varier t dans un intervalle **[a ; a + 2π]** pour obtenir toute la courbe $\mathcal{C}$.

$\forall$ t $\in \mathbb{R}$; $\begin{cases} f(-t) = f(t)\ ; \\ g(-t) = -g(t); \end{cases}$ on en déduit que la courbe admet x'ox comme axe de symétrie

$\forall$ t $\in \mathbb{R}$; $\begin{cases} f(t+\pi) = -f(t)\ ; \\ g(t+\pi) = g(t); \end{cases}$ $\mathcal{C}$est donc symétrique par rapport à **(y'oy).**

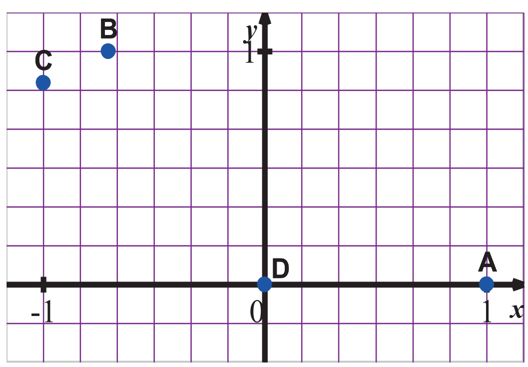
Il suffit alors d'étudier les fonctions sur **[0 ; $\frac{\pi}{2}$]. f** et **g** sont dérivables sur **[0 ; $\frac{\pi}{2}$]** et

$\mathbf{f'(t) = -3\sin 3t}$; $\mathbf{g'(t) = 2\cos 2t}$

$\mathbf{(f'(t) = 0 \text{ et } t[0\ ;\frac{\pi}{2}]) \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{3}}$; $\mathbf{(g'(t) = 0 \text{ et } t[0\ ;\frac{\pi}{2}]) \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{4}}$. On peut établir le tableau de variations suivant : (Noter l'emplacement des lignes du tableau : les variations de **g** sont immédiatement lisibles sous celles de **f**).

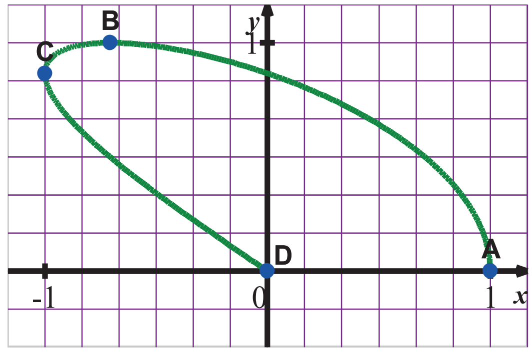
t	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$
$f'(t)$		−		−	0	+	
$f(t)$	1	↘	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	↘	-1	↗	0
$g(t)$	0	↗	1	↘	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	↘	0
$g'(t)$		+	0	−		−	

Ce tableau nous donne 4 points :
A(0) = (**1 ; 0**) ;
B($\frac{\pi}{4}$) = ($-\frac{\sqrt{2}}{2}$; **1**) ;
C($\frac{\pi}{3}$) = (**-1** ; $\frac{\sqrt{3}}{2}$) ;
D($\frac{\pi}{2}$) = (**0 ; 0**).



On place ces quatre points (comme l'indique la figure).

Puis, on trace la courbe sur les intervalles :$[\,0\,;\,\frac{\pi}{4}\,]\,;\,[\,\frac{\pi}{4}\,;\,\frac{\pi}{3}\,]\,;\,[\,\frac{\pi}{3}\,;\,\frac{\pi}{2}\,]$.



L'étude des tangentes aux points A ; B ; C et D facilite le tracé de la courbe.

Nous avons : $f'(t) = -3\sin 3t$; $g'(t) = 2\cos 2t$,

ce qui permet le calcul des coordonnées d'un vecteur directeur de la tangente en un point donné :

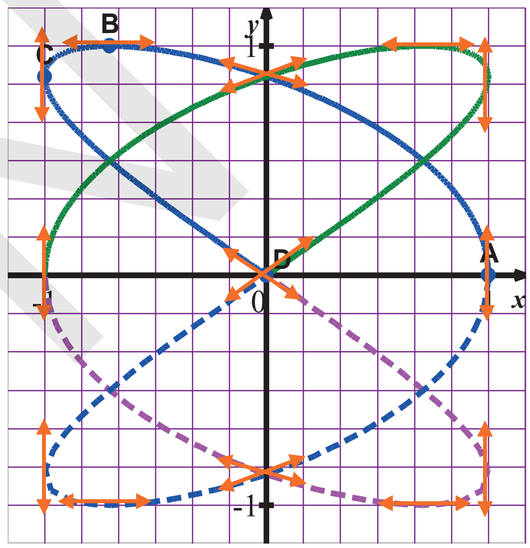
on obtient :

En A : pour $t = 0$: $(\,0\,;\,2\,)$;

En B : pour $t = \frac{\pi}{4}$: $(-\frac{3\sqrt{2}}{2}\,;\,0\,)$

En C : pour $t = \frac{\pi}{3}$: $(\,0\,;\,-1\,)$;

En D :   pour $t = \frac{\pi}{2}$: $(\,3\,;\,-2\,)$.



Pour préciser le tracé,

on place le point E de l'axe (Oy)

et une tangente en E à la courbe.

Pour $t = \frac{\pi}{6}$: $x = 0$; $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

$f'(\frac{\pi}{6}) = -3$; $g'(\frac{\pi}{6}) = 1$.

On complète ensuite la courbe par symétrie orthogonale d'axes : (Ox) et (Oy).

Une telle courbe est appelée courbe de Lissajous.

Lissajous est un Physicien français (1822 – 1880).

Savoir-faire

A. Applications :

Exercice 1 :

Montrer que les courbes définies dans un repère par les représentations paramétriques, sont dans ce repère, les représentations graphiques de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ que l'on précisera.

$$\textbf{a)}\ \begin{cases} x = t+1 \\ y = t^2 - 2t \\ t \in \mathbb{R} \end{cases} ;\quad \textbf{b)}\ \begin{cases} x = e^t \\ y = (1-t)e^t \\ t \in \mathbb{R} \end{cases} ;\quad \textbf{c)}\ \begin{cases} x = 1 + \dfrac{2}{t-1} ; \\ y = e^t \end{cases}\ t \in [2\ ;+\infty[.$$

Solution :

a) $x = t + 1 \Leftrightarrow t = x - 1$; $y = t^2 - 2t = (x-1)^2 - 2(x-1) \Leftrightarrow y = x^2 - 4x + 3$.

Donc cette représentation paramétrique est la définition de la courbe de :

$f(x) = x^2 - 4x + 3$ définie sur $\mathbb{R}$.

b) $x = e^t \Leftrightarrow x > 0$ et $t = \ln x$, donc $y = (1 - \ln x)e^{\ln x} \Leftrightarrow y = x(1 - \ln x)$.

La courbe définie par cette représentation paramétrique est la courbe de la fonction :

$g(x) = x(1 - \ln x)$, définie sur $]0\ ; +\infty[$.

c) $x = 1 + \dfrac{2}{t-1} \Leftrightarrow x - 1 = \dfrac{2}{t-1} \Leftrightarrow t - 1 = \dfrac{2}{x-1} \Leftrightarrow t = 1 + \dfrac{2}{x-1} = \dfrac{x+1}{x-1}$.

$y = e^t = \Leftrightarrow y = e^{\frac{x+1}{x-1}}$; $t \in [2\ ; +\infty[\Leftrightarrow 2 \leq t \Leftrightarrow 1 \leq t - 1 \Leftrightarrow 0 < \dfrac{1}{t-1} \leq 1 \Leftrightarrow 0 < \dfrac{2}{t-1} \leq 2 \Leftrightarrow$

$1 < 1 + \dfrac{2}{t-1} \leq 3 \Leftrightarrow 1 < x \leq 3$.

La courbe définie par cette représentation paramétrique est la courbe de la fonction : $h(x) = e^{\frac{x+1}{x-1}}$ définie sur $]1\ ; 3]$.

Exercice 2 :

Montrer que les courbes définies par les représentations paramétriques suivantes admettent une tangente au point correspondant à la valeur donnée du paramètre.

Donner une équation de cette tangente.

$$\textbf{a)}\ \begin{cases} x = 2t^2 - t \\ y = t^3 - 2t \\ t \in \mathbb{R} \end{cases} ;\ \text{en } t = 1 \text{ et } t = 3\ ;\quad \textbf{b)}\ \begin{cases} x = \cos t + \sin t \\ y = t + \cos 2t \\ t \in \mathbb{R} \end{cases}\ \text{en } t = 0 \text{ et } t = \frac{\pi}{2}.$$

Solution :

Dans les deux cas, les fonctions x(t) et y(t) sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

Les courbes définies ainsi admettent donc des tangentes aux points donnés :

a) $x'(t) = 4t - 1$; $y'(t) = 3t^2 - 2 \Leftrightarrow x'(1) = 3$; $y'(1) = 1$;

$M(1) = (x(1)\ ; y(1))$; $x(1) = 1$; $y(1) = -1 \Leftrightarrow$

$M(1) = (1\ ; -1)$.

Une équation de la tangente à la courbe en M(1) est déterminée par : $\begin{vmatrix} x-1 & 3 \\ y+1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$

$x - 3y - 4 = 0$.

$x(3) = 18 - 3 = 15$; $y(3) = 27 - 6 = 21$; $x'(3) = 11$; $y'(t) = 25$.

Une équation de la tangente en M(3) est déterminée par : $\begin{vmatrix} x-15 & 11 \\ y-21 & 25 \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow$ **25(x – 15) -11(y -21) = 0 $\Leftrightarrow$ 25x -11y -144 = 0.**

b) x'(t) = - sint + cost ; y'(t) = 1 -2sin2t ;

- **x'(0) = 1 ; y'(0) = 1 ;**
  x(0) = 1 ; y(0) = 1 ; M(o)→ (1 ; 1)

  Une équation de la tangente à la courbe en M(0) est déterminée par : $\begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ y-1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$

  $x - y = 0$.

- $x'(\frac{\pi}{2}) = -1$; $y'(\frac{\pi}{2}) = 1$;

  $x(\frac{\pi}{2}) = 1$; $y(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} - 1$;

  $M(\frac{\pi}{2}) \to (1 ; \frac{\pi}{2} - 1)$.

Une équation de la tangente à la courbe en $M(\frac{\pi}{2})$ est déterminée par : $\begin{vmatrix} x-1 & -1 \\ y-\frac{\pi}{2}+1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$

$x - 1 + y - \frac{\pi}{2} + 1 = 0 \Leftrightarrow x + y - \frac{\pi}{2} = 0.$

Exercice 3 :

Dans les deux cas suivants déterminer le vecteur vitesse à l'instant t_0 du point mobile M(t) dont les coordonnées en fonction du temps sont : x(t) et y(t).
Déterminer aussi le vecteur accélération.

a) $x(t) = \cos 2t - 1$; $y(t) = 2\cos^2 t$; $t_0 = \frac{\pi}{6}$;

b) $x(t) = \cos 3t$; $y(t) = \cos t$; $t_0 = \frac{2\pi}{3}$

Solution :

a) **$x'(t) = -2\sin 2t$; $y'(t) = -4\sin t\cos t = -2\sin 2t$;**
$x''(t) = -4\cos 2t$; $y''(t) = -4\cos 2t$;

$t_0 = \frac{\pi}{6}$; $x'(\frac{\pi}{6}) = -2\sin\frac{\pi}{3} = -2\frac{\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3}$; $y'(\frac{\pi}{6}) = -\sqrt{3}$.

Le vecteur vitesse est $\vec{V}\begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$ à l'instant $t_0 = \frac{\pi}{6}$. $x''(\frac{\pi}{6}) = y''(\frac{\pi}{6}) = -4\cos\frac{\pi}{3} = -4 \times \frac{1}{2} = -2$.

Le vecteur accélération à l'instant $t_0 = \frac{\pi}{6}$ est $\vec{a}\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$

b) $x'(t) = -3\sin 3t$; $y'(t) = -\sin t$; $x''(t) = -9\cos 3t$; $y''(t) = -\cos t$;

en $t_0 = \frac{2\pi}{3}$ on a : $x'(\frac{2\pi}{3}) = -3\sin 2\pi = 0$; $y'(\frac{2\pi}{3}) = -\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

le vecteur vitesse à l'instant $t_0 = \dfrac{2\pi}{3}$ est $\vec{V}\begin{pmatrix} 0 \\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$;

$x''(\dfrac{2\pi}{3}) = -9\cos 2\pi = -9$; $y''(\dfrac{2\pi}{3}) = -\cos\dfrac{2\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$.

le vecteur accélération à l'instant $t_0 = \dfrac{2\pi}{3}$ est $\vec{a}\begin{pmatrix} -9 \\ \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Exercice 4 :

Tracer la courbe paramétrique Γ définie dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$ par la représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x(t) = 3t^2 - 2 \\ y(t) = 3t - t^3 \end{cases} \; ; \; t \in [-2\,;\,2]$$

Solution :

On constate que : x(-t) = x(t) et y(-t) = -y(t).

La courbe admet donc l'axe (Ox) comme axe de symétrie.

Il suffit d'étudier les fonctions x(t) et y(t) sur [0 ; 2].

$x'(t) = 6t$; $y'(t) = 3 - 3t^2 = 3(1 - t)(1 + t)$.

Ainsi :

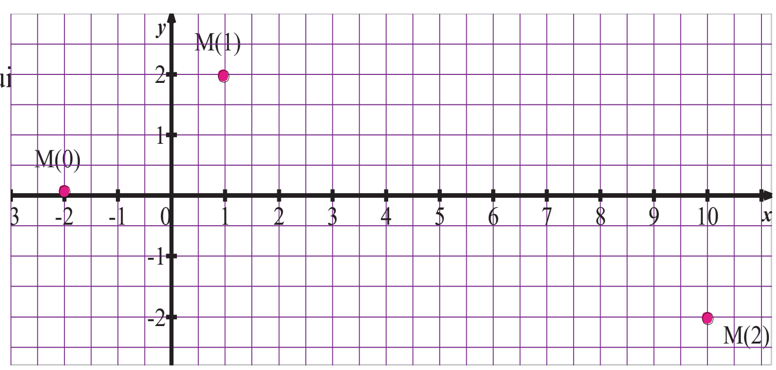
t	0		1		2
x'		+	6	+	
x	-2	↗	1	↗	10
y	**0**	↗	**2**	↘	**-2**
y'		+	0	−	

- On place les 3 points correspondants aux valeurs du paramètre qui apparaissent dans le tableau de variation

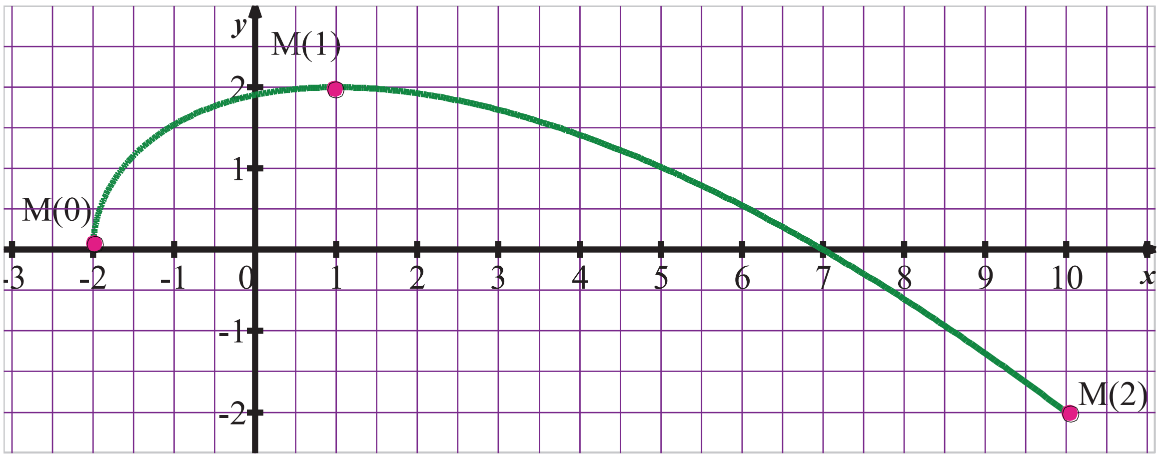
M(0) = (-2 ; 0) ;

M(1) = (1 ; 2) ;

M(2) = (10 ; -2).



- On trace la courbe sur les intervalles [0 ; 1] et [1 ; 2] où les fonctions x(t) et y(t) sont monotones toutes les deux.



- Traçons les vecteurs tangents aux points : M(0), M(1), et M(2).

- $t = 0 \Rightarrow x'(0) = 0$, $y'(0) = 3$; donc $\vec{\mathbf{V}}\mathbf{(0)}\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\\mathbf{3}\end{pmatrix}$,

- $t = 1 \Rightarrow x'(1) = 6$, $y'(1) = 0$; donc $\vec{\mathbf{V}}\mathbf{(1)}\begin{pmatrix}\mathbf{6}\\\mathbf{0}\end{pmatrix}$

- $t = 2 \Rightarrow x'(2) = 12$, $y'(2) = -9$; donc $\vec{\mathbf{V}}\mathbf{(2)}\begin{pmatrix}\mathbf{12}\\\mathbf{-9}\end{pmatrix}$

On complète la courbe Γ par symétrie orthogonale d'axe : (Ox).

