REPUBLIQUE ISLAMIQUE DE MAURITANIE

Honneur - Fraternité - Justice

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE

ET DE LA REFORME DU SYSTEME EDUCATIF

INSTITUT PEDAGOGIQUE NATIONAL

# MATHÉMATIQUES

## 7 ème ANNEE SECONDAIRE

## SN



**2024**

# AVANT – PROPOS

**Chers collègues professeurs, Chers élèves,**

L'institut Pédagogique National a le plaisir de présenter à la famille scolaire un projet de manuel de l'élève pour la 7ème année secondaire ; -série Sciences de la nature- conformément aux nouveaux programmes réécrits selon la vision holistique.

Ce document a été réalisé dans des conditions marquées par l'urgence afin qu'il soit disponible dès la rentrée 2023 – 2024. Il sera ensuite amélioré, corrigé et mis à niveau dans sa prochaine version en tenant compte de vos remarques et suggestions.

Il a été procédé à l'adoption d'une méthodologie particulière mettant l'accent sur les points essentiels dans le programme suivant une approche pragmatique qui privilégie les aspects pratiques et les savoir-faire.

Ce choix est traduit par la segmentation du programme en termes de chapitres (8) et la mise en œuvre d'une structure de chapitre permettant aux différents utilisateurs d'en tirer profit.

Cette structure est ainsi conçue:

- " **Faire- savoir**" : permet de déterminer **l'essentiel du chapitre** sous forme de résumé des points essentiels et incontournables.
- " **Savoir – faire** ": permet à l'élève de mettre ses capacités à l'exercice, dans un premier temps, en traitant des **applications** directes du cours et dans un deuxième temps en passant aux **Exercices** de niveau avancé.

L'IPN souhaite que les utilisateurs de ce projet de manuel leur fassent parvenir leurs remarques et suggestions constructives pour qu'il puisse en tenir compte dans la prochaine édition.


**Les auteurs**

Mohameden O/ Bah
Inspecteur de l'enseignement secondaire

Mohameden O/ El Hadi
Inspecteur de l'Enseignement Secondaire

El Jed O/ Moctar
Professeur de l'enseignement secondaire

Yesleck O/ Bamba O/ Tiyib
Professeur de l'enseignement secondaire



**Mise en page & Maquette :**

**Nejdi Sid'Ahmed Ejjeyed, Maquettiste /IPN**

# Table des matières

CHAPITRE 1

# Nombres complexes

## Faire savoir

### L'essentiel du chapitre

## I. Ensemble des nombres complexes :

### 1. Définition :

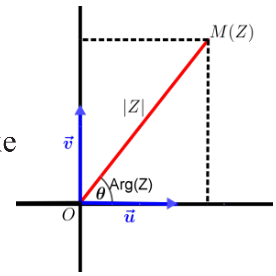
- L'ensemble des nombres de la forme $\mathbf{x+iy}$ ; où $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ sont réels est appelé ensemble des nombres complexes et noté $\mathbb{C}$, il contient l'ensemble des réels $\mathbb{R}$.
- $\mathbb{C}$est muni d'une addition et d'une multiplication qui prolongent celles de $\mathbb{R}$ et qui suivent les mêmes règles de calcul.
- Le nombre **i** vérifie $\mathbf{i^2=-1}$.

### 2. Forme algébrique d'un nombre complexe :

Soit un nombre complexe **z= x +iy** :

- **x + iy** est la forme algébrique de **z**, sa partie réelle notée **Re(z)**et on écrit :**Re(z) = x** ;
- la partie imaginaire de **z** notée **Im(z)** et on écrit :**Im(z) = y** ;
- Un nombre complexe est réel si et seulement si, sa partie imaginaire est nulle,
- On appelle imaginaire pur tout complexe de la forme **iy** ; avec **y** réel. Un complexe est imaginaire pur, si et seulement si sa partie réelle est nulle,

### 3. Représentation d'un nombre complexe :




Le plan est muni d'un repère $(\mathbf{O}\ ;\ \vec{\mathbf{u}}\ ;\ \vec{\mathbf{v}})$ orthonormé direct.

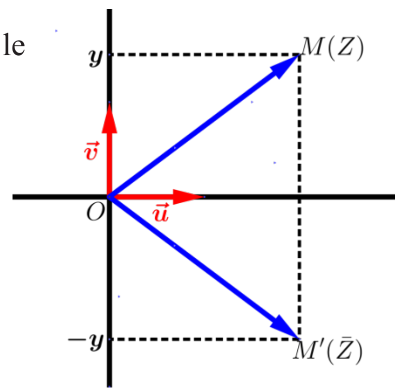
A tout point **M** de coordonnées cartésiennes **(x ; y)**, on associe le nombre complexe **z** défini par :

$\mathbf{z=x+iy}$ ; **z** est appelé l'affixe du point **M** ( et aussi du vecteur $\overrightarrow{\mathbf{OM}}$ ).

On dit que **M** est le point image du nombre complexe **z** et que $\overrightarrow{\mathbf{OM}}$ est son vecteur image.

### 4. Conjugué d'un nombre complexe :

#### Définition :




Le conjugué d'un nombre complexe **z** de forme algébrique $\mathbf{x+iy}$ est le nombre complexe défini par

$\mathbf{\bar{z}=x-iy}$.

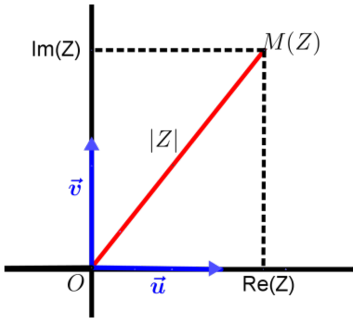
#### Propriétés :

**z** et **z'** désignent des nombres complexes,

- les points images de **z** et $\mathbf{\bar{z}}$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.
- $\mathbf{z+\bar{z}=2\,Re(z)}$ ; $\mathbf{z-\bar{z}=2i\,Im(z)}$.
- **z** est réel si et seulement si, $\mathbf{\bar{z}=z}$.
- **z** est imaginaire pur si et seulement si, $\mathbf{\bar{z}=-z}$.

- $\overline{\left(\overline{z}\right)} = z$ ,
- $\overline{z+z'} = \overline{z}+\overline{z'}$ (le conjugué d'une somme est la somme des conjugués),
- $\overline{zz'} = \overline{z}\times\overline{z'}$ (le conjugué d'un produit est le produit des conjugués),
- Si $z$ est non nul, alors $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$, (le conjugué de l'inverse est l'inverse du conjugué),
- Si $z'$ est non nul, alors $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$ ( le conjugué du quotient est le quotient des conjugués),
- Si $\mathbf{n}$ est un entier non nul, alors $\overline{z^n} = \overline{z}^n$

## 5. Module d'un nombre complexe :




**Définition :**

Le module de $\mathbf{z}$ noté $|z|$ est la distance $\mathbf{OM}$ ; $|z| = OM = \sqrt{x^2+y^2}$ .

**Propriétés :**

$\mathbf{z}$ et $\mathbf{z'}$ désignent deux nombres complexes :

- $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$ ;
- $|z| = |\overline{z}| = |-z|$ (un nombre complexe, son opposé et son conjugué ont même module).
- $|z+z'| \leq |z|+|z'|$ (Inégalité triangulaire)
- $|zz'| = |z|\times|z'|$ (le produit des modules est égal au module du produit).
- Si $\mathbf{z}$ est non nul, alors $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$ (le module de l'inverse est l'inverse du module),
- Si $\mathbf{z'}$ est non nul, alors $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$ ( le module du quotient est le quotient des modules),
- Pour tout entier naturel $\mathbf{n}$, non nul : $|z^n| = |z|^n$.

**Remarque 1 :*Distance de deux points :***

Soient $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ deux points d'affixes $z_A$ et $z_B$. La distance $\mathbf{AB}$ est le module de la différence entre les affixes de $\mathbf{A}$ et de $\mathbf{B}$ ; $AB = |z_A - z_B|$ .

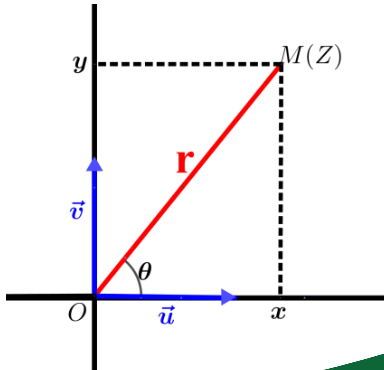
## 6. Argument d'un nombre complexe :

**Définition :**

Soit $\mathbf{z}$ un nombre complexe non nul et $\mathbf{M}$ le point du plan d'affixe $\mathbf{z}$.

On appelle argument de $\mathbf{z}$, noté $\arg(z)$,unemesure en radian de l'angle de vecteurs : $\left(\vec{u}\ ;\ \overrightarrow{OM}\right)$

**Propriétés :**



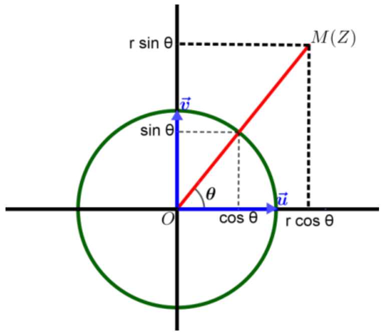

- $\arg(z_1\times z_2) = \arg(z_1)+\arg(z_2)$
- $\arg(\frac{z_1}{z_2}) = \arg(z_1)-\arg(z_2)$ avec $z_1 \neq 0$ et $z_2 \neq 0$
- $\arg(z^n) = n\arg(z)$ ; $z \neq 0$
- $\arg(\frac{1}{z}) = -\arg(z)$ ; $z \neq 0$
- $\arg(-z) = \pi + \arg(z)$

- $\arg(\bar{z}) = -\arg(z)$
- $z \in \mathbb{R}^* \Leftrightarrow \arg(z) = 0[\pi]$ ou $\arg(z) = k\pi$ ; avec $k \in \mathbb{Z}$
- $z \in i\mathbb{R}^* \Leftrightarrow \arg(z) = \frac{\pi}{2}[\pi]$ ou $\arg(z) = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ; avec $k \in \mathbb{Z}$

**Interprétation géométrique** :

- $\arg(z) = (\vec{u}, \overrightarrow{OM})[2\pi]$
- $\arg(z_B - z_A) = (\vec{u}, \overrightarrow{AB})[2\pi]$
- $\arg(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})[2\pi]$

## 7. Forme trigonométrique d'un nombre complexe :




### Définition :

Tout nombre complexe **z** non nul peut s'écrire sous la forme

$\mathbf{z = r(\cos\theta + i\sin\theta)}$, où $\mathbf{r = OM = |z|}$ et $\theta = \left(\vec{u} \; ; \; \overrightarrow{OM}\right)$ .

Cette écriture est appelée **forme trigonométrique** du nombre complexe **z**.

Le point **M** du plan distinct de **O** d'affixe z est déterminé par le couple **( r ; θ )**

tels que : $\mathbf{OM = r}$ et $\theta = \left(\vec{u} \; ; \; \overrightarrow{OM}\right) [2\pi]$ **( r ; θ )** est alors le couple de coordonnées polaires du point **M**.

### Exemple 1 :

Soient $\mathbf{z = 1+i}$ et $\mathbf{z' = 1-i}$ . Mettre **z** et **z'** sous la forme trigonométrique.

On a : $|1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$ , on peut écrire : $1+i = \sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}})$. Or, $\frac{1}{\sqrt{2}} = \cos\frac{\pi}{4}$ et $\frac{1}{\sqrt{2}} = \sin\frac{\pi}{4}$

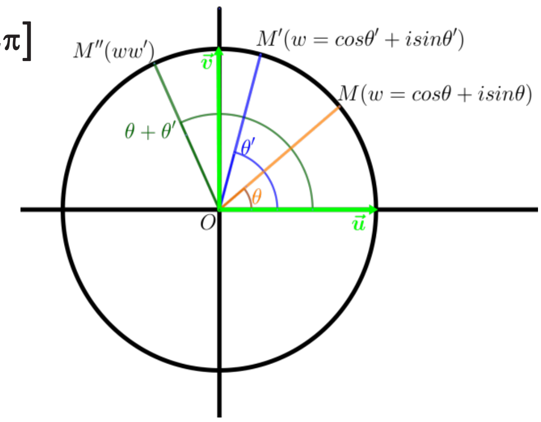
Donc $1+i = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$ .

De la même façons, on démontre que : $1-i = \sqrt{2}(\cos\frac{-\pi}{4} + i\sin\frac{-\pi}{4})$ .

### Remarque 2 :

- **0** n'a pas d'écriture trigonométrique.
- un argument de **z** est défini à un multiple de $\mathbf{2\pi}$ près. Tous les arguments de **z** sont de la forme $\theta + 2k\pi$ . On écrira $\arg z = \theta \; [2\pi]$
- l'argument d'un nombre complexe non nul peut être représenté de manière unique par un nombre réel dans $]-\pi, \pi]$ . On l'appelle argument principal de **z**.
- Si **z** est un nombre complexe de module **1** (**M** appartient au cercle trigonométrique), alors : $z = \cos\theta + i\sin\theta$ ou $z = e^{i\theta}$ par convention $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ .
- **z** est réel si, et seulement si : $z = 0$ **ou** $(z \neq 0$ **et** $\arg z = 0 \; [\pi])$
- **z** est un réel strictement positif si, et seulement si, $\arg z = 0 \; [2\pi]$ , et strictement négatif si, et seulement si, $\arg z = \pi \; [2\pi]$ .

- $z$ est un imaginaire pur $\Leftrightarrow z = 0$ ou $\left( z \neq 0 \text{ et } \arg z = \frac{\pi}{2} \, [\pi] \right)$
- $z \in \left( i\mathbb{R}_+^* \right) \Leftrightarrow \arg z = \frac{\pi}{2} \, [2\pi]$ et $z \in \left( i\mathbb{R}_-^* \right) \arg z = -\frac{\pi}{2} \, [2\pi]$




**Propriété :**

Si $\omega = \cos\theta + i\sin\theta$ et $\omega' = \cos\theta' + i\sin\theta'$ ;

alors $\omega\omega' = \cos(\theta + \theta') + i\sin(\theta + \theta')$.

## II. Equation du second degré :

### 1.Résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation du second degré à coefficients complexes :

**Théorème 1 :**

Soit **a, b** et **c** des nombres complexes tels que $a \neq 0$.

L'équation $az^2 + bz + c = 0$ a pour solutions : $z_1 = \frac{-b+d}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b-d}{2a}$, où **d** désigne une racine carrée de $\Delta = b^2 - 4ac$.

- si $\Delta = b^2 - 4ac \neq 0$, alors $z_1 \neq z_2$.
- si $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, alors $z_1 = z_2 = \frac{-b}{2a}$ ; on dit que l'équation à une solution double.

**Remarque 3 :** $\Delta = b^2 - 4ac$ est appelé le discriminant de l'équation $az^2 + bz + c = 0$.

### 2.Résolution dans $\mathbb{C}$d'une équation du second degré à coefficients réels :

Soit l'équation $az^2 + bz + c = 0$, ou **a, b** et **c** sont des réels et **a** non nul.

D'après l'étude précédente on a

- si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, l'équation admet deux solutions réelles distinctes : $\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$,
- si $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, l'équation admet une seule solution $\frac{-b}{2a}$, elle est réelle.
- si $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, une racine carrée complexe de $\Delta$ est $i\sqrt{-\Delta}$.

L'équation admet deux racines complexes conjuguées : $\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

**Exemple 2 :**

1) Résoudre sur $\mathbb{C}$ : $z^2 - 2z\cos\varphi + 1 = 0$. Calculons le discriminant réduit :

$\Delta' = \cos^2\varphi - 1 = -\sin^2\varphi$, donc les solutions sont : $\cos\varphi + i\sin\varphi$ et $\cos\varphi - i\sin\varphi$.

2) Résoudre sur $\mathbb{C}$ : $3z^2 + 2z + 2 = 0$. Calculons le discriminant réduit : $\Delta' = 1 - 6 = -5 = (i\sqrt{5})^2$

Les solutions sont donc : $\frac{-1+i\sqrt{5}}{3}$ et $\frac{-1-i\sqrt{5}}{3}$.

3) Résoudre dans $\mathbb{C}$ : $(1-i)z^2-(6-4i)z+9-7i=0$. On a : $a=1-i$ ; $b=-(6-4i)$, $c=9-7i$ ;

**b' = -3 + 2i ; b'² – ac = (-3 + 2i )² – (1- i )( 9 – 7i ) = 3 + 4i**. Calculons les racines carrées de **3 + 4i**.

Il s'agit d'utiliser la méthode algébrique, soit $x+iy$ une racine carrée de ce nombre avec **x** et **y** réels.

$(x+iy)^2=3+4i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2=3 \\ x^2+y^2=5 \\ 2xy=4 \end{cases}$ Ce système donne, $x^2=4$ et $y^2=1$ et $xy>0$, d'où $2+i$ est une racine carrée de $3+4i$, Donc les solutions de l'équation sont :

$$z_1=\frac{3-2i+2+i}{1-i}=\frac{5-i}{1-i}=\frac{(5-i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{6+4i}{2}=3+2i$$

$$z_2=\frac{3-2i-(2+i)}{1-i}=\frac{1-3i}{1-i}=\frac{(1-3i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{4-2i}{2}=2-i$$

## III. Argument, module et notation exponentielle :

**Définition :**

Soit $\theta$ un nombre réel. On convient de noter $e^{i\theta}$ le nombre complexe : $\cos\theta+i\sin\theta$.

**Théorème 2 :**

Tout nombre complexe **z** non nul peut s'écrire sous la forme $re^{i\theta}$ où $r=OM=|z|$ et $\theta=(\vec{u},\overrightarrow{OM})$

Cette écriture est appelée **forme exponentielle** du nombre complexe **z**.

**Exemple 3 :**

Soient $z=1+i$, et $z'=1-i$ pour mettre ces nombres sous la forme exponentielle, cette forme est immédiate, car on a : $1+i=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ ; $1-i=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

**Propriété 3 :**

**a)** Soient **z** et **z'** deux nombres complexes non nuls tels que:

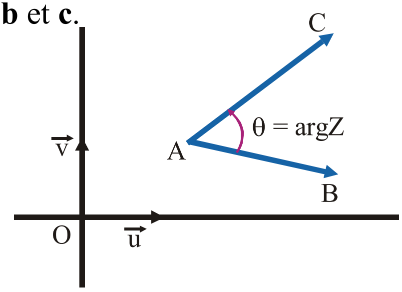
$z=r\,e^{i\theta}$ ; $z'=r'\,e^{i\theta'}$ ; $r=|z|$ et $r'=|z'|$ ; $\theta=\arg z$ ; $\theta'=\arg z'$.

| | | |
|---|---|---|
| $zz'=rr'e^{i(\theta+\theta')}$ | $\lvert zz'\rvert=\lvert z\rvert\times\lvert z'\rvert$ | $\arg(zz')=\arg z+\arg z'$ |
| $\frac{1}{z'}=\frac{1}{r'}e^{-i\theta'}$ | $\left\lvert\frac{1}{z'}\right\rvert=\frac{1}{\lvert z'\rvert}$ | $\arg(\frac{1}{z'})=-\arg z'$ |
| $\frac{z}{z'}=\frac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}$ | $\left\lvert\frac{z}{z'}\right\rvert=\frac{\lvert z\rvert}{\lvert z'\rvert}$ | $\arg(\frac{z}{z'})=\arg z-\arg z'$ |
| $z^n=r^ne^{in\theta}$ ; $n\in\mathbb{Z}$ | $\lvert z^n\rvert=\lvert z\rvert^n$ ; $n\in\mathbb{Z}$ | $\arg(z^n)=n\times\arg z$ |
| $\bar{z}=re^{-i\theta}$ | $\lvert\bar{z}\rvert=\lvert z\rvert$ | $\arg(\bar{z})=-\arg z$ |

## IV. Interprétation géométrique :

### 1. Quotient de deux nombres complexes :

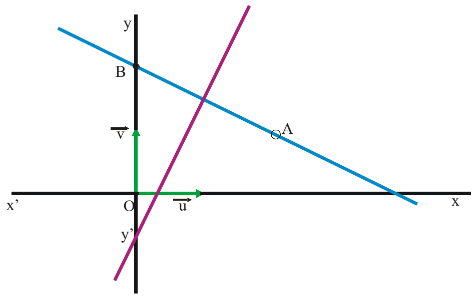
Soit **A** ; **B** et **C** des points deux à deux distincts d'affixes respectives **a, b** et **c**.




Soit le nombre complexe $Z = \dfrac{c-a}{b-a}$. On a :

$$|Z| = \frac{AC}{AB} \quad \text{et} \quad \arg Z = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)\ [2\pi]$$

**Exemple 4 :**




Le plan étant rapporté à un repère orthonormal $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

Soit **z** un nombre complexe et **Z** le complexe défini par $Z = \dfrac{z-2i}{z-2-i}$.

On appelle **A** et **B** les points d'affixes respectives **2 + i** et **2i**.

Déterminer et construire l'ensemble des points **M** d'affixes **z** tels que :

a) $|Z| = 1$ ; b) **Z** soit réel ; c) **Z** soit imaginaire pur.

On a pour $z \neq 2+i$ et $z \neq 2i$, $|Z| = \dfrac{MB}{MA}$ et $\arg Z = \left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right)\ [2\pi]$.

a) $|Z| = 1 \Leftrightarrow \dfrac{MB}{MA} = 1 \Leftrightarrow MB = MA$ **,cet ensemble de points est la médiatrice du segment [AB].**

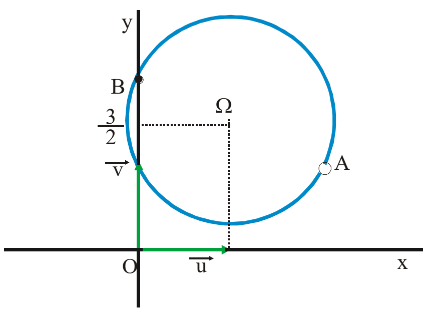
b) **Z** est réel $\Leftrightarrow \arg Z = 0\ [\pi]$ ou $Z = 0 \Leftrightarrow (\overrightarrow{MA}\ ;\ \overrightarrow{MB}) = 0\ [\pi]$ ou **M = B**.

**L'ensemble cherché est la droite (AB) privée de A.**

c) **Z** est imaginaire pur $\Leftrightarrow \arg Z = \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$ ou $Z = 0 \Leftrightarrow (\overrightarrow{MA}\ ;\ \overrightarrow{MB}) = \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$

ou **M = B**. $(\overrightarrow{MA}\ ;\ \overrightarrow{MB}) = \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$ ce qui signifie que le triangle **AMB** est rectangle en **M** ;

L'ensemble des points **M** tels que $(\overrightarrow{MA}\ ;\ \overrightarrow{MB}) = \dfrac{\pi}{2} (\pi)$ est le cercle de diamètre $[AB]$ privé de **A**

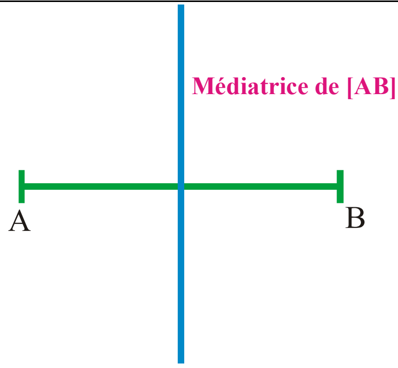
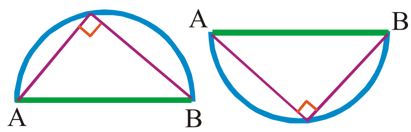
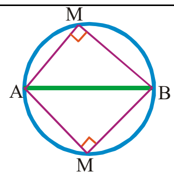



et de **B**. Or, dans ce cas **B** appartient à l'ensemble de points cherché,

donc **l'ensemble des points M tels que :**

**Z soit imaginaire pur est le cercle de diamètre [AB] privé de A.**

## 2. Ensembles de points :

| Soit z un nombre complexe d'image M et Z le nombre complexe défini par : $Z = \dfrac{z-b}{z-a}$ / $z \neq b$ et $z \neq a$.<br>Soit **A** et **B** les points d'affixes respectives **a** et **b**. | | | |
|---|---|---|---|
| **Ensemble de points M tels que** | **Interprétation** | **Nature** | **Illustration** |
| $\lvert Z \rvert = 1$ | $MB = MA$ | Droite |   |
| $\arg(Z) = 0\ [2\pi]$ | $(\overrightarrow{MA}\ ;\ \overrightarrow{MB}) = 0\ [2\pi]$ | $(AB)\setminus[AB]$ |   |
| $\arg(Z) = \pi\ [2\pi]$ | $(\overrightarrow{MA}\ ;\ \overrightarrow{MB}) = \pi\ [2\pi]$ | $]AB[$ |   |
| $\arg(Z) = 0\ [\pi]$ | $(\overrightarrow{MA}\ ;\ \overrightarrow{MB}) = 0\ [\pi]$ | Droite percée |   |
| $\begin{cases} \arg(Z) = \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi] \\ \text{ou} \\ \arg(Z) = -\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi] \end{cases}$ | $\begin{cases} (\overrightarrow{MA}\ ;\ \overrightarrow{MB}) = \dfrac{\pi}{2}[2\pi] \\ \text{ou} \\ (\overrightarrow{MA}\ ;\ \overrightarrow{MB}) = -\dfrac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$ | L'un des demi-cercles de diamètre $[AB]$, privé de **A** et **B**. |   |
| $\arg(Z) = \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$ | $(\overrightarrow{MA}\ ;\ \overrightarrow{MB}) = \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$ | Cercle de diamètre $[AB]$, privé de **A** et **B**. |   |

## Savoir-faire

### A. Applications :

**Exercice 1 :**

a) Ecrire sous forme algébrique **x + iy** les nombres complexes suivants :

$a = (3+2i)(2-i)$ ; $b = \frac{5+6i}{1-i}$ ; $c = \frac{3+i}{2-i} + \frac{2-i}{3+i}$.

b) Ecrire sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants:

$a = 1-i$ ; $b = 1+i\sqrt{3}$ ; $c = \frac{\sqrt{2}}{1-i}$ ; $d = \frac{4i}{1+i\sqrt{3}}$.