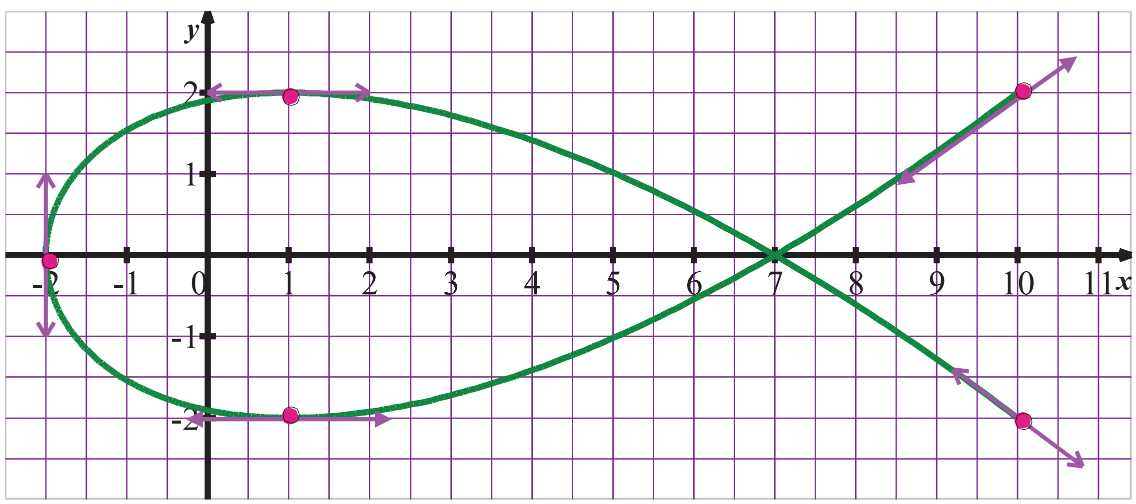
- $x(t) = 0 \Leftrightarrow 3t^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow t^2 = \frac{2}{3} \Leftrightarrow t = -\sqrt{\frac{2}{3}}$ ou $t = \sqrt{\frac{2}{3}}$;

$y(-\sqrt{\frac{2}{3}}) = -3\sqrt{\frac{2}{3}} + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}} = -\frac{7}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}$; $y(\sqrt{\frac{2}{3}}) = \frac{7}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Les points d'intersection de Γ avec l'axe (Oy) ont pour coordonnées :
$(0\ ;\ \frac{7}{3}\sqrt{\frac{2}{3}})$ et $(0\ ;\ -\frac{7}{3}\sqrt{\frac{2}{3}})$.

- $y(t) = 0 \Leftrightarrow 3t - t^3 = 0 \Leftrightarrow t(3 - t^2) = 0 \Leftrightarrow t = 0$ ou $t = -\sqrt{3}$ ou $t = \sqrt{3}$.
- $x(0) = -2$; $x(-\sqrt{3}) = x(\sqrt{3}) = 9 - 2 = 7$.

Les points d'intersection de Γ avec l'axe (Ox) ont pour coordonnées :
(-2 ; 0) et (7 ; 0).
Finalement on obtient la courbe paramétrique cherchée



Exercice 5 :

Etudier, et représenter dans le plan rapporté à un repère orthonormmal $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$ la courbe $\mathscr{C}$ définie paramétriquement par : $\begin{cases} x(t) = 2\cos t \\ y(t) = \sin 2t \end{cases}$

Solution :

x et y admettent 2π pour période, on peut limiter l'étude à un intervalle de longueur 2π ; par exemple $[-\pi\,;\pi]$.

De plus : $\begin{cases} x(-t) = 2\cos(-t) = 2\cos t = x(t) \\ y(-t) = \sin(-2t) = -\sin 2t = -y(t) \end{cases}$

Ainsi les points M(-t) et M(t) sont symétriques par rapport à l'axe (Ox).

Il suffit d'étudier x et y sur $[0\,;\pi]$, puis de compléter l'arc obtenu par son symétrique par rapport à (Ox).

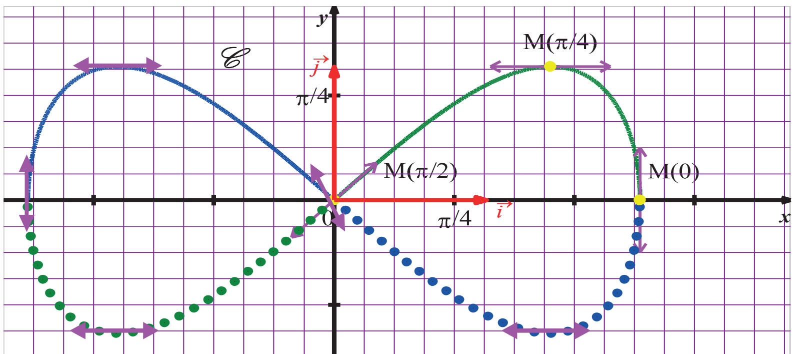
Par ailleurs : $\begin{cases} x(\pi-t) = 2\cos(\pi-t) = -2\cos t = -x(t) \\ y(\pi-t) = \sin(2(\pi-t) = \sin(-2t) = -\sin 2t = -y(t) \end{cases}$

Les points M(π - t) et M(t) sont donc symétriques par rapport à O, origine du repère. De plus, lorsque t décrit l'intervalle $[0\,;\frac{\pi}{2}]$, π - t décrit l'intervalle $[\frac{\pi}{2};\pi]$. Pour obtenir la partie de la courbe correspondante à $t\in[0\,;\pi]$, il suffit d'étudier x et y sur $[0\,;\frac{\pi}{2}]$, puis de compléter l'arc obtenu par son symétrique par rapport à O. Il suffit donc d'étudier x et y sur $[0\,;\frac{\pi}{2}]$ pour obtenir toute la courbe.

Les fonction x et y sont dérivables sur $[0\,;\frac{\pi}{2}]$, et : **$x'(t) = -2\sin t$ et $y'(t) = 2\cos 2t$**.

L'étude du signe de x'(t) et y'(t) permet d'établir le tableau de variations suivant :

t	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
x'(t)	0	-	$-\sqrt{2}$	-	-2
x	2	$\searrow$	$\sqrt{2}$	$\searrow$	0
y	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0
y'(t)	2	+	0	-	-2



B. Exercices divers :

Dans chacun des exercices 1 à 5, déterminer une équation cartésienne du support de la trajectoire du point M, dont les coordonnées en fonction du temps t sont :

1. $x(t) = 2t^2$; $y(t) = t^2 - 3$ avec $t \in \mathbb{R}$.

2. $x(t) = \cos 2t$; $y(t) = \sin^2 t + 1$ avec $t \in [0 ; \pi]$.

3. $x(t) = t + 1$; $y(t) = 2t^2 - 3t$ avec $t \in \mathbb{R}$.

4. $x(t) = 2\sin t$; $y(t) = -\cos t$ avec $t \in \mathbb{R}$.

5. $x(t) = 2t^2 - 1$; $y(t) = 2t$ avec $t \in \mathbb{R}$.

Dans chacun des exercices 6 à 9, déterminer une équation cartésienne de la tangente au point $M(t_0)$ à la courbe $\mathscr{C}$ de représentation paramétrique donnée.

6. $x(t) = t^2 - t + 1$; $y(t) = t^2 - 1$ avec $t_0 = 1$.

7. $x(t) = \cos t - \sin t$; $y(t) = t - \cos t$; $t_0 = 0$.

8. $x(t) = t\ln t$; $y(t) = \ln t$; $t_0 = \frac{1}{2}$

9. $x(t) = \cos^2 3t$;

$$y(t) = \cos\frac{t}{2} + \frac{1}{\sin\frac{t}{2}} \; ; t_0 = \frac{\pi}{4}.$$

Dans chacun des exercices 10 à 12, déterminer le vecteur vitesse et le vecteur accélération à l'instant t_0 du point mobile M(t), dont les coordonnées, en fonction du temps, sont x(t) et y(t).

10 $x(t) = t + \frac{1}{t}$; $y(t) = t - \frac{1}{t}$ avec $t_0 = 1$.

11 $x(t) = \frac{1-t}{1+t^2}$; $y(t) = \frac{t+t^2}{1+t^2}$ avec $t_0 = 1$.

12 $x(t) = \ln t$; $y(t) = \frac{1}{t} + 2\ln t - 1$; $t_0 = 5$

Dans chacun des exercices 13 à 16, déterminer une représentation paramétrique de la courbe C passant par le point A de paramètre t_0 et admettant en chacun de ces points M(t) une tangente de vecteur directeur $\vec{V}(t)$.

13 $\vec{V}(t) = \sin 3t \,.\, \vec{i} + \cos 2t \,.\, \vec{j}$, $t_0 = 0$; $A(\frac{1}{3}$; 0),

14 $\vec{V}(t) = \sqrt{2}(\sin t.\vec{i} + \cos t.\vec{j})$; $t_0 = \frac{\pi}{4}$; A(1 ;1)

15 $\vec{V}(t) = (e^t + e^{-t}).\vec{i} + \frac{2t}{1+t^2}.\vec{j}$,

$t_0 = 0$; A(1 ; 1),

16 $\vec{V}(t) = e^t(\vec{i} + (1+t)\vec{j})$, $t_0 = 0$; A(2 ; 0),

Dans chacun des exercices 17 à 20, Construire la courbe $\mathcal{C}$ de représentation paramétrique donnée.

17 $\begin{cases} x = 3t - t^3 \\ y = t^2 \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$

18 $\begin{cases} x = \sin t \\ y = \sin 2t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$

19 $\begin{cases} x = \frac{1}{t} \\ y = t \end{cases}$; $t \in]0 ; +\infty[$

20 $\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}$; $t \in \mathbb{R}$

CHAPITRE 14 Coniques

Faire savoir

L'essentiel du chapitre

I. Définition d'une conique par foyer, directrice et excentricité :

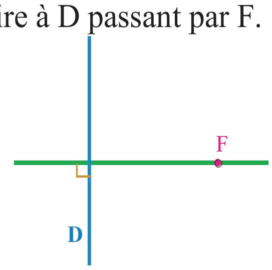
Soit D une droite donnée dans le plan. Soit **F** un point donné dans le plan, qui n'appartient pas à **D**.

Soit e un réel strictement positif. L'ensemble $\mathscr{C}$ des points **M** du plan tels que $\dfrac{\mathbf{MF}}{\mathbf{MH}} = \mathbf{e}$ où **H** est le projeté orthogonal de M sur D, est appelé la conique de foyer **F**, de directrice D (associée à **F**) et d'excentricité **e**.

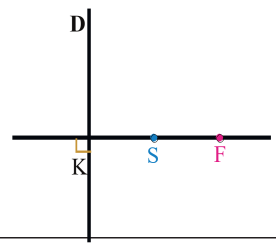
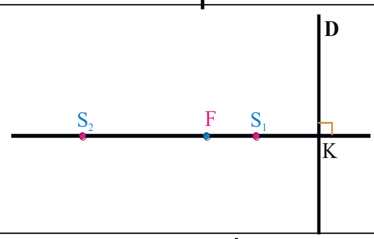
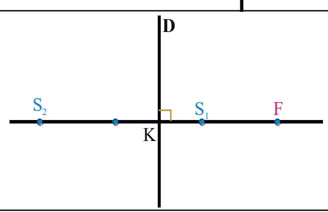
En plus,

si	**Alors**
e = 1	$\mathscr{C}$ est appelée une parabole
0 < e < 1	$\mathscr{C}$ est appelée une ellipse
e > 1	$\mathscr{C}$ est appelée une hyperbole

- L'image d'une conique par une isométrie ou une similitude, est une conique de même excentricité.
- L'axe focal d'une conique de foyer F et de directrice D est la perpendiculaire à D passant par F.
- L'axe focal d'une conique est un axe de symétrie de cette conique.
- On appelle un sommet d'une conique $\mathscr{C}$ tout point de $\mathscr{C}$ appartenant à un axe de symétrie de $\mathscr{C}$.

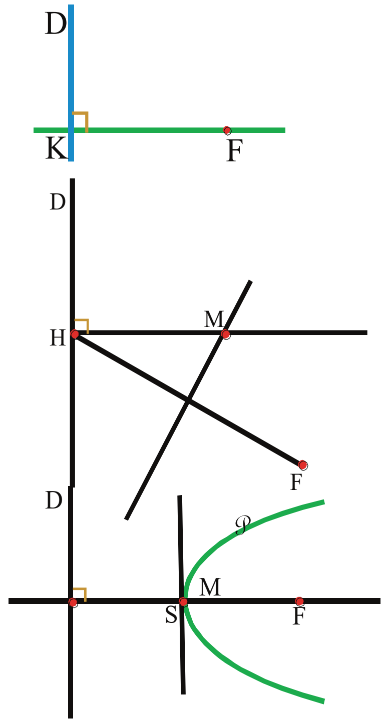


Soit $\mathscr{C}$ une conique de foyer **F**, de directrice **D**, (associée à **F**) d'excentricité e. soit K le projeté orthogonal de F sur D.

Nature de $\mathscr{C}$	**Le(s) sommet(s) de $\mathscr{C}$ appartenant à l'axe focal (FK) de $\mathscr{C}$**
Parabole	Un sommet qui est le point S milieu du segment [FK] 
Ellipse	Deux sommets qui sont : $S_1 = \text{bar}\begin{array}{c\|c} F & K \\ \hline 1 & e \end{array}$ et $S_2 = \text{bar}\begin{array}{c\|c} F & K \\ \hline 1 & -e \end{array}$ 
Hyperbole	Deux sommets qui sont : $S_1 = \text{bar}\begin{array}{c\|c} F & K \\ \hline 1 & e \end{array}$ et $S_2 = \text{bar}\begin{array}{c\|c} F & K \\ \hline 1 & -e \end{array}$ 

II. A propos d'une parabole :

On appelle paramètre de la parabole de foyer F et de directrice D, la distance entre F et D, on le note p ; p = FK.



Construction point par point d'une parabole :

Soit $\mathscr{P}$ la parabole de foyer F et de directrice D.
Soit H un point quelconque de D.
Le point M intersection de la médiatrice de [FH] avec la perpendiculaire à D en H, appartient à $\mathscr{P}$.
La médiatrice de [FH] est la tangente à $\mathscr{P}$ en M.

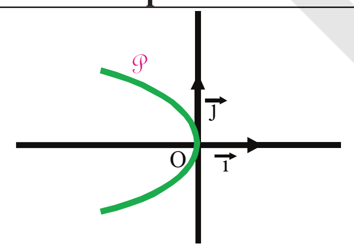
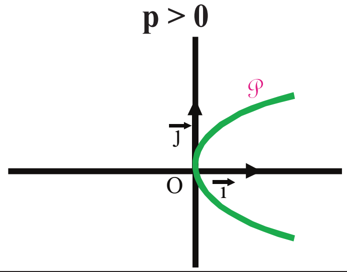
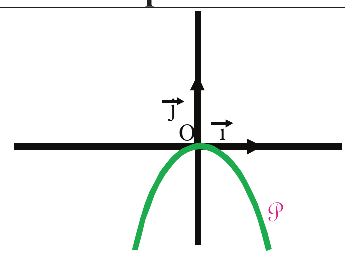
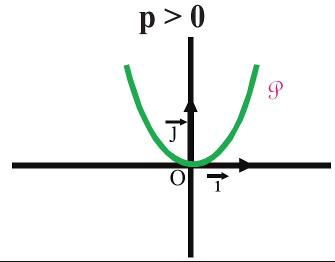
La tangente au sommet S d'une parabole $\mathscr{P}$ de directrice D, est parallèle à D.

III. Equation cartésienne réduite d'une conique :

1) Parabole :

- Un ensemble $\mathscr{C}$ est une parabole de paramètre $|\mathbf{P}|$ si et seulement s'il existe un repère orthonormal $(O; \vec{i}\,; \vec{j}\,)$ du plan où $\mathscr{C}$ admet une équation cartésienne de la forme : $y^2 = 2px$ ou $x^2 = 2py$ avec $p \in \mathbb{R}^*$.

En plus, le sommet de $\mathscr{C}$ est le point O origine du repère en question.

Cas où $\mathscr{C}$: $y^2 = 2px$	**Cas où $\mathscr{C}$: $x^2 = 2py$**
▪ L'axe de $\mathscr{C}$ est l'axe (Ox) des abscisses. ▪ Le foyer de est $F(\frac{p}{2}\,; 0)$ ▪ La directrice de $\mathscr{C}$ est la droite D d'équation $x = -\frac{p}{2}$	▪ L'axe de $\mathscr{C}$ est l'axe (Oy) des ordonnées ▪ Le foyer de est $F(0\,; \frac{p}{2})$ ▪ La directrice de $\mathscr{C}$ est la droite D d'équation $y = -\frac{p}{2}$
p < 0  **p > 0**  	**p < 0**  **p > 0** 
Une équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point $M_0(x_0\,; y_0)$ est : $yy_0 = p(x + x_0)$	Une équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point $M_0(x_0\,; y_0)$ est : $xx_0 = p(y + y_0)$

En plus

Une parabole a un seul axe de symétrie, un seul foyer, une seule directrice, un seul sommet.

2) Ellipse :

- Un ensemble $\mathscr{C}$ est une ellipse si et seulement s'il existe un repère orthonormal $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ du plan où $\mathscr{C}$ admet une équation cartésienne de la forme :

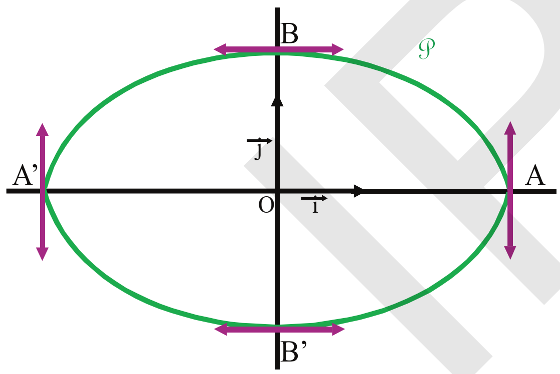
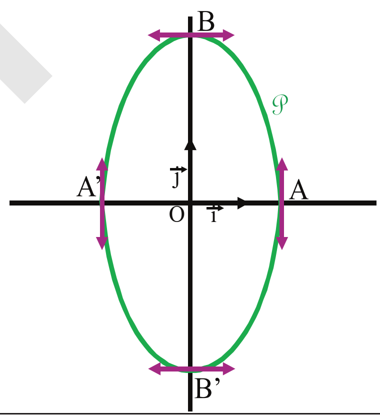
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 ; \text{ où } a \in \mathbb{R}_+^* ; b \in \mathbb{R}_+^* ; a \neq b$$

En plus, le centre de $\mathscr{C}$ est le point O origine du repère en question.

Les sommets de $\mathscr{C}$ sont les points : A(a ; 0) ; A'(-a ; 0) : B(0 ; b) ; (B'(0 ; -b).

Une équation cartésienne de la tangente à $\mathscr{C}$ au point $M_0(x_0 ; y_0)$ est : $\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1.$

En plus,

cas où : a > b	**cas : où a < b**
▪ L'axe focal de $\mathscr{C}$ est l'axe (Ox) des abscisses $c = \sqrt{a^2-b^2}$. ▪ L'excentricité de $\mathscr{C}$ est $e = \frac{c}{a}$ ▪ Les foyers de $\mathscr{C}$ sont F(c ; 0) ; F'(-c ; 0) ▪ Les directrices de $\mathscr{C}$ sont les droites D ; D' d'équations : $x = \frac{a^2}{c}$ et $x = -\frac{a^2}{c}$  	▪ L'axe focal de $\mathscr{C}$ est l'axe (Oy) des ordonnées $c = \sqrt{b^2-a^2}$. ▪ L'excentricité de $\mathscr{C}$ est : $e = \frac{c}{b}$. ▪ Les foyers de $\mathscr{C}$ sont F(0 ; c) ; F'(0 ; -c) ▪ Les directrices de $\mathscr{C}$ sont les droites D et D' d'équations $y = \frac{b^2}{c}$ et $y = -\frac{b^2}{c}$ 

En plus

Une ellipse a un centre de symétrie, deux axes de symétries, deux foyers ; deux directrices ; quatre sommets.

3) Hyperbole :

- Un ensemble $\mathscr{C}$ est une hyperbole si et seulement s'il existe un repère orthonormal $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ du plan où $\mathscr{C}$ admet une équation cartésienne de la forme :

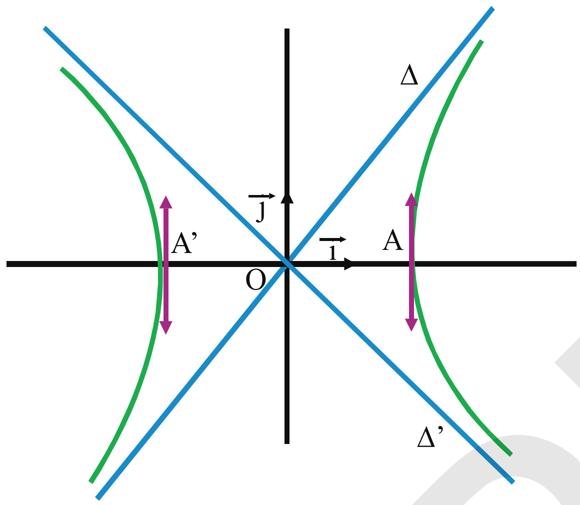
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 ; \text{ ou } \frac{-x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 ; \text{ où } a \in \mathbb{R}_+^* ; b \in \mathbb{R}_+^*.$$

En plus :

- le centre de $\mathscr{C}$ est le point O origine du repère en question.
- Les asymptotes de $\mathscr{C}$ sont les droites Δ et Δ' d'équations : $y = \frac{b}{a}x$ et $y = -\frac{b}{a}x$
- $c = \sqrt{a^2+b^2}$

<table>
<tr>
<th>cas où $\mathscr{C}$: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$</th>
<th>cas où $\mathscr{C}$: $\dfrac{-x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$</th>
</tr>
<tr>
<td>

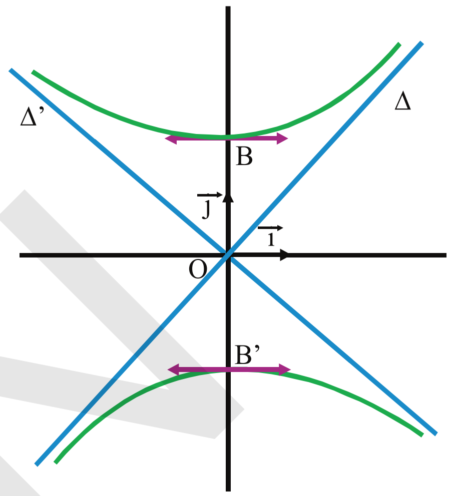
- L'axe focal de $\mathscr{C}$ est l'axe (Ox) des abscisses
- Les sommets de $\mathscr{C}$ sont A(a ; 0) ; A'(-a ; 0).
- L'excentricité de $\mathscr{C}$ est : $e = \dfrac{c}{a}$
- Les foyers de $\mathscr{C}$ sont F(c ; 0) ; F'(-c ; 0)
- Les directrices de $\mathscr{C}$ sont les droites D ; D' d'équations : $x = \dfrac{a^2}{c}$ et $x = -\dfrac{a^2}{c}$.



- Une équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point $M_0(x_0 ; y_0)$ est : $\dfrac{xx_0}{a^2} - \dfrac{yy_0}{b^2} = 1$

</td>
<td>

- L'axe focal de $\mathscr{C}$ est l'axe (Oy) des ordonnées.
- Les sommets de $\mathscr{C}$ sont B(0 ; b) ; A'(0 ; -b).
- L'excentricité de $\mathscr{C}$ est : $e = \dfrac{c}{b}$.
- Les foyers de $\mathscr{C}$ sont F(0 ; c) ; F'(0 ; -c)
- Les directrices de $\mathscr{C}$ sont les droites D et D' d'équations $y = \dfrac{b^2}{c}$ et $y = -\dfrac{b^2}{c}$



- Une équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point $M_0(x_0 ; y_0)$ est : $\dfrac{-xx_0}{a^2} + \dfrac{yy_0}{b^2} = 1$

</td>
</tr>
</table>

- Si a = b, alors $\mathscr{C}$ est appelée une hyperbole équilatère
- Une hyperbole a un centre de symétrie, deux axes de symétries, deux foyers ; deux directrices et deux sommets,
- La tangente à une conique $\mathscr{C}$ en l'un quelconque de ses sommets est perpendiculaire à l'axe de symétrie de $\mathscr{C}$ contenant ce sommet.

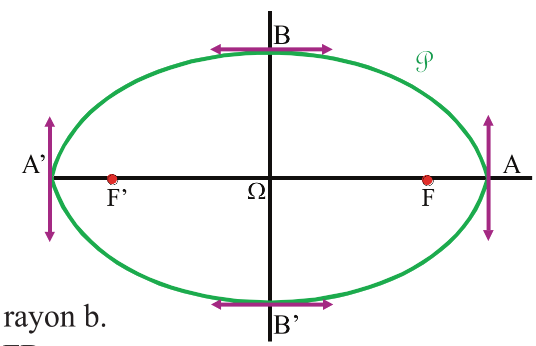
IV. Définition par les deux foyers d'une conique bifocale :

1) Ellipse :

Soit F et F' deux points distincts donnés dans le plan. Soit a un réel strictement positif tel que FF'< 2a.

L'ellipse $\mathscr{C}$ de foyer F et F' et de grand axe mesurant 2a est l'ensemble des points M du plan tels que : MF + MF' = 2a.

En plus



- Le centre de $\mathscr{C}$ est Ω milieu de [FF'],
- L'axe focal de $\mathscr{C}$ est la droite (FF'),
- Les deux sommets de $\mathscr{C}$ situés sur (FF'), appartiennent au cercle de centre Ω et de rayon a.
- L'axe non focal de $\mathscr{C}$ est la médiatrice Δ de [FF'],
- Les deux sommets de $\mathscr{C}$ situés sur Δ, appartiennent au cercle de centre l'un des foyers et de rayon b.
  - c = ΩF ; | a = ΩA = FB
  - l'excentricité de $\mathscr{C}$ est $e = \dfrac{c}{a}$

Construction point par point de $\mathscr{C}$ à l'aide d'un cercle directeur de $\mathscr{C}$:

Etant donné une ellipse $\mathscr{C}$ de foyer F et F' et de grand axe mesurant 2a,

on appelle le cercle directeur de $\mathscr{C}$ relatif au foyer F',

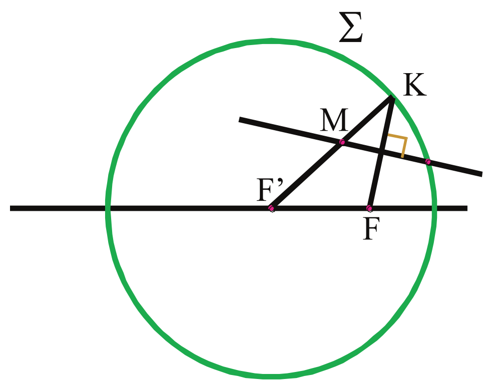
le cercle $\sum$ de centre F' et de rayon 2a.

Soit K un point quelconque de $\sum$.

Le point M intersection de la médiatrice

de [FK] avec la droite [F'K], appartient à $\mathscr{C}$.

La médiatrice de [FK] est la tangente à $\mathscr{C}$ en M.



2) Hyperbole

Soit F et F' deux points distincts donnés dans le plan.

Soit a un réel strictement positif tel que FF' > 2a.

L'hyperbole $\mathscr{C}$ de foyer F et F' de sommets distants de 2a est l'ensemble des points M du plan tels que : $|MF - MF'| = 2a$.

En plus

- Le centre de $\mathscr{C}$ est le milieu de [FF'],
- L'axe focal de $\mathscr{C}$ est la droite (FF')
- L'axe non focal de $\mathscr{C}$ est la médiatrice de [FF'].

Construction point par point de $\mathscr{C}$ à l'aide d'un cercle directeur de $\mathscr{C}$:

Soit $\mathscr{C}$ une hyperbole de foyers F et F' et de sommets distants de 2a.

- $\sum$ cercle de centre F' et de rayon 2a

  (cercle directeur de $\mathscr{C}$ relatif à F'),
- $\sum$ coupe le cercle de diamètre

  [FF'] en K_1 et K_2.

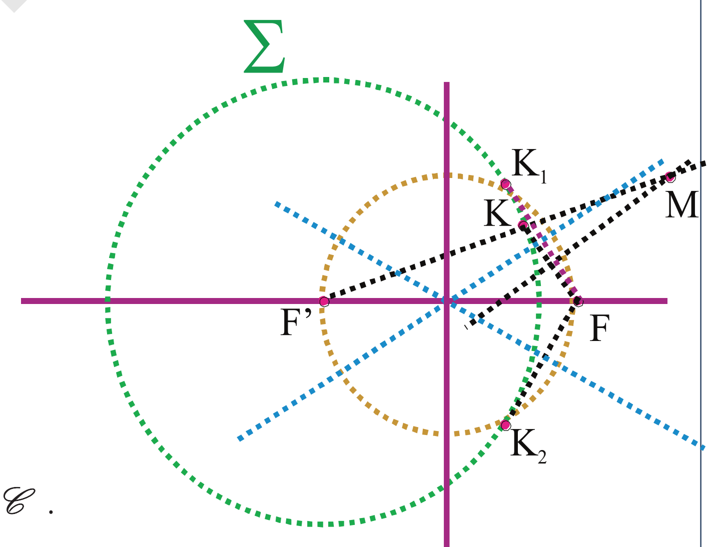
  Soit K un point quelconque du petit

  arc $\overset{\frown}{K_1K_2}$ de $\sum$ privé de K_1 et K_2.

  Le point M intersection de la médiatrice

  de [FK] avec la droite (F'K), appartient à $\mathscr{C}$.
- La médiatrice de [FK] est la tangente à $\mathscr{C}$ en M.
- Les médiatrices des segments $[FK_1]$ et $[FK_2]$

  sont les asymptotes de $\mathscr{C}$



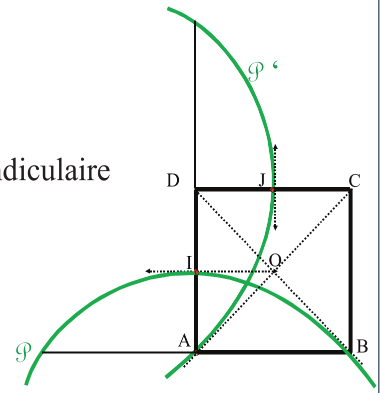
Savoir-faire

A. Applications :

Exercice 1 :

ABCD un carré direct de centre O. I et J les milieux respectifs de [AD] et [CD].
Soit $\mathcal{P}$ la parabole de sommet I et de foyer A.

1. Déterminer la directrice de $\mathcal{P}$.
2. Montrer que B appartient à $\mathcal{P}$ et préciser la tangente à $\mathcal{P}$ en B.
3. Soit $\mathcal{P}$' l'image de $\mathcal{P}$ par le quart de tour indirect de centre O. déterminer la nature et les éléments géométriques de $\mathcal{P}$ '.
4. Tracer $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}$'.



Solution :

1) Comme l'axe focal de $\mathcal{P}$ est la droite (IA) et que D est le symétrique de A par rapport à I et que la droite (CD) est perpendiculaire à (IA), donc la directrice de $\mathcal{P}$ est la droite (CD).

2)Comme : BA = BC et que C est le projeté orthogonal de B sur (CD).

3) Donc $B \in \mathcal{P}$.

La médiatrice [BD] du segment [AC] est la tangente à $\mathcal{P}$ en B.

1) Comme : $R \begin{cases} I \mapsto J \\ A \mapsto D \\ (CD) \mapsto (BC) \end{cases}$; donc $\mathcal{P}$' est la parabole de sommet J, de foyer D et de directrice la droite (BC).

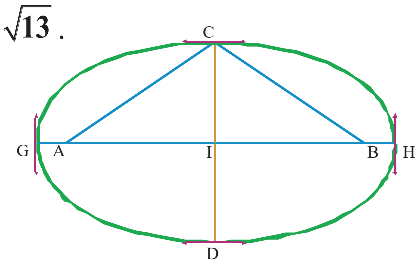
Exercice 2 :

ABC un triangle isocèle en C, avec I milieu de [AB] et tel que : AB = 6 ; IC = 2.
Soit E l'ellipse de foyers A et B et passant par C.

1) Quelle est la longueur du grand axe de E ?
2) Préciser un sommet de E, déterminer et construire les trois autres sommets de E. Tracer E.
3) Déterminer l'excentricité de E.

Solution :

1. Comme $C \in E$ et A et B foyers de E ; la longueur du grand axe de E est : 2a = CA + CB = 2CA ;
   Or $AC^2 = AI^2 + IC^2 = 9 + 4 = 13$; donc $AC = \sqrt{13}$; d'où $2a = 2\sqrt{13}$.
2. Comme (IC) est la médiatrice de [AB] ; donc (IC) est l'axe non focal de (E).Or ; $C \in (IC)$; donc C est un sommet de E.
   Le deuxième sommet de E sur (IC) est $D = S_{AB}(C)$.
   L'axe focal de E étant (AB) ; les deux sommets de E sur (AB) sont les points G et H d'intersection de (AB) avec le cercle de centre I (centre de E) et de rayon a = AC.



3. Comme c = IA = 3 et a = AC = $\sqrt{13}$; donc l'excentricité de E est $e = \frac{c}{a} = \frac{3}{\sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{13}}{13}$.

Exercice 3 :

On considère le plan complexe muni d'u repère orthonormal $(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v})$.
On pose : $Z' = 1 + e^{i\theta}$ et $Z'' = 1 - e^{-i\theta}$; $\theta \in [0\,;\,2\pi]$.
Soit M' et M'' les points d'affixes respectives Z' et Z''. Soit $G = \text{bar}\{(M';3)\,,\,(M'';2)\}$.

1) Déterminer l'affixe du point G en fonction de θ.
2) Montrer que si θ décrit [0 ; 2π] alors le lieu géométrique Γ' de G est une ellipse dont on donnera une équation cartésienne.
3) Déterminer le centre et les sommets et calculer l'excentricité de l'ellipse Γ '. Construire Γ '.

Solution :

1) L'affixe du point G est Z_G :

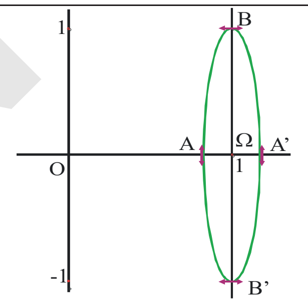
$Z_G = \dfrac{3Z'+2Z''}{5} = \dfrac{3(1+\cos\theta+i\sin\theta)+2(1-\cos\theta+i\sin\theta)}{5}$; d'où $Z_G = 1 + \dfrac{1}{5}\cos\theta + i\sin\theta$;

2) Soit $G(x\,;y) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1+\dfrac{1}{5}\cos\theta \\ y = \sin\theta \end{cases}$; $\theta \in [0;2\pi] \Leftrightarrow \begin{cases} 5(x-1) = \cos\theta \\ y = \sin\theta \end{cases}$; $\theta \in [0\,;2\pi] \Leftrightarrow 25(x-1)^2 + y^2 = 1$.

Donc, Γ' a pour équation cartésienne : $25(x-1)^2 + y^2 = 1$, Or, avec $\begin{cases} X = x-1 \\ Y = y \end{cases}$; Γ' a pour équation cartésienne : $\dfrac{X^2}{(\frac{1}{5})^2} + \dfrac{Y^2}{(1)^2} = 1$; Donc, Γ' est une ellipse où $a = \dfrac{1}{5}$ et $b = 1$ = ($a < b$).