**Solution :**

Ecriture sous forme algébrique

- $a = (3+2i)(2-i) = 6-3i+4i+2 = 8+i$
- $b = \frac{5+6i}{1-i} = \frac{(5+6i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{5+5i+6i-6}{2} = \frac{-1+11i}{2} = \frac{-1}{2} + \frac{11}{2}i$
- $c = \frac{3+i}{2-i} + \frac{2-i}{3+i} = \frac{(3+i)^2+(2-i)^2}{(2-i)(3+i)} = \frac{9+6i-1+4-4i-1}{6+2i-3i+1} = \frac{11+2i}{7-i}$

  $= \frac{(11+2i)(7+i)}{(7-i)(7+i)} = \frac{77+11i+14i-2}{50} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i$

Ecriture sous forme trigonométrique

- $a = 1-i = \sqrt{2}(\frac{1-i}{\sqrt{2}}) = \sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}) = \sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}} + i(\frac{-1}{\sqrt{2}})) = \sqrt{2}(\cos(\frac{-\pi}{4}) + i\sin(\frac{-\pi}{4}))$ ;
- $b = 1+i\sqrt{3} = 2(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}) = 2(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$ ;
- $c = \frac{\sqrt{2}}{1-i} = \frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}$ ;
- $d = \frac{4i}{1+i\sqrt{3}} = \frac{4i(1-i\sqrt{3})}{4} = i(1-i\sqrt{3}) = \sqrt{3}+i = 2(\frac{\sqrt{3}+i}{2}) = 2(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}) = 2(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$

**Exercice 2 :**

Calculer le module du nombre complexe z proposé :

a) $z = 1+i\sqrt{3}$ ; b) $z = 1-i$ ; c) $z = -3i$ ; d) $z = 200-200i$ ; e) $z = (1-i)(3\sqrt{2}-i\sqrt{7})$.

**Solution :**

a) $|z| = \sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2} = 2$ ; b) $|z| = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$ ; c) $|z| = \sqrt{(-3)^2} = 3$ ;

d) $|z| = \sqrt{200^2+(-200)^2} = 200\sqrt{2}$ ; e) $|z| = |1-i|\,|3\sqrt{2}-i\sqrt{7}| = \sqrt{2}\times 5 = 5\sqrt{2}$

**Exercice 3 :**

Déterminer un argument pour chacun des complexes suivants :

$a = 1+i$ ; $b = 1-i\sqrt{3}$ ; $c = \frac{1+i}{1-i\sqrt{3}}$; $d = (1+i)(1-i\sqrt{3})$.

**Solution :**

- $|a| = \sqrt{2}$ ; $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ; $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$ ; $\arg a = \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$
- $|b| = 2$ ; $\cos\theta = \frac{1}{2}$ ; $\sin\theta = \frac{-\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \theta = \frac{-\pi}{3}$ ; $\arg a = \frac{-\pi}{3}\ [2\pi]$

  $|c| = \frac{|a|}{|b|} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ; $\arg c = \arg a - \arg b = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{12}\ [2\pi]$
- $|d| = |a||b| = 2\sqrt{2}$ ; $\arg d = \arg a + \arg b = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{12}\ [2\pi]$

**Exercice 4 :**

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations : a) $z^2 = -9$ ; b) $z^2 = -\sqrt{5}$ ; c) $z^2 = 3$

**Solution :**

a) $z^2 = -9 \Rightarrow z^2 = (3i)^2 \Rightarrow z_1 = 3i$ ; $z_2 = -3i$ ;

b) $z^2 = -\sqrt{5} \Rightarrow z^2 = (i\sqrt[4]{5})^2 \Rightarrow z_1 = i\sqrt[4]{5}$ ; $z_2 = -i\sqrt[4]{5}$ ;

c) $z^2 = 3 \Rightarrow z^2 = (\sqrt{3})^2 \Rightarrow z_1 = \sqrt{3}$ ; $z_2 = -\sqrt{3}$ .

**Exercice 5 :**

Résoudre dans $\mathbb{C}$ : $z^2 = -5 + 12i$

**Solution :**

Soit $z = x + iy \Rightarrow z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy \Rightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -5 \\ 2xy = 12 \\ x^2 + y^2 = 13 \end{cases} \Rightarrow x = \pm 2$ ; $y = \pm 3 \Rightarrow z_1 = 2 + 3i$ ; $z_2 = -2 - 3i$

**Exercice 6 :**

**1)** Calculer $i^2$, $i^3$ et $i^4$

**2)** En déduire la valeur de $i^{2018}$ et de $i^{2023}$, puis les entiers naturels $n$ tels que $i^n$ est imaginaire pur

**3)** Déterminer les entiers naturels $n$ tels que $(1+i)^n$ soit un réel négatif.

**Solution :**

1. On calcule successivement $i^2 = -1$, $i^3 = i^2 \times i = (-1) \times i = -i$ ; $i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1$.
2. La division euclidienne de 2018 par 4 fournit 2018 = 4×504+2.
Ainsi, $i^{2018} = i^{4\times504+2} = (i^4)^{504} \times i^2 = (1)^{504} \times (-1) = -1$.
La division euclidienne de 2023 par 4 fournit 2023= 4×505+3.
Ainsi, $i^{2023} = i^{4\times505+3} = (i^4)^{505} \times i^3 = (1)^{505} \times (-i) = -i$.
Notons $q$ et $r$ le quotient et le reste de la division de $n$ par 4. On a donc $n = 4q + r$ ; avec $0 \leq r \leq 3$.
  - Si $r = 0$, c'est-à-dire si $n = 4q$, $i^n = i^{4\times q} = (i^4)^q = (1)^q = 1$.
  - Si $r = 1$, c'est-à-dire si $n = 4q + 1$, $i^n = i^{4\times q+1} = (i)^{4q} \times i^1 = (i^4)^q \times i = (1)^q \times i = i$.
  - Si $r = 2$, c'est-à-dire si $n = 4q + 2$, $i^n = i^{4\times q+2} = (i)^{4q} \times i^2 = (i^4)^q \times (-1) = (1)^q \times (-1) = -1$.
  - Si $r = 3$, c'est-à-dire si $n = 4q + 3$, $i^n = i^{4\times q+3} = (i)^{4q} \times i^3 = (i^4)^q \times (-i) = (1)^q \times (-i) = -i$.

Les entiers naturels $n$ tels que $i^n$ est imaginaire pur sont donc de la forme $n = 4q + 1$ ou $n = 4q + 3$.
3. Déterminons la forme trigonométrique de $1 + i$ :
Le module de $1 + i$ est $\sqrt{2}$. Un argument $\alpha$ de $1 + i$ vérifie $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ; donc : $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

Ainsi $1+i=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(1+i)^n=\left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^n=\left(\sqrt{2}\right)^n \times \left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^n=\left(\sqrt{2}\right)^n \times e^{i\frac{n\pi}{4}}$

$(1+i)^n$ sera un réel négatif si et seulement si : $\frac{n\pi}{4}=\pi+2k\pi\,;k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow n=4(2k+1)\,;k\in\mathbb{Z}$.

Les entiers naturels $n$ tels que $(1+i)^n$ soit un réel négatif sont donc de la forme $n=4(2k+1)\,;k\in\mathbb{Z}$.

## Exercice7 :

On considère le polynôme $P(z)$ suivant: $P(z)=z^3+9iz^2+2(6i-11)z-3(4i-12)$

1) Démontrer que l'équation $P(z)=0$ admet une solution réelle $z_1$
2) Déterminer un polynôme $Q(z)$ tel que $P(z)=Q(z)(z-z_1)$.
3) Démontrer que l'équation $Q(z)=0$ admet une solution imaginaire pure $z_2$
4) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z)=0$.
5) On note $z_3$ la $3^{\text{ième}}$ solution de l'équation $P(z)=0$.

Démontrer que les points du plan complexe A, B et C d'affixes respectives $z_1$ , $z_2$ et $z_3$ sont alignés.

### Solution

1) En réécrivant autrement le polynôme P, à savoir :

$$P(z)=z^3-22z-36+i(9z^2+12z-12)=z^3-22z-36+3i(3z^2+4z-4),$$

On s'aperçoit que si $z_1$ est une racine réelle de $P$, alors on doit avoir nécessairement :
$z_1{}^3-22z_1-36=0$ et $3z_1{}^2+4z_1-4=0$. Cherchons donc les racines réelles de l'équation :
$3z_1{}^2+4z_1-4=0$, en calculant son discriminant : $\Delta=4^2-4\times3\times(-4)=16+48=64=8^2$, d'où l'existence de deux racines réelles : $\frac{-4+8}{6}=\frac{2}{3}$ et $\frac{-4-8}{6}=-2$.

Sur ces deux racines, seule –2 est racine de l'équation $z_1{}^3-22z_1-36=0$. Ainsi la seule racine réelle de $P$ est $z_1=-2$.

2) Il existe donc un polynôme $Q(z)$ tel que $P(z)=Q(z)(z+2)\,;deg(Q)=deg(P)-1=2$.

Donc de la forme $Q(z)=az^2+bz+c$.

Pour trouver Q, effectuons la division euclidienne du polynôme $P(z)$ par $z+2$(puisque l'égalité ci-dessus entraîne $Q(z)=\frac{P(z)}{z+2}$). On obtient :

$$\begin{array}{l|l}
z^3+9iz^2+2(6i-11)z-3(4i+12) & z+2 \\
\hline
z^3+2z^2 & z^2+(9i-2)z-6i-18 \\
\quad(9i-2)z^2+2(6i-11)z-3(4i+12) & \\
\quad(9i-2)z^2+2(9i-2)z & \\
\qquad\qquad(-6i-18)z-3(4i+12) & \\
\qquad\qquad(-6i-18)z-12i-36 & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

Le polynôme Q est donc :

$Q(z)=(z)=z^2+(9i-2)z-6(i+3)$

3) On calcule le discriminant du polynôme Q :

$\Delta=(9i-2)^2-4\times1\times(-6(i+3))=-81-36i+4+24i+72=-5-12i$.

L'astuce est de remarquer que $-5-12i=(2-3i)^2$, ce qui permet de calculer les deux racines complexes de Q:

L'une vaut $\frac{-(9i-2)-(2-3i)}{2}=\frac{-6i}{2}=-3i$ et l'autre vaut $\frac{-(9i-2)+(2-3i)}{2}=\frac{4-12i}{2}=2-6i$.

L'équation Q($z$)=0 admet donc une solution imaginaire pure: $z_2=-3i$

4) L'autre solution de l'équation $Q(z)=0$ ayant été calculée ci-dessus, et par application de la règle du produit nul, $P(z)=0 \Leftrightarrow (z+2)Q(z)=0 \Leftrightarrow (z+2)$ ou $Q(z)=0 \Rightarrow S=\{-2\,;-3i\,;\,2-6i\}$

5) L'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ vaut $z_2-z_1=-3i+2$, celle de $\overrightarrow{AC}$ vaut $z_3-z_1=-6i+4$

Puisque : $z_3-z_1=2(z_2-z_1)$, on en déduit que $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AB}$ ; donc les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires. D'où : les points A, B et C sont alignés.

## B. Exercices divers :

**1.** Ecrire sous forme x + iy (avec x et y des réels) :

$$a = \frac{1}{(1+2i)(3-i)}\ ;\ b = \frac{1+2i}{(1-2i)};\ c = \frac{5+i\sqrt{2}}{1+i}$$

**2.** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 4\bar{\bar{z}} - 5 = 0$

**3.** Soit A le point d'affixe 1 – 2i, soient M et M' les points du plan d'affixes z et z'.
Traduire en termes de modules chacune des situations suivantes :

- Le triangle OMM' est isocèle en O
- Le triangle AMM' est isocèle en A
- Le triangle AMM' est isocèle en M
- Le triangle AMM' est rectangle en M

**4.** Déterminer et construire les ensembles E des points M dont l'affixe z vérifie les conditions suivantes :
1) $|z+1+2i| = |z-4|$ ; 2) $|z-3i| = 2$ ;
3) $|\bar{z} - 2 + i| = 1.$

**5.** Déterminer et construire les ensembles E des points M dont l'affixe z vérifie les conditions proposées.

1) $\arg z = -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ ; 2) $\arg z = \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$

3) $\arg z = \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$

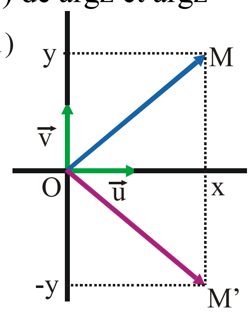
**6.** Déterminer et construire les ensembles E des points M dont l'affixe z vérifie les conditions :

1) $z = 2e^{i\theta}$ ; $\theta \in [0\ ;\ 2\pi[$ ; 2) $z = r e^{i\frac{\pi}{2}}$ ; $r \in [0;+\infty[$ ;

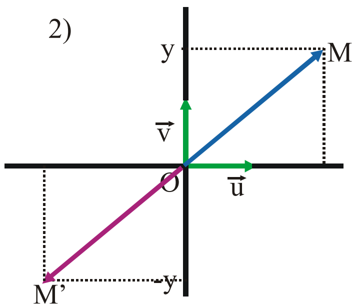
3) $z = k e^{i\frac{\pi}{4}}$ ; $k \in \mathbb{R}$.

**7.** Soient M et M'deux points d'affixes non nulles notées z et z'.
Dans chacune des configurations suivantes que peut-on dire :
a) de z et z'  b) de $|z|$ et $|z'|$
c) de argz et argz'

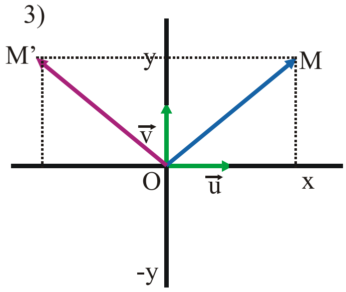
1)



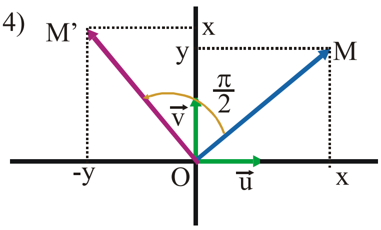

2)



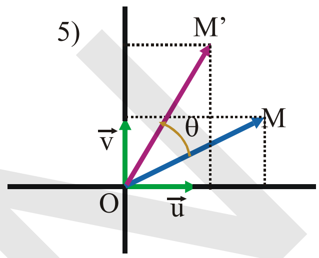

3)




4)




5)




**8.** Soit z un nombre complexe, on note $x+iy$ sa forme algébrique et **M** son point image.
A chaque propriété de la liste 1, associe celle de la liste 2 qui caractérise le même ensemble des points.

Liste 1

1) $\begin{cases} y = x \\ x < 0 \end{cases}$ ; 2) $\begin{cases} y = -x \\ x > 0 \end{cases}$

3) $\begin{cases} y = \sqrt{3}x \\ x \neq 0 \end{cases}$ ; 4) $x^2 + y^2 = 1$

5) $y = 0$ ; 6) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ y \geq 0 \end{cases}$

Liste 2

a) $z = \bar{z}$ ; b) $\arg(z) = \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$

c) $|z| = 1$ ; d) $\arg(z) = \frac{5\pi}{4}\ [2\pi]$

e) $\begin{cases} |z| = 2 \\ \operatorname{Im} z \geq 0 \end{cases}$ ; f) $\arg(z) = \frac{-\pi}{4}\ [2\pi]$

**9.** Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal ( O ; $\vec{u}$ ; $\vec{v}$ ).

Déterminer et représenter sur trois graphiques différents :

1) l'ensemble $\mathscr{C}$ des points M d'affixes z telles que : z ; $\frac{1}{z}$ et 1 – z aient même module.

2) l'ensemble $\mathscr{F}$ des points M d'affixes z telles que : $z^2$ soit imaginaire pur.

3) l'ensemble $\mathscr{G}$ des points M d'affixes z telles que : $z+\bar{z}+|z|^2=0.$

**10** Répondre par Vrai ou Faux

1) Le complexe $\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{4}$ a pour module **1**.

2) $(1-\sqrt{2})e^{i\frac{\pi}{3}}$ a pour argument $\frac{\pi}{3}$.

3) Un argument de $2+3i$ est l'opposé d'un argument de **2-3i**.

4) $\frac{\pi}{2}-3$ est un argument du complexe $\sin 3+i\cos 3$.

5) $5-i$ et $\frac{5-i}{3\pi+4\sqrt{2}-1}$ ont même argument.

**11** Donner la forme algébrique des complexes suivants :1) $e^{i\pi}$ ; 2) $e^{i\frac{\pi}{2}}$ ; 3) $2e^{i\frac{\pi}{3}}$ ; 4) $e^{-2i\pi}$

**12** Donner une forme trigonométrique des complexes suivants :

1) -3 + 3i ; 2) $\sqrt{2}+i\sqrt{6}$; 3) $-2(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})$

**13** Donner les formes trigonométriques et exponentielles des complexes suivants :

$\sqrt{3}+i$ ; $\sqrt{3}-i$ ; $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

2) le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal (O ; $\vec{u}$ ; $\vec{v}$). Placer les points A ; B ; C d'affixes respectives :

$\sqrt{3}+i$ ; $\sqrt{3}-i$ ; $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

On expliquera rapidement les trois constructions.

**14** Soit le polynôme :
$p(z)=z^4-6z^3-18z-9$

1) Déterminer les réels a, b et c tels que :
$P(z)=(z^2+3)(az^2+bz+c)$

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z)=0$.

3) Placer dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal ( O ; $\vec{u}$ ; $\vec{v}$ ) les points **A ; B ; C** et **D** d'affixes $i\sqrt{3}$ ; $-i\sqrt{3}$ ; $3+2\sqrt{3}$ ; $3-2\sqrt{3}$.

Montrer que ces quatre points appartiennent à un même cercle.

4) On note **E** le symétrique de **D** par rapport à **O**, Déterminer la nature du triangle **BEC**.

**15** Donner un argument des complexes suivants :

1) $(\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{\pi}{7})(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$ ;

2) $(\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{\pi}{7})(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4})$

3) $-2(\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{\pi}{7})(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$ ;

4) $e^{i\frac{\pi}{3}}\times e^{-i\frac{\pi}{2}}$; 5) $e^{i\pi}+e^{i\frac{\pi}{3}}$

**16** Soient A et B les points d'affixes $3+2i$ et $2+i$. Sans utiliser ni règle ni compas construire sur une feuille un point C tel que : $(\vec{u}\ ;\ \overrightarrow{OC})=(\vec{u}\ ;\ \overrightarrow{OA})+(\vec{u}\ ;\ \overrightarrow{OB})\ (2\pi)$.

**17** Soient $z_1$ , $z_2$ et z les complexes définis par : $z_1=1+i\sqrt{3}$ ; $z_2 = 1 - i$ ; $Z=\frac{z_1}{z_2}$

1. Déterminer la forme algébrique de **Z**.
2. **Déterminer le module et argument de $z_1$ , $z_2$ et z.**
3. Déduire des questions précédentes :

$\cos\frac{7\pi}{12}=\frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ ; $\sin\frac{7\pi}{12}=\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$.

**18** Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations :

1) $z^2+4z+5=0$ ; 2) $4z^2-2z+1=0$

3) $z^2+z+1=0$ ; 4) $4z^2-z+1=0$

5) $2z^2-2z+1=0$ ; 6) $z^2-2z+2=0$

7) $2z^2-2z\cos\alpha+1=0$ $\alpha\in]0\ ;\pi[$

CHAPITRE 2

# Limite, continuité et dérivation

## Faire savoir

## L'essentiel du chapitre

### I. Opérations ; formes indéterminées :

Nous rappelons ci-dessous les théorèmes algébriques qui nous renseignent – dans certains cas – sur la limite d'une somme, d'un produit ou d'un quotient.

#### 1. Somme :

Les fonctions f et g ayant une limite (finie ou infinie), la fonction $f+g$ admet une limite dans chacun des cas décrits dans le tableau ci-contre.

| lim *f* / lim *g* | $\ell$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
|---|---|---|---|
| $\ell'$ | $\ell+\ell'$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
| $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | ? |
| $-\infty$ | $-\infty$ | ? | $-\infty$ |

#### 2. Produit :

Les fonctions $f$ et $g$ ayant une limite (finie ou infinie), la fonction $f\times g$ admet une limite dans chacun des cas décrits dans le tableau ci-contre.

***Remarque :*** $\infty\times 0 = ?$

| lim *f* / lim *g* | $\ell \neq 0$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
|---|---|---|---|
| $\ell' \neq 0$ | $\ell\,.\,\ell'$ | $\pm\infty$ | $\pm\infty$ |
| $+\infty$ | $\pm\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
| $-\infty$ | $\pm\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ |

#### 3. Quotient :

Les fonctions $f$ et $g$ ayant une limite (finie ou infinie), la fonction $\frac{f}{g}$ admet une limite dans chacun des cas décrits dans le tableau ci-contre.

| lim *f* / lim *g* | $\ell \neq 0$ | 0 | $+\infty$ | $-\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | $\pm\infty$ | ? | $\pm\infty$ | $\pm\infty$ |
| $\ell' \neq 0$ | $\frac{l}{l'}$ | 0 | $\pm\infty$ | $\pm\infty$ |
| $+\infty$ | 0 | 0 | ? | ? |
| $-\infty$ | 0 | 0 | ? | ? |

### II. Enoncés usuels sur les limites :

#### 1. Comparaison :

Nous admettrons les résultats suivants qui en dehors du dernier permettent de déterminer le comportement lorsque x tend vers a (a fini ou infini) d'une fonction $f$ par comparaison à d'autres fonctions $U$, $V$ dont le comportement est connu. Quant au dernier il permet le passage à la limite dans une inégalité.

| **Hypothèse I**<br>Inégalité pour x assez proche de a | **Hypothèse II**<br>Lorsque x tend vers a | **Conclusion** |
|---|---|---|
| $U(x) \leq f(x)$ | $U$ tend vers $+\infty$ | $f$ tend vers $+\infty$ |
| $f(x) \leq U(x)$ | $U$ tend vers $-\infty$ | $f$ tend vers $-\infty$ |
| $\lvert f(x) - \ell \rvert \leq U(x)$ | $U$ tend vers 0 | $f$ tend vers $\ell$ |
| $U(x) \leq f(x) \leq V(x)$ | $U$ et $V$ tendent vers la même limite $\ell$ | $f$ tend vers $\ell$ |
| $f(x) \leq g(x)$ | $f(x)$ et $g(x)$ admettent des limites en a | $\lim\limits_{x\to a} f(x) \leq \lim\limits_{x\to a} g(x)$ |

### 2. Limite d'une fonction composée :

Nous admettons le résultat suivant :

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ et $\lim\limits_{y\to b} g(y) = \ell$, alors, $\lim\limits_{x\to a} (g \circ f)(x) = \ell$ ; a , b et $\ell$ finis ou infinis.