3) Les éléments caractéristiques de Γ' : $c = \sqrt{b^2 - a^2} = \sqrt{1-\dfrac{1}{25}} = \dfrac{2\sqrt{6}}{5}$; l'excentricité est :

$e = \dfrac{c}{b} = \dfrac{2\sqrt{6}}{5}$

Nouveau repère $(\Omega\,;\vec{u}\,;\vec{v})$	**Représentation**
• Le centre de Γ' est $\Omega(0\,;0)$; • Les sommets de Γ' sont $A(\frac{1}{5}\,;0)$; $A'(-\frac{1}{5}\,;0)$; $B(0\,;1)$; $B'(0\,;-1)$.	
Ancien repère $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$	
• Le centre de Γ' est $\Omega(1\,;0)$; • Les sommets de Γ' sont $A(\frac{6}{5}\,;0)$; $A'(\frac{4}{5}\,;0)$; $B(1\,;1)$; $B'(1\,;-1)$.	

Exercice 4 :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$.On pose $Z = x + iy$; x et y de $\mathbb{R}$.

1.) Donner l'équation cartésienne de l'ensemble H des points M d'affixe Z tels que : $\mathrm{Re}(Z-i)^2 = 1$

2.) Reconnaître H, donner son centre, ses sommets, ses asymptotes et tracer H.

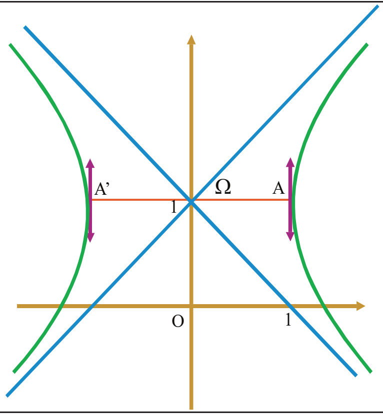
Solution :

1.) $(Z-i)^2 = (x + i(y-1))^2 = x^2 - (y-1)^2 + 2ix(y-1)$; Donc :

$\mathrm{Re}(Z-i)^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 - (y-1)^2 = 1$; donc une équation cartésienne de H est $x^2 - (y-1)^2 = 1$

2.) Avec $\begin{cases} X = x \\ Y = y-1 \end{cases}$; H a pour équation cartésienne $\dfrac{X^2}{(1)^2} - \dfrac{Y^2}{(1)^2} = 1$;

Donc, H est une hyperbole équilatère ($a = b = 1$).

Nouveau repère $(\Omega\,;\vec{u}\,;\vec{v})$	
• Le centre de H est $\Omega(0\,;0)$; • Les sommets de H sont $A(1\,;0)$; $A'(-1\,;0)$; • Les asymptotes de H sont : $\Delta : Y = X$ et $\Delta' : Y = -X$	
Ancien repère $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$	
• Le centre de H est $\Omega(0\,;1)$; • Les sommets de H sont $A(1\,;1)$; $A'(-1\,;1)$; • Les asymptotes de H sont : $\Delta : y = x + 1$ et $\Delta' : y = -x + 1$	

Mat 7 M AC.indd 173 20/01/46 02:17:26

B. Exercices divers :

1. Soit $\mathscr{C}$ une conique de foyer F de directrice D et d'excentricité e.

1. Montrer que $\mathscr{C}$ ne rencontre pas D
2. Montrer que F n'appartient pas à D.

2. Soit D une droite et F un point n'appartient pas à D. Soit $\mathscr{C}_1$ la parabole de foyer F et de directrice D. $\mathscr{C}_2$ une ellipse de foyer et de directrice associées F et D.
$\mathscr{C}_3$ une hyperbole de foyer et de directrice associés F et D.
Montrer que $\mathscr{C}_1$; $\mathscr{C}_2$; $\mathscr{C}_3$ sont disjointes deux à deux.

3. Soit $\mathscr{P}$ une parabole de foyer F et de paramètre p.

1. Déterminer l'ensemble des directrices possibles de $\mathscr{P}$.
2. Soit d une droite passant par F.
   Montrer qu'il existe deux paraboles $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ de foyers F et de directrices parallèles à d.
   Construire $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$.

4. Soit ABC un triangle et I milieu de [BC].
Soit $\mathscr{P}$ la parabole de foyer I et tangente aux droites (AB) et (AC).

1. Construire la directrice de $\mathscr{P}$ et son sommet.
2. Construire les points de contact de $\mathscr{P}$ avec (AB) et (AC).
3. Tracer $\mathscr{P}$.

5. Déterminer la nature et les éléments géométriques de la courbe Γ d'équation (E) dans un repère orthonormal $(O;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$ et tracer Γ.

1. (E) : $(x-1)^2 + 2y = 0$
2. (E) : $4(x-1)^2 + 16y^2 = 1$
3. (E) : $x^2 - 2y^2 + 2x - 4y = 0$

6. ABCD un carré. I milieu de [AD]. Soit $\mathscr{P}$ la parabole de sommet I, de directrice (AB).

1. Déterminer une équation cartésienne de $\mathscr{P}$ dans le repère orthonormal $(I;\ \overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AD})$.
2. Vérifier que C appartient à $\mathscr{P}$
3. a)Vérifier que la tangente à $\mathscr{P}$ ¨en C est la droite (AC).
   b) Déduire une équation de Γ'.Construire Γ' dans le repère orthonormal $(O;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v})$.
   c) Pour $\theta = \dfrac{\pi}{3}$, placer les points M_1 ; M_2 ; G_1 ; G_2 dans la figure précédente.

7. Dans le plan orienté, on considère un, losange ABCD direct de centre O, tel que :
$(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AD}) = \dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$, I ; J ; K ; L les milieux respectifs de [AB] ; [BC] ; [CA] ; [AD].
P un point de [OA) tel que le triangle PBD soit rectangle en P. soit E l'ellipse de foyer B et C et passant par O. Soit 2a (a > 0) la longueur du grand axe de E.

1. Montrer que K appartient à E tel que CP = 2a
2. En déduire une construction géométrique à justifier des deux sommets de l'axe focal et des deux autres sommets. Construire E

8. Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$, on considère l'ensemble E des points M(x ; y) tels que :
$25(x^2 + y^2) = (3x - 16)^2$; (1)
En interprétant géométriquement la relation (1), montrer que E est une ellipse de foyer O et de directrice la droite Δ d'équation $x = \dfrac{16}{3}$.
Déterminer l'excentricité de E. tracer E.
Dans la suite, on désigne par M un point de E et θ une mesure de $(\vec{u};\overrightarrow{OM})$.
Déduire de la relation (1), une relation du premier degré entre OM et l'abscisse x de M.
Montrer que : $OM = \dfrac{16}{5 + 3\cos\theta}$.
On suppose que : $\theta \in \left]-\dfrac{\pi}{2}\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right[$. La droite (OM) coupe Δ en I et recoupe E en M'.
Montrer que : $\dfrac{1}{OM} - \dfrac{1}{OM'} = \dfrac{2}{OI}$.

9. Soit $\theta \in [0\ ;\ 2\pi[$.

1. Résoudre dans ℂ l'équation,
   $Z^2 - 8Z\cos\theta + 16 - 7\sin^2\theta = 0$
   Soit Z_1 et Z_2 ses deux solutions.
2. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct d'unité 1 cm, $(O\ ;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v})$.
   Soit $M_1(Z_1)$; $M_2(Z_2)$; Γ l'ensemble des points M_1 et M_2 lorsque θ décrit [0 ; 2π[.
a) Déterminer une équation cartésienne de Γ .
b) Reconnaître Γ, donner ses éléments géométriques caractéristiques, construireΓ.
3. Soit A(0 ; 1) et M∈ Γ, on désigne par G le barycentre du système
4. $\{(A\ ;\ -3)\ ;\ (M\ ;\ 1)\}$.

a) Montrer que lorsque M décrit Γ, alors G décrit une ellipse Γ 'et déduire les coordonnées des sommets et du centre de Γ '.
« Affinité orthogonale »

10 ABCD un carré de centre O. I, J les milieux respectifs de [AB] ; [AD], on pose AB = a . $\mathcal{P}$ la parabole de sommet J et de directrice (CD).

E l'ellipse de foyer A et B et de grand axe mesurant AC.

1.) a) Quel est le foyer et le paramètre de $\mathcal{P}$?

b) Quelle est la tangente de $\mathcal{P}$ en J ?

2.) a) Quel est le centre de E ?

b) Montrer que O est un sommet de E et préciser la tangente à E en O.

c) construire les autres sommets de E.

d) Déterminer l'excentricité de E

3.) Tracer $\mathcal{P}$ et E.

11 Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, on considère l'équation

E : Z^2 –(cost)Z + 4 +5sin^{2}t = 0 ; où t ∈ [0 ; π [est un paramètre.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation E, noter Z_1 et Z_2 les solutions avec Im(Z_1) > 0.
2. Dans le plan complexe, soit $M_1(Z_1)$ et $M_2(Z_2)$

a) Démontrer que lorsque t varie dans [0 ; θ], alors M_1 et M_2 décrivent une ellipse Γ dont on donnera une équation cartésienne.

b) Donner les éléments caractéristiques de l'ellipse Γ pour la construire.

c) Placer les points M1 et M2 pou t = $\frac{\pi}{6}$.

3. Soit f l'application qui au point M (Z = x + iy) associe le point M'(Z' = x' + iy') tel que :

Z' = $\dfrac{5Z+\overline{Z}}{4}$.

a) Ecrire x' et y' en fonction de x et y.

b) On pose f(Γ) = Γ'
Donner une équation cartésienne de Γ'. vérifier que Γ' est un cercle dont on précisera le centre et le rayon pour le construire.

c) En déduire une méthode géométrique qui permet de construire Γ point par point à partir de Γ'.

Cercle principal et paramétrage d'une ellipse

12 Soit D une droite donnée, soit k un nombre réel donné. f définie par :

$$\left|\begin{array}{l}\mathbf{M \in D \Leftrightarrow f(M) = M;\ (M \notin D \text{ et } f(M) = M') \Leftrightarrow} \\ \mathbf{\overrightarrow{HM'} = k\overrightarrow{HM};\text{avec H projeté orthogonal de M sur D}}\end{array}\right.$$

F est appelée une affinité orthogonale de rapport k et d'axe D.

1) Déterminer l'expression analytique de l'affinité orthogonal d'axe (Ox) et de rapport $\frac{1}{2}$ dans un repère orthonormal (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$).

2) Soit Γ l'ensemble d'équation cartésienne :

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}=1 \text{ et } \Gamma'=f(\Gamma)$$

a) Donner les éléments géométriques de Γ, puis construire Γ.

b) Donner une équation cartésienne de Γ'. Reconnaître ; caractériser et construire Γ' .

13 Soit D une droite et A un point donné n'appartenant pas à D. Soit A' le projeté orthogonal de A sur D.

1) Déterminer le lieu géométrique Γ du foyer F d'une parabole passant par A et de directrice D. Construire Γ.

2) En déduire le lieu géométrique Γ' du sommet S d'une parabole passant par A et de directrice D. Construire Γ'.

14 on considère l'ensemble Γ des points M(x ; y) du plan tel que :

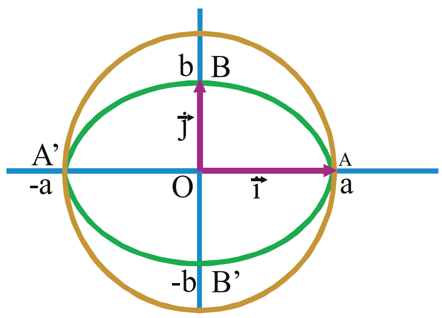
$$\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}=1;\text{où } a \in \mathbb{R}^* \ ;\ b \in \mathbb{R}^*$$

1) Déterminer suivant les valeurs de a et b la nature de Γ .

2) Donner les éléments géométriques de Γ et le construire dans chacun des cas :

a) a = 4 ; b = 9 ; b) a = - 4; b = 9
c) a = b = 4.

15 Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$. Soit a et b deux réels strictement positifs tels que : a > b.



1) Déterminer l'expression analytique de l'affinité orthogonale f d'axe (Ox) et de rapport $\frac{b}{a}$.

2) Soit Γ le cercle de centre O et de rayon a.
Soit $\mathscr{C}$ l'image de Γ par f .

a) Donner une équation cartésienne de Γ.

b) En déduire une équation cartésienne de $\mathscr{C}$ puis que $\mathscr{C}$ est une ellipse.

(le cercle Γ est appelé le cercle principal de l'ellipse $\mathscr{C}$).

3) a) Donner une représentation paramétrique de Γ

b) En déduire que :

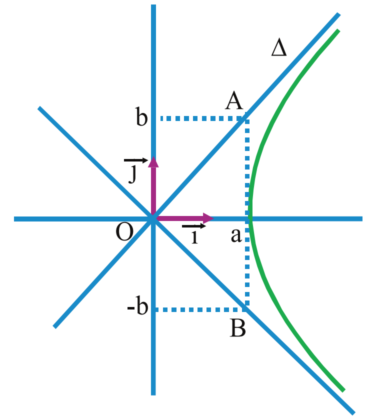
$$\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = b\sin\theta \end{cases} ; -\pi \le \theta \le \pi .$$

Constitue une représentation paramétrique de l'ellipse $\mathscr{C}$.

Equation d'une hyperbole rapportée à ses asymptotes

16 Soit $\mathscr{C}$ une hyperbole de centre O et d'équation réduite $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ Dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$,

1) Considérons le repère $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$, avec $\vec{u} = \overrightarrow{OB} = a\vec{i} - b\vec{j}$; $\vec{v} = \overrightarrow{OA} = a\vec{i} + b\vec{j}$.



($\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs directeurs des asymptotes de $\mathscr{C}$). Soit M un point de coordonnées (x ; y) dans le repère orthonormal. $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ et de coordonnées (X ; Y) dans le repère $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$.

a) Montrer que x = a(X + Y) et y = b(X – Y).

b) Montrer que dans le repère $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$ l'équation de $\mathscr{C}$ est alors, $X.Y = \frac{1}{4}$.

2) Choisissons maintenant un autre repère $(O ; \overrightarrow{u_1} ; \overrightarrow{v_1})$ où $\vec{u_1}$ est colinéaire à $\vec{u}$ et $\vec{v_1}$ est colinéaire à $\vec{v}$.
Montrer que dans le repère $(O ; \vec{u_1} ; \vec{v_1})$ l'hyperbole $\mathscr{C}$ a une équation de la forme $Y_1.X_1 = k$ où k est un réel non nul.

3) Soit $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$ un repère quelconque et k un réel non nul. Soit Γ l'ensemble des points M(x ; y) tels que xy = k.
Montrer que Γ est une hyperbole ayant pour asymptotes les axes du repère.

CHAPITRE 15

Probabilité et échantillonnage

Faire savoir

L'essentiel du chapitre

I. Dénombrement (Rappel) :

1. Produit cartésien d'ensembles finis :

Définition :

E et F sont deux ensembles finis et non vides.
Le produit cartésien de E par F, noté $E \times F$, est l'ensemble des couples $(x ; y)$ formés d'un élément x de E suivi d'un élément y de F.

Théorème 1 :

Si E et F sont des ensembles finis tels que $\text{Card}E = n$ et $\text{Card}F = p$, alors $E \times F$ est un ensemble fini et $\text{Card}(E \times F) = np$.

2. p-liste- arrangement- permutation :

a) p-liste :

Définition :

Soit E un ensemble fini et n son cardinal, soit p un entier naturel non nul.
Une p-liste d'éléments de E est un p-uplet $(a_1 ; a_2 ; \dots ; a_p)$ constitué d'éléments de E.
L'ensemble des p-listes d'éléments de E se note E^p.

Théorème 2 :

E est un ensemble fini tel que $\text{Card}E = n$. Pour tout naturel $p \geq 1$, on a : $\text{Card}E^p = n^p$.

b) Arrangement- permutation :

Définition :

n et p sont des naturels tels que $1 \leq p \leq n$ et F est un ensemble à n éléments.
Un arrangement de p éléments de F est un p-uplet d'éléments deux a deux distincts de F.

Théorème 3 :

Le nombre d'arrangements de p éléments d'un ensemble à n éléments, avec $1 \leq p \leq n$, est : $n(n-1)\dots(n-p+1)$. On note ce nombre A_n^p, soit $A_n^p = n(n-1)\dots(n-p+1)$.

c) Permutation :

Définition 1 :

n est un naturel non nul et F est un ensemble tel que $\text{card}F = n$. Une permutation des éléments de F est un arrangement de n éléments de F.
D'après le théorème précédent, le nombre de permutation est :
$A_n^n = n(n-1)\dots(n-n+1) = n(n-1)\dots \times 2 \times 1$.

Définition 2 :

n est un naturel non nul, on désigne par n! (qui se lit factorielle n) le nombre défini par :

- $n! = n(n-1)\dots \times 2 \times 1$; pour tout $n \neq 0$;
- et $0! = 1$

Théorème 4 :
Le nombre de permutations de n éléments est n!.

d) Autre écriture de A_n^p :

La notation ''factorielle'' permet d'écrire d'une autre façon le nombre A_n^p, on a :

$A_n^p = n(n-1)\dots(n-p+1)$,

Multiplions et divisons simultanément ce produit de facteurs par $(n-p)\dots\times 2\times 1$, il vient :

$$A_n^p = \frac{n(n-1)\dots(n-p+1)\times(n-p)\times\dots2\times1}{(n-p)\times\dots2\times1},\ \text{d'où}\ A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}.$$

3. Parties à p éléments d'un ensemble à n éléments ($p \le n$) :

Théorème 5 :

Le nombre de parties à p éléments d'un ensemble à n éléments, avec $p \le n$, est $\frac{A_n^p}{p!}$, on note ce nombre C_n^p, on a donc ; $C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{(n-p)!p!}$

Définition :
Une partie a p éléments d'un ensemble F à n éléments ($p \le n$ s'appelle une combinaison de p éléments de n éléments de F.

4. Propriétés des A_n^p :

a) pour tout naturel n : $C_n^0 = 1$ **et** $C_n^n = 1$

b) pour tout naturel $n \ge 1$: $C_n^1 = n$

c) pour tout naturel n et p tels que $p \le n$ on a : $C_n^{n-p} = C_n^p$

d) pour tout naturel n et p tels que $1 \le p \le n\text{-}1$: on a : $C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$. La propriété (d) va permettre de calculer rapidement de proche en proche les C_n^p sans utiliser $\frac{n!}{(n-p)!p!}$ sur le tableau qui suit , appelé triangle de Pascal, à l'intersection de la ligne ''n'' et de la colonne ''p'' on lit le naturel C_n^p.

On le complète en commençant à remplir la colonne ''p = 0'' à l'aide des chiffres 1 (car $C_n^0 = 1$) et la diagonale à l'aide des chiffres 1 (car $C_n^n = 1$). On le complète ensuite en utilisant à chaque fois la propriété (d).

Triangle de Pascal

p / n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	.	.	.
0	1											
1	1	1										
2	1	2	1									

3	1	3	3	1					
4	1	4	6	4	1				
5	1	5	10	10	5	1			
6	1	6	15	20	15	6	1		
7	1	7	21	35	35	21	7	1	
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1
…									

5. Le binôme de Newton :

Pour tous complexes a et b , et pour tout naturel $n \geq 1$

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p a^{n-p} b^p = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \dots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n$$

Cette égalité est appelée formule du binôme de Newton.

- Le nombre de parties d'un ensemble à n éléments est 2^n.

II. Probabilité :

1. Vocabulaire :

a) Expérience aléatoire, univers :

Une expérience aléatoire est une expérience dont on ne peut prévoir avec certitude quel en sera le résultat, avant de l'effectuer.

L'ensemble des résultats possibles d'une expérience aléatoire est appelé univers.

Exemple 1 :

Lancer un dé à six faces numérotées de 1 à 6 est une expérience aléatoire.

L'univers de cette expérience est $\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$.

b) Evénement :

Un événement est une partie de l'univers.

Exemple 2 :

Dans l'exemple précédent $A = \{1 ; 3 ; 5\}$ est un événement.

A est l'événement ''obtenir un nombre impair'' ; $B = \{6\}$ est un événement élémentaire.

- ϕ est l'événement impossible
- l'univers Ω est l'événement certain

c) Si A et B sont deux événements :

- $A \cap B$ est l'événement '' A et B''
- $A \cup B$ est l'événement '' A ou B''

d) Si $A \cap B = \phi$, on dit que A et B sont incompatibles (disjoints)

e) $\overline{A}$ est l'événement contraire de A :

On a : $A \cap \overline{A} = \phi$; $A \cup \overline{A} = \Omega$, où Ω est l'univers lié à l'expérience.

2) Notion de probabilité :

Considérons une expérience aléatoire d'univers Ω.

La probabilité d'un événement A est un nombre, compris entre 0 et 1, mesurant les ''chances'' que cet événement A peut se produire ; c'est la somme des probabilités des événements élémentaires inclus dans A. On note ce nombre souvent P(A).

Si tous les événements élémentaires ont la même probabilité, on dit que l'hypothèse d'équiprobabilité est satisfaite. On a alors, pour tout événement A :

$$P(A) = \frac{\text{card}A}{\text{card}\Omega}.$$

Exemple 3 :

On jette un dé à six faces numérotés de 1 à 6, non truqué.
Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
A : ‘‘ avoir un nombre pair’’; B ‘‘avoir un multiple de 3’’ ; C : ’’avoir un nombre supérieur à 2’’

Réponse :

L'univers de cette épreuve est $\Omega = \{1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 4\ ;\ 5\ ;\ 6\}$.

- $A = \{2\ ;\ 4\ ;\ 6\}$; $P(A) = \frac{\text{card}A}{\text{card}\Omega} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$
- $B = \{3\ ;\ 6\}$; $P(B) = \frac{\text{card}B}{\text{card}\Omega} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$
- $C = \{3\ ;\ 4\ ;\ 5\ ;\ 6\}$; $P(C) = \frac{\text{card}C}{\text{card}\Omega} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

Propriétés :

Considérons une expérience aléatoire d'univers Ω.

- Pour tout événement A on a : $0 \leq P(A) \leq 1$.
- La probabilité de l'événement certain est 1 ; celle de l'événement impossible est 0 :
  $P(\Omega) = 1$; $P(\phi) = 0$.
- Si A et $\overline{A}$ sont deux événements contraires, alors, $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.
- Pour tous événements A et B, la probabilité de la réunion $A \cup B$ est
  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
- Si A et B sont incompatibles on a : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

3. Probabilité conditionnelle :

Définition :

A et B sont deux événements et A n'est pas l'événement impossible, c'est-à-dire $P(A) \neq 0$.
On appelle probabilité conditionnelle de B, sous l'hypothèse A (c'est-à-dire la probabilité pour que B se réalise sachant que A est réalisé), le réel, noté $P(B \backslash A)$ et défini par $P(B \backslash A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$.

4. Evénements indépendants :

Définition :

A et B sont deux événements et B n'est pas l'événement certain, ni l'événement impossible
($P(B) \neq 1$ et $P(B) \neq 0$).
Dire que A est indépendant de B en probabilité signifie que : $P(A \backslash B) = P(A \backslash \overline{B})$.

Théorème 6 :

A et B sont deux événements indépendants si et seulement si : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

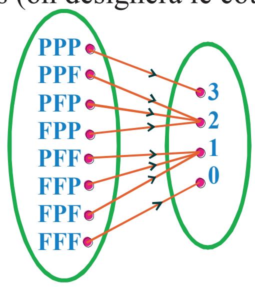
5. Variable aléatoire :

Définition 1 :

Ω est l'ensemble des issues (univers) d'une expérience aléatoire.
Toute fonction définie sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$ est appelée une variable aléatoire.
Une variable aléatoire est noté à l'aide d'une lettre majuscule : X ; Y ; Z ;…

Exemple 4 :

On considère trois pièces de monnaie discernables, non truquées. On jette les trois pièces et on considère la variable aléatoire X associée au nombre de côtés ''pile'', obtenus (on désignera le côté pile par P et le côté face par F). Déterminer l'ensemble des valeurs de X.



Soit Ω l'univers associé à cette expérience, donc,

$\Omega = \{\mathbf{FFF} ; \mathbf{FFP} ; \mathbf{FPF} ; \mathbf{PFF} ; \mathbf{PPF} ; \mathbf{PFP} ; \mathbf{FPP} ; \mathbf{PPP}\}$.

L'ensemble des valeurs de X est noté $X(\Omega) = \{\mathbf{0} ; \mathbf{1} ; \mathbf{2} ; \mathbf{3}\}$.

Définition 2 :

X est une variable aléatoire définie sur un ensemble fini Ω et $X(\Omega)=\{\mathbf{x_1} ; \mathbf{x_2} ; ... ; \mathbf{x_n}\}$ est l'ensemble des valeurs possibles de X.

On appelle loi de probabilité de X la fonction f de $X(\Omega)$ dans $[0 ; 1]$, qui à chaque $\mathbf{x_i}$ associe la probabilité de l'événement A_i, réunion des événements élémentaires d'images x_i par X.

Pour tout naturel i, $1 \leq i \leq n$, on note $f(x_i) = P(A_i) = P(X = x_i)$.

Exemple 5 :

Reprenons l'exemple précédent des trois pièces de monnaie.

$X(\Omega) = \{\mathbf{0} ; \mathbf{1} ; \mathbf{2} ; \mathbf{3}\}$; $P(X = 0) = P(\{\mathbf{FFF}\}) = \frac{1}{8}$; $P(X = 1) = P(\{\mathbf{FFP} ; \mathbf{FPF} ; \mathbf{PFF}\}) = \frac{3}{8}$

$P(X = 2) = P(\{\mathbf{PPF} ; \mathbf{PFP} ; \mathbf{FPP}\}) = \frac{3}{8}$; $P(X = 3) = P(\{\mathbf{PPP}\}) = \frac{1}{8}$.

Le tableau suivant représente la loi de probabilité de X.

Xi	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Définition 3 :

X est une variable aléatoire définie sur un ensemble Ω.

On appelle fonction de répartition de X la fonction F de $\mathbb{R}$ dans $[0 ; 1]$, définie pour tout réel a par : $F(a) = P(X < a)$.

Définition 4 :

$\{\mathbf{x_1} ; \mathbf{x_2} ; ... ; \mathbf{x_n}\}$ est l'ensemble des images d'une variable aléatoire X. pour tout naturel i tel que : $1 \leq i \leq n$; $P_i = P(X = x_i)$.

On appelle espérance mathématiques variable de X le réel noté E(X), défini par :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{x_i p_i}.$$

Définition 5 :

X est une variable aléatoire dont l'ensemble des images est x_1 ; x_2 ; …x_n et dont l'espérance mathématique est $E(X) = m$.

Posons pour tout naturel i ; tel que **: $1 \leq i \leq n$; $p_i = p(X = x_i)$**. On appelle :

a) Variance de X , le réel noté V(X), tel que : $\mathbf{V(X) = E[(X-m)^2] = \sum_{i=1}^{n} E(x_i - m)^2 p_i}$.

b) Ecart- type de X le réel noté $\boldsymbol{\sigma(X) = \sqrt{V(X)}}$.

Remarque 1 :

Il est souvent plus commode de calculer V(X) grâce à la formule de Koenig :

$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

Exemple 6 :

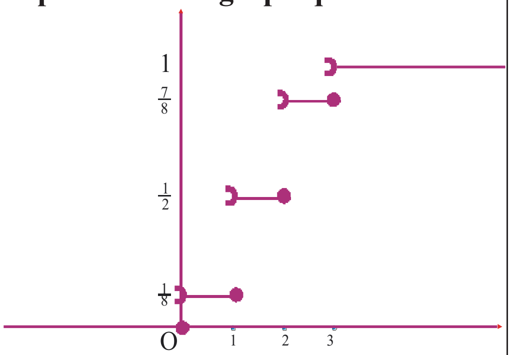
Il s'agit de reprendre encore l'exemple précédent.
Définir la fonction de répartition F de X et la représenter
Calculer l'espérance mathématique E(X), la variance et l'écart type $\sigma(X)$ de X.

Réponse :

a) $X(\Omega) = \{0\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ 3\}$;

$$\begin{cases} \bullet \text{ si } x \in \left]-\infty ;\ 0\right] \ ;\ F(x) = 0\ ; \quad \bullet \text{ si } x \in \left]0 ;\ 1\right] ;\ F(x) = \frac{1}{8} ; \quad \bullet \text{ si } x \in \left]1 ;\ 2\right] ;\ F(x) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{4}{8} \\ \bullet \text{ si } x \in \left]2 ;\ 3\right] ;\ F(x) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \frac{7}{8} ; \quad \bullet \text{ si } x \in \left]3 ;\ +\infty\right[;\ F(x) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = 1 \end{cases}$$

Représentation graphique de F



b) L'espérance mathématique de X

$E(X) = 0 \times P(X = 0) + 1 \times P(X = 1) + 2 \times P(X = 2) + 3 \times P(X = 3)$,

$$E(X) = 0 + \frac{3}{8} + \frac{6}{8} + \frac{3}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}.$$

La variance de X : $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 =$

$$(0)^2P(X = (0) + (1)^2P(X = 1) + (2)^2P(X = 2) + (3)^2P(X = 3) - \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

$$V(X) = 0 + \frac{1}{8} + \frac{12}{8} + \frac{9}{8} - \frac{9}{4} = \frac{22}{8} - \frac{9}{4} = \frac{11}{4} - \frac{9}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} ;$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

6. Schéma de Bernoulli – Loi binomiale :

- On appelle suite d'épreuves (ou schéma) de Bernoulli l'expérience qui consiste à répéter plusieurs fois, de façon indépendante, une épreuve ayant deux issues possibles : l'une appelée ''succès'', l'autre appelée ''échec''.
- Soit une suite de n épreuves de Bernoulli , pour chaque épreuve, la probabilité p pour le succès (donc : $q = 1 - p$ pour l'échec).

Soit k un élément de $\{0;1\ ;\ 2\ ;\ ...\ ;\ n\}$, la probabilité P_k d'obtenir k succès au cours de ces n épreuves vérifie : $P_k = C_n^k p^k q^{n-k}$.

L'application $k : \mapsto P_k$ est appelée loi binomiale de paramètre (n ; p).

Exemple 7 :

a) Lors d'un examen, on pose à un candidat une question en lui proposant trois réponses ; parmi elles ; une seule est correcte. Le candidat choisit au hasard l'une des réponses proposées. Quelle est la probabilité pour qu'il donne la réponse exacte ?

b) Un test se compose de quatre questions posées dans les conditions ci-dessus. Quelle est la probabilité pour que le candidat donne les réponses exactes à trois questions ? A quatre questions ?

Réponse :

a) Il est clair que la probabilité que le candidat donne la réponse exacte est $\frac{1}{3}$.

b) Un test est une suite de quatre questions dont les réponses sont indépendantes deux à deux.
Une réponse peut être soit exacte, soit fausse. Il s'agit donc d'un schéma de Bernoulli.

- 4 est le nombre d'épreuves, donc n = 4 ; $\frac{1}{3}$ est la probabilité d'un succès ; $p = \frac{1}{3}$,

- $\frac{2}{3}$ est la probabilité d'un échec : q = $\frac{2}{3}$

Il en résulte que la probabilité p_3 que le candidat donne trois bonnes réponses est :

$$p_3 = C_4^3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^1 = \frac{8}{81}.$$

De même, la probabilité que le candidat donne quatre bonnes réponses est

$$p_4 = C_4^4 \times \left(\frac{1}{3}\right)^4 \left(\frac{2}{3}\right)^0 = \frac{1}{81}.$$

Théorème 7 :

Soit X une variable aléatoire qui comptabilise le nombre de succès obtenus dans un schéma de Bernoulli de paramètre (n ; p), alors, on a :

- $P(X = k) = C_n^k \times p^k q^{n-k}$;
- $E(X) = np$
- $V(X) = npq$

III. Lois continues :

1) Variables aléatoires à densité :

a) Densité de probabilité :

Définition 1 :

On appelle densité de probabilité d'une variable aléatoire X toute fonction f continue et positive sur un intervalle I($[a; b]$, $]-\infty, a]$ $[a; +\infty[$ ou $\mathbb{R}$) et telle que $P(x \in I) = \int_{x \in I} f(x)dx = 1$

Pour tout intervalle $J = [\alpha; \beta]$ contenu dans I, on a : $P(x \in J) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$

Définition 2 :

La fonction F définie par $F(x) = P(X \le x)$ est appelée fonction de répartition de la variable aléatoire X : $F(x) = \int_{a}^{x} f(t)dt$ ou $F(x) = \lim\limits_{a \to \infty} \int_{a}^{x} f(t)dt$

Définition 3 :

L'espérance mathématique d'une variable aléatoire continue X de densité f sur I est :

$$E(x) = \int_{t \in I} tf(t)dt$$

Remarque 2 :

Comme la probabilité que X prenne une valeur isolée est nulle on a :

$$P([\alpha; \beta]) = P([\alpha; \beta[) = P(]\alpha; \beta]) = P(]\alpha; \beta[)$$

Exemple 8 :

a) Soit la fonction f définie sur $[0; 1]$ par $f(x) = 2x$; Montrer que f définit une densité de probabilité.

b) Soit la fonction $f(x) = kx^2$.

Déterminer le réel k pour que f définisse une fonction de densité sur $[0; 1]$.

Réponse :

a) f est continue positive et on a : $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 2xdx = [x^2]_0^1 = 1$, donc f définit bien une fonction de densité.

b) Pour que f définisse une fonction de densité il faut que $\int_0^1 f(t)dt = 1$; Donc on a :

- $\int_0^1 kt^2\,dt = 1$. Ce qui fait $\left[\frac{kx^3}{3}\right]_0^1 = 1$. D'où $\frac{k}{3} = 1$. Donc $k = 3$.

2) Loi uniforme ou loi à densité homogène :

Définition :

On dit que la variable aléatoire X suit la loi normale sur un intervalle $I = [a\ ;\ b]$ avec $a < b$ si sa densité est constante et est définie pour tout $t \in [a\ ;\ b]$ par $f(t) = \frac{1}{b-a}$.

Conséquence :

Pour tout intervalle $J = [\alpha\ ; \beta]$ contenu dans I on a : $P(x \in J) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{b-a} dt = \frac{\beta - \alpha}{b-a}$;
La probabilité est donc proportionnelle à la longueur de l'intervalle considéré.

Espérance mathématique :

L'espérance mathématique de la loi uniforme sur un intervalle $I = [a\ ;\ b]$ est donnée par :
$E(\mathrm{X}) = \frac{a+b}{2}$, En effet : $E(\mathrm{X}) = \int_a^b tf(t)\,dt = \int_a^b \frac{t}{b-a} dt = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}$.

Exemple 9 :

On choisit au hasard un nombre entre -3 *et* 5.
a) Calculer la probabilité d'obtenir un nombre strictement inferieur à 1 .
b) Calculer la probabilité d'obtenir un nombre supérieur ou égal à 3.
c) Calculer la probabilité que le nombre choisi soit strictement inferieur à 1 sachant qu'il est positif.

Réponse :

a) Le choix d'un nombre entre -3 *et* 5 suit une loi uniforme sur $[-3\ ;\ 5]$ de densité $f(t) = \frac{1}{8}$

$P(X < 1) = P(\ [-3\ ;\ 1]) = \frac{1-(-3)}{5-(-3)} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$.

b) $P(X \geq 3) = P(\ [3\ ;\ 5]) = \frac{5-3}{5-(-3)} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

c) $P_{X\geq 0}(X < 1) = \frac{P([-3\ ; 1[\cap[0\ ; 5])}{P([0\ ; 5])} = \frac{P([0\ ; 1[)}{P([0\ ; 5])} = \frac{1}{5}$.