### 3. Limite à gauche, Limite à droite :

On dit que $f$ admet $\ell$ (fini ou infini) comme limite à gauche (à droite) en a si la restriction de $f$ à $]-\infty\ ;\ a]$ (à $[a\ ;\ +\infty[$ ) admet $\ell$ comme limite en a, on note alors,

$\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\le a}} f(x) = \ell$ ou $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \ell$ ; ( $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\ge a}} f(x) = \ell$ ou $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \ell$ ).

## III. Langage de continuité :

### 1. Généralités :

Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle I contenant **a**.

- On dit que $f$ est continue en **a**, si $f$ admet une limite finie en **a** égale à $\mathbf{f(a)}$.
- On dit que $f$ est continue sur I, si $f$ est continue sur tout point de I.

### 2. Prolongement par continuité :

Soit **f** une fonction définie sur un intervalle I contenant a, sauf en a et vérifiant $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ ( l réel).

Alors la fonction $\tilde{\mathbf{f}}\begin{cases} \mathbf{x \mapsto f(x)\ ;si\ x \neq a} \\ \mathbf{a \mapsto l} \end{cases}$ qui est définie et continue en **a** est appelée le prolongement continu ( ou prolongement par continuité ) de **f** en a.

### 3. Fonction continue sur un intervalle :

#### a. Image d'un intervalle :

- l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.
- L'image d'un intervalle fermé borné $[\mathbf{a;b}]$ par une fonction continue est un intervalle fermé borné $[\mathbf{m;M}]$

#### b. Autres résultats :

**Théorème 1 :** ***Théorème des valeurs intermédiaires :***

Soit f une fonction continue sur un intervalle I a et b sont deux réels de I tels que $a< b$

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$ ; l'équation $f(x)=k$ possède au moins une solution dans l'intervalle $[\mathbf{a;b}]$. En particulier si $f(a).f(b)< 0$ alors l'équation $f(x)=0$ admet au moins une solution dans $]a\ \ b[$

**Théorème 2 :**

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I ; a et b sont deux réels de I tels que $a< b$.
Pour tout réel k compris entre f(a ) et f(b) l'équation f(x)=k admet une unique solution dans l'intervalle $[\mathbf{a;b}]$

**Théorème 3 :**

Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle I. Si $f$ ne s'annule en aucun point de I alors elle un signe constant sur I.

## IV. Dérivation et fonction dérivée :

### 1. Dérivabilité d'une fonction en un réel :

Soit $f$ est une fonction définie sur un intervalle I de centre $x_0$.

**Définition :**

Dire que le réel A est le nombre dérivé de **f** en $x_0$ signifie que l'une ou l'autre des deux conditions suivantes est réalisée :

- La fonction $h : \mapsto \dfrac{\mathbf{f(x_0+h)-f(x_0)}}{\mathbf{h}}$ a pour limite **A** en $x_0$.
- Il existe une fonction $\varepsilon$ de limite 0 en 0 telle que : pour tout h suffisamment proche de 0 ;

$f(a+h) = f(a)\ +Ah\ + h\varepsilon(h)$.

$f$ est dérivable en $x_0$ si et seulement si f admet un nombre dérivé en $x_0$.

Ce nombre dérivé est noté $f'(x_0)$ et l'on a alors: $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$

### a. Dérivabilité et représentation graphique :

$\mathcal{C}_f$ est la représentation graphique de $f$, dans le plan rapporté à un repère.

Si $f$ est dérivable en $x_0$, alors $\mathcal{C}_f$ admet une tangente au point d'abscisse $x_0$, et le cœfficient directeur de cette tangente est $f'(x_0)$.

Si le rapport $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ a une limite infinie quand h tend vers 0, la fonction $f$ n'est pas dérivable en $x_0$, mais $\mathcal{C}_f$ admet au point d'abscisse $x_0$ une tangente parallèle à l'axe **(yy')** (verticale).

### b. Dérivée à droite, Dérivée à gauche :

Onappelle dérivée à droite en $x_0$ le nombre : $\ell=\lim\limits_{x\to x_0^+}\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right]$ s'il existe.

La demi-droite $\begin{cases} y=l(x-x_0)+f(x_0) \\ x\geq x_0 \end{cases}$ est la demi-tangente à droite en M($x_0$ ; $f(x_0)$) à $\mathcal{C}_f$.

Les notions de nombre dérivé à gauche et de demi-tangente à gauche se définissent de manière analogue.

Si $\lim\limits_{x\to x_0^+}\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right.\neq\lim\limits_{x\to x_0^-}\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right.$, alors $f$ n'est pas dérivable en $x_0$.

## 2. Dérivabilité sur un intervalle – Fonction dérivée :

**Définition 1**

Une fonction $f$ est dérivable sur un intervalle I si et seulement si $f$ est dérivable en tout réel de I.

**Définition 2**

$f$ est une fonction dérivable sur un intervalle I. la fonction dérivée de $f$ sur I, notée $f'$, est la fonction définie sur I, qui, à tout réel x de I associe le nombre dérivé de $f$ en x.

### a. Dérivées successives :

Soit une fonction $f$ dérivable sur I, si la fonction $f'$ est dérivable sur I, on note $f''$ sa fonction dérivée et on l'appelle la dérivée seconde de f sur I.

On définit de même la dérivée troisième, notée $f'''$, la dérivée quatrième, notée $f^{(4)}$ ; de façon générale, on note la dérivée n-ième $f^{(n)}$.

| Fonctions | Dérivées successives | |
|---|---|---|
| f(x)=$x^m$ m$>$ 0 | Si m> $n$ $f^{(n)}$(x)=$\frac{m!}{(m-n)!}x^{m-n}$ | Si m$<$ n $f^{(n)}$(x)=0 |
| f(x)=$x^n$ | $f^{(n)}$(x)=n ! | |
| f(x)=$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$ | $f^{(n)}$ (x)=$a_n$.n ! | |
| f(x)=$\frac{1}{x}$ (avec x$\neq$0 ) | $f^{(n)}(x)=(-1)^n\frac{n!}{x^{n+1}}$ | |
| f(x)=sinx | $f^{(n)}$(x)= sin(x+$\frac{n\pi}{2}$) | |
| f(x)=cosx | $f^{(n)}$(x)= cos(x+$\frac{n\pi}{2}$) | |

### b. Point d'inflexion :

**Définition :**

Soit f une fonction deux fois dérivable sur $]a-h\,;\,a+h[$ $h>0$ ;$C_f$ sa représentation graphique dans un repère orthonormé.Si la dérivée seconde $f''$ s'annule en a en changeant de signe alors le point I(a ; f(a) ) est un point d'inflexion à $C_f$.

**Exemple 1 :**

Soit f la fonction définie sur par f(x) = $x^4 - 6x^2$ +1 et $C_f$ sa courbe dans un repère orthonormé.

Montrer que $C_f$ admet deux points d'inflexions que l'on précisera.

**Réponse :** f est dérivables deux fois sur $\mathbb{R}$

$f'$ (x)=4$x^3$-12x et $f''$(x)=12$x^2$-12 et$f''$ s'annule en 1et-1 en changeant de signe donc $C_f$ admet deux points d'inflexions : I(1 ; -4) et J(-1 ; -4)

**Remarque 1 :**

- Si $f'$ s'annule en a en gardant le même signe alors le point d'abscisse a est un point d'inflexion.
- Si la courbe traverse sa tangente au point d'abscisse a

(la tangente change sa position relative en a ) alors le point I(a : f(a) ) est un point d'inflexion

- Si la courbe admet une tangente verticale au point d'abscisse a alors le point I(a : f(a) ) est un point d'inflexion

## 3.Dérivabilité et continuité :

Soit une fonction ***f*** définie sur un intervalle I. Si ***f*** est dérivable sur I, alors ***f*** est continue sur I.

## 4. Dérivabilité et monotonie :

**Théorème 4 :**

Soit une fonction ***f*** définie sur un intervalle I :

- ***f*** est croissante sur I si, et seulement si, ***f***'≥ 0 sur I ;
- ***f*** est décroissante sur I si, et seulement si, ***f***'≤ 0 sur I ;
- ***f*** est constante sur I si, et seulement si, ***f***'= 0 sur I ;

## 5. Dérivée d'une fonction composée :

**Théorème 5 :**

Soit A ; B ; C trois intervalles, ***f*** une fonction dérivable de A vers B ; ***g*** une fonction dérivable de B vers C, alors ***g***o***f*** est une fonction dérivable de A vers C et : $(gof)' = (g'of) \times f'$

C'est-à-dire ∀ x∈ A : $(gof)'(x) = g'(f(x)) \times f'(x)$.

**Exemple 1 :**

Soient la fonction ***h*** définie sur $\mathbb{R}$ par ***h***(x)= $\sqrt{x^2+x+1}$ ; ***h*** = ***g***o***f*** / ***f***(x) = $x^2$ + x + 1 ; ***g***(x) = $\sqrt{x}$.

$$h'(x) = g'[f(x)] \times f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{f(x)}} \times f'(x) = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}$$

## 6. Dérivée de la bijection réciproque :

**Théoreme 6 :**

Toute fonction f continue (éventuellement dérivable) et strictement monotone sur un intervalle I est une bijection de I sur J = f(I) donc elle admet une bijection réciproque notée $f^{-1}$.

- Pour tout y de J l'équation f(x)=y admet une unique solution x appartient à I
- f(x) = y ⇔ $f^{-1}$(y)=x.
- ∀ $x$ ∈ I $f^{-1}$(f(x))=x. et ∀ $y$ ∈ J $f$ ($f^{-1}$(y))=y.

### a.Détermination de ($f^{-1}$)' :

**Théorème 7 :**

Soit ***f*** une fonction bijective d'un intervalle **A** dans un intervalle **B**, dérivable en $x_0$ et telle que : ***f***'($x_0$) ≠ 0. Alors la bijection réciproque $f^{-1}$ est dérivable en $y_0$=***f***($x_0$)et de plus on a :

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(y_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

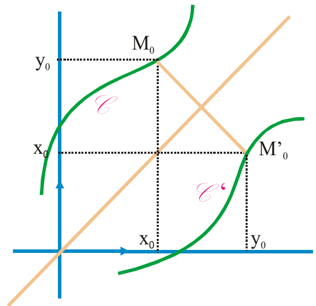
**Exemple 2 :**

Soit ***f*** : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ; $x \mapsto x^5 + x + 1$. Calculer ($f^{-1}$)'(1) et ($f^{-1}$)'(3).

***f***(0) = 1 et ***f***(1) = 3 ⇔ $f^{-1}$(1) = 0 et $f^{-1}$(3) = 1. ***f***'(x) = 5$x^4$ + 1 ⇔***f***'(0) = 1 et ***f***'(1) = 6.

$$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'[f^{-1}(1)]} = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{1} = 1 \quad ; \quad (f^{-1})'(3) = \frac{1}{f'[f^{-1}(3)]} = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{6}.$$

On peut ***remarquer*** qu'il n'est pas nécessaire de connaître explicitement $f^{-1}$ pour calculer la valeur du nombre dérivée $(f^{-1})'(x_0)$.




## b. Interprétation graphique :

Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative d'une bijection $f$ et $\mathscr{C}'$ la courbe représentative de $f^{-1}$, dans un repère orthonormé.
La courbe $\mathscr{C}'$ est la symétrique de $\mathscr{C}$ par rapport à la première bissectrice (la droite y = x).

## 7. Formulaire :

| E est l'ensemble de dérivabilité de la fonction **f**, **k** un réel, n un entier | | |
|---|---|---|
| **f** | **f '** | E |
| k ( $k \in \mathbb{R}$ ) | 0 | $\mathbb{R}$ |
| x | 1 | $\mathbb{R}$ |
| $\mathbf{\frac{1}{x}}$ | $\mathbf{\frac{-1}{x^2}}$ | $\mathbb{R}^*$ |
| $x^n$ ( $n \geq 2$ ) | $nx^{n-1}$ | $\mathbb{R}$ |
| $\sqrt{x}$ | $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ | $\mathbb{R}_+^*$ |
| sinx | cosx | $\mathbb{R}$ |
| cosx | -sinx | $\mathbb{R}$ |
| $x^k$ ( $k \notin \mathbb{Z}$ ) | $kx^{k-1}$ | $\mathbb{R}_+^*$ |

| U et V sont deux fonctions dérivables sur un intervalle **I** ; **k** est un réel, **n** un entier. | | |
|---|---|---|
| **f** | **f '** | Conditions |
| U + V | U' + V' | |
| kU | kU' | |
| UV | U'V + UV' | |
| $\mathbf{\frac{1}{V}}$ | $\mathbf{\frac{-V'}{V^2}}$ | V ne s'annule pas sur I |
| $\mathbf{\frac{U}{V}}$ | $\mathbf{\frac{U'V-UV'}{V^2}}$ | V ne s'annule pas sur I |
| $U^n$ | $nU'U^{n-1}$ | $n \geq 2$ |
| $U^n$ | $nU'U^{n-1}$ | $n \geq 1$ et U ne s'annule pas sur I |
| $\sqrt{U}$ | $\mathbf{\frac{U'}{2\sqrt{U}}}$ | U positive et ne s'annule pas sur I |
| $U^k$ | $kU'U^{k-1}$ | $k \notin \mathbb{Z}$, U positive et ne s'annule pas sur I. |

## 8. Inégalité des accroissements finis :

**Théorème 8 :**

Soit $f$ une fonction dérivable sur un intervalle I, a et b deux réels de I tels que : $a \leq b$. S'il existe deux réels m et M tels que : $\forall x \in I$ ; $m \leq f'(x) \leq M$, alors $m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$.

**Théorème 9 :**

Soit $f$ une fonction dérivable sur un intervalle I, a et b deux réels de I.
S'il existe un réel M tels que : $\forall x \in I$, $|f'(x)| \leq M$, alors $|f(b) - f(a)| \leq M\,|b-a|$ .

**Exemple 3 :**

$f(x) = \sin x$, en appliquant l'inégalité des accroissements finis à la fonction f sur l'intervalle $[0 ; \frac{\pi}{6}]$ ;

Montrer que : $\frac{\sqrt{3}}{2}x \leq \sin x \leq x$.

$f'(x) = \cos x$ ; $\forall x \in [0 ; \frac{\pi}{6}]$ ; $\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \cos x \leq 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \leq f'(x) \leq 1$ .

## Savoir-faire

### A. Applications :

**Exercice 1 :**

1) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{1}{\cos x+2}$ . Montrer que f est bornée.

2) En déduire $\lim_{+\infty}\left(\dfrac{x}{\cos x+2}\right)$ puis $\lim_{+\infty}\left(\dfrac{x+\sin x}{\cos x+2}\right)$

**Solution :**

1) On a : $-1 \leq \cos x \leq 1$, donc $1 \leq 2+\cos x \leq 3$, ce qui donne $\dfrac{1}{3} \leq \dfrac{1}{2+\cos x} \leq 1$. D'où $f$ est bornée.

**2)** Pour $x>0$, on a : $\dfrac{x}{3} \leq \dfrac{x}{2+\cos x} \leq x$; on passe à la limite en $+\infty$ :

$$\lim_{+\infty}\left(\frac{x}{3}\right) \leq \lim_{+\infty}\left(\frac{x}{2+\cos x}\right) \leq \lim_{+\infty} x \Rightarrow \lim_{+\infty}\left(\frac{x}{2+\cos x}\right)=+\infty .$$

D'autre part, on a : $-1 \leq \sin x \leq 1$, donc $x-1 \leq x+\sin x \leq x+1$ ; or $(2+\cos x)$ est positif ce qui entraine que $\dfrac{x-1}{2+\cos x} \leq \dfrac{x+\sin x}{2+\cos x} \leq \dfrac{x+1}{2+\cos x}$. On passe en suite à la limite en $+\infty$:

$$\lim_{+\infty}\left(\frac{x-1}{2+\cos x}\right) \leq \lim_{+\infty}\left(\frac{x+\sin x}{2+\cos x}\right) \leq \lim_{+\infty}\left(\frac{x+1}{2+\cos x}\right) \Rightarrow \lim_{+\infty}\left(\frac{x-\sin x}{2+\cos x}\right)=+\infty.$$

**Exercice 2 :**

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x)=\dfrac{\sin 2x+1-\cos x}{x}$.

Montrer que $f$ ***est prolongeable par continuité*** en 0 puis donner son prolongement g.

**Solution :**

***La fonction f n'est pas définie en 0, calculons sa limite en ce point***

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x+1-\cos x}{x}\right)=2\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)+\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos x}{x}\right).$$

En posant $X=2x$, $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 2x}{2x}\right)=\lim_{X\to 0}\left(\dfrac{\sin X}{X}\right)=1$ ; d'où $\lim_{x\to 0} f(x)=2\times 1+0=2$.

La fonction $f$ ***est prolongeable par continuité*** en 0 et son prolongement g est :

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 2x+1-\cos x}{x} ; si\ x\neq 0\\ g(0)=2\end{cases}$$

**Exercice 3 :**

Soit $f$ une fonction continue et définie sur l'intervalle [0 ; 1] et à valeurs dans l'intervalle [0 ; 1].
Démontrer que $f$ admet (au moins) un point fixe dans [0 ; 1].

**Solution :**

Considérons la fonction g définie par : $g(x)=f(x)-x$. L'équation $f(x)=x$ est équivalente à $g(x)=0$.
Cette fonction g est continue sur [0 ; 1] (différence de fonctions continues). De plus $g(0)=f(0)\geq 0$ et $g(1)=f(1)-1\leq 0$
Le réel $\lambda=0$ est bien une valeur intermédiaire entre g(0) et g(1), donc d'après le théorème du même nom, il existe un réel $c\in[0\ ;1]$ tel que $g(c)=0$, c'est-à-dire : $f(c)=c$.
Donc $f$ admet (au moins) un point fixe dans [0 ; 1].

**Exercice 4 :**

Montrer que la fonction définie sur $[1\ ;+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x(x-1)^3}$ est dérivable en 1.

**Solution :**

Pour h > 0, $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=\dfrac{\sqrt{(1+h)h^3}-0}{h}=\dfrac{h\sqrt{(1+h)h}}{h}=\sqrt{(1+h)h}$ ;

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\sqrt{(1+h)h}=0$ ; d'où la fonction $f$ est dérivable en 1 et $f'(1) = 0$.

## Exercice 5 :

$f$ est la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{x^2+3}{x+1}$ ; $x_0 = 2$.

Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de $f$ au point d'abscisses $x_0$.

**Solution :**

- $\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\dfrac{\dfrac{x^2+3}{x+1}-\dfrac{7}{3}}{x-2}=\dfrac{3x^2+9-7x-7}{3(x+1)(x-2)}=\dfrac{3x^2-7x+2}{3(x+1)(x-2)}=\dfrac{(3x-1)(x-2)}{3(x+1)(x-2)}=\dfrac{(3x-1)}{3(x+1)};(x\neq 2).$

  $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(3x-1)}{3(x+1)}=\dfrac{5}{9};\quad f(2)=\dfrac{7}{3}.$

- Une équation de la tangente est : $y = \dfrac{5}{9}(x-2)+\dfrac{7}{3} \Leftrightarrow y = \dfrac{5}{9}x+\dfrac{11}{9}$.

## Exercice 6 :

Soit $f$ la fonction définie par : $f(x) = |x^2 - 1|$.

Etudier la dérivabilité de $f$ en 1. Interpréter graphiquement le résultat.

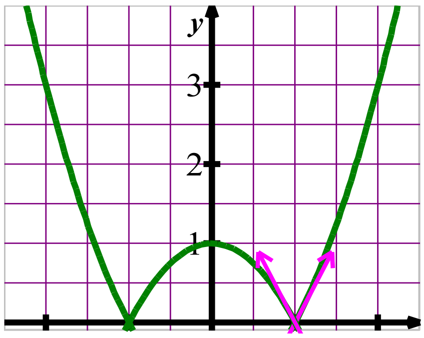
**Solution :**

- La fonction peut-être définie comme suit $\begin{cases} x\in\left]-\infty;-1\right]\cup\left[1\,;+\infty\right[ & ;\ f(x)=x^2-1 \\ x\in[-1\,;1] & ;\ f(x)=1-x^2 \end{cases}$ ; $f(1) = 0$

- $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}(x+1)=2\,;\ \lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1-x^2}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}-(1+x)=-2.$

  Puisque : $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}\neq\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$ ; $f$ n'est pas dérivable en 1.

- $f$ est dérivable à droite en **1** et **f'$_d$ (1) =2** ;
  $f$ est dérivable à gauche en **1** et **f'$_g$ (1) =−2**.
- La représentation graphique de **f** admet au point d'abscisse **1**,deux demi tangentes d'équations : $\begin{cases} y = 2(x-1) \text{ à droite} \\ y = -2(x-1) \text{ à gauche} \end{cases}$




Le point A(1 ; 0) est un point anguleux.

## Exercice 7 :

Déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

$f(x) = \sqrt{x^4-x^2+1}$ ; b) $f(x) = \sin(x^3)$ ; c) $f(x) = \dfrac{2x+1}{x+1}$.

**Solution :**

| **Fonction** | **Dérivée** |
|---|---|
| $f(x)=\sqrt{x^4-x^2+1}$ | $\dfrac{(x^4-x^2+1)'}{2\sqrt{x^4-x^2+1}}=\dfrac{4x^3-2x}{2\sqrt{x^4-x^2+1}}=\dfrac{2x^3-x}{\sqrt{x^4-x^2+1}}$ |
| $f(x)=\sin(x^3)$ | $(x^3)'[\cos(x^3)]=3x^2\cos(x^3)$ |
| $f(x)=\dfrac{2x+1}{x^2+1}$ | $\dfrac{(2x+1)'(x^2+1)-(x^2+1)'(2x+1)}{(x^2+1)^2}=\dfrac{2x^2+2-4x^2-2x}{(x^2+1)^2}=\dfrac{-2x^2-2x+2}{(x^2+1)^2}$ |

## Exercice 8 :

Calculer la dérivée 3$^{ème}$ des fonctions suivantes :

$f(x)=(3x+1)^5$ ; b) $f(x)=\cos(3x+1)$ ; c) $f(x)=\dfrac{1}{3x+1}$

**Solution :**

| Fonction | Dérivée 1$^{ère}$ | Dérivée 2$^{ème}$ | Dérivée 3$^{ème}$ |
|---|---|---|---|
| $f(x) = (3x + 1)^5$ | $f'(x) = 15(3x+1)^4$ | $f''(x) = 180(3x+1)^3$ | $f^{(3)}(x) = 1620(3x+1)^2$ |
| $f(x) = \cos(3x + 1)$ | $f'(x) = -3\sin(3x+1)$ | $f''(x) = -9\cos(3x+1)$ | $f^{(3)}(x) = 27\sin(3x+1)$ |
| $f(x) = \dfrac{1}{3x+1}$ | $f'(x) = \dfrac{-3}{(3x+1)^2}$ | $f''(x) = \dfrac{18}{(3x+1)^3}$ | $f^{(3)}(x) = \dfrac{-162}{(3x+1)^4}$ |

## Exercice 9 :

Etudier les variations de la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\ ;\ -2\}$ par : $f(x) = \dfrac{3x^2+2x-4}{x^2+x-2}$ .

Déterminer les extremums de $f$.

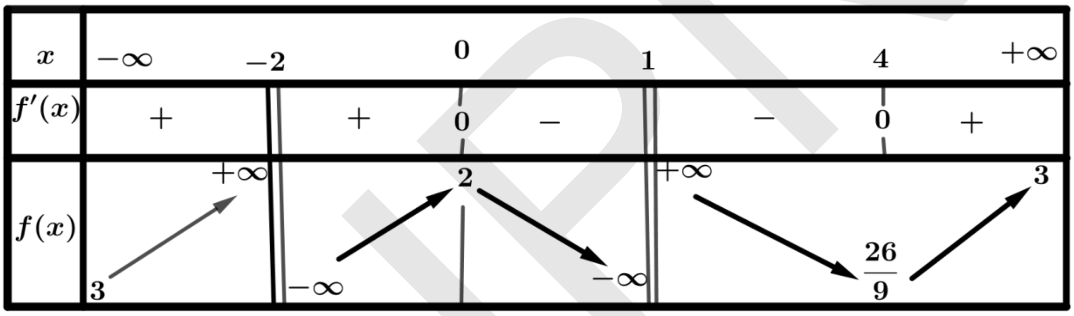
**Solution :**

$f$ est une fonction rationnelle, donc dérivable sur son ensemble de définition,

- $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{1; -2\}$ ; $f'(x) = \dfrac{x^2-4x}{(x^2+x-2)^2}$ .