3) Loi exponentielle ou loi sans mémoire :

Définition :

On dit que la variable aléatoire X suit la loi exponentielle de paramètre $\alpha > 0$ si sa densité est une fonction de la forme : $f(t) = \alpha e^{-\alpha t}$ sur $[0\ ; +\infty[$.

Conséquences :

La fonction de répartition $F(x) = \int_a^x \alpha e^{-\alpha t} = 1 - e^{-\alpha x}$
F définit bien une densité de probabilité car $\lim\limits_{+\infty} F(x) = 1$
$P(X \leq a) = F(a) = 1 - e^{-\alpha a}$
$P(X > a) = e^{-\alpha a} = 1 - F(a)$
$P(a \leq x \leq b) = F(b) - F(a) = e^{-\alpha a} - e^{-\alpha b}$
Loi sans mémoire (ou sans vieillissement) : La loi exponentielle est une loi sans mémoire c'est-à-dire : $\forall t > 0\ et\ \forall h > 0\ on\ a\ P_{X\geq h(X\geq h+t)} = P(X \geq h)$

Exemple 10 :

Le temps (en heures) nécessaire pou réparer un ordinateur suit une loi exponentielle de paramètre $\alpha = 1$

a) Calculer la probabilité que la durée de réparation dépasse 2heures.
b) Calculer la probabilité que la durée de réparation dépasse 4 heures étant donné qu'elle a dépassé déjà 3heures.

Réponse :

a) $p(x \geq 2) = 1 - \int_0^2 e^{-x}\,dx = e^{-2} = 0{,}135$

b) $P_{X\geq 3(X\geq 4)} = P_{X\geq 3(X\geq 3+1)} = P(X \geq 1) = e^{-1} = 0{,}368$.

4) Loi normale :

a) Loi centrée réduite :

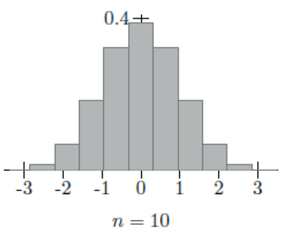
Théorème 8 : (de Moivre-Laplace)

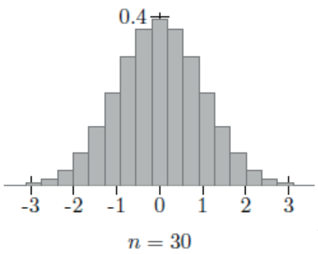
Soit $\mathbf{X_n} \sim B(n, p)$, on note $\mathbf{Z_n} = \dfrac{\mathbf{X_n - E(X_n)}}{\boldsymbol{\sigma}\mathbf{(X_n)}} = \dfrac{\mathbf{X_n - np}}{\sqrt{\mathbf{np(1-p)}}}$, la v.a. centrée réduite associé

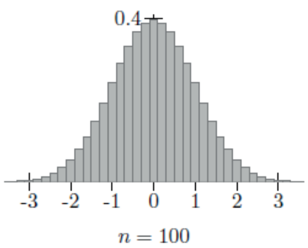
(i.e. $E(\mathbf{Z_n}) = 0$ et $\sigma(\mathbf{Z_n}) = 1$). Alors $P(\mathbf{Z_n} \in [a\ ;\ b])$ converge vers $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}} dx$.

Preuve :

Admise. Visuellement cependant, on peut observer une stabilisation de la densité (discrète) de la suite (Zn), ici pour $p = 0, 5$:

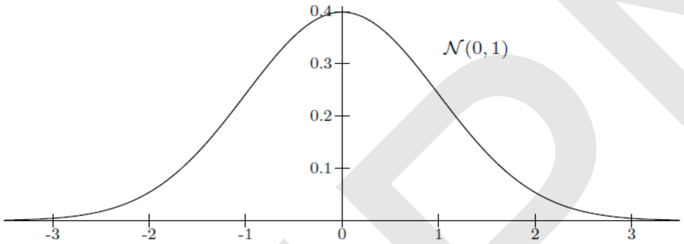






Définition :

La loi de densité $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}$ sur $\mathbb{R}$ est la *loi normale centrée réduite* $\mathcal{N}(0, 1)$.

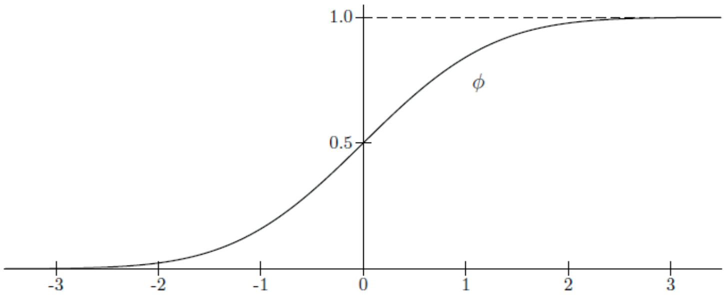


Remarque 3 :

- La suite de v.a. $(\mathbf{Z_n})$ *converge en loi* vers $\mathcal{N}(0, 1)$.
- La densité de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$ est paire.
- Par conséquent, si la v.a. $\mathbf{X}$ suit la loi $\mathcal{N}(0, 1)$ alors $P(\mathbf{X} < 0) = P(\mathbf{X} > 0) = \dfrac{1}{2}$
- Cette densité ne possède pas de primitive s'écrivant avec des fonctions usuelles.
- Cette densité s'écrase très vite lorsque x s'éloigne de 0.
- La courbe de la densité $\mathcal{N}(0, 1)$ est une *gaussienne*, et la loi $\mathcal{N}(0, 1)$ est fréquemment appelée *gaussienne* ou *loi de Laplace-Gauss*.

Définition :

On note φ la fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$.



Théorème 9 :

Si X suit la loi $\mathcal{N}(0,\ 1)$, de fonction de répartition φ, alors :

- $P(a \leq X \leq b) = \varphi(b) - \varphi(a)$;
- $\varphi(-a) = 1 - \varphi(a)$;
- $P(-a \leq X \leq a) = 2\varphi(a) - 1$.

Preuve :

- Déjà vu : φ est simplement une primitive de la densité gaussienne f.
- Si $h(x) = \varphi(-x) + \varphi(x)$ alors h est dérivable avec $h'(x) = -f(-x) + f(x) = -f(x) + f(x) = 0$ car f est paire. Ainsi h est constante sur $\mathbb{R}$; puisque $h(0) = 0,\ 5 + 0,\ 5 = 1$ (toujours par parité de f), il vient $h(x) = 1$ pour tout x.
- On calcule directement : $P(-a \leq X \leq a) = \varphi(a) - \varphi(-a) = \varphi(a) - (1 - \varphi(a)) = 2\,\phi(a) - 1$.

Théorème 10 :

Si X suit $\mathcal{N}(0;\ 1)$ et $\alpha \in]0;\ 1[$ alors il existe un unique réel $\mathbf{u}_\alpha$ vérifiant l'égalité

$P(-\mathbf{u}_\alpha \leq \mathbf{X} \leq \mathbf{u}_\alpha) = 1 - \alpha$.

Preuve. L'équation à résoudre est $P(-x \leq X \leq x) = 1 - \alpha$ soit $2\varphi(x) - 1 = 1 - \alpha$ ou encore

$\varphi(x) = 1 - \dfrac{\alpha}{2}$. La fonction φ est continue (car dérivable), strictement croissante (sa dérivée gaussienne étant strictement positive), $\lim\limits_{x \to -\infty} \varphi(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = 1$.

Le théorème des valeurs intermédiaires, puisque $0 < 1 - \dfrac{\alpha}{2} < 1$, prouve alors l'existence d'un unique

$\mathbf{u}_\alpha$ vérifiant $\varphi(\mathbf{u}_\alpha) = 1 - \dfrac{\alpha}{2}$, c'est - à- dire $P(-\mathbf{u}_\alpha < X < \mathbf{u}_\alpha) = 1 - \alpha$.

Remarque 4 :

Avec un logiciel de calcul on obtient les deux résultats à connaitre suivants :

- $P(-1,96 \leq X \leq 1,96) \approx 0,95$;
- $P(-2,58 \leq X \leq 2,58) \approx 0,\ 99$.

Remarque 5 :

Une v.a. suivant la loi normale a été construite comme limite d'une suite de v.a. d'espérance nulle et de variance égale à 1. Le théorème suivant prouve qu'il en est bien sur de même pour cette v.a. limite.

Théorème 11 :

Soit X une v.a. suivant la loi $N(0,\ 1)$. Alors :

- $E(X) = 0$;
- $V(X) = 1$.

Preuve :

- Si f est la densité gaussienne, on doit calculer $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{tf(t)dt}$.

Par définition, cette intégrale vaut $\lim\limits_{x \to -\infty} \int_x^0 tf(t)dt\ \lim\limits_{x \to -\infty} \int_x^0 \mathbf{tf(t)dt} + \lim\limits_{y \to +\infty} \int_0^y tf(t)dt$

Considérons la deuxième intégrale. On calcule : $\int_0^y \mathbf{tf(t)dt} = \int_0^y \dfrac{t}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-t^2}{2}} dt = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(1 - e^{\frac{-y^2}{2}}\right)$, qui a pour limite $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$ lorsque y tend vers $+\infty$. De la même manière, la première intégrale tend vers $-\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$ lorsque x tend vers $-\infty$. Il en résulte que la somme de ces deux limites vaut 0, i.e $E(X) = 0$.

- Calculons, sans se focaliser cette fois-ci sur l'intégrale impropre :

$V(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}t^2\,f(t)dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{t^2}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-t^2}{2}})dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}t.te^{\frac{-t^2}{2}})dt$ que l'on intègre par parties :

$$V(X)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[-te^{\frac{-t^2}{2}}\right]_{-\infty}^{+\infty}-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}-e^{\frac{-t^2}{2}}dt=0+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{\frac{-t^2}{2}}dt=1.$$

IV. Fluctuation et estimation :

1. Intervalle de fluctuation :

Définition :

Un *intervalle de fluctuation asymptotique* d'une v.a. Y_n au seuil $1-\alpha$ est un intervalle I_n qui contient Y_n avec une probabilité égale à $1-\alpha$ lorsque n tend vers l'infini, i.e.

$\lim\limits_{x\to\infty}P(Y_n\in I_n)=1-\alpha$

Théorème 12 :

Si X_n suit la loi $B(n,p)$ alors pour tout $\alpha\in]0;1[$ on a $\lim\limits_{x\to\infty}P(\frac{X_n}{n}\in I_n)=1-\alpha$;

où $I_n=\left[p-u_\alpha\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}};p+u_\alpha\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$.

Preuve :

Soit X_n suit la loi $B(n,p)$. Le théorème de Moivre-Laplace et la définition de u_α montrent que $\lim\limits_{x\to\infty}P(-u_\alpha\le\frac{X_n-np}{\sqrt{np(1-p)}}\le u_\alpha)=\lim\limits_{x\to\infty}P(-u_\alpha\le X\le u_\alpha)$; où X suit une loi centrée réduite.

On remarque ensuite que $-u_\alpha\le\frac{X_n-np}{\sqrt{np(1-p)}}\le u_\alpha\Leftrightarrow -u_\alpha\sqrt{np(1-p)}\le X_n-np\le u_\alpha\sqrt{np(1-p)}$

soit $p-u_\alpha\sqrt{p(1-p)}\le X_n\le p+u_\alpha\sqrt{p(1-p)}$.

Remarque 6 :

$\frac{X_n}{n}$ représente la fréquence du nombre de succès de la binomiale X_n

Corollaire 1 :

L'intervalle de fluctuation de $\frac{X_n}{n}$ au seuil de 95% est alors a peu près :

$$\left[p-1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}};\ p+1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$$

Preuve : Il s'agit juste de se souvenir que $u_{0,05}\approx 1{,}96$..

Remarque 7 :

• Il est courant de considérera l'approximation asymptotique comme acceptable lorsque $n\ge 30$, $np\ge 5$ et $np(1-p)\ge 5$. Il ne faut cependant pas considérer cet usage comme une règle absolue mais plutôt comme un ordre d'idée.

• On a déjà vu que $p(1-p)\le 0.25$ et par conséquent $1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\le\frac{1}{\sqrt{n}}$, valeur qui a été utilisée en sixième année.

IV.2 Estimation :

Définition :

Un *intervalle de confiance* pour une proportion p à un niveau de confiance $1-\alpha$ est un intervalle aléatoire contenant la proportion p avec une probabilité supérieure à $1-\alpha$, réalisé à partir d'un échantillon.

Théorème 13 :

Soient p une proportion fixée et X_n *suit une loi* $B(n, p)$.

Lorsque n tend vers l'infini, l'intervalle : $\left[\frac{X_n}{n} - u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; \frac{X_n}{n} + u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$ contient la proportion p avec une probabilité de $1-\alpha$.

Preuve :

Il s'agit d'une simple réécriture du théorème de fluctuation asymptotique. En effet on peut écrire $\frac{X_n}{n} \leq p + u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow \frac{X_n}{n} - u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leq p$ et de la même manière

$$\frac{X_n}{n} \leq p + u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow \frac{X_n}{n} - u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leq p$$

Corollaire 2 :

Soit p une proportion fixée. Lorsque n est assez grand, l'intervalle :

$\left[\frac{X_n}{n} - \frac{1}{\sqrt{n}} ; \frac{X_n}{n} + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ contient la proportion p avec une probabilité d'au moins 0,95.

Preuve :

C'est encore une reprise de la section précédente, ou l'on a vu que $u_{0,05}\sqrt{p(1-p)} \leq 1$.

La limite $1-\alpha$ du théorème précédent est donc > 0,95 et il existe donc un rang n_0 a partir duquel la probabilité que p soit dans l'intervalle ci-dessus est > 0,95.

Remarque 8 :

- La proportion p est alors un élément de l'intervalle $\left[\frac{X_n}{n} - \frac{1}{\sqrt{n}} ; \frac{X_n}{n} + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$; avec un *niveau de confiance* de plus de 95%.
- On considérera ici encore, de manière indicative, que l'approximation est acceptable lorsque $n \geq 30$, $np \geq 5$ et $np(1-p) \geq 5$.
- L'intervalle de confiance ne nécessite pas ici de connaitre la proportion p a priori.

3. Décision à partir de la fréquence d'un échantillon :

Quand les critères d'approximation sont vérifiés, l'intervalle de fluctuation asymptotique I_n permet de déterminer des seuils de décision :

- pour accepter ou rejeter l'hypothèse selon laquelle p est la proportion d'un caractère dans la population;
- pour déterminer si un échantillon issu de la population est représentatif.

On formule l'hypothèse que la proportion d'un caractère dans la population est p. On prélève dans la population un échantillon de taille n et on note f la fréquence observée du caractère étudié.

Lorsque $n \geq 30$, $np \geq 5$ et $np(1-p) \geq 5$, on détermine I_n l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil 95% de la fréquence f.

Mat 7 M AC.indd 188 20/01/46 02:17:36

• Si la fréquence observée f n'appartient pas à l'intervalle I_n, alors on rejette l'hypothèse selon laquelle p est la proportion du caractère étudié dans la population avec un risque d'erreur de 5 %.

• Si la fréquence observée f appartient à l'intervalle I_n, alors l'hypothèse selon laquelle p est la proportion du caractère étudié dans la population est acceptée.

Exemple 11 :

Dans un cabinet d'assurance, une étude est réalisée sur la fréquence des sinistres déclarés par les clients ainsi que leur coût. Une enquête affirme que 30% des clients ont déclaré un sinistre au cours de l'année. Un expert indépendant interroge un échantillon de 100 clients choisis au hasard dans l'ensemble des clients du cabinet d'assurance.

L'expert constate que 19 clients ont déclaré un sinistre au cours de l'année. Déterminer, en justifiant, si l'affirmation du cabinet d'assurance : « 30% des clients ont déclaré un sinistre au cours de l'année » peut être validée par l'expert.

• **Analyse des données** :

– « Sur un échantillon de n =100 clients. Il est constaté que 19 d'entre eux ont déclaré un sinistre.».

Donc la fréquence observée clients qui ont déclaré un sinistre est

$f = 19 \div 100 = 0,19$ soit $f = 0,19$

– On veut tester l'hypothèse : « la proportion de clients qui ont déclaré un sinistre est p = 30% ».

• **Intervalle de fluctuation** :

On a pour le cas étudié, n = 100, p = 30 %. Vérifions les conditions d'application du théorème :

$$\begin{cases} n = 100 \geq 30 \\ np = 100 \times 0,3 = 30 \geq 5 \\ n(1-p) = 100 \times 0,7 = 70 \geq 5 \end{cases}$$

Un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de confiance de 95% de la fréquence f dans un échantillon de taille n = 100 : est alors :

$$I_n = \left[p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ;\ p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right] = \left[0,3 - 1,96\frac{\sqrt{0,3 \times 0,7}}{\sqrt{100}} ;\ 0,3 + 1,96\frac{\sqrt{0,3 \times 0,7}}{\sqrt{100}} \right].$$

Puisque les borne sont :

- $p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \simeq 0,21018$. On arrondie la borne inférieure par défaut à 10^{-3} près soit $0,21$.
- $p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \simeq 0,38982$. On arrondie la borne supérieure par excès à 10^{-3} près soit $0,39$.

Soit $I_n = [0,21 ; 0,39]$

Conclusion :

La fréquence observée f = 0,19 n'appartient pas à l'intervalle de fluctuation asymptotique I_{100} , donc le résultat du contrôle remet en question l'hypothèse, avec un risque d'erreur de 5%.

Savoir-faire

A. Applications :

Exercice 1 :

Une classe comporte vingt élèves : douze filles et huit garçons.Le professeur de Français décide de désigner un groupe de travail de trois élèves chargés de préparer un exposé.

a) Quel est le nombre de groupes possibles ?

b) Combien y a t-il de groupes constitués de trois filles ?

c) Combien y a-t-il de groupes constitués de deux filles et d'un garçon ?

Solution :

a) le nombre de groupes constitués est égal au nombre de combinaisons de 3 éléments d'un ensemble à 20 éléments soit $C_{20}^{3}=\frac{20\times19\times18}{3\times2}=1140$

b) le nombre de groupes constitués de 3 filles est égal au nombre de combinaison de 3 éléments d'un ensemble à 12 éléments (le nombre de filles est 12), soit $C_{12}^{3}=\frac{12\times11\times10}{3\times2}=220$.

c) le nombre de groupes constitués de deux filles et d'un garçon est :

$C_{12}^{2}\times C_{8}^{1}=\frac{12\times11}{2}\times8=6\times11\times8=528$.

Exercice 2 :

Un sac contient 6 boules blanches et 7 boules noires. On tire simultanément 3 boules de ce sac.

a) Quelle est la probabilité d'obtenir :

* 3 boules blanches ?

*3 boules noires ?

*1 boule blanche et 2 boules noires ?

*1 boule noire et 2 boules blanches ?

b) Vérifier les résultats précédents en calculant la somme des probabilités ainsi obtenues.

Solution :

Le nombre de tirages possibles est : C_{13}^{3}, donc cardΩ = $C_{13}^{3}=\frac{13\times12\times11}{3\times2}$; d'où : cardΩ = 286.

a) Le nombre de tirages de 3 boules blanches est : $C_{6}^{3}=\frac{6\times5\times4}{3\times2}=5\times4=20$.

Donc, la probabilité d'obtenir 3 boules blanches est : $p_1=\frac{20}{286}$.

Le nombre de tirages de 3 boules noires est : $C_{7}^{3}=\frac{7\times6\times5}{3\times2}=7\times5=35$,

Donc, la probabilité d'obtenir 3 boules noires est : $p_2=\frac{35}{286}$.

Le nombre de tirages de 2 boules noires et 1 boule blanche est : $C_{7}^{2}\times C_{6}^{1}=\frac{7\times6}{2}\times6=21\times6=126$.

La probabilité d'obtenir 2 boules noires et 1 boule blanche est : $p_3=\frac{126}{286}$.

Le nombre de tirage de 2 boules blanches et 1 boule noire est $C_{6}^{2}\times C_{7}^{1}=15\times7=105$,

La probabilité d'obtenir 2 boules blanches et une boule noire est : $p_4=\frac{105}{286}$.

b) $p_1+p_2+p_3+p_4=\frac{20}{286}+\frac{35}{286}+\frac{126}{286}+\frac{105}{286}=\frac{20+35+126+105}{286}=\frac{286}{286}=1$.

Exercice 3 :

Une urne contient 5 boules numérotées de 1 à 5. On en tire simultanément deux boules.

a) Quelle est la probabilité d'obtenir :

- Deux chiffres de même parité ; - Deux chiffres de parités différentes ?

b) Calculer de deux façons la probabilité d'obtenir au moins un chiffre pair.

c) Calculer la probabilité d'obtenir au plus un chiffre pair.

Solution :

$\text{card}\Omega = \mathbf{C_5^2 = \frac{5\times 4}{2} = 10}$, le nombre de chiffres pairs = 2, celui des chiffres impairs = 3.

a) la probabilité d'obtenir deux chiffres de même parité est : $\mathbf{\frac{C_2^2 + C_3^2}{10} = \frac{1+3}{10} = \frac{2}{5}}$,

- la probabilité d'obtenir deux chiffres de parités différentes est : $\mathbf{\frac{C_2^1 \times C_3^1}{10} = \frac{2\times 3}{10} = \frac{3}{5}}$.

b) la probabilité d'obtenir au moins un chiffre pair peut être calculée ainsi :

$\mathbf{\frac{C_2^1 \times C_3^1 + C_2^2}{10} = \frac{6+1}{10} = \frac{7}{10}}$, elle peut aussi être calculée, en utilisant l'événement contraire.

''Obtenir deux chiffres impairs'', cette probabilité est égale à : $\mathbf{\frac{C_3^2}{10} = \frac{3}{10}}$,

Donc la probabilité d'obtenir au moins un chiffre pair est : $1 - \mathbf{\frac{3}{10}} = \mathbf{\frac{7}{10}}$.

c) La probabilité d'obtenir au plus un chiffre pair est : $\mathbf{\frac{C_2^1 \times C_3^1 + C_3^2}{10} = \frac{9}{10}}$.

Exercice 4 :

On considère un échantillon de 500 personnes composé de 200 hommes et 300 femmes ; parmi les hommes, 150 ont plus de 30 ans et, parmi les femmes, 200 ont plus de 30 ans.

On choisit au hasard une personne dans cet échantillon.

a) Sachant que cette personne est un homme, quelle est la probabilité pour qu'il ait plus de 30 ans ?

b) Sachant que cette personne a au plus 30 ans, quelle est la probabilité pour que ce soit un homme ?

Solution :

Le tableau suivant résume la situation étudiée.

	≤ 30 ans	>30ans	Total
Hommes	50	150	200
Femmes	100	200	300
Total	150	350	500

On considère comme univers l'ensemble Ω des personnes.

Soient les événements : A : ''la personne est un homme'' et B : ''la personne a plus de 30 ans''.

a) Il s'agit de calculer $P_A(B)$; $P_A(B) = \mathbf{\frac{P(A\cap B)}{P(A)}}$.

$P(A \cap B) = \mathbf{\frac{Card(A\cap B)}{Card\Omega} = \frac{150}{500}}$ **et** $\mathbf{P(A) = \frac{CardA}{Card\Omega} = \frac{200}{500}}$. Donc, $P_A(B) = \mathbf{\frac{150}{200}} = \mathbf{\frac{3}{4}}$.

b) la probabilité à calculer est : $\mathbf{P_{\overline{B}}(A)}$:

$$\mathbf{P_{\overline{B}}(A) = \frac{P(A\cap \overline{B})}{P(\overline{B})} \ ; \ P(A\cap \overline{B}) = \frac{Card(A\cap \overline{B})}{Card(\Omega)} = \frac{50}{500} \ ; \ P(\overline{B}) = \frac{Card(\overline{B})}{Card(\Omega)} = \frac{150}{500}},$$

donc, $\mathbf{P_{\overline{B}}(A) = \frac{50}{150} = \frac{1}{3}}$.

Exercice 5 :

Un joueur dispose d'un dé de six faces ; trois blanches, deux sont vertes et une est rouge. Lors du lancé du dé, chaque face a la même probabilité d'apparition. Le joueur lance le dé et observe la couleur de la face supérieure.

- S'il observe une face rouge, il gagne 2F,
- S'il observe une face verte, il gagne 1F,
- S'il observe une face blanche, il relance le dé ; il gagne, alors 3F, pour une face rouge, il perd 1F pour une face verte et le jeu est arrêté sans gain ni perte pour une face blanche.

Soit X la variable aléatoire égale au gain algébrique de ce joueur.

a) Quelles sont les valeurs que peut prendre X ?

b) Déterminer la loi de probabilité de X.

c) Calculer l'espérance mathématique de X.

Solution :

a) les valeurs que peut prendre X sont 2, 1, 3, -1, 0 ; donc X (Ω) $=\{-1, 0, 1, 2, 3\}$.

b) La loi de probabilité de X

- P(X = 2) = $\frac{1}{6}$ (probabilité d'observer une face rouge),
- P(X = 1) = $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ (probabilité d'observer une face verte),
- P(X = 3) = $\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{12}$ (probabilité d'observer une face blanche puis une face rouge),
- P(X = -1) = $\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$ (probabilité d'observer une face blanche puis une face verte.),
- P(X = 0) = $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$ (probabilité d'observer une face blanche puis une face blanche),

Consignons tous les résultats dans un tableau

k	2	1	3	-1	0
P(X = k)	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$

c) E(X) = $2\times\frac{1}{6}+1\times\frac{1}{3}+3\frac{1}{12}+(-1)\frac{1}{6}+(0)\frac{1}{4}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{6}$; Donc; E(X) = $\frac{3}{4}$.

Exercice 6 :

Un tireur vise une cible, à chaque tir, la probabilité pour qu'il touche la cible (succès) est 0,7.

Il tire trois fois de suite, soit Y la variable aléatoire égale au nombre de succès au cours des trois tirs effectués.

Déterminer la loi de probabilité de Y. Calculer E(Y) ; V(Y) ; σ (Y).

Solution :

Y(Ω) = $\{0\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ 3\}$,

a) La loi de probabilité de Y :

- P(Y = 0) = $C_3^0(0,7)^0(0,3)^3=0,027$; P(Y = 1) = $C_3^1(0,7)^1(0,3)^2=0,189$;
- P(Y = 2) = $C_3^2(0,7)^2(0,3)=0,441$; P(Y = 3) = $C_3^3(0,7)^3(0,3)^0=0,343$;

k	0	1	2	3
P(X = k)	0 ,027	0,189	0,441	0,343

b) E(Y) = np = 3 × 0,7 = 2,1 ; V(Y) = npq = 3× 0,7 ×0,3 = 0,63 ; σ (Y) = $\sqrt{0,63}$

Exercice 7 :

Ahmed et Leyla rentrent de l'école à pied. Leurs parents savent qu'ils doivent arriver entre 17h et 18h à la maison. On peut modéliser leur heure d'arrivée par une variable aléatoire X suivant la loi uniforme sur [17 ; 18].

1) Quelle est la probabilité qu'ils arrivent entre 17h et 17h15 ?

2) À quelle heure leurs parents peuvent-ils « espérer » les voir arriver ?

Solution :

1) Sous forme décimale, 17h15= 17,25h ; puis P(17 ≤X ≤17,25) = $\dfrac{17,25-17}{18-17}=0,25$.

2) On a E(X) = $\dfrac{17+18}{2}=17,5$.= 1, donc leurs parents peuvent espérer les voir arriver à 17h30.

Remarque 1 :

Pour la question **1**, on pourra considérer $f: x \mapsto \dfrac{1}{18-17}=1$ sur l'intervalle $[17;18]$ la fonction densité de X *et* on calculera ainsi P(17 ≤X ≤17,25)= $\int_{17}^{17,25} f(x)\mathrm{d}x = \int_{17}^{17,25} 1\mathrm{d}x = [x]_{17}^{17,25} = \mathbf{0,25}$.

Exercice 8 :

On considère que le temps d'attente en minutes à un guichet du service après-vente d'un magasin peut être modélisé par une variable aléatoire T suivant la loi exponentielle de paramètre 0,2.

1) Calculer au millième près la probabilité d'attendre un temps inférieur ou égal à 5 minutes.

2) Calculer au millième près la probabilité d'attendre plus de 10 minutes.

3) Un client se présente au guichet. Quel temps peut-il « espérer » attendre ?

Solution :

1) On calcule P(0 ≤ T ≤5) = $1-\mathbf{e}^{-0,2\times5} = 1-\mathbf{e}^{-1} \simeq 0,632$.

2) On calcule P(T > 10) = $\mathbf{e}^{-0,2\times10} = \mathbf{e}^{-2} \simeq 0,135$.

3) E(T) = $\dfrac{1}{0,2}$ =5 ; donc le client peut espérer attendre 5 minutes.

Remarque 2 :

Dans le cas de la première probabilité, un calcul d'intégrale était envisageable :

la fonction de densité de T est la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par f (t) = $(\mathbf{0,2})\mathbf{e}^{(-0,2)t}$.

La probabilité d'attendre un temps inférieur ou égal à 5 minutes est donc :

P(0 ≤T ≤5)= $\int_0^5 f(\mathbf{t})\mathrm{d}t = \int_0^5 (0,2)\mathbf{e}^{(-0,2)\mathbf{t}}\mathrm{d}t = \left[-\mathbf{e}^{(-0,2)\mathbf{t}}\right]_0^5 = -\mathbf{e}^{(-0,2)5} - \left(-\mathbf{e}^{(-0,2)0}\right) = 1-\mathbf{e}^{-1} \simeq 0,632$.

Exercice 9 :

La proportion de chômeurs dans la population active est de 10%. Déterminer un intervalle de fluctuation au seuil de 95% de la fréquence des chômeurs dans les échantillons de taille 400. (Arrondir au millième).

Solution :

On a pour le cas étudié, $n = 400$, $p = 10$ %. Vérifions les conditions d'application du théorème :

$$\begin{cases} n = 400 \geq 30 \\ np = 400\times0,1 = 40 \geq 5 \\ n(1-p) = 400\times0,9 = 360 \geq 5 \end{cases}$$

Un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de confiance de 95% de la fréquence f dans un échantillon de taille $n = 400$: est alors :

$$I_n = \left[p-1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\,;\; p+1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right] = \left[0,1-1,96\frac{\sqrt{0,1\times0,9}}{\sqrt{400}}\,;\; 0,1+1,96\frac{\sqrt{0,1\times0,9}}{\sqrt{400}}\right].$$

Puisque les borne sont :

- $p-1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \simeq 0,0706$. On arrondie la borne inférieure par défaut à 10^{-3} près soit $0,07$.
- $p+1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \simeq 0,1294$ On arrondie la borne supérieure par excès à 10^{-3} près soit $0,13$.

Soit $I_n = [0,07\ ;\ 0,13]$

Conclusion : En considérant un échantillon de taille 400 dans la population, la probabilité que la fréquence de chômeurs dans cet échantillon appartienne à l'intervalle I_{400} est voisine de 95%. Autrement dit, il y a 95% de chances que la fréquence de chômeurs de cet échantillon soit comprise entre 7% et 13%.

Exercice 10 :

On interroge au hasard 300 clients ayant effectué des achats sur un site internet et s'étant fait livrer le produit à domicile.
Le temps de livraison a été jugé raisonnable par 160 personnes interrogées.
Donner un intervalle de confiance de la proportion p de clients satisfaits.

Solution :

• **Analyse des données** :
– « *Sur un échantillon de* $n = 300$ *clients. Il est constaté que* 160 *sont satisfaits du temps de livraison.* ». Donc la fréquence observée de clients satisfaits du temps de livraison est $f = 160 \div 300 \simeq 0,533333333$ soit $f \simeq 0,533$.

• **Intervalle de confiance** :
On a pour le cas étudié, $n = 300$, $f \simeq 0,533$. Vérifions les conditions d'application du théorème :

$$\begin{cases} n = 300 \geq 30 \\ nf = 300\times\frac{160}{300} = 160 \geq 5 \\ n(1-f) = 300\times\frac{140}{300} = 140 \geq 5 \end{cases}$$

Un intervalle de confiance au seuil de confiance de 95% de la proportion p est alors :

$$I_n = \left[f-\frac{1}{\sqrt{n}};\ f+\frac{1}{\sqrt{n}}\right] = \left[\frac{160}{300}-\frac{1}{\sqrt{300}};\ \frac{160}{300}+\frac{1}{\sqrt{300}}\right]$$

Puisque les bornes sont :

- $f-\frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{160}{300}-\frac{1}{\sqrt{300}} \simeq 0,4756$.

  On arrondie la borne inférieure par défaut à 10^{-3} près soit $0,475$.
- $f+\frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{160}{300}+\frac{1}{\sqrt{300}} \simeq 0,59107$.

On arrondie la borne supérieure par excès à 10^{-3} près soit $0,592$.

Soit $I_n = [0,475\ ;\ 0,592]$.

Conclusion :

Cet intervalle contient la proportion p au niveau de confiance 95% (ou au risque d'erreur de 5%).
La proportion de clients satisfaits se situe donc, au niveau de confiance 95%, entre 47,5% et 59,2%.

B. Exercices divers :

1. 1. f est la fonction telle que : $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{2x^2 - x}$

Etudier ses variations et tracer sa représentation graphique.

2.a) n est un naturel non nul, une urne électorale contient :

n – 1 bulletins Non et n +1 bulletins ''Oui ''.

Pour réaliser un sondage sommaire, on prélève deux bulletins, chaque bulletin ayant la même probabilité d'être prélevé.

Calculer la probabilité p_n de l'événement ''on a prélevé 2 bulletins portants des votes différents''

2.b) Utiliser la première question pour trouver le naturel n_0 pour lequel la probabilité Pn_0 est maximale. Calculer Pn_0.

2. Une urne contient 3 boules blanches et 3 boules noires indiscernables au toucher.

On tire au hasard et simultanément trois boules.

a) Calculer la probabilité de chacun des événements :

A : ''Obtenir au moins une boule blanche''

B''obtenir au moins deux boules noires'' ;

C ''obtenir au moins une boule blanche et une boule noire''.

b) Calculer P(A\B) ;P(A\C) ; P(B\A) ; P(B\C) ; P(C\A) ; P(C\B) ;

3. On lance deux fois un dé et à chaque issue on associe le couple (a ; b) où a est la face apparue au premier jet et b celle apparue au second.

On peut définir plusieurs variables aléatoires.

Pour chacune d'elle, 1 déterminer sa loi de probabilité et son espérance mathématique :

- X : '' nombre apparu au premier jet ''
- Y : '' nombre apparu au second jet ''
- Z = X + Y
- U = XY

suivant :

Z	$1-i\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{3}+i$	2i	-3
$\lvert Z \rvert$						
argZ						

Z	1+ i	2	1- i	$i\sqrt{2}$	$1+i\sqrt{3}$	-1 + i
$\lvert Z \rvert$						
argZ						

Une boîte contient 12 cartons indiscernables au toucher, portant les 12 nombres complexes du tableau précédent (chaque carton porte un seul nombre complexe) .