- $F'(x)$ s'annule pour 0 et 4 et est du signe de $x^2 - 4x$.
- $f$ est donc croissante sur $]-\infty\ ;\ -2[$, puis sur $]-2\ ;\ 0]$ ;
- Elle est décroissante sur $[0\ ;\ 1[$, puis sur $]1\ ;\ 4]$
- Enfin croissante sur $[4\ ;\ +\infty[$.

Ces résultats sont résumés dans le tableau de variation suivant :




- $f'(x)$ s'annule en changeant de signe en 0 et 4.

La fonction $f$ admet un maximum relatif en 0, qui est 2 et admet un minimum relatif en 4 qui est $\dfrac{26}{9}$ .

## Exercice 10 :

Soit la fonction $f$ définie sur $]-\dfrac{\pi}{2}\ ;\ \dfrac{\pi}{2}[$ par $f(x) = \tan x$.

a) Montrer que $f$ est une bijection de $]-\dfrac{\pi}{2}\ ;\ \dfrac{\pi}{2}[$ vers $\mathbb{R}$ .

b) Expliciter la dérivée de la fonction $f^{-1}$.

**Solution :**

a) $f$ est dérivable sur $]-\dfrac{\pi}{2}\ ;\ \dfrac{\pi}{2}[$ et pour tout x de $]-\dfrac{\pi}{2}\ ;\ \dfrac{\pi}{2}[$ : $f'(x) = (\tan x)' = 1 + \tan^2 x$

$= 1 + f^2(x) > 0.$

$f$ est continue et croissante sur $]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}[$ ; $\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{2})^+} f(x)=-\infty$ ; $\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{2})^-} f(x)=+\infty$. Donc $f$ est une bijection de $]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}[$ vers $\mathbb{R}$. Elle admet donc, une fonction réciproque $f^{-1}$ .

b) $\left(f^{-1}\right)'(x)=\dfrac{1}{f'\circ f^{-1}(x)}=\dfrac{1}{f'\left[f^{-1}(x)\right]}=\dfrac{1}{1+f^2\left[f^{-1}(x)\right]}=\dfrac{1}{1+\left[f(f^{-1}(x))\right]^2}$, d'où $\boxed{(f^{-1})'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}}$

## Exercice 11 :

a) Démontrer que pour tout réel **x** on a **:** $|\sin x|\leq|x|$.

b) Quelle est la limite de la suite **U** : $n\mapsto n\sin\dfrac{1}{n^2}$ .

## Solution :

a) La fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\sin' x=\cos x$, donc $|\sin' x|\leq 1$.
Soit x un réel, en appliquant les inégalités des accroissements finis à la fonction sinus sur l'intervalle I d'extrémités 0 et x, on obtient : $|\sin x-\sin 0|\leq 1\times|x-0|$, on a donc démontré : pour tout réel x : $|\sin x|\leq|x|$.

b) $U_n=n\sin\dfrac{1}{n^2}$ ; $\lim\limits_{n\to+\infty} n=+\infty$ ; $\lim\limits_{n\to+\infty}\sin\dfrac{1}{n^2}=0$.

On ne peut pas conclure directement ($+\infty\times 0$ est une forme indéterminée) en utilisant l'inégalité établie au a), on peut écrire que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ :

$$|\sin\frac{1}{n^2}|\leq\frac{1}{n^2}\Leftrightarrow|n||\sin\frac{1}{n^2}|\leq|n||\frac{1}{n^2}|\Leftrightarrow|U_n|\leq n\frac{1}{n^2}\Leftrightarrow|U_n|\leq\frac{1}{n}\Leftrightarrow-\frac{1}{n}<U_n\leq\frac{1}{n}.$$

Puisque : $\lim\limits_{n\to+\infty}-\dfrac{1}{n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}=0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=0$

## B. Exercices divers :

**1.** Etudier la limite éventuelle de la fonction f en 0 : $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x} - (1+\frac{x}{2})}{x^2}$.

2) En déduire que, lorsque x est voisin de 0 on a :

$\sqrt{1+x} \simeq 1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{2}$

3) Déterminer des valeurs approchées des nombres :

$\sqrt{1{,}002}$ ; $\sqrt{0{,}95}$ ; $\sqrt{\dfrac{n+1}{2}}$ ; $(n \in \mathbb{N}^*)$.

(On ne demande pas de calcul d'erreur).

**2** Etudier la limite éventuelle des fonctions suivantes au point considéré :

1) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-1}+3x}{x}$ en $+\infty$ ;

2) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+5}-x}{\sqrt{x^2-x}}$ en $+\infty$ ;

3) $f(x) = \sqrt{x^2+4x+3} - x$ en $+\infty$ ;

4) $f(x) = \sqrt{x^2+4x+3} - (x+2)$ en $+\infty$

5) $f(x) = \sqrt{x^2+4x+3} + x$ en $-\infty$ ;

**3.** 1. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$f(x) = x\sin(\dfrac{1}{2x}) + 3$.

a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ on a :

$|f(x) - 3| \leq |x|$ .

b) Déterminer alors $\lim_0 f(x)$.

2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$g(x) = \dfrac{1}{x^3} + \sin(\dfrac{1}{x})$.

a) Montrer que pour tout réel non nul $x$,

b) on a : $\dfrac{1}{x^3} - 1 \leq g(x) \leq \dfrac{1}{x^3} + 1$.

b) Conjecturer $\lim_{0^-} g(x)$ et $\lim_{0^+} g(x)$.

**4.** On considère la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par : $f(x) = (\sqrt{x+2} - \sqrt{x})\sin x$.

1. Montrer que pour tout réel positif $x$, $f(x) = \dfrac{2\sin x}{\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x}\right)}$.

2. Montrer que pour tout réel strictement positif $x$, $|f(x)| \leq \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

3. En déduire la limite de $f$ en $+\infty$

**5.** Etudier les branches infinies de $f$ et montrer que $\Delta$ est une asymptote à $\mathcal{C}_f$.

a) $f(x) = \sqrt{2x^2+x-4}$ ; $\Delta : y = \sqrt{2}(x+\dfrac{1}{4})$

b) $f(x) = \sqrt{x^2+3x+1}$ ; $\Delta : y = -x - \dfrac{3}{2}$

c) $f(x) = 2x - \sqrt{x^2+1}$ ; $\Delta : y = x$

**6.** Montrer que ( E ) admet une unique solution dans I et en déterminer un encadrement d'amplitude $10^{-3}$.

1) E: $x^3 = 3 - 2x$ ; $I = \mathbb{R}$ ;

2) E : $3x^2 = \dfrac{1}{x} - 1$ ; $I = \mathbb{R}^*$

3) E: $\cos x = 2x$ ; $I = \mathbb{R}$ ;

4) E: $\tan x = x + 1$; $I = ]\dfrac{-\pi}{2} ; \dfrac{\pi}{2}[$

**7.** Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = |x^3 - 12x|$.

1) Etablir le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$
(On pourra étudier les variations de la solutions de l'équation $f(x) = \lambda$ dans $\mathbb{R}$.

3) Montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet six solutions dont on donnera une valeur approchée à 0,1 près.

**8** la fonction $f(x) = \dfrac{-x^2+x+1}{x+2}$

Déterminer un polynôme $g$ et un réel k tel que pour tout x : $-5x^2 + x + 1 = (x+2)g(x) + k$.
En déduire que la courbe représentative de f admet une asymptote en $+\infty$ et en $-\infty$.
Donner l'équation de cette asymptote et positionner la courbe par rapport à l'asymptote.

**9** Etudier les branches infinies de la courbe représentative de la fonction f et donner les asymptotes éventuelles.

a) $f(x)=\dfrac{8x^2-4x+1}{2x+1}$ ; b) $f(x)=\dfrac{x^2}{(x-1)^2}$ ;

c) $f(x)=\dfrac{3x^2}{2-x}$.

**10** On se propose d'étudier les branches infinies de $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction : $x \mapsto \sqrt{x^2-3x+1}$

1) Etudier l'ensemble de définition de $f$ et montrer que : $f(x) = \sqrt{(x-\frac{3}{2})^2-\frac{5}{8}}$ . En déduire que $\mathscr{C}_f$ admet un axe de symétrie.

2) Montrer que la droite d'équation $\mathbf{y = x - \frac{3}{2}}$ est une asymptote à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$ et étudier sa position relative par rapport à $\mathscr{C}_f$

**11** Soit $f(x) = \dfrac{x^5+x^4+x^3+x^2+x+1}{x^4-1}$

Montrer que $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote en $+\infty$ (on peut développer $(x^4-1)(x+1)$).

**12** Dans chacun des cas, étudier la limite éventuelle en $+\infty$ de $f(x)$, puis de $\dfrac{f(x)}{x}$.

Préciser la branche infinie correspondante :

1) $f(x)=x^3+x$ ; 2) $f(x)=3x-3\sqrt{x}$

3) $f(x)=\dfrac{1}{x}-\sqrt{x}$ ; 4) $f(x)=\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}$

5) $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x+2}$ ; 6) $f(x)=\sqrt{x^2+2}$

7) $f(x)=\sqrt{x^2-3}+\sqrt{x}$ ; 8) $f(x)=x(1+\sin x)$

5) $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x+2}$ ; 6) $f(x)=\sqrt{x^2+2}$

7) $f(x)=\sqrt{x^2-3}+\sqrt{x}$ ; 8) $f(x)=x(1+\sin x)$

**13** On considère la fonction polynôme P définie pour tout x réel par :
$P(x) = 2x^3-3x^2-1$.

1) a) Etudier les variations de P.

b) Montrer que l'équation $P(x) = 0$ admet une racine réelle et une seule $\alpha$ et que :
$\alpha \in ]1,6 ; 1,7[$.

2) Soit D l'ensemble des réels strictement supérieurs à -1. On considère la fonction numérique $f$ définie sur D par : $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x^3}$, On désigne par $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de $f$ dans un repère orthonormé (unité : 4cm)

a) Etudier les variations de $f$ ( on utilise 1) ;

b) Tracerla courbe $\mathscr{C}_f$ et les tangentes aux points d'abscisses 0 et 1.

**14** 1) Montrer que si P(x) est un polynôme de degré impair l'équation P(x) = 0 admet au moins une solution).

2) Vérifier que l'équation $x^5+x-1=0$ admet une seule solution dont on déterminera une valeur approchée à$10^{-2}$près.

**15** Etudier la dérivabilité en 0 des fonctions

a) $f(x) = \sqrt{\mathbf{x^2+x}}$ ; b) $f(x) = \sqrt{\mathbf{x^3+x^2}}$

**16** Montrer que la fonction définie sur $[1 ; +\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{\mathbf{x(x-2)^3}}$ est dérivable en 2.

**17** Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\begin{cases} \boldsymbol{f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}} & \mathbf{; x \neq 0} \\ \boldsymbol{f(0)=0} \end{cases}$$

a) Montrer que $f$ est dérivable en 0.

b) Déterminer $f'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}^*$.

**18** Dans les deux cas suivants, déterminer si la représentation graphique de $f$ admet une tangente ou des demi -tangentes au point d'abscisse a.

a) $f(x) = x^2+2x-|x|$, a = 0;

b) $f(x) = \sqrt{\mathbf{x^2-x-2}}$ ,a = 2.

Pour les exercices 19 à 21, déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse $x_0$.

**19** $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 2$ ; $x_0 = 1$;

**20** $f(x) = x\cos x$ ; $x_0 = \pi$; .

**21** $f(x) = x\sqrt{x-1}$ ; $x_0 = 2$.

**22** 1. Déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \dfrac{2x+1}{4x^2+3x-1}$ ; b) $f(x) = (x^4 - x^2 + 1)^3$ ;

c) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{(x+1)^3}$

2. Même exercice pour : a) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$

b) $f(x) = \sqrt{x^2-4x+5}$ ; c) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

**23** Même exercice pour :

a) $f(x) = \sin(3x - \dfrac{\pi}{4})$ ; b) $f(x) = \sin^2(2x - \dfrac{\pi}{3})$ ;

c) $f(x) = \cos(\dfrac{3x-1}{3x+1})$.

**24** Soit $f$ la fonction définie par :

$f(x) = \dfrac{1-x^5}{1-x}$.

1) Calculer sa dérivée dans $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

2) En déduire l'égalité :

$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 = \dfrac{1-5x^4+4x^5}{(1-x)^2}$,

3) Généraliser le résultat précédent à :
$1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1}$, puis à :
$2 + 6x + 12x^2 + \ldots + n(n+1)x^{n-1}$.

**25** Soit $f$ la fonction définie par :

$f(x) = \sqrt{x+\sqrt{1+x^2}}$.

1) Calculer sa dérivée première $f'$ et vérifier la relation : $2\sqrt{1+x^2}f'(x) = f(x)$.

2) En déduire que la dérivée seconde $f''$ vérifie la relation :

$4(1 + x^2)f''(x) + 4xf'(x) - f(x) = 0$.

**26** Déterminer les dérivées successives : $f'$; $f''$ et $f^{(3)}$ de $f$ :

a) $f(x) = 2x^5 - 4x^3 + 2$ ; b) $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ ;

c) $f(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} - \cos x$

**27** Même question pour:

a) $f(x) = \cos^2(x^2)$ ; b) $f(x) = \tan^2 x$ ;

c) $f(x) = \sin\sqrt{x}$ .

**28** Construire le tableau de variations de la fonction proposée :

a) $f(x) = 2x^5 - 5x^4 + 4x^3$ ; b) $f(x) = \dfrac{x}{x^2-4}$ ;

c) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-1}}{x}$ .

**29** Même question pour:

a) $f(x) \dfrac{3x^2-4x}{x+1}$ ; b) $f(x) = \cos(2x + \dfrac{\pi}{4})$ ;

c) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{(x-1)^2}$ .

**30** Soit la fonction $f(x) = \sqrt{x+2}$ .

En utilisant l'inégalité des accroissements finis, montrer que pour tout $x \in [0 ; 2]$ :

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}(x+2)+2 \le \sqrt{x+2} \le \frac{1}{4}(x-2)+2.$$

**31** Démontrer que pour tous réels x et y, on a:
$|\sin x - \sin y| \le |x - y|$.

**32** Soit la fonction h définie par :

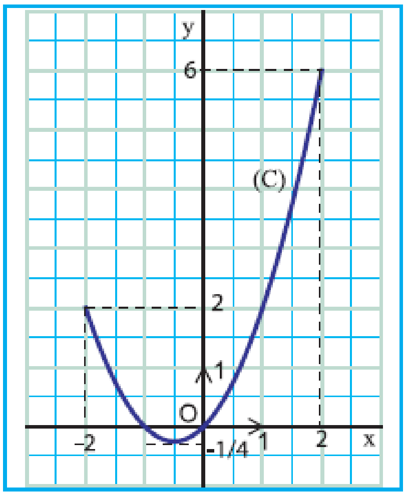
$h(x) = \dfrac{x}{|x|-1}$

1) Préciser le domaine de définition de h et montrer que h est une fonction impaire, tracer alors la courbe (C') de h et préciser ses asymptotes.

2) Dresser le tableau de variation de h.

3) Déterminer graphiquement et suivant les valeurs du réel k le nombre des solutions de l'équation $|x| + k = k|x|$ .

**32** Soit la fonction définie sur [-2, 2]. ($\mathscr{C}$) étant sa courbe représentative dans un repère du plan. (Voir figure ci-dessous)




1) Justifier que f est continue sur l'intervalle [-2, 2].

2) Reproduire le graphique ci-contre et représenter chacun des ensembles de réels suivants :
f([-2,-1[) ; f([-1,0]) et f([0, 2]).

3) a) Montrer que pour tout x de [0, 2], le réel f(x) appartient à l'intervalle [0, 6].
b) Montrer que pour tout y de [0, 6] il existe un réel x de[0, 2] tel que y = f(x).
c) En déduire f([0, 2]).

4) a) Résoudre graphiquement les équations f(x)=0 et f(x)=1.
b) Résoudre algébriquement les équations f(x)=0 et f(x)=1

**33** 1) Représenter dans un repère du plan la courbe de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\begin{cases} f(x)=x^2+1 \ ; \ x \neq 0 \\ f(0)=-2 \end{cases}$$

2) Montrer que f n'est pas continue sur $\mathbb{R}$ .
3) Déterminer l'ensemble f( $\mathbb{R}$ ).
Cet ensemble est-il un intervalle ?
4) Déterminer l'ensemble f($]-\infty,0[$).
Cet ensemble est-il un intervalle ?
5) Résoudre graphiquement l'équation f(x)=k ; où k est un réel donne. Discuter.

**34** Soit la fonction $f$ définie par :
$f(x)=\sqrt{x^2+1}-x$ ;

1) Calculer $\lim_{1} f(x)$ et $\lim_{-\infty} f(x)$ .

2) a) Montrer que pour tout réel $x$ on a :

$$\sqrt{x^2+1}-x=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}.$$

b) Déterminer alors $\lim_{+\infty} f(x)$

3) Montrer que pour tout réel x on a $f(x)\geq 0$ .

**35** Pour $x\in D=\left[-\frac{5}{2};2\right[\cup\left]2;+\infty\right[$,

on pose : $f(x)=\dfrac{x-2}{x+1-\sqrt{2x+5}}$ ;

a) Montrer que pour $x\in D$ et différent de $-2$ $f(x)=\dfrac{x+1+\sqrt{2x+5}}{x+2}$ ;

b) En déduire que g admet un prolongement par continuité en x0 = 2 que l'on précisera.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\begin{cases} f(x)=x^2-4 \ ; \ x \leq 2 \\ f(x)=8-\dfrac{16}{x} \ ; \ x>2 \end{cases}$$

1) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$ .
2) Montrer que f est dérivable sur chacun des intervalles $]-\infty, 2[$ et $]2, +\infty[$ et calculer f '(x) pour $x<2$ et pour $x>2$.
3) a) Etudier la dérivabilité de f en $x_0$ =2.
b) La fonction f est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$ ?

**36** 1) Soit f la fonction définie par :

$$f(x)=\frac{x^2}{|x+1|-|x-1|}$$

a) Préciser l'ensemble de définition $\mathscr{D}_f$ de $f$.
b) Montrer que f est impaire.

2) Déterminer un prolongement par continuité de f en 0. On notera g ce prolongement.

3)a) Etudier la dérivabilité de g en 0 .
b) Dresser le tableau de variations de g.

4) a) Préciser les branches infinies de la courbe représentative $\mathscr{C}$ de g.
b) Tracer $\mathscr{C}$ dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

**37** On considère la fonction polynôme P définie sur par $P(x) = 4x^3 - 3x - \frac{1}{2}$.

1) Calculer $P(-1)$ , $P\left(-\frac{1}{2}\right)$, $P(0)$ et $P(1)$.

2) a) Montrer que l'équation P($x$) = 0 admet trois racines réelles distinctes que l'on notera $x_1$, $x_2$ et $x_3$ ; avec $x_1 < x_2 < x_3$.

b) Vérifier que :

$$-1 < x_1 < -\frac{1}{2} < x_2 < 0 < x_3 < 1$$

3) a) Montrer que pour tout réel α on a : cos(3α) = 4cos3(α) - 3cos(α).

b) Montrer alors que:

$x_1 = cos\left(\frac{11\pi}{9}\right)$, $x_2 = cos\left(\frac{7\pi}{9}\right)$ et

$$x_3 = cos\left(\frac{\pi}{9}\right)$$

**38** 1) Représenter sur un même graphique (unité 3 cm) la parabole d'équation y = $x^2$et la droite D d'équation y = $x$ + 1.

2) Etablir a l'aide du graphique que l'équation f(x) = 0 admet deux solutions, où $f(x) = x^2 - x - 1$, l'une positive qu'on notera α et l'autre négative qu'on notera .

3) a) Placer sur la parabole et la droite D les points d'abscisses respectives $\frac{3}{2}$ et $\frac{5}{3}$

b) Conjecturer alors a l'aide du graphique, un encadrement de α.

4) a) Expliquer par le graphique que sur l'intervalle [0,+∞[, il est équivalent de dire que $x < \alpha$ ou f($x$) < 0.

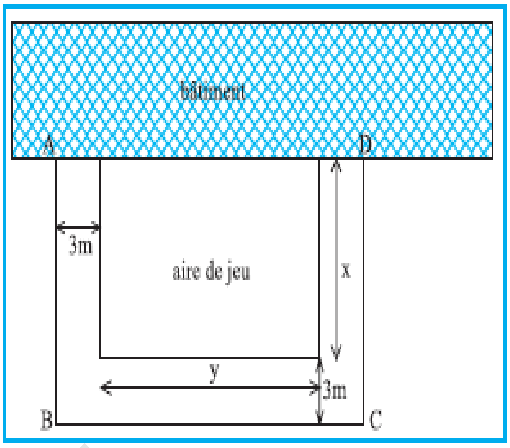
b) En déduire que $\frac{3}{2} < \alpha < \frac{5}{3}$ .

c) Montrer le résultat précédent.

5) a) Montrer que 1 – $\alpha$ est une solution négative de l'équation f($x$) = 0.

b) En déduire a l'aide de la question 4), un encadrement de β .

**39** On veut construire le long d'un bâtiment une aire de jeu rectangulaire de 450 $m^2$.
De plus, on souhaite que les dimensions de ce rectangle soient supérieures ou égales a 10 m.
Cet espace de jeu est entouré sur trois côtés d'une allée de 3 m de large comme l'indique le croquis ci-dessous :




L'ensemble est clôture sur les trois côtés [AB], [BC] et [CD]. On s'intéresse à la longueur L de la clôture.
On note x et y les dimensions, en mètres, de l'aire du jeu.

1) a) Démontrer que $y = \frac{450}{x}$ , puis justifier que $x \in [10 ; 45]$ .

b) Exprimer L à l'aide de $x$.

2) Soit f la fonction définie sur [10 ; 45] par :

$$f(x) = 2x + 12 + \frac{450}{x}$$

a) Dresser le tableau de variation de f.

b) Tracer la courbe représentative (C) de f dans un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath}\ )$ du plan.

c) Déduire de l'étude précédente les dimensions à donner à l'aire de jeu pour que la longueur de la clôture soit la plus petite possible.
Quelle est alors cette longueur ?

CHAPITRE 3

# Etude de fonctions

## Faire savoir

### L'essentiel du chapitre

### I. Généralités sur les fonctions :

Soit $f$ une fonction sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal ( O. I ; J).

**1.Domaine de définition :**

**Définition :**

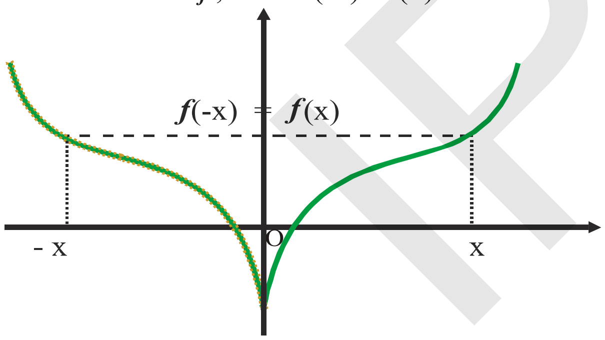
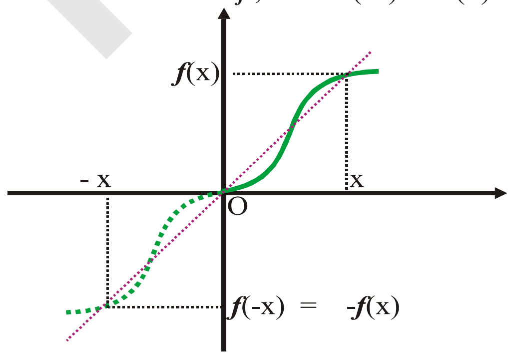
On appelle domaine de définition de $f$ l'ensemble : $\{x \in \mathbb{R} \,/\, f(x) \text{ existe}\}$, noté $D_f$.