2. On tire au hasard un carton de la boîte (on suppose l'équiprobabilité des tirages).

a) Quelle est la probabilité de tirer un carton portant un nombre réel ?

b) Quelle est la probabilité de tirer un carton portant un nombre complexe dont le module est $\sqrt{2}$?

c) Quelle est la probabilité de tirer un carton portant un nombre complexe dont un argument θ est tel que : $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$.

3. Un jeu consiste à tirer un carton de la boîte précédente, si le nombre complexe inscrit sur le carton tiré est de module 3, le joueur gagne 10.000 UM et le jeu s'arrête, sinon, le carton tiré est remis dans la boîte et le joueur procède à un deuxième tirage ; si ce carton porte un nombre complexe de module 3 le joueur gagne 8 000 UM, s'il est de module 2, il gagne 5 000 UM, sinon il ne gagne rien et le jeu s'arrête.

Soit X la variable aléatoire égale au gain du joueur.

a) Déterminer la loi de probabilité de X,

b) Calculer l'espérance mathématique E(X) de X.

4 Une urne contient quatre boules vertes, deux blanches et une rouge, indiscernables au toucher. On tire au hasard et simultanément trois boules. Les tirages sont équiprobables.

Chaque boule verte tirée vaut 1F, chaque blanche 2F, la rouge 5F.

Soit X la variable aléatoire qui associe à chaque tirage de trois boules, le gain en francs. Déterminer la loi de probabilité de X.

2. a) Calculer l'espérance mathématique E(X).

b) Quelle valeur positive ou négative aurait-il fallu attribuer à chaque boule blanche pour que E(X) soit nulle, les boules vertes et la boule rouge conservent leurs valeurs initiales.

5 Une boîte contient neuf carrés numérotés de 1 à 9, une deuxième boîte contient quatre disques numérotés de 1 à 4. On tire indépendamment un objet de chacune des deux boîtes. Les objets d'une

même boîte sont supposés avoir la même probabilité d'être tirés.
On considère la variable aléatoire X qui, à chaque tirage, associe la valeur absolue de la différence des nombres indiqués sur les objets tirés.
Déterminer la loi de probabilité de X et son espérance mathématique. Déterminer et représenter graphiquement la fonction de répartition de X.

6 On peint les six faces d'un cube de bois d'arête 3 cm. On le débite, par des traits de scie parallèle aux plans de faces, en 27 petits cubes d'arêtes 1 cm.
On place ces 2 7 petits cubes dans un sac.
1 On tire, au hasard, et simultanément, deux cubes du sac.
Soit X la variable aléatoire égale au nombre total de faces peintes que présentent les deux cubes tirés.
a) Quelles sont les valeurs prises par X ?
b)Déterminer la loi de probabilité de X.
c)Calculer l'espérance mathématique E(X) et l'écart-type σ (X) de X.

1. On renouvelle trois fois le même tirage de deux petits cubes en remettant chaque fois les cubes tirés dans le sac. Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de tirage où les deux cubes tirés ont, en tout, deux faces peintes.

Donner la loi de probabilité de Y.

7. Une urne contient **3** boules blanches, **2** boules vertes et **5** boules rouges. On tire simultanément et au hasard deux boules de l'urne.
1) a) Quelle est la probabilité de tirer deux boules blanches ?
b) Quelle est la probabilité de tirer deux boules vertes ?
c) Quelle est la probabilité de tirer deux boules rouges ?
2.) En déduire la probabilité de tirer deux boules de couleurs différentes.
3.) Un jeu consiste à tirer simultanément et au hasard deux boules de l'urne.

- Si les deux boules sont de couleurs blanches, alors on gagne **25** points.
- Si les deux boules sont de couleurs vertes, alors on gagne **100** points.
- Si les deux boules sont de couleurs rouges, alors on gagne **12** points.
- Si les deux boules sont de couleurs différentes, alors on gagne p points.

On désigne par X la variable aléatoire égale au gain obtenu.

a) Déterminer la loi de probabilité de X,
b) Calculer l'espérance mathématique E(X) de X.
c) Déterminer la valeur de p pour laquelle E(X) = 10.

8 Une urne contient six billes numérotées de **1** à **6**. On tire simultanément deux billes qui portent les numéros **n** et **p**. A chaque tirage, on associe la variable aléatoire **X** définie ainsi,

- Si **n** et **p** sont pairs, $\mathbf{X} = \frac{\mathbf{n+p}}{\mathbf{2}}$,
- Si **n** et **p** sont impairs, $\mathbf{X = 0}$
- Sinon $\mathbf{X = |n-p|}$

Quelles sont les valeurs que peut prendre X ?

9 Une cage contient sept pigeons dont cinq pigeonnes et deux pigeons mâles ; parmi ces pigeons on dispose de deux couples de plumage gris et de trois pigeonnes de plumage blanc. On tire au hasard et simultanément deux oiseaux de cette cage (les tirages sont équiprobables).
1. Quel est le nombre de tirages possibles ?
2. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
A : ''les deux oiseaux tirés sont du même sexe''
B :''les deux oiseaux tirés sont de même couleur''
C : ''les deux oiseaux tirés forment le même couple''
3. On considère la variable aléatoire réelle X qui à chaque tirage de deux oiseaux associe le nombre de pigeonnes contenues dans ce tirage.
a)Déterminer l'ensemble des valeurs de X et sa loi de probabilité
b)Calculer l'espérance mathématique de X.

10. Un sac $\mathcal{M}$ contient trois boules marquées 1 ; 2 et 4 ; un autre sac $\mathcal{A}$ contient aussi trois boules marquées 0 ; 3 et 4. Une épreuve consiste à prélever une boule de $\mathcal{M}$ (toute les boules de $\mathcal{M}$ ont la même probabilité d'être prélevées) dont le numéro sera noté m et une boule de $\mathcal{A}$ (toutes les boules de $\mathcal{A}$ ont la même probabilité d'être prélevées) dont le numéro sera noté a. Après chaque épreuve, les deux boules tirées sont remises dans leurs sacs respectifs.
Au résultat d'une épreuve, on associe l'application du plan complexe dans lui-même qui à tout point M

d'affixe Z fait correspondre le point M' d'affixe Z' tel que : $Z' = \alpha Z$ avec

$$\alpha = \frac{1}{2} m \left[\cos\left(\frac{\pi}{12} a\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{12} a\right) \right].$$

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct.

1°) Définir, géométriquement, les applications associées aux résultats possibles d'une épreuve.

2°) Soit le point A d'affixe $1 + i$; on appelle A' l'image de A par l'application associée au résultat d'une épreuve. Calculer les probabilités respectives p_1 et p_2 des événements : E_1 '' O ; A ; A' sont alignés'' ; E_2 '' l'affixe de A' est imaginaire pur''.

3°) On considère la variable aléatoire X qui à chaque résultat d'une épreuve fait correspondre la distance de O à A'.

a) Donner les valeurs prises par X et déterminer la loi de probabilité de X.

b) Calculer l'espérance mathématique E(X) et la variance V(X) de X.

11. On considère une variable aléatoire X suivant la loi U ([0 ; 20]).

1) Quelle est la fonction de densité associée à cette variable aléatoire ?

2) Que vaut l'espérance de X ?

3) Soit t un réel de l'intervalle ([0 ; 20]).

Donner l'expression de $P(X \leq t)$en fonction de t.

12 Cheikh a dit à Sow qu'il passerait la voir chez elle pour récupérer un meuble entre 10h et 12h. N'ayant pas prévu d'heure précise, il peut arriver à tout instant.

1) Quelle loi suit la variable aléatoire H donnant l'heure d'arrivée de Cheikh ?

2) Calculer la probabilité que Cheikh arrive :

a) avant 11h20

b) entre 10h et 10h05

c) à 11h précise

3) Cheikh n'est toujours pas arrivé à 10h40.

Quelle est la probabilité qu'il arrive avant 11h20?

13 Durée de vie d'un composant :

Un composant électronique d'un robot a une durée de vie, en année, qui peut être modélisée par une variable aléatoire T suivant une loi exponentielle de paramètre λ.

Une étude statistique a permis d'établir que $P(T < 5) = 0{,}1$. On arrondira tous les résultats au millième.

1) Déterminer la valeur de λ. Dans la suite, on prendra $\lambda = 0{,}02$.

2) Calculer la probabilité que ce composant ait une durée de vie supérieure ou égale à 14 ans.

3) Calculer la probabilité que ce composant ait une durée de vie inférieure ou égale à 10 ans.

4) Sachant que le composant a déjà fonctionné 7 ans, quelle est la probabilité qu'il ait une durée de vie supérieure ou égale à 21 ans ?

5) Donner une estimation de la durée de vie moyenne de ce composant.

14 **Carbone 14 :**

La durée de vie, en années, d'un atome radioactif peut être modélisée par une variable aléatoire D suivant une loi exponentielle de paramètre λ. On appelle demi-vie de cet élément le nombre réel T tel que la probabilité que cet atome se désintègre avant T années soit égale à 0,5. Ainsi, la demi-vie du carbone 14 est 5 730 ans.

1) Calculer λ dans le cas du carbone 14.

2) Calculer la probabilité qu'un atome de carbone 14 se désintègre :

a) avant 1 000 ans ;

b) après 10 000 ans.

3) Déterminer la valeur de a telle que :

$P(D < a) = 0{,}95$ pour le carbone 14. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

15. Une entreprise fabrique des rondelles métalliques. Une rondelle est conforme si son diamètre est compris entre 5 et 7 millimètres. On suppose que le diamètre, en millimètre, d'une rondelle suit la loi $N(6 ; 0.5^2)$.

1) Déterminer la probabilité qu'une rondelle soit conforme. Arrondir au millième.

2) On suppose que la production de chaque rondelle est indépendante des autres. À combien de rondelles non conformes peut-on s'attendre dans un stock de 500 000 ?

3) Le directeur général veut améliorer la qualité de la production. Il souhaite diviser le nombre de rondelles non conforme par deux, en utilisant des machines plus régulières. Quelle nouvelle valeur de l'écart-type σ doit-il viser ? Arrondir au centième.

16. Pour des raisons de logistique, les organisateurs d'un marathon ont décidé de modéliser le temps de parcours (en heure) de chacun des 2 000 participants par la loi normale de paramètres $\mu = 3{,}5$ et $\sigma = 0{,}5$.

1) Les organisateurs ont décidé d'installer le ruban sur la ligne d'arrivée deux heures après le départ

Mat 7 M AC.indd 197 20/01/46 02:17:42

du marathon. Selon ce modèle, quel est la probabilité qu'un coureur pris au hasard termine la course avant l'installation du ruban?

2) Les organisateurs souhaitent commencer la cérémonie de remise des médailles pour les trois premiers coureurs quand 95 % des coureurs seront arrivés. Au bout de combien de temps doivent-ils prévoir de le faire.

17. Temps de guérison : Wedou a remarqué que lorsqu'il est enrhumé, il se rétablit en moyenne en 4 jours et au minimum en 1 jour. Il souhaite modéliser son temps de guérison (en jour) par une variable aléatoire T. Dans l'exercice, on arrondira à 10^{-3} près si nécessaire.

Partie A :

On admet dans cette partie que T suit une loi uniforme.

1) Donner les paramètres de cette loi uniforme.

2) Trouver un intervalle I de la forme [4−u ; 4+ u] tel que P(T ∈ I) = 0,95.

3) Interpréter le résultat de la question précédente dans les termes de l'énoncé.

Partie B : Loi exponentielle

Expliquer pourquoi une loi exponentielle ne convient pas pour cette modélisation.

Partie C : Loi normale

1) Expliquer pourquoi une loi normale ne devrait normalement pas convenir pour cette modélisation.

2) Jemalle, une ami de Wedou, lui propose néanmoins de modéliser le temps de guérison T par une variable aléatoire N (4 ; σ^2) telle que P(T ≤ 1) = 0,01.

a) Expliquer le choix de cette loi.

b) Déterminer σ.

c) Trouver un intervalle J de la forme [4 − u ; 4 + u] tel que P(T ∈ J) = 0,95.

18. Selon une enquête de la DREES, 70 % des plus de 20 ans de la population française portent des lunettes ou des lentilles de contact.

On considère un échantillon de 400 personnes tirées au sort dans la population française et on admet que la population française est suffisamment grande pour assimiler ce tirage au sort à un tirage avec remise. On note X le nombre de personnes qui portent des lunettes ou des lentilles dans l'échantillon.

1) Quelle loi suit X ?

2) Contrôler que n et p vérifient bien les conditions n > 30, np > 5 et n(1 − p) > 5.

3) En déduire l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence des porteurs de lunettes ou de lentilles dans cet échantillon.

4) Donner une interprétation concrète du résultat précédent.

19. Dans une fabrique de chocolat, une machine met en forme les tablettes. Elle fabrique des tablettes imparfaites avec une probabilité 0,025. Quand une tablette est parfaitement formée, elle est vendue à 2 e. Lorsqu'elle est imparfaite, elle est vendue en vrac à 0,75 e dans le magasin d'usine. Chaque jour, l'usine produit 20 000 tablettes de chocolat.

1) Déterminer un intervalle de fluctuation de la fréquence de tablettes imparfaites au seuil de 95 %.

2) On suppose que toute la production est vendue. Déterminer un intervalle de fluctuation du chiffre d'affaires quotidien réalisé au seuil de 95 %.

20. Mamadou et Hawa observent le comportement de leur nouveau-né Aliou. Ils ont remarqué qu'en moyenne, Aliou s'endormait 30 minutes après chaque biberon. Ils modélisent le temps T (en heure) nécessaire à un endormissement de Aliou par une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ.

1) Déterminer la valeur de λ.

2) a) Selon ce modèle, quelle est la probabilité que Aliou mette plus d'une heure à s'endormir ? Arrondir au millième.

b) Hawa et Mamadou doutent un peu du modèle. Ils ont remarqué que durant le mois de janvier, après 150 repas, Aliou a seulement 10 fois mis plus d'une heure à s'endormir. Que peuvent-ils en conclure (on pourra utiliser un intervalle de fluctuation asymptotique) ?

3) Trouver une bonne raison en défaveur d'une loi exponentielle pour ce type de modélisation.

21. On souhaite déterminer la proportion p d'oliviers affectés par la bactérie Xylella fastidiosa dans une région. Pour cela, on effectue un test de dépistage sur 530 oliviers et on note X le nombre d'arbres infectés. Après examens, on trouve que 77 arbres sont malades.

1) Déterminer une estimation de la proportion p à l'aide d'un intervalle de confiance au seuil de 95 %.

2) Combien d'arbres devrait-on tester pour avoir un intervalle de taille inférieure ou égale à 0,01 ?

3) Par combien doit-on multiplier la taille de l'échantillon de la question 1 pour avoir une précision dix fois plus grande de l'intervalle de confiance ?

22. D'après Bac (Centres Étrangers - 2015) Un fournisseur produit deux sortes de cadenas. Les uns sont premier prix, et les autres sont haut de gamme. Un magasin de bricolage dispose d'un stock de cadenas provenant de ce fournisseur ; ce stock comprend un grand nombre de cadenas de chaque type.

1) Le fournisseur affirme que, parmi les cadenas haut de gamme, il n'y a pas plus de 3 % de cadenas défectueux dans sa production. Le responsable du magasin de bricolage désire vérifier la validité de cette affirmation dans son stock ; à cet effet, il prélève un échantillon aléatoire de 500 cadenas haut de gamme, et en trouve 19 qui sont défectueux. Ce contrôle remet-il en cause le fait que le stock ne comprenne pas plus de 3 % de cadenas défectueux ? On pourra pour cela utiliser un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 %.

2) Le responsable du magasin souhaite estimer la proportion de cadenas défectueux dans son stock de cadenas premier prix. Pour cela il prélève un échantillon aléatoire de 500 cadenas premier prix, parmi lesquels 39 se révèlent défectueux. Donner un intervalle de confiance de cette proportion au niveau de confiance 95 %.

23. D'après Bac (Nouvelle-Calédonie - 2014) Les trois parties A, B et C sont indépendantes. Une fabrique de desserts glacés dispose d'une chaîne automatisée pour remplir des cônes de glace.

Partie A : Les cônes de glace sont emballés individuellement puis conditionnés en lots de 2 000 pour la vente en gros. On considère que la probabilité qu'un cône présente un défaut quelconque avant son conditionnement en gros est égale à 0,003. On nomme X la variable aléatoire qui, à chaque lot de 2 000 cônes prélevés au hasard dans la production, associe le nombre de cônes défectueux présents dans ce lot. On suppose que la production est suffisamment importante pour que les tirages puissent être supposés indépendants les uns des autres.

1) Quelle est la loi suivie par X ? Justifier la réponse et préciser les paramètres de cette loi.

2) Si un client reçoit un lot contenant au moins 12 cônes défectueux, l'entreprise procède alors à un échange de celui-ci. Déterminer la probabilité qu'un lot ne soit pas échangé ; le résultat sera arrondi au millième.

Partie B : Chaque cône est rempli avec de la glace à la vanille. On désigne par Y la variable aléatoire qui, à chaque cône, associe la masse (exprimée en grammes) de crème glacée qu'il contient. On suppose queY suit une loi normale N (110 ; σ^2), d'espérance $\mu = 110$ et d'écart-type σ. Une glace est considérée comme commercialisable lorsque la masse de crème glacée qu'elle contient appartient à l'intervalle [104 ; 116]. Déterminer une valeur approchée à 10^{-1}près du paramètre σ telle que la probabilité de l'évènement « la glace est commercialisable » soit égale à 0,98.

Partie C : Une étude réalisée en l'an 2000 a permis de montrer que le pourcentage de Français consommant régulièrement des glaces était de 84 %. En 2010, sur 900 personnes interrogées, 795 d'entre elles déclarent consommer des glaces. Peut-on affirmer, au niveau de confiance de 95 % et à partir de l'étude de cet échantillon, que le pourcentage de Français consommant régulièrement des glaces est resté stable entre les années 2000 et 2010 ?

Mat 7 M AC.indd 199 20/01/46 02:17:43