Si cet ensemble n'est pas donné dans l'énoncé, il faut le chercher. C'est peut être $\mathbb{R}$, un intervalle, ou une réunion d'intervalles.

**Exemple 1 :**

- Les fonctions polynômes, sinus et cosinus sont définies sur $\mathbb{R}$.
- La fonction inverse est définie sur $]-\infty\,;0[\,\cup\,]0\,;+\infty[$.

**2.Parité :**

| | |
|---|---|
| On dit que la fonction **f** est paire si ,<br>• $D_f$ est symétrique par rapport à zéro<br>• Pour tout $x \in D_f$ ; on a $f(-x) = f(x)$ | On dit que la fonction **f** est impaire si<br>• $D_f$ est symétrique par rapport à zéro<br>• Pour tout $x \in D_f$ ; on a $f(-x) = -f(x)$ |
|  |  |
| **Exemple 2 :**<br>$f : x \mapsto x^2$ ; $D_f = ]-\infty\,;0] \cup [0\,;+\infty[$ ;<br>$\forall x \in D_f$ ; $(-x)^2 = (x)^2 = x^2 \Rightarrow f(-x) = f(x)$ ;<br>donc; **f** est paire | **Exemple 3 :**<br>$f : x \mapsto x^3$ ; $D_f = ]-\infty\,;0] \cup [0\,;+\infty[$ ;<br>$\forall x \in D_f$ ; $(-x)^3 = -(x)^3 \Rightarrow f(-x) = -f(x)$ ;<br>donc; **f** est impaire |

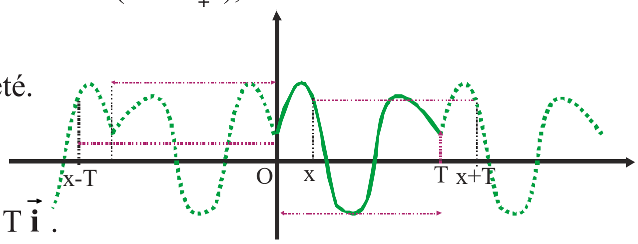
**3. Périodicité :**

**Définition :**

On dit qu'une fonction $f$ est périodique sur $\mathbb{R}$ de période $T (T \in \mathbb{R}_+^*)$, si :

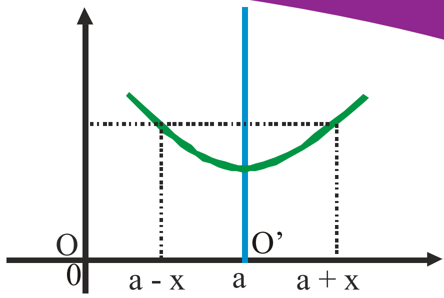
- $\forall x \in D_f$ ; $f(x+T) = f(x)$ ;
- T est le plus petit élément vérifiant cette propriété.

Alors, le domaine d'étude pourra être réduit à un intervalle de longueur T, puis compléter le tracé par des translations successives de vecteur $T\vec{i}$.



## 4. Eléments de symétries :

### Axe de symétrie :




Soit $f$ une fonction numérique ; $D_f$ son domaine de définition $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé ( O ; I ; J). Pour démontrer que l'axe Δ d'équation : x = a est un axe de symétrie de $\mathscr{C}$, on peut utiliser l'une des deux méthodes suivantes :

***Méthode 1***

Démontrer que : **$\forall x \in D_f$ ; $f(2a - x) = f(x)$.**

**Exemple 4 :**

Soit $f :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ ;\ x \mapsto \dfrac{4}{x(x-4)}$.

La droite d'équation Δ : x = 2 est axe de symétrie de la courbe représentative de $f$ car,

$$f(4-x) = \frac{4}{(4-x)(4-x-4)} = \frac{4}{-x(4-x)} = f(x).$$

***Méthode 2***

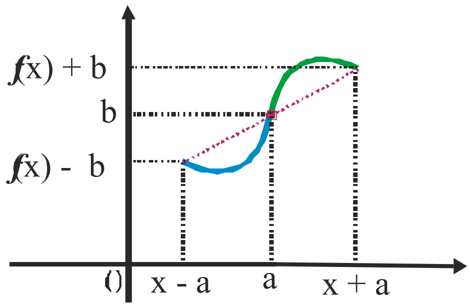
Démontrer que $f$ est paire dans le repère ( O' ; $\overrightarrow{OI}$ ; $\overrightarrow{OJ}$ ) tel que **O'(a ; 0).**

**Exemple 5 :**

Soit $f :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ ;\ x \mapsto \dfrac{4}{x(x-4)}$ ; on a : $y = \dfrac{4}{x(x-4)}$ ; soit : X = x - 2 et Y = y. Donc ;

$Y = \dfrac{4}{(X-2)(X+2)}$. $f :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ ;\ X \mapsto \dfrac{4}{x^2 - 4}$. La fonction $f$ est paire.

### Centre de symétrie :




Pour démontrer que le point Ω( a ; b) est centre de symétrie de $\mathscr{C}$, on peut utiliser l'une des deux méthodes suivantes :

| ***Méthode 1*** | ***Méthode 2*** |
| --- | --- |
| Démontrer que : $\begin{cases} D_f \text{ est symétrique par rapport à } a \\ f(2a - x) = 2b - f(x) \end{cases}$<br>**Exemple 6 :**<br>Soit $f :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ ;\ x \mapsto 2 + \dfrac{3}{x-1}$ ;<br>Le point **Ω (1 ; 2)** est centre de symétrie, car<br>$\left.\begin{array}{l} f(2-x) = 2 + \dfrac{3}{2-x-1} = 2 - \dfrac{3}{x-1} \\ 4 - f(x) = 4 - (2 + \dfrac{3}{x-1}) = 2 - \dfrac{3}{x-1} \end{array}\right\} f(2-x) = 4 - f(x)$ | Démontrer que **f** est impaire dans le repère ( O' ; $\overrightarrow{OI}$ ; $\overrightarrow{OJ}$ ) tel que **O'(a ; b).**<br>**Exemple 7 :**<br>Soit $f :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ ;\ x \mapsto 2 + \dfrac{3}{x-1}$<br>Soit : **X = x – 1 ; Y = y -2** ;<br>donc l'expression de $f$ dans ce nouveau repère est :<br>$f :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ ;\ X \mapsto \dfrac{3}{X}$ ; c'est une fonction impaire. |

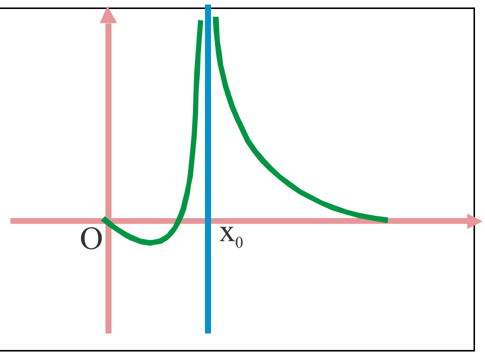
## 5.Asymptotes :

### Asymptotes parallèles aux axes de repères :

- Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\pm\infty$, on dit que la droite $x = x_0$ est asymptote à $\mathscr{C}$ ; c'est une droite parallèle à (Oy),

**Exemple 8 :**

$f:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}\ ;\ x\mapsto \dfrac{1}{x^2}$ ; On a : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}=+\infty$ ; donc $x = 0$ est une asymptote à $\mathscr{C}$ parallèle à (Oy).

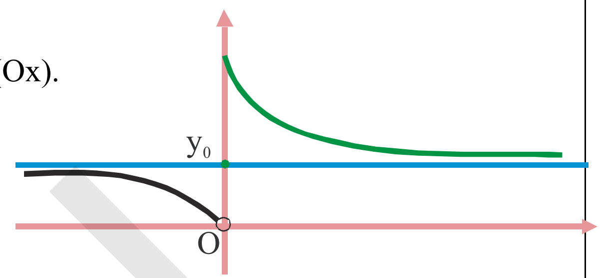



- Si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=l$, on dit que la droite $y=\ell$ est asymptote à $\mathscr{C}$ ; c'est une droite parallèle à (Ox).

**Exemple 9 :**

$f:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}\ ;\ x\mapsto 2-\dfrac{1}{x}$ ; On a : $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(2-\dfrac{1}{x})=2$ ;

donc $y = 2$ est une asymptote à $\mathscr{C}$,
c'est une droite parallèle à (Ox).



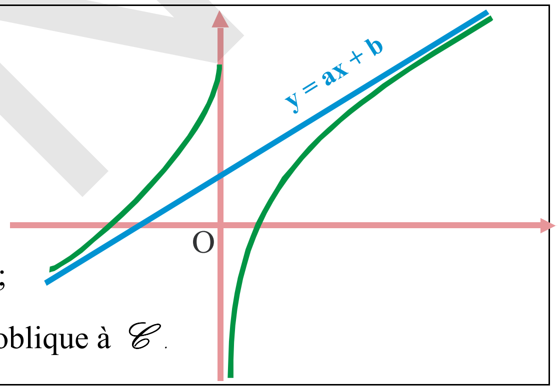

### Asymptotes obliques :

- Lorsqu'il existe une fonction affine : $x\mapsto ax+b$ ;
telle que: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0$,
on dit que la droite d'équation : $y=ax+b$
est une asymptote oblique à $\mathscr{C}$.

**Exemple 10 :**

$f:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}\ ;\ x\mapsto x+1-\dfrac{1}{x-3}$ ; On a : $\lim\limits_{x\to\pm}\dfrac{1}{x-3}=0$ ;

donc la droite d'équation $\mathbf{y = x + 1}$ est une asymptote oblique à $\mathscr{C}$.

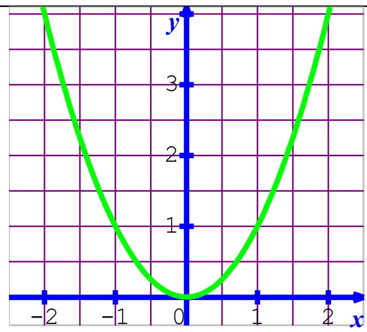



### Direction asymptotique :

- Si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$ et $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\pm\infty$ ;
on dit que $\mathscr{C}$ admet une branche parabolique de direction (yy').

**Exemple 11 :**

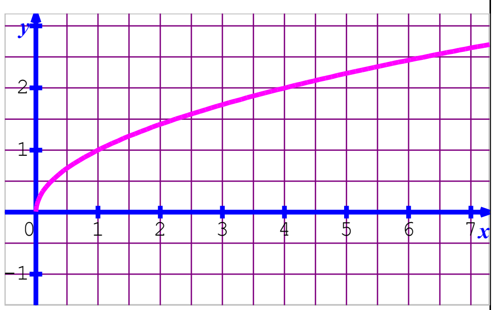
$f:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}\ ;\ x\mapsto x^2$ ;




- Si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$ et $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$ ;
on dit que $\mathscr{C}$ admet une branche parabolique de direction (xx').

**Exemple 12 :**

$f:\ \mathbb{R}_+\to\mathbb{R}\ ;\ x\mapsto\sqrt{x}$ ;



### 6. Signe de la dérivée et sens de variation :

Soit **f** une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ .

On suppose que **f** est dérivable pour tout élément x de I.

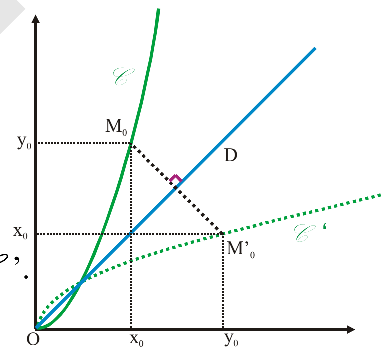
- si la dérivé **f'** est la fonction nulle sur I, alors est constante sur I.
- si la dérivé **f'** est à valeurs positives sur I, alors **f** est croissante sur I.
- si la dérivé **f'** est à valeurs négatives sur I, alors **f** est décroissante sur I.
- si la dérivée **f'** change de signe en un point $x_0$ de I, pour lequel **f** est continue, la fonction **f** admet un point extremum.

## II. Plan d'étude d'une fonction :

Pour étudier une fonction, on s'intéresse aux points suivants :

- Ensemble de définition ;
- Ensemble d'étude (parité; périodicité …) ;
- Dérivabilité ;
- Continuité (aux points où la fonction étudiée n'est pas dérivable) ;
- Limites aux bornes de l'intervalle d'étude ;
- Sens de variation ;
- Tableau de variation ;
- Représentation graphique.

## III. Fonction réciproque :




Soit $\boldsymbol{f}$ une fonction numérique admettant une fonction réciproque $\boldsymbol{f}^{-1}$.
Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de $\boldsymbol{f}$, et $\mathscr{C}$' la courbe représentative de $\boldsymbol{f}^{-1}$ dans un repère orthonormé. $\mathscr{C}$ est l'ensemble des points $M_0$ de coordonnées $(x_0\ ;\ y_0)$ tels que $y_0 = f(y_0)$.
On a alors $x_0 = f^{-1}(y_0)$ et par suite, le point $M_0'(y_0\ ;\ x_0)$ est élément de $\mathscr{C}$'.
Il en résulte que les deux courbes sont symétriques par rapport à la droite d'équation y = x.

## IV. Exemple d'étude de fonction rationnelle :

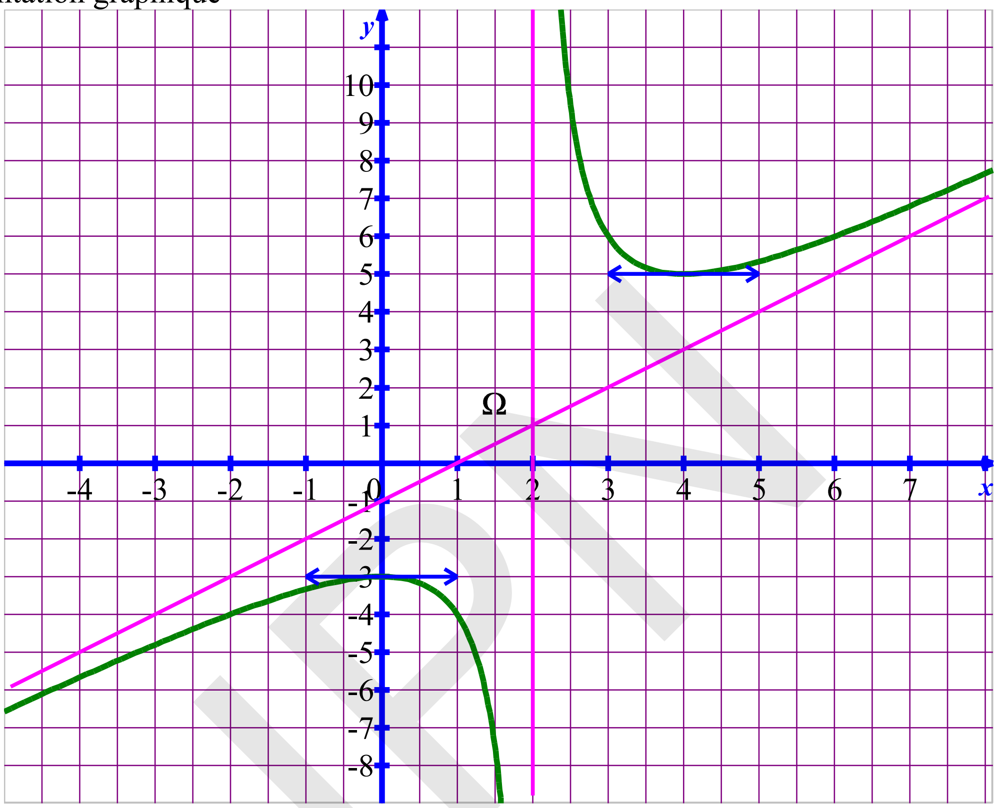
Soit **f** la fonction définie par : **f** : $\mathbf{x} \mapsto \dfrac{\mathbf{x^2 - 3x + 6}}{\mathbf{x - 2}}$

- $D_f = \mathbb{R}\setminus\{2\}$ ;
- On peut mettre **f**(x) sous la forme: **f**(x) = x – 1 + $\dfrac{\mathbf{4}}{\mathbf{x-2}}$ ;
- Limites aux bornes: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to(2)^-} f(x) = -\infty$ ; $\lim\limits_{x\to(2)^+} f(x) = +\infty$. .
- Asymptotes : x = 2 est asymptote verticale ; d'après l'écriture de $\boldsymbol{f}$ et comme ( $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{4}{x-2} = 0$),
  donc ; y = x – 1 est asymptote oblique.
- La fonction $\boldsymbol{f}$ est dérivable sur son domaine de définition, sa dérivée **f'**(x) = $\dfrac{\mathbf{x(x-4)}}{\mathbf{(x-2)^2}}$ ;

- Tableau de variation

| x | $-\infty$ | | 0 | | 2 | | 4 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | 0 | - | ‖ | - | 0 | + | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | -3 | ↘ | $-\infty$ ‖ $+\infty$ | ↘ | 5 | ↗ | $+\infty$ |

- Représentation graphique



## Savoir-faire

### A. Applications :

**Exercice 1 :**

Etudier la fonction **f** définie par : $f(x) = \dfrac{7x^2 + 20x}{x^2 + 2x - 3}$.

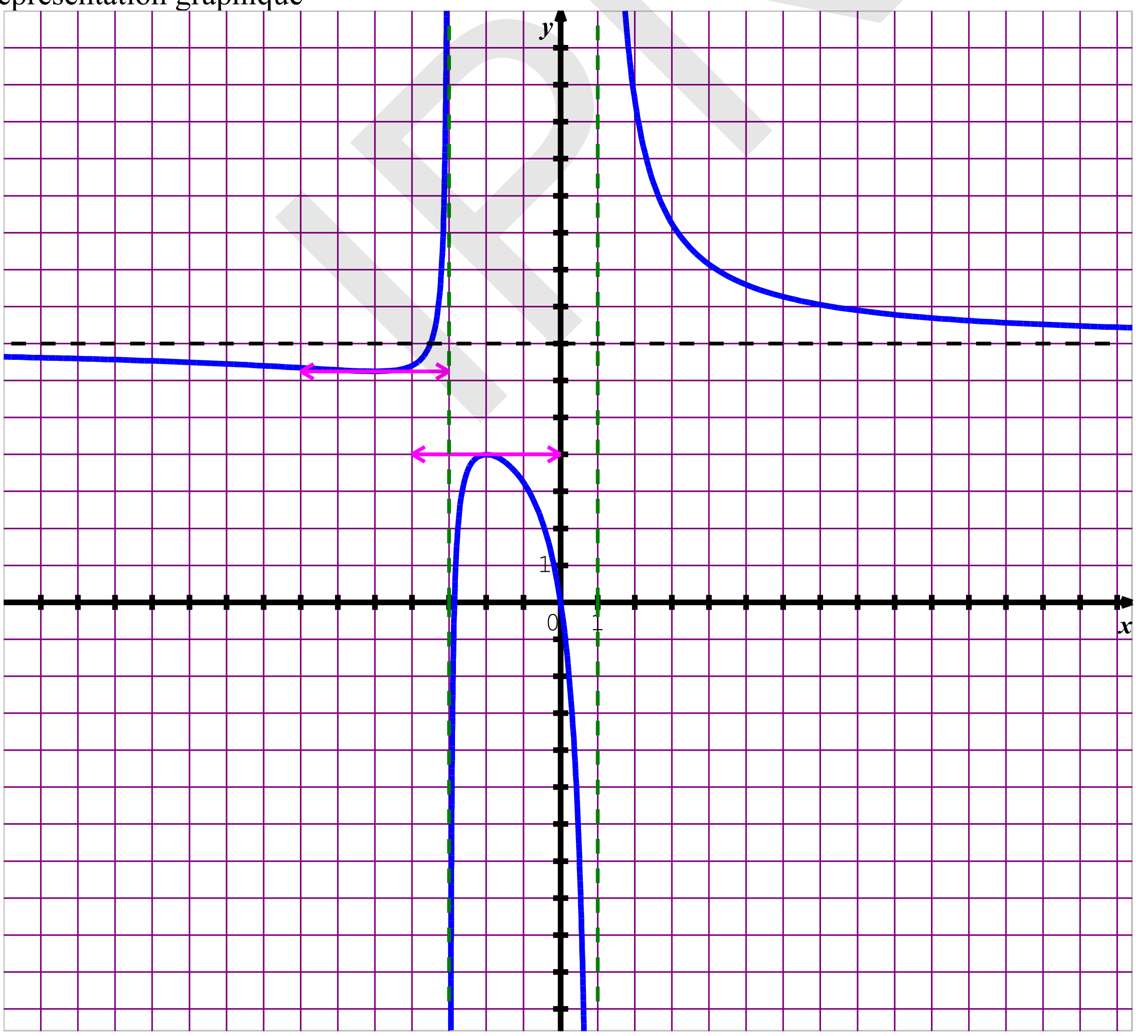
**Solution :**

- $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3\ ;\ 1\}$ ;
- Limites aux bornes : $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 7$ ; $\lim\limits_{x \to (-3)^-} f(x) = +\infty$ ; $\lim\limits_{x \to (-3)^+} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to (1)^-} f(x) = -\infty$;

  $\lim\limits_{x \to (1)^+} f(x) = +\infty$. Donc, x = -3 ; x = 1 sont deux asymptotes verticales ; y = 7 est une asymptote horizontale.
- La fonction $f$ est dérivable sur son domaine de définition, sa dérivée $f'(x) = \dfrac{-6(x+2)(x+5)}{(x^2+2x-3)^2}$ ;
- Tableau de variation

| x | $-\infty$ | | $-5$ | | $-3$ | | $-2$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | ‖ | $-$ | |
| $f(x)$ | $7$ | ↘ | $\dfrac{25}{4}$ | ↗ | $+\infty$ ‖ $-\infty$ | ↗ | $4$ | ↘ | $-\infty$ ‖ $+\infty$ | ↘ | $7$ |

- Représentation graphique



## Exercice 2 :

On considère la fonction définie par $\mathbf{f}(x) = \dfrac{\mathbf{2x^2 - 7x + 5}}{\mathbf{x - 3}}$.

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de $f$ dans un repère orthonormal ( O ; $\vec{\mathbf{i}}$ ; $\vec{\mathbf{j}}$ ) du plan ( unité : 1 cm sur chacun des axes).

1.a) Déterminer des nombres réels a, b et c tels que : $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}\setminus\{3\}$ , $f(x) = ax + b + \dfrac{\mathbf{c}}{\mathbf{x-3}}$.

b) Montrer que la droite D d'équation y = 2x – 1 est asymptote oblique à la courbe $\mathscr{C}$.

2) Etudier la variation de la fonction **f**.

a) Quelles sont les coordonnées des points d'intersections de $\mathscr{C}$, avec les axes des coordonnées ?

b) Tracer la courbe $\mathscr{C}$ dans le repère ( O ; $\vec{\mathbf{i}}$ ; $\vec{\mathbf{j}}$ ).

3.) Discuter graphiquement, suivant les valeurs du paramètre réel m, l'existence et le nombre de solutions de l'équation : $2x^2 – (7 + m)x + 5 + 3m = 0$.

**Solution :**

- $D_f = \mathbb{R}\setminus\{3\}$

1. a) Ecriture de **f**(x) :

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}\setminus\{3\},\ \mathbf{f}(x) = \frac{\mathbf{2x^2 - 6x - x + 3 + 2}}{\mathbf{x-3}} = \frac{\mathbf{2x(x-3)}}{\mathbf{x-3}} - \frac{\mathbf{x-3}}{\mathbf{x-3}} + \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{x-3}} = \mathbf{2x - 1 + \frac{2}{x-3}}\ ;$$

Donc, **a = 2 ; b = – 1 ; c = 2**. On en déduit que : **y = 2x – 1** est ( A. O), car $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{x-3}} = \mathbf{0}$.

2.) Etude de variation de **f**

- Limites aux bornes : $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathbf{f(x) = -\infty}$ ; $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathbf{f(x) = +\infty}$ ; $\lim\limits_{x\to(3)^-} \mathbf{f(x) = -\infty}$; $\lim\limits_{x\to(3)^+} \mathbf{f(x) = +\infty}$,

  d'où x = 3 est (A. V) ;

- **f** est dérivable sur son domaine de définition, sa dérivée **f'**(x) = $2 - \dfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{(x-3)^2}}$.

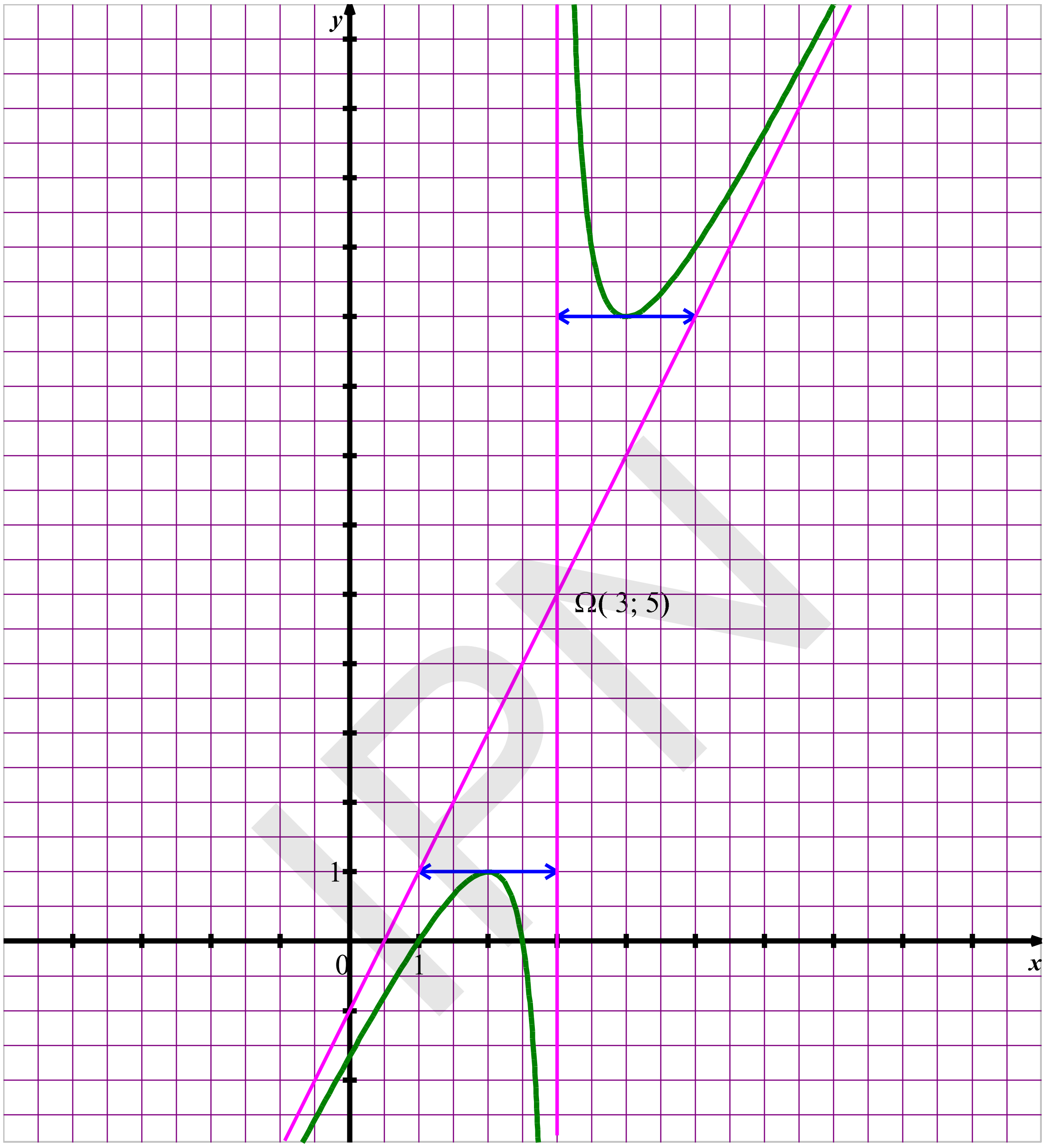
a) Points d'intersections avec les axes : $\mathbf{x = 0} \Leftrightarrow\ \mathbf{y = -\frac{5}{3}}$ ; donc avec ( Ox) , on a : $\mathbf{(0\ ; -\frac{5}{3})}$

$\mathbf{y = 0} \Leftrightarrow\ \mathbf{2x^2 - 7x + 5 = 0} \ \Leftrightarrow \mathbf{x\ = 1 \text{ ou } x = \frac{5}{2}}$ ; donc avec **( Oy)**, on a : **(1 ; 0) ;** $\mathbf{(\frac{5}{2}\ ; 0).}$

- Tableau de variation

| X | -∞ | | 2 | | 3 | | 4 | | +∞ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f$'(x) | | + | 0 | − | ‖ | − | 0 | + | |
| $f$ (x) | -∞ ∞ | ↗ | 1 | ↘ | - ‖ +∞ | ↘ | 9 | ↗ | +∞ |

b) Représentation graphique




- Le point (3 ; 5) est un centre de symétrie pour la courbe de $f$, c'est le point de concours des asymptotes.

3) Résolution graphique de l'équation : $\mathbf{2x^2 - (7 + m)x + 5 + 3m = 0}$

$\mathbf{2x^2 - (7 + m)x + 5 + 3m = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 7x + 5 = mx - 3m \Leftrightarrow 2x^2 - 7x + 5 = m(x - 3)}$

$\mathbf{\Leftrightarrow f(x) = \dfrac{2x^2 - 7x + 5}{x - 3} = m}$ équivaut à :

- si $m \in ]-\infty ; 1[$ , il y a deux solutions distinctes,
- si $m = 1$ , il y a une solution double,
- si $m \in ]1 ; 9[$ , il n' y a pas de solution, le nombre de solution est 0.
- si $m = 9$ , il y a une solution double,
- si $m \in ]9 ; +\infty [$ , il y a deux solutions distinctes,

## Exercice 3 :

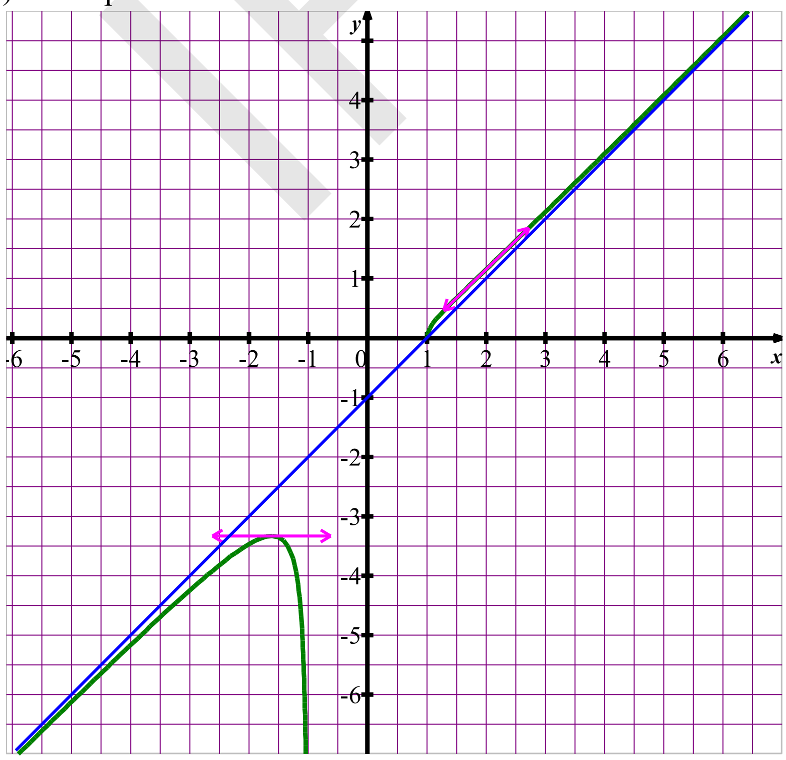
Etudier la fonction $f(x) = x\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$.

**Solution :**

- $D_f = ]-\infty\ ;\ -1[\cup[1\ ;\ +\infty[$ ;
- Limites aux bornes : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ ; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ ; $\lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x) = -\infty$.
- Recherche d'asymptotes : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$ ; $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) - x) = -1$, donc la droite d'équation $y = x - 1$, est asymptote oblique ; en plus : $x = -1$ est asymptote verticale à la courbe de $f$.
- Dérivée : $f$ est dérivable sur son domaine de définition , sa dérivée : $f'(x) = \dfrac{2(x^2+x-1)}{(x+1)^2\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}}$.
- Tableau de variation

| X | $-\infty$ | $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ | | $-1$ | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | 0 | - | | + | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | M | ↘ $-\infty$ | 0 | ↗ | $+\infty$ |

- $M = f\left(\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\right) = -\dfrac{\sqrt{22+10\sqrt{5}}}{2} \approx -3,33$ ; $f(2) = \dfrac{2}{\sqrt{3}} \approx 1,15$ ;
- $f'(1) = +\infty$ ; la tangente au point d'arrêt (1 ; 0) est parallèle à (Oy);
- le point (2 ; 1,15) est un point d'inflexion.



## Exercice 5 :

Soit $f$ la fonction définie par $f(x) = \dfrac{3x+1}{x+2}$ et $\mathscr{C}$ sa représentation graphique.

1) Etudier $f$ et tracer $\mathscr{C}$

2) Montrer que $f$ est une bijection de $\mathbb{R}\backslash\{-2\}$ vers $\mathbb{R}\backslash\{3\}$. Soit $f^{1}$ la bijection réciproque et $\mathscr{C}^{-1}$ sa représentation graphique.

a) Tracer $\mathscr{C}^{-1}$ sans déterminer $f^{1}$

b) Déterminer une équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse 2.

c) Déterminer $f^{-1}$ en donnant l'ensemble de départ, l'ensemble d'arrivée et l'image d'un élément x.

3) Faire l'étude de $f^{-1}$, retrouver $\mathscr{C}^{-1}$ et une équation de la tangente de $\mathscr{C}^{-1}$ au point A.

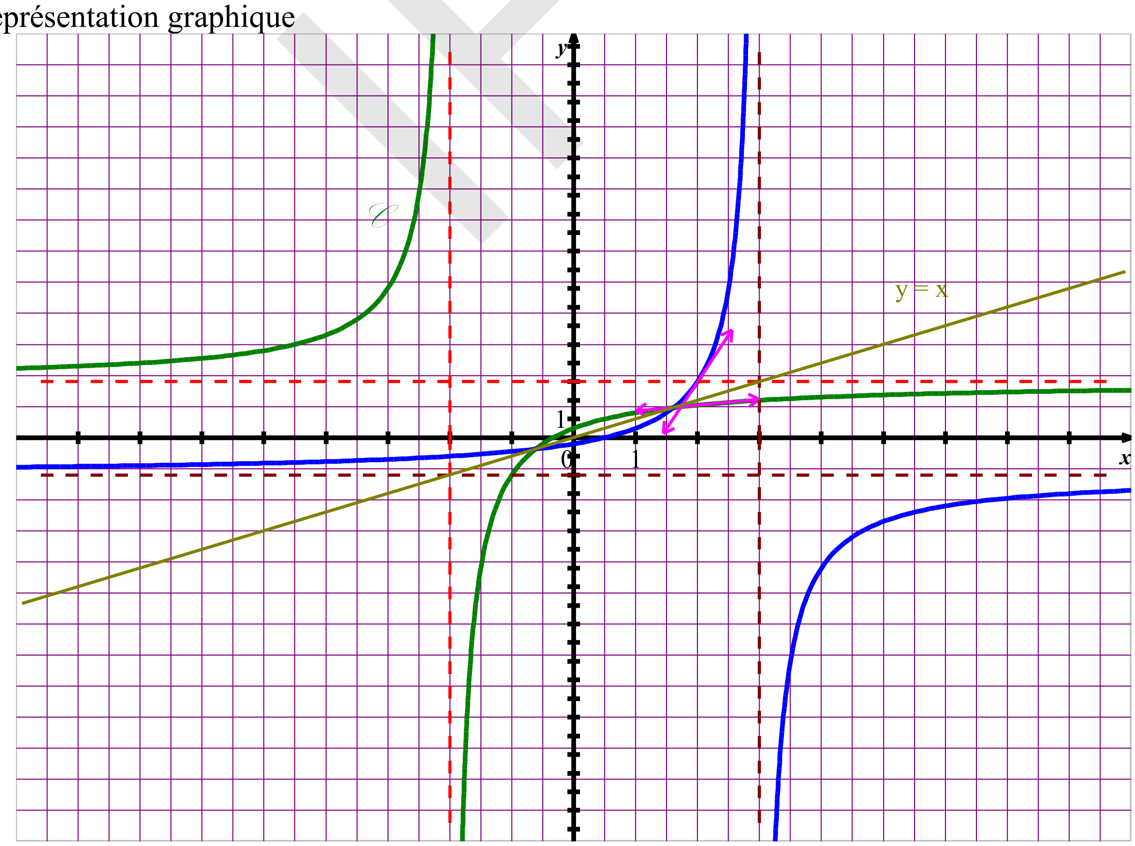
**Solution :**

1) Etude de $f$

- $D_f = \mathbb{R}\backslash\{-2\}$ ;
- Limites aux bornes : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 3;\ \lim\limits_{x\to(-2)^-} f(x) = +\infty;\ \lim\limits_{x\to(-2)^+} f(x) = -\infty;$ .
- Asymptotes : x = -2 est une asymptote verticale ; y = 3 est une asymptote horizontale.
- Dérivée **:** la fonction $f$ est dérivable sur son domaine de définition, sa dérivée $f'(x) = \dfrac{5}{(x+2)^2}$ .
- Tableau de variation

| x | $-\infty$ | 2 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | ‖ | + |
| $f(x)$ | 3 ↗ $+\infty$ | ‖ | $-\infty$ ↗ 3 |

- Représentation graphique



2) D'après le tableau de variation de $f$, on en déduit que $f$ est une bijection de $\mathbb{R}\backslash\{-2\}$ vers $\mathbb{R}\backslash\{3\}$ car elle est strictement croissante et continue sur chaque intervalle.

Donc, elle admet une fonction réciproque $f^{-1}$, de $\mathbb{R}\backslash\{3\}$ vers $\mathbb{R}\backslash\{-2\}$.

a) $\mathscr{C}^{-1}$ est le symétrique de $\mathscr{C}$ par rapport à la 1ère bissectrice ( y = x), (voir représentation).

b) On a : $f'(2) = \frac{5}{(2+2)^2} = \frac{5}{16}$ ; $f(2) = \frac{7}{4}$, donc $y - \frac{7}{4} = \frac{5}{16}(x-2)$, c'est l'équation de la tangente en A d'abscisse 2.

c) Comme : $f(x) = \frac{3x+1}{x+2} = y \Leftrightarrow 3x + 1 = yx + 2y \Leftrightarrow x(3 - y) = 2y - 1 \Leftrightarrow x = \frac{2y-1}{3-y}$

Donc $f^{1}$ : $\mathbb{R}\backslash\{3\} \to \mathbb{R}\backslash\{-2\}$ est définie par : $f^{-1} : x \mapsto \frac{2x-1}{3-x}$ .

- $D_{f^{-1}} = \mathbb{R}\backslash\{3\}$ ;
- Limites aux bornes : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 2$ ; $\lim\limits_{x\to(3)^-} f(x) = +\infty$ ; $\lim\limits_{x\to(3)^+} f(x) = -\infty$ ; .
- Asymptotes : x = 3 est une asymptote verticale ; y = -2 est une asymptote horizontale.
- Dérivée $(f^{1})'(x) = \frac{(x+2)^2}{5}$.
- Tableau de variation

| x | $-\infty$ | 3 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | \|\| | + |
| $f(x)$ | $-2 \nearrow +\infty$ | \|\| | $-\infty \nearrow -2$ |

- La représentation graphique de cette fonction coïncide avec celle obtenue par la symétrie dans la question 1). On en déduit également l'équation de la tangente en A : $y - 3 = \frac{16}{5}(x-2)$.

## B. Exercices divers

**1.** Etudier et représenter les fonctions suivantes : $f(x) = x^2 - 3x + 2$ ; $g(x) = x^2 - 3|x| + 2$ ; $f(x) = x^2(x-1)^2$; $f(x) = |x-2|^3 - |2-x|$.

**2.** Etudier et représenter les fonctions suivantes

a) $f(x) = \dfrac{x-3}{x}$ ; b) $g(x) = \dfrac{x+3}{x}$ ;

c) $f(x) = \dfrac{-3x+1}{|x|-2}$ ; d) $h(x) = \dfrac{|-3x|+1}{x-2}$ ;

**3** Etudier et représenter les fonctions suivantes :

$f(x) = \sqrt{x^2-3x+5}$ ; $g(x) = x\sqrt{2x^2-1}$ ;

$f(x) = 2x - \sqrt{x+1}$ ; $g(x) = 2x + \sqrt{x+1}$ ;

$f(x) = -2x + \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ ; $g(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}$.

**4.** On considère la fonction $f$ définie sur $[0 ; 2]$

Par : $\forall x \in [0 ; 1[$ ; $f(x) = \dfrac{1-3x}{x-2}$ ;

$\forall x \in [1 ; 2]$ ; $f(x) = \sin \dfrac{\pi}{2} x$.

1) Etudier la continuité de $f$ sur $[1 ; 2]$.
2) La fonction $f$ est-elle dérivable pour $x = 1$ ?
3) Etudier la fonction $f$ et construire la courbe représentative $\mathscr{C}$ .

**5.** Soit la fonction numérique $f$ définie par :

$f(x) = x - 3 - \dfrac{2}{x-2}$.

1) a) Quel est l'ensemble de définition de $f$ ?

b) Etudier la variation de $f$. Calculer $f(1)$ et $f(4)$.

c) Quelle est la limite de $g(x) = f(x) - x + 3$ quand x tend vers $+\infty$ et quand x tend vers $-\infty$ ?

En déduire que la courbe représentative de $f$ admet la droite d'équation $y = x - 3$ pour asymptote.

2) Construire la courbe représentative $\mathscr{C}$ de $f$ dans un plan rapporté à un repère ( O ; $\vec{i}$ ; $\vec{j}$ ).

**6.** On considère la fonction $f$ définie par :

$f(x) = \dfrac{(x-1)^2}{x^2+bx+c}$.

1) Déterminer les coefficients b et c pour que la courbe représentative $\mathscr{C}$ de cette fonction
2) $f$ admette pour asymptote $x = -1$ et $x = 2$.
3) Etudier la variation de la fonction $f$ ainsi obtenue et construire sa courbe représentative $\mathscr{C}$ dans un repère orthonormal.
4) On considère la famille des droites $\mathcal{D}_m$ d'équation $y = m$, où m est un paramètre.
   Discuter de l'existence et du nombre de points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ et d'une droite $\mathcal{D}_m$ suivant les valeurs du paramètre m.
   Quelles sont les équations des droites $\mathcal{D}_m$ tangentes à la courbe $\mathscr{C}$ ? Interpréter ces résultats sur la représentation graphique.
5) Il y a généralement deux points d'intersection M et M'. Déterminer les coordonnées du milieu I du segment [MM'] en fonction de m.
   L'élimination de m, entre les coordonnées de I conduit à une équation cartésienne d'une courbe. Représenter cette courbe dans le même repère que $\mathscr{C}$. Cette courbe est-elle l'ensemble E des points I?

**7.** 1.Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$g(x) = 2x^3 + 3x^2 + 1$.

*a.* Etudier les variations de $g$.

*b.* Montrer que $g(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution $\alpha$ et donner une valeur de $\alpha$ à $10^{-1}$ près. En déduire le signe de $g$

2. Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R} / \{1\}$ par :

$f(x) = \dfrac{x^3 + x}{1 - x^3}$.

a. Etudier les variations de $f$
b. Donner l'équation de la tangente T au point d'abscisse 0
c. Etudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ de $f$ et T
d. Tracer $\mathscr{C}_f$ et T.

CHAPITRE 4

# Fonctions $\ell n$ et exp

## Faire savoir

### L'essentiel du chapitre

**I. Fonction logarithme Népérien :**

**1. Notion de fonction logarithme Népérien :**

**Définition :**

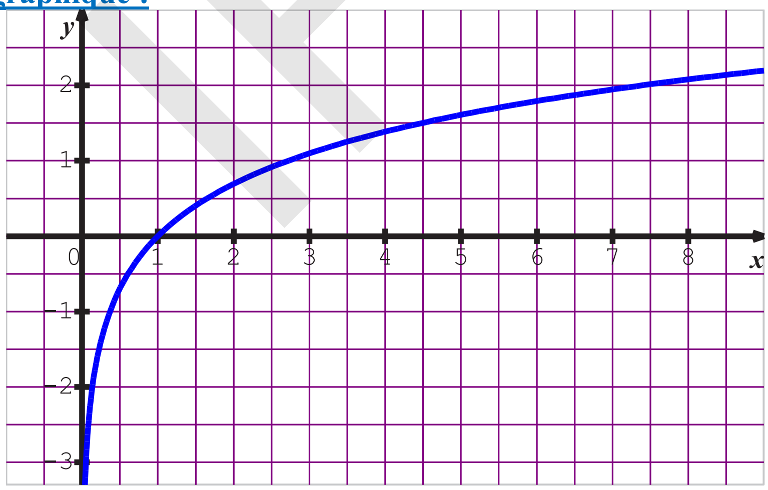
La fonction logartihme néperien notée $\ln$ est la fonction dérivable sur $]0\,;+\infty[$, dont la dérivée est : $x \mapsto \frac{1}{x}$ et vérifiant $\ln 1 = 0$.

**2. Premières propriétés :**

- le domaine de définition de $\ln$ est $]0\,;+\infty[$
- la fonction $\ln$ est strictement croissante sur $]0;+\infty[$
- le signe de $\ln x$ est immédiatement fourni par le sens de variation

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\ln x$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |

**3. Représentation graphique :**




**4. Autres propriétés :**

**Théorème 1 :**

Pour tous réels strictement positifs a et b et pour tout entier relatif **p** on a :

- $\ln ab = \ln a + \ln b$ et et $\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln b$ ; $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$
- $\ln a^{p} = p \ln a$ et $\ln \sqrt{a} = \frac{1}{2}\ln a$ ; $\ln \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n}\ln a$

**Théorème 2 :**
Pour tout réel m l'équation $\ln x = m$ a une solution unique dans $]0\,;+\infty[$. Ainsi la fonction **ln** est une bijection de $]0\,;+\infty[$ dans $\mathbb{R}$.
Le nombre réel solution de l'équation $\ln x = 1$ est noté e et on a : $e = 2,718281828\ldots$
D'où $\ln e^p = p$ ( **e** est appelé base du logarithme néperien).

## 5.Limites :

**Théorème 3 :**

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to0^+} \ln x = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to0^+} x\ln x = 0$
- $\lim\limits_{h\to0^+} \dfrac{\ln(1+h)}{h} = 1$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$
- $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{\ln x}{x-1} = 1$

## 6.Dérivée et Primitive :

**Théorème 4 :**
1) La fonction ln u est dérivable sur tout intervalle où u est dérivable et u(x) > 0, et on a :

$$[\ln u(x)]' = \frac{u'(x)}{u(x)}.$$

2) La fonction $\dfrac{u'}{u}$ admet comme primitive
- $\ln u$ où $u(x) > 0$
- $\ln(-u)$ où $u(x) < 0$

# II. Fonction exponentielle :

## 1.Notion de fonction exponentielle :

**Définition :**
La fonction exponentielle est la bijection réciproque de la fonction logarithme, elle est notée exp(x) ou $e^x$.

Ainsi, $\begin{cases} y = \exp(x) \\ x \text{ réel} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \ln y \\ y > 0 \end{cases}$

## 2.Premières propriétés :

- **exp** est définie sur $\mathbb{R}$ et $\exp > 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.
- $\exp(0) = 1$ ; $\exp(1) = e$ ; $\exp(-1) = \dfrac{1}{e}$.
- Pour tout réel x ; $\ln(\exp x) = x$ et pour tout réel $x > 0$ $\exp(\ln x) = x$

## 3. Autres propriétés :

**Théorème 5 :**
Pour tout réel **a** et **b** et pour tout entier **n** :

- $\exp(a+b) = \exp(a).\exp(b)$.
- $\exp(a-b) = \dfrac{\exp a}{\exp b}$ et $\exp(-b) = \dfrac{1}{\exp b}$
- $\exp(na) = [\exp(a)]^n$ ; $n \in \mathbb{Z}$ et $\exp(\dfrac{a}{n}) = \sqrt[n]{\exp(a)}$ ; $n \geq 1$.

## 4. Limites :

**Théorème 6 :**

- $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ ;
- $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ ;
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ ;
- $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$ ;
- $\lim\limits_{h\to0} \dfrac{e^h - 1}{h} = 1$

## 5. Dérivée :

exp est dérivable (donc continue) sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x : $\mathbf{exp'(x) = exp(x) = e^x}$.

L'approximation affine au voisinage de **0** de la fonction exponentièlle est : $h : \mapsto \mathbf{1+h}$.

Si **u** est une fonction dérivable sur un intervalle **I**, alors $\mathbf{e^u}$ est dérivable sur **I** et pour tout **x** de **I** :

$\mathbf{(e^u)'(x) = u'(x)e^{u(x)}}$.

## III. Puissance d'un nombre strictement positif :

Pour tout a> 0 et pour tout réel b on pose : $\mathbf{a^b = e^{b\ln a}}$ ( $\mathbf{a^b}$ se lit **a** puissance **b**).

Cette définition donne un sens à des expressions telles que : $\mathbf{3^{1,8}}$ ; $\mathbf{51^{-\sqrt{2}}}$ ; $\mathbf{\pi^e}$ ; $\mathbf{2^\pi}$.

Mais le logarithme exige dans $\mathbf{a^b}$ que : ( **a> 0**).

### 1. Règle de calcul :

Pour tous réels **a** et **a'** strictement positifs et quels que soient **b** et **c** :

- $\mathbf{a^b \times a^c = a^{b+c}}$ ; $\mathbf{a^{-b} = \dfrac{1}{a^b}}$ ; $\mathbf{a^b \times a'^b = (a\, a')^b}$; $\mathbf{(a^b)^c = a^{bc}}$; $\mathbf{\ln\left(a^b\right) = b\ln a}$

**Définition :**

Pour tout réel **a** strictement positif $x \mapsto a^x$, appelée fonction exponentielle de base **a** est la fonction $\mathbf{x \mapsto e^{x\ln a}}$. Elle est définie et à valeurs positives sur $\mathbb{R}$, elle est dérivable sur $\mathbb{R}$, dont la fonction dérivée : $\mathbf{x \mapsto (\ln a)a^x}$

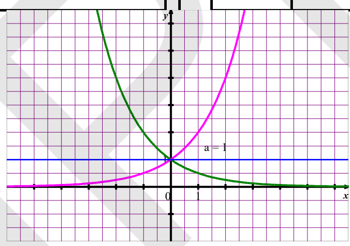
### 2. Tableaux de variations, courbes représentatives :

a > 1

| x | $-\infty$ | 1 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $a^x$ | 0 ↗ | | $+\infty$ |

0 < a < 1

| x | $-\infty$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $a^x$ | $+\infty$ ↘ | 0 |



### 3. Croissance comparée des fonctions exponentielles, puissances entières et logarithme :

Pour tout entier naturel n ;

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^n} = 0$

**Fonction logarithme de base a :**

- On appelle fonction logarithme de base $\mathbf{a\left(a>0 \text{ et } a\neq 1\right)}$ la fonction notée $\mathbf{\log_a}$ et définie sur

] 0 ; + ∞ [ par : $\mathbf{\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}}$ ; $\mathbf{\log_a}$ est dérivable sur] 0 ; + ∞ [ et sa dérivée est $\mathbf{\left(\log_a x\right)' = \dfrac{1}{x\ln a}}$

- Sur $\mathbf{]0,+\infty[}$, la fonction $\mathbf{\log_a}$ est strictement croissante si **a>1** ( resp. décroissante $\mathbf{a \in ]0;1[}$ )
- On appelle fonction logarithme décimal ( **a=10** )la fonction notée log et définie sur **]0 ;+∞[**

  par : $\mathbf{\log x = \dfrac{\ln x}{\ln 10}}$.

**Remarque :**

On peut procéder autrement : on définit la fonction exponentielle comme étant l'unique fonction $\boldsymbol{f}$ dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que : $\boldsymbol{f' = f}$ et $\boldsymbol{f(0) = 1}$, puis on définit la fonction logarithme népérien comme étant la bijection réciproque de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$.

## Savoir-faire

### A. Applications :

**Exercice 1 :**

a) Résoudre l'équation $\ln\left(x^2+x+1\right)=0$ et l'inéquation $\ln\left(x^2+x+1\right)<0$.

b) Simplifier $\ln a^2b^3$ ; $6\ln\frac{1}{\sqrt[3]{a^2b}}$ ; $\frac{\ln(\sqrt{5}+1)+\ln(\sqrt{5}-1)}{2}$.

c) Résoudre : • $\ln\left(x-2\right)\left(x-1\right)=\ln 2$ • $\ln\left(x-2\right)+\ln\left(x-1\right)=\ln 2$.

**Solution :**

a) Résolution demandée

- $\ln\left(x^2+x+1\right)=0 \Leftrightarrow x^2+x+1=1 \Rightarrow x(x+1)=0$ ; $S=\{0\ ;\ -1\}$.
- $\ln\left(x^2+x+1\right)<0 \Rightarrow x^2+x+1<1 \Rightarrow x(x+1<0$ ; $S=]0\ ;\ 1[$.

b) Simplification cherchée

- $\ln(a^2b^3)=\ln a^2+\ln b^3=2\ln a+3\ln b$
- $6\ln(\frac{1}{\sqrt[3]{a^2b^3}})=-6\ln(\sqrt[3]{a^2b^3})=-2\ln(a^2b^3)=-4\ln a-6\ln b$
- $\frac{\ln(\sqrt{5}+1)+\ln(\sqrt{5}-1)}{2}=\frac{1}{2}\ln\left((\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)\right)=\frac{1}{2}\ln 4=\ln 2$.

c) Résolution demandée

- $\ln\left(x-2\right)\left(x-1\right)=\ln 2$ ; l'ensemble de définition **E = ]-∞ ; 1[ ∪ ]2 ; +∞[**. Ainsi, $x\in$ **E** ; et **(x-2) (x-1) = 2 ⇔ x∈ E et x = 0 et x = 3**. L'équation (1) à pour solution **0** et **3**.
- $\ln\left(x-2\right)+\ln\left(x-1\right)=\ln 2$ ; l'équation (2) n'admet que **x = 3** pour solution (elle n'est définie que pour **x> 2**).

**Exercice 2 :**

a) Simplifier les écritures :

• $a=\ln(\sqrt{e})$ • $b=e^{-\ln 3}$ • $c=e^{\ln 2-\ln 5}$ • $d=\ln\sqrt{e^3}$ • $e=\sqrt[3]{e^4}\times(\sqrt[3]{e})^2$ • $f=\frac{e^2\sqrt{e}}{e^{1,2}\sqrt[3]{e}}$

b) Résoudre les équations.

• $\left(e^x-1\right)\left(e^x-2\right)=0$ ; • $e^{-x^2-12x-35}=1$ ; • $e^{2x}+e^x-42=0$.

**Solution :**

a) Simplification cherchée

- $a=\ln(\sqrt{e})=\frac{1}{2}\ln e=\frac{1}{2}$ ;
- $b=e^{\ln\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}$ ;
- $c=e^{\ln 2-\ln 5}=\frac{e^{\ln 2}}{e^{\ln 5}}=\frac{2}{5}$ ;
- $d=\ln\sqrt{e^3}=\ln e^{\frac{3}{2}}=\frac{3}{2}$
- $f=\sqrt[3]{e^4}\times(\sqrt[3]{e})^2=\sqrt[3]{e^4}\times\sqrt[3]{e}\times\sqrt[3]{e}=\sqrt[3]{e^4\times e\times e}=\sqrt[3]{e^6}=e^2$ ;
- $g=\frac{e^2\sqrt{e}}{e^{1,2}\sqrt[3]{e}}=\frac{e^2e^{\frac{1}{2}}}{e^{1,2}e^{\frac{1}{3}}}=\frac{e^{\frac{5}{2}}}{e^{\frac{23}{15}}}=e^{\frac{5}{2}-\frac{23}{15}}=e^{\frac{29}{30}}$.

b) Résolution demandée

- $\left(e^x-1\right)\left(e^x-2\right)=0 \Rightarrow e^x=1$ ou $e^x=2 \Rightarrow x=0$ ou $x=\ln 2$.
- $e^{-x^2-12x-35}=1 \Rightarrow -x^2-12x-35=0 \Rightarrow x^2+12x+35=0 \Rightarrow x=-7$ ou $x=-5$.
- $e^{2x}+e^x-42=0$ ; Posons $t=e^x \Rightarrow t^2+t-42=0 \Rightarrow t=6 \Rightarrow x=\ln 6$ ; ou $t=-7$ (rejetée car t > 0)

## Exercice 3 :

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1) $f(x)=\ln(x^2-1)$ ; 2) $f(x)=\ln(\cos x)$ ; 3) $f(x)=e^{x^2+2x+1}$ ; 4) $f(x)=e^{\sin x}$.

**Solution :**

1) $f$ est définie sur $]-\infty ; -1[ \cup ]1 ; +\infty[$ et

$f'(x) = \dfrac{2x}{x^2-1}$ ;

3) $f$ est définie sur $\mathbb{R}$ et $f'(x)=(2x+2)e^{x^2+2x+1}$.

2) $f$ est définie sur $\mathbb{R}\setminus\left\{k\dfrac{\pi}{2} ; k\in\mathbb{Z}^*\right\}$ et

$f'(x)=\dfrac{-\sin x}{\cos x}=-\tan x.$

4) $f$ est définie sur $\mathbb{R}$ et $f'(x)=(\cos x)e^{\sin x}$.

## Exercice 4 :

Chercher les primitives des fonctions $f$ sur $I$ :

1) $f(x)=\tan x$ $(x \in ]-\dfrac{\pi}{2} ; \dfrac{\pi}{2}[\ )$ ; 2) $f(x)=\dfrac{1}{1+e^x}$ $(x\in\mathbb{R})$ ; 3) $f(x)=\dfrac{1}{3^X}$ $(x\in\mathbb{R})$.

**Solution :**

1) $f(x)=\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}=\dfrac{-(\cos x)'}{\cos x}\Rightarrow F(x)=-\ln\cos x+c$

2) $f(x)=\dfrac{1}{1+e^x}$ ; $1-f(x)=\dfrac{e^x}{1+e^x}\Rightarrow F(x)=x-\ln(1+e^x)+c$

3) $f(x)=\dfrac{1}{3^x}=(\dfrac{1}{3})^x=e^{x\ln\frac{1}{3}}=e^{(-\ln 3)x}\Rightarrow F(x)=\dfrac{-1}{\ln 3}e^{(-\ln 3)x}+c=\dfrac{-1}{\ln 3}\times\dfrac{1}{3^x}+c$

## Exercice 5 :

Etudier et représenter graphiquement les fonctions :

1) $f(x)=x-1+\ln\left(\dfrac{x-2}{x+2}\right)$ ; 2) $f(x)=(x+1)^2e^{-x}$

**Solution :**

1) $f(x)=x-1+\ln\left(\dfrac{x-2}{x+2}\right)$

- $D_f = ]-\infty; -2[ \cup ]2 ; +\infty[$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to(-2)^-} f(x)=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=-\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

$f'(x)=1+\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{x^2}{x^2-4}$, $f(x)' > 0$ et donc $f(x)$ est croissante sur $D_f$.

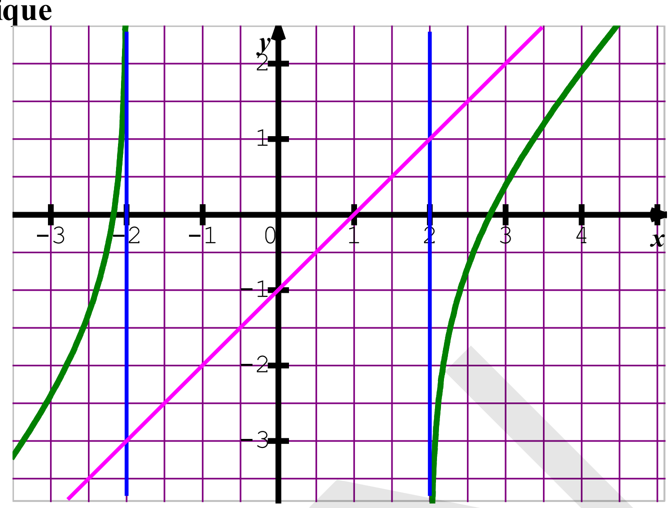
- $x = -2$ ; $x = 2$ sont des asymptotes verticales. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\dfrac{x-2}{x+2}\right)=0\Rightarrow y=x-1$ est une asymptote oblique à $\mathscr{C}$ en $+\infty$. De plus : sur l'intervalle $]2 ; +\infty[$ ; $\dfrac{x-2}{x+2}<1\Rightarrow$

$\ln\left(\dfrac{x-2}{x+2}\right)<0$ ; il en découle que $\mathscr{C}_f$ est au dessous de $\Delta$.

- Tableau de variation

| x | $-\infty$ | | $-2$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)'$ | | $+$ | | | | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $+\infty$ | | $-\infty$ | ↗ | $+\infty$ |

**Représentation graphique**

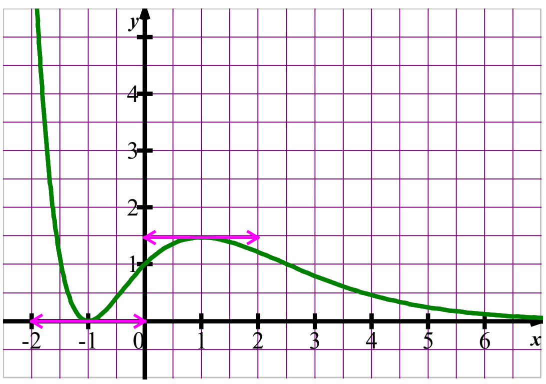


2) $\mathbf{f(x)=(x+1)^2e^{-x}}$

- $D_f=\mathbb{R}$ • $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ • $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$
- $f'(x)=2(x+1)\,e^{-x}-(x+1)^2\,e^{-x}\Rightarrow f'(x)=(1-x^2)e^{-x}$
- $f'(x)$ est du signe de $(1-x^2)$.
- **Tableau de variation**

| x | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)'$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $0$ | ↗ | $\frac{4}{e}$ | ↘ | $0$ |

- $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$ ; $\mathscr{C}_f$ admet une branche parabolique de direction (Oy).
- Représentation graphique



## B. Exercices divers :

**1.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des équations proposées

1) $\ln(3+x)=\ln 3+\ln x$ ; 2) $\ln(3x)=3\ln x$

3) $\ln x+\ln(x-2)=\ln(x+10)$

4) $\ln(x^2-2x)=\ln(x+10)$.

**2.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation :

$\ln^2 x-\ln x-6>0$.

**3.** Déterminer les limites éventuelles de la fonction $f$ proposée en a :

1) $f(x)=\ln(9-x^2)$ ; $a=3$ ;

2) $f(x)=\ln(1-\ln x)$ ; $a=e$ ;

3) $f(x)=x-\ln x$ ; $a=+\infty$ ;

4) $f(x)=\dfrac{x^2}{\ln x}$ ; $a=0$.

**4.** Déterminer la fonction dérivée de f dans les cas suivants :

1) $f(x)=x\ln x$ ; 2) $f(x)=\ln x(e^x-1)$ ;

3) $f(x)=\ln|x|$

**5.** a) Justifier le résultat du cours :

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\ln(1+h)}{h}=1$

b) En déduire la limite de $x\ln(1+\dfrac{1}{x})$ quand $x$ tend vers $+\infty$.

**6.** On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$ ; En déduire :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$ ; b) $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x$

**7.** On pose pour tout **n** :

$S_n=\ln 2+\ln\left(\dfrac{3}{2}\right)+\ln\left(\dfrac{4}{3}\right)+\dots+\ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$.

Calculer : $S_1$ ; $S_2$ ; $S_3$. Que vaut $S_{2014}$?

**8.** Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x)=\ln(1+e^x)$, $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

1. Déterminer les limites de **f** aux bornes.
2. Etudier le sens de variation de **f**. Préciser le signe de **f**.
3. Démontrer que pour tout réel **x** :

$f(x)=x+f(-x)$.

En déduire que la courbe $\mathscr{C}$ admet en $+\infty$ une asymptote notée $\Delta$. Préciser la position de $\mathscr{C}$ par rapport à la droite $\Delta$ et $\mathscr{C}$.

4. Tracer $\Delta$ et $\mathscr{C}$.

**9.** Soit $f(x)=\dfrac{\ln(1-x)}{\ln x}$

a) Déterminer l'ensemble de définition et le signe de **f**.
b) Déterminer les limites de **f** aux bornes de $D_f$
c) Démontrer que **f** est strictement croissante.

**10** Soit x un entier naturel non nul et n le nombre de chiffres de l'écriture décimale de x.

Justifier l'encadrement : $n-1\le \log x\le n$

2) En déduire le nombre de chiffres d'écriture décimale de $2^{2014}$.

**11** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$e^{2x}+e^x-2=0$.

**12** Démontrer que la fonction $f(x)=\dfrac{1-e^x}{1+e^x}$ est impaire.

**13** Déterminer la limite éventuelle de **f** en **a** :

1) $f(x)=\sqrt{e^{3x}-1}$ ; $a=0$ ;

2) $f(x)=\dfrac{e^x+3}{e^x+2}$ ; $a=+\infty$ ;

3) $f(x)=e^x\sin x$ ; $a=-\infty$ ;

4) $f(x)=e^x-x$ ; $a=+\infty$

**14** 1) Justifier le résultat du cours $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{e^h-1}{h}=1$

2) En déduire : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-3x}-1}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x(e^{\frac{1}{x}}-1)$

**15** Déterminer la dérivée de la fonction $f$ proposée :

1) $f(x)=e^{2x}+\frac{1}{e^x}$;

2) $f(x)=x^3e^{-x}$;

3) $f(x)=e^{-x^2+x}$.

**16** Le but de l'exercice est d'obtenir l'encadrement polynomial suivant de la fonction exponentielle :

Pour tout $x \le 0$ ; $1+x \le e^x \le 1+x+\frac{x^2}{2}$.

On note $f$ la fonction : $x \mapsto 1+x+\frac{x^2}{2}-e^x$.

1) Déterminer $f'$ et $f''$. Quelle remarque peut-on faire sur les valeurs prises en 0 par $f$ ; $f'$ et $f''$ ?

2) Compléter le tableau suivant :

| x | $-\infty$ 0 |
|---|---|
| Signe de $f''$ | |
| Sens de $f'$ | |
| Signe de $f'$ | |
| Sens de $f$ | |
| Signe de $f$ | |

En déduire le résultat souhaité

3) Quel encadrement de $e^{-0,01}$ obtient-t-on ?

**17** Résoudre dans $\mathbb{R}$ :

1) $3^{2x}=2^{3x}$ ; 2) $3^{2x}-3^{x+1}+2=0$

**18** Dresser le tableau de variation et tracer l'allure de la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction $f$ :

1) $f(x)=2,3^x$ ; 2 $f(x)=\frac{1}{2^x}$ ; 3) $f(x)=\frac{1}{3}e^{x\ln 3}$

**19** m étant un nombre réel, on note $f_m$ la fonction définie sur ]0 ; +∞[ par :

$f_m(x)=\frac{x^2-1}{2}-m\ln x$ et $\mathscr{C}_m$ sa courbe.

1.a) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f_m(x)$

b) Suivant les valeurs de **m** déterminer $\lim\limits_{x\to 0} f_m(x)$.

2.) Déterminer $f'_m(x)$ ;

Donner suivant les valeurs de m les différents tableaux de variations.

3.) Démontrer que toutes les courbes $\mathscr{C}_m$ passent par un point A.

4.) Tracer $\mathscr{C}_0$ ; $\mathscr{C}_4$ et $\mathscr{C}_{-1}$ sur un même graphique.

**20** Soit la fonction : $f(x)=\frac{-x^2\ln x}{1+x}$ ; $0<x\le 1$ et $f(0)=0$.

A) Etude d'une fonction auxiliaire :

Soit $u(x)=\frac{1+x}{2+x}+\ln x$ ; pour $0<x\le 1$.

1) Etudier les variations de **U(x)** ; donner **U(1)** et $\lim\limits_{x\to 0} U(x)$.

En déduire que $U(x)=0$ admet une solution β telle que $0,54 \le \beta \le 0,55$

B) Etude de la fonction $f$ et sa représentation

1) Montrer que $f$ est continue en **0** ; est-elle dérivable en **0** ?

2 ) Dresser le tableau de variation de $f$.

3) Construire la représentation graphique de $f$ dans un repère orthonormal avec les tangentes aux points 0 et 1 (unité 10 cm sur (Ox) et 20cm sur (Oy)).

**21.** On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$f(x)=2x-1+\frac{1}{e^x-1}$. On note $C_f$ sa représentation graphique dans le plan rapporté à un repère orthogonal (O, i, j)

1 )Expliquer pourquoi la fonction $f$ est définie sur $\mathbb{R}^*$.

2) Déterminer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$.

En déduire que $C_f$ admet une asymptote verticale dont on précisera l'équation.

3) Déterminer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

4) Déterminer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)-(2x-1))$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x)-(2x-2)]$.

En déduire que $C_f$ admet une asymptote oblique $\Delta_+$ en $+\infty$ et une asymptote oblique $\Delta_-$ en $-\infty$ dont on précisera les équations.

5) Montrer que la fonction dérivée $f'$ de $f$ est définie par : $f'(x)=\frac{2e^{2x}-5e^x+2}{(e^x-1)^2}$) ; x ∈$\mathbb{R}^*$.

6) Résoudre l'inéquation : $2e^{2x}-5e^x+2>0$.

7) Dresser le tableau de variations de la fonction $f$ sur $\mathbb{R}^*$.

8) Tracer les droites $\Delta_+$ et $\Delta_-$ puis la courbe $C_f$ dans le repère.

CHAPITRE 5

# Suites numériques*

## Faire savoir

## L'essentiel du chapitre

### I. Généralités sur les suites :

#### 1. Notion de suite numérique :

**Définition :**

On appelle suite numérique toute fonction de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$ .

En général, une suite numérique $(U_n)$ est déterminée par l'un des procédés suivants :

a) Une formule explicite permettant de calculer $U_n$ en fonction de n.

**Exemple 1 :**

$\mathbf{U : n \mapsto (-1)^n}$ , ou par exemple, encore la suite : $\mathbf{f : n \mapsto f(n)}$ ; où **f**est une fonction usuelles ; ainsi pour la suite $\mathbf{U : n \mapsto \sin(n^2)}$ ; on a $\mathbf{U_n = f(n)}$ où $f$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = \sin x^2$ ; U est la restriction à $\mathbb{N}$ de cette fonction $f$.

b) Le premier terme et une formule de récurrence.

**Exemple 2 :**

La suite définie par : $\mathbf{U_0 = 1}$**, et** $\forall$ $\mathbf{n \in \mathbb{N}}$ ; $\mathbf{U_{n+1} = 1 + (U_n)^2}$.

Lorsque E désigne l'ensemble de définition d'une suite $\mathbf{(U_n)}$, on peut la noter $\mathbf{(U_n)\ n \in E}$.

#### 2. Raisonnement par récurrence :

Le principe de récurrence peut s'énoncer ainsi, Soit P(n) une propriété de l'entier n ;

Si P(0) est vraie et si pour tout entier naturel p, P(p) implique P(p+1), alors P(n) est vraie pour tout entier naturel n.

Démontrer par récurrence qu'une propriété est vraie pour tout naturel n se fait en deux étapes :

- ✓ On prouve qu'elle est vraie pour n = 0; (c'est-à-dire au rang 0) ;
- ✓ On montre qu'elle est héréditaire, c'est-à-dire que si elle est vraie pour un naturel p quelconque, alors elle est vraie pour p + 1.

**Exemple 3 :**

Soit la suite $(U_n)$ définie par : $\mathbf{U_0 = 2}$, et pour tout naturel **n**, $\mathbf{U_{n+1} = 2U_n - 3}$. Montrons par récurrence que pour tout naturel **n**, $\mathbf{U_n = 3 - 2^n}$.

- **1$^{ere}$ étape :** Vérifions l'égalité au rang **0**. On a : $\mathbf{3 - 2^0 = 3 - 1 = 2}$ ; et $\mathbf{U_0 = 2}$ ; donc $\mathbf{U_0 = 3 - 2^0}$, d'où $\mathbf{U_n = 3 - 2^n}$ est vraie pour $\mathbf{n = 0}$.
- **2$^{ème}$ étape**: Soit p un naturel, supposons que l'égalité est vraie au rang p :$\mathbf{U_p = 3 - 2^p}$ .
  Par définition de **U**, on a : $\mathbf{U_{p+1} = 2U_p - 3}$, donc $\mathbf{U_{p+1} = 2(3 - 2^p) - 3 = 6 - 2^{p+1} - 3 = 3 - 2^{p+1}}$ ,
  donc, $\mathbf{U_{p+1} = 3 - 2^{p+1}}$ ; d'où ;$\mathbf{U_n = 3 - 2^n}$ est vraie pour $\mathbf{n = p + 1}$.

D'après le principe de récurrence, on peut donc conclure pour tout naturel n, $\mathbf{U_n = 3 - 2^n}$.

#### 3. Suite majorée, suite minorée, suite bornée :

Soit **(Un)** une suite définie sur $\mathbb{N}$.

- $\mathbf{(U_n)}$ est majorée si et seulement s'il existe un réel **M**, tel que pour tout naturel **n**, $\mathbf{U_n \leq M}$.
  On dit que M est un majorant de $(U_n)$.
- $\mathbf{(U_n)}$ est minorée si et seulement s'il existe un réel m, tel que pour tout naturel n, $\mathbf{U_n \geq m}$.
  On dit que m est un minorant de $\mathbf{(U_n)}$.
- $\mathbf{(U_n)}$ est bornée si et seulement si, elle est à la fois majorée et minorée.

***Certains passages dans ce chapitre font appel aux fonctions logarithme et exponentielle.***

**Exemple 4 :**

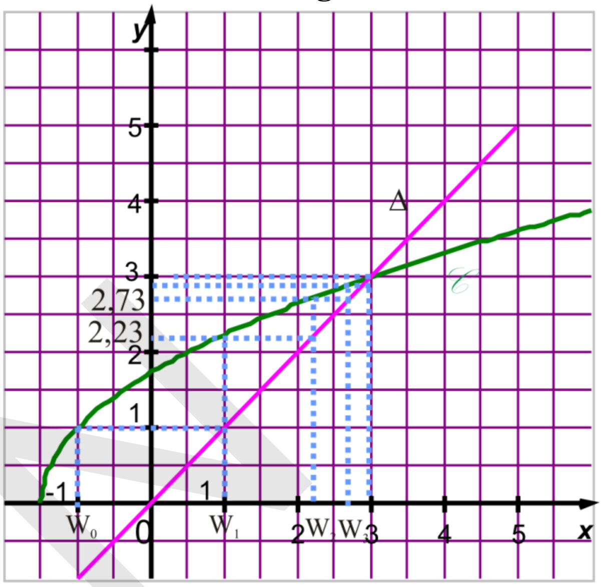
- Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, la suite de terme général $U_n = \dfrac{\sin n}{n^2}$ .

  Donc, $\forall n\in\mathbb{N}^*, |U_n| \leq \dfrac{1}{n^2}$, d'où $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $|U_n| \leq 1$, donc $-1 \leq U_n \leq 1$.

  La suite $(U_n)$ est majorée par 1 et minorée par -1, donc elle est bornée.

- Soit $(W_n)$ la suite définie par $W_0 = -1$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $W_{n+1} = \sqrt{2W_n + 3}$.

  La courbe $\mathscr{C}$ ci-dessous est la représentation graphique de la fonction $g : x \mapsto \sqrt{2x+3}$ et $(\Delta)$ est la droite d'équation $y = x$.




  On en déduit, une construction sur **(OI)** des premiers termes de la suite $(W_n)$, ce qui permet de conjecturer que :
  $\forall n\in\mathbb{N}, -1\leq W_n \leq 3$.
  Démontrons ce résultat, par récurrence.
  On a : $W_0 = -1$, donc $-1 \leq W_0 \leq 3$ ;
  donc $-1 \leq W_n \leq 3$ est vraie pour $n = 0$,
  Supposons qu'elle est vraie pour $n = k$,
  donc $-1 \leq W_k \leq 3$.
  La fonction $g : x \mapsto \sqrt{2x+3}$ est croissante sur **[-1 ; 3]**, donc :
  $-1 \leq W_k \leq 3 \Rightarrow g(-1) \leq g(W_k) \leq g(3)$
  $\Rightarrow\ 1 \leq W_{k+1} \leq 3$.
  Donc, $-1 \leq W_n \leq 3$ est vraie pour $n = k + 1$,
  donc, $\forall n\in\mathbb{N}$ ; $-1 \leq W_n \leq 3$ ; on en déduit que la suite est majorée par 3 et minorée par -1, donc la suite $(W_n)$ est bornée.

**Remarque 1 :**

1. Certaines suites ne sont pas bornées, c'est le cas de la suite de terme général $U_n = n^2 - 1$ qui est minorée par **-1**, mais n'est pas majorée.
2. Pour déterminer qu'une suite $(U_n)$ est bornée, on peut utiliser l'un des procédés suivants :
   - Encadrer le terme général de la suite par deux nombres réels.
   - Etudier la fonction **f**, lorsque la suite est du type $U_n = f(n)$.
   - Faire un raisonnement par récurrence.

## 4. Sens de variation d'une suite :

- Une suite $(U_n)$ est croissante si et seulement si, pour tout **n**, $U_n \leq U_{n+1}$
- Une suite $(U_n)$ est décroissante si et seulement si, pour tout **n**, $U_n \geq U_{n+1}$
- Une suite $(U_n)$ est strictement croissante si et seulement si, que pour tout **n,** $U_n < U_{n+1}$
- Une suite $(U_n)$ est strictement décroissante si et seulement si, pour tout **n,** $U_n > U_{n+1}$
- Une suite $(U_n)$ est constante si et seulement s'il existe un réel k tel que : pour tout **n**, $U_n = k$
- Une suite $(U_n)$ est monotone si et seulement si elle est croissante ou décroissante.

**Exemple 5 :**

- Soit $(U_n)n\in\mathbb{N}^*$, la suite de terme général : $U_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$. On a : $\forall n\in\mathbb{N}^*$ ;

  $U_{n+1}-U_n=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\frac{1}{n+1}$, Or, $\forall n\in\mathbb{N}^*$ ; $\frac{1}{n+1}>0$, donc, $\forall\ n\in\mathbb{N}^*$ ; $U_{n+1}>U_n$ .

  On en déduit que la suite $(U_n)$ est strictement croissante.

- Soit $(V_n)n\in\mathbb{N}^*$, la suite de terme général : $V_n=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\ldots\frac{2n-1}{2n}$ ;

  $V_{n+1}=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\ldots\frac{2n-1}{2n}\times\frac{2n+1}{2n+2}$ ; la suite $(V_n)$ est strictement positive et on a : $\forall n\in\mathbb{N}^*$ ;

  $\frac{V_{n+1}}{V_n}=\frac{2n+1}{2n+2}$ ; Or $\forall n\in\mathbb{N}^*$ ; $\frac{2n+1}{2n+2}<1$, donc, $\forall n\in\mathbb{N}^*$ ; $V_{n+1}<V_n$, on en déduit que la suite $(V_n)$ est strictement décroissante.

- Soit $(T_n)$, la suite définie par $T_0=0$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $T_{n+1}=e^{T_n}$.

  Démontrons par récurrence que cette suite est strictement croissante.

  On a : $T_1=e^{T_0}=e^0=1$ ; d'où $T_1>T_0$. Soit k un entier naturel, supposons que : $T_{k+1}>T_k$.

  La fonction $g$ : $x\mapsto e^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc $T_{k+1}>T_k\Rightarrow g(T_{k+1})>g(T_k)$

  $\Rightarrow e^{T_{k+1}}>e^{T_k}\Rightarrow T_{k+2}>T_{k+1}$. Donc, $\forall n\in\mathbb{N}$, $T_{n+1}>T_n$;on en déduit que $(T_n)$ est strictement croissante.

**Remarque 2 :**

Pour démontrer qu'une suite $(U_n)$ est monotone, on peut utiliser l'un des procédés suivants :

- Etudier le signe de $U_{n+1}-U_n$
- Comparer à l'unité le quotient $\frac{U_{n+1}}{U_n}$, lorsque la suite $(U_n)$ est strictement positive.
- Etudier le sens de variation de la fonction **f**, lorsque la suite est du type $U_n=f(n)$.
- Faire un raisonnement par récurrence

## 5. Suites arithmétiques, Suites géométriques :

On rappelle dans le tableau ci-dessous les principaux résultats établis en classe de 6$^{\text{ième}}$ concernant les suites arithmétiques et géométriques.

| | **Suites arithmétiques** | **Suites géométriques** |
|---|---|---|
| Premier terme | $U_0$ | $U_0$ |
| Raison | $r\ (r\in\mathbb{R})$ | $q\ (q\in\mathbb{R})$ |
| Formule de récurrence | $U_{n+1}=U_n+r$ | $U_{n+1}=q\,U_n$ |
| Formule explicite | $U_n=U_0+nr$<br>$U_n=U_p+(n-p)r$ | $U_n=U_0q^n$<br>$U_n=U_pq^{n-p}$ |
| Somme des n premiers termes $(U_0+U_1+\ldots+U_{n-1})$ | $\frac{n}{2}(U_0+U_{n-1})$ | $U_0\frac{1-q^n}{1-q}$ ; $(q\neq1)$ |

**On a en particulier,**

- $1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ ; $1+a+a^2+\ldots+a^{n-1}=\frac{1-a^n}{1-a}(a\neq1)$.

**Exemple 6 :**

U est une suite arithmétique de raison r, On pose : $S_n = U_0 + U_1 + \ldots + U_{n-1}$ ( $n \in \mathbb{N}^*$ )
Sachant que $U_0 = 2$, $r = 6$. Calculons $U_{29}$ et $S_{30}$.

$$U_{29} = U_0 + 29r = 2 + 29 \times 6 = 2 + 174 = 176 \;;\; S_{30} = 30\frac{U_0 + U_{29}}{2} = 30\frac{2+176}{2} = 2670.$$

**Exemple 7 :**

Calculons le 1[er] terme de la suite géométrique **V** de raison **-3** telle que $V_4 = 81$.

$$V_3 = \frac{V_4}{-3} = -27 \;;\; V_2 = \frac{V_3}{-3} = \frac{-27}{-3} = 9. \;;\; V_1 = \frac{V_2}{-3} = \frac{9}{-3} = -3. \;\; V_0 = \frac{V_1}{-3} = \frac{-3}{-3} = 1.$$

**Exemple 8 :**

V est une suite géométrique de raison q. On pose $S_n = V_0 + V_1 + \ldots + V_{n-1}$ ; ($n \in \mathbb{N}^*$).

- Sachant, que $V_0 = 2$ ; $q = 5$, calculons $V_3$ et $S_4$.

$$V_3 = V_0\, q^3 = 2 \times 5^3 = 250 \;;\; S_4 = V_0\frac{1-q^4}{1-q} = 2\frac{1-5^4}{1-5} = 312.$$

### 6. Suites périodiques :

**Définition :**

Dire qu'une suite **U** est périodique de période p, signifie que p est un naturel non nul tel que : pour tout naturel **n** : $U_{n+p} = U_n$.

**Exemple 9 :**

Soit U la suite ($U_n$) définie par : $U_{3n} = 2$ et $U_{3n+1} = -3$ et $U_{3n+2} = 7$. Cette suite $U_n$ est périodique de période **3** ; $U_0 = 2$ ; $U_1 = -3$ ; $U_2 = 7$ ; $U_3 = 2$ ; $U_4 = -3$ ; $U_5 = 7$ ; $U_6 = 2, \ldots$

## II. Limite d'une suite :

### 1. Suite convergente :

**Définition :**

- Une suite est convergente si et seulement si, elle admet une limite finie réelle.
- Une suite est divergente si et seulement si, elle n'est pas convergente (c'est-à-dire si sa limite est $+\infty$ ou $-\infty$, ou si elle n'admet pas de limite).

**Remarque 3 :**

On admet que si une suite admet une limite, cette limite est unique.

**Exemple 10 :**

- La suite $n \mapsto \frac{1}{n}$ a pour limite 0, donc elle est convergente vers 0.
- Soit la suite U définie sur $\mathbb{N}$ par $U_n = \frac{1}{n!}$, pour tout entier naturel non nul **n**, on a : $n! \geq n > 0$,

  d'où $0 < \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{n}$, il résulte que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n!} = 0$.
- Soit la suite **U** définie par $U_n = \frac{2n+3}{n+1}$. On a : $U_n - 2 = \frac{2n+3}{n+1} - 2 = \frac{2n+3}{n+1} - \frac{2(n+1)}{n+1} = \frac{1}{n+1}$ ;

  $n + 1 > n > 0 \Rightarrow 0 < \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$, d'où $0 < U_n - 2 < \frac{1}{n}$, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 2$.
- Soit la suite **U** définie sur $\mathbb{N}$ par $U_n = n$, $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$.

Donc cette suite est divergente.

- La suite $(U_n)$ de terme général $U_n = \sin(\frac{n\pi}{2})$ n'a pas de limite, elle est divergente.

## 2. Limite d'une suite du type $U_n = f(n)$ :

Nous admettons la propriété suivante :

**Propriété :**

Soit $(U_n)$ une suite définie par $U_n = f(n)$ où $f$ est une fonction numérique.

Si $f$ a une limite en $+\infty$, alors $(U_n)$ a une limite et on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

**Exemple 11 :**

Etudions la limite de la suite U définie par $U_n = \frac{1-2n}{n+1}$. On considère la fonction :

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ; $x \mapsto \frac{1-2x}{x+1}$. On a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-2x}{x} = -2$, Or, $U_n = f(n)$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = -2$.

La suite U converge vers -2.

**Exemple 12 :**

Soit la suite $W_n = \frac{2n^2+n-3}{5n+4}$, étudions la limite de $W_n$. On considère la fonction

$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ; $x \mapsto \frac{2x^2+x-3}{5x+4}$. On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x^2}{5x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x}{5} = +\infty$ ; Or $W_n = h(n)$,

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} W_n = +\infty$. Donc la suite W diverge vers $+\infty$.

**Remarque 4 :**

La réciproque de cette propriété est fausse.

Ainsi, la fonction $x \mapsto \sin(\pi x)$, n'a pas de limite en $+\infty$, cependant la suite $(U_n)$ $n\in\mathbb{N}^*$ de terme général $U_n = \sin(\pi n)$ dont les termes sont nuls converge vers 0.

## 3. Limites et opérations sur les suites :

On a déjà vu en classe de 6ème la limite de la somme, du produit et du quotient de deux suites.

**Définition :**

Soit $(U_n)_{n\in E}$ et $(V_n)_{n\in E}$ deux suites. E l'ensemble de définition des suites $(U_n)$ et $(V_n)$.

- La somme de $U_n)$ et $(V_n)$ est la suite de terme général $U_n + V_n$ .
- Le produit de $(U_n)$ et $(V_n)$ est la suite de terme général $U_n V_n$.
- Le quotient de $(U_n)$ et $(V_n)$ est la suite de terme général $\frac{U_n}{V_n}$ (si pour tout élément n de E, on a $V_n \neq 0$).

**Exemple 13 :**

- Calculons la limite de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de terme général : $U_n = e^{-n} + \frac{2n-3}{n+1}$.

  $e^{-n} = \frac{1}{e^n}$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{e^n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2n-3}{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2n}{n} = 2$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 2$.

- Calculons la limite de la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de terme général : $V_n = (n-1)(1-\cos(\frac{1}{n}))$.

On a : $\lim\limits_{n\to+\infty}(n-1)=+\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(1-\cos\frac{1}{n})=0$ ; On ne peut donc conclure directement.

On remarque que : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $V_n=\frac{n-1}{n}n(1-\cos\frac{1}{n})$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $V_n=\frac{n-1}{n}\times\frac{1-\cos\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}$, or

$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n-1}{n}=1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1-\cos\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\right)=\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x}=0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}V_n=0$.

## 4. Croissances comparées des suites $(a^n)$ , $(n^\alpha)$ et $\ln(n)$ :

Les résultats concernant les limites des fonctions exponentielles, puissances et logarithmes s'appliquent aux suites. On en déduit le tableau suivant :

| Suites | Conditions | Limites |
|---|---|---|
| Suites géométriques (ou exponentielles) $(a^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ; $a\in\mathbb{R}$ | $a\leq -1$<br>$-1<a<1$<br>$a=1$<br>$a>1$ | Pas de limite<br>0<br>1<br>$+\infty$ |
| Suites puissances $(n^\alpha)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $\alpha\in\mathbb{R}$ | $\alpha<0$<br>$\alpha=0$<br>$\alpha>0$ | 0<br>1<br>$+\infty$ |
| Suites logarithmes $(\ln n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, | | $+\infty$ |

De même, les propriétés de croissances comparées des fonctions exponentielles, puissances et logarithmes s'appliquent aux suites de type $(a^n)$ , $(n^a)$ et $\ln n$.

## 5. Quelques propriétés :

1) Si $\alpha>0$, alors: $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\ln n}{n^\alpha}=0$

2) Si $a>1$, et $\alpha>0$, alors: , $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^\alpha}{a^n}=0$

3) Si, $0<a<1$ et $\alpha<0$, alors: $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^\alpha}{a^n}=+\infty$

## Exemple 14 :

- On a : $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\ln n}{n^2}=0$.
- Calculons la limite de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de général : $U_n=\frac{3^n-2^n}{3^n+2^n}$.

  $U_n=\frac{3^n(1-\frac{2^n}{3^n})}{3^n(1+\frac{2^n}{3^n})}=\frac{1-(\frac{2^n}{3^n})}{1+(\frac{2^n}{3^n})}=\frac{1-(\frac{2}{3})^n}{1+(\frac{2}{3})^n}$, or terme $\lim\limits_{n\to+\infty}(\frac{2}{3})^n=0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=1$.
- Calculons la limite de la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $V_n=n^3-2^{n+2}$.

  On a, $\forall\ n\in\mathbb{N}$, $V_n=2^n\left(\frac{n^3}{2^n}-2^2\right)=2^n\left(\frac{n^3}{2^n}-4\right)$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^3}{2^n} = 0$ ; donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (\frac{n^3}{2^n} - 4) = -4$ ; donc $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = -\infty$.

## 6. Suites et inégalités :

- Si une suite $(U_n)$ convergente est minorée par un réel **m**, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n \geq m$.
- Si une suite $(U_n)$ convergente est majorée par un réel **M**, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n \leq M$.
- Si $(U_n)$ et $(V_n)$ sont des suites convergentes telles que : pour tout entier naturel **n**, $U_n \leq V_n$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n \leq \lim\limits_{n\to+\infty} V_n$.

### Théorème des gendarmes :

Si $(U_n)$, $(V_n)$ et $(W_n)$ sont des suites telles que : pour tout entier naturel **n**, $V_n \leq U_n \leq W_n$, et si $(V_n)$ et $(W_n)$ convergent vers un même réel $\ell$, alors $(U_n)$ est convergente et admet pour limite $\ell$.

### Exemple 15 :

Etudions la convergence de la suite W définie par : $W_n = \frac{n^2 + (-1)^n}{n^2}$.

Soit **n** un nombre entier naturel non nul, on a : $\frac{n^2 - 1}{n^2} \leq \frac{n^2 + (-1)^n}{n^2} \leq \frac{n^2 + 1}{n^2}$,

or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^2 - 1}{n^2} = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^2 + 1}{n^2} = 1$. D'où, $\lim\limits_{n\to+\infty} W_n = 1$. Donc, la suite $(W_n)$ converge vers 1.

## 7. Image d'une suite par une fonction :

On admet la propriété suivante : **a** et **b** désignent chacun un réel.
Si $f$ est une fonction définie sur un intervalle **I** et si $(U_n)$ est une suite d'éléments de **I** telles que :
$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = a$ ; $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f(U_n) = b$.

### Exemple 16 :

- Calculons la limite de la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de terme général $V_n = (1 + \frac{1}{n})^n$,

On a : $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e^{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$. Or $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = n\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$, donc $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$,

donc $V_n = e^{n\ln(1+\frac{1}{n})}$. Posons $U_n = n\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ et $f : x \mapsto e^x$. On a : $V_n = f\big(U_n\big)$ ;

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} n\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ ; or $n\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{\ln(1 + \frac{1}{n})}{\frac{1}{n}}$ ; on pose $x = \frac{1}{n}$ ($n \to +\infty \Leftrightarrow x \to 0^+$)

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$. $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f(U_n) = e$, donc:

$\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = e$.

## 8. Théorème de la convergence monotone :

On admet les propriétés suivantes :

- Toute suite croissante et majorée est convergente.
- Toute suite décroissante et minorée est convergente

**Exemple 17 :**

Soit la suite V définie par $\begin{cases} V_0 = -1 \\ V_{n+1} = \sqrt{2+V_n} \end{cases}$.

Etudions la convergence de cette suite.

Démontrons par récurrence que pour tout **n** élément de $\mathbb{N}$ on a : $V_n \leq 2$.

- On a : $V_0 = -1$ ; $V_0 \leq 2$. Supposons que pour un élément p de $\mathbb{N}$ on a : $V_p \leq 2$.

  Alors $2 + V_p \leq 2 + 2$, donc $2 + V_p \leq 4$, d'où $\sqrt{2+V_p} \leq \sqrt{4}$ ; donc $\sqrt{2+V_p} \leq 2$, d'où $V_{p+1} \leq 2$.

  Par conséquent, on a pour tout élément n de $\mathbb{N}$, $V_n \leq 2$.

- Démontrons par récurrence que V est croissante.

$V_1 = \sqrt{2+V_0} = \sqrt{2+(-1)} = \sqrt{1} = 1$ ; $V_1 - V_0 = 1 - (-1) = 2 > 0$. Supposons que : pour un élément **p** de $\mathbb{N}$, $V_{p+1} - V_p > 0$,

donc, $V_{p+2} - V_{p+1} = \sqrt{2+V_{p+1}} - \sqrt{2+V_p} = \dfrac{\left(\sqrt{2+V_{p+1}} - \sqrt{2+V_p}\right)\left(\sqrt{2+V_{p+1}} + \sqrt{2+V_p}\right)}{\left(\sqrt{2+V_{p+1}} + \sqrt{2+V_p}\right)}$,

donc $V_{p+2} - V_{p+1} = \dfrac{2+V_{p+1} - (2+V_p)}{\left(\sqrt{2+V_{p+1}} + \sqrt{2+V_p}\right)} = \dfrac{V_{p+1} - V_p}{\left(\sqrt{2+V_{p+1}} + \sqrt{2+V_p}\right)}$, or $V_{p+1} - V_p > 0$, et

$\sqrt{2+V_{p+1}} - \sqrt{2+V_p} > 0$, donc $\dfrac{V_{p+1} - V_p}{\left(\sqrt{2+V_{p+1}} + \sqrt{2+V_p}\right)} > 0$ ; d'où $V_{p+2} - V_{p+1} > 0$.

Par conséquent, pour tout n élément de $\mathbb{N}$, $V_{n+1} > V_n$, la suite **V** est donc croissante.

**Conclusion :**

V étant croissante et majorée, elle est donc convergente.

**Exemple 18 :**

Soit la suite W définie par $\begin{cases} W_0 = 12 \\ W_{n+1} = 0,25W_n + 3 \end{cases}$

Etudions la convergence de cette suite.

Démontrons par récurrence que pour tout n élément de $\mathbb{N}$ on a : $W_n \geq 4$.

- On a : $W_0 = 12 \Rightarrow W_0 \geq 4$. Supposons que pour tout élément p de $\mathbb{N}$, $W_p \geq 4$.

  $W_{p+1} = 0,25\ W_p + 3$ comme $W_p \geq 4 \Rightarrow 0,25\ W_p \geq 0,25 \times 4 \Rightarrow 0,25\ W_p \geq 1 \Rightarrow$

  $0,25\ W_p + 3 > 1 + 3 \Rightarrow 0,25\ W_p + 3 > 4 \Rightarrow W_{p+1} \geq 4$.

Par conséquent, pour tout n élément de $\mathbb{N}$ , $W_n \geq 4$.

- $\forall n \in \mathbb{N}$ , $W_{n+1} - W_n = 0{,}25W_n + 3 - W_n = \frac{1}{4}W_n - W_n + 3 = \frac{-3}{4}W_n + 3 = 3(1 - \frac{1}{4}W_n)$

$$= \frac{3}{4}(4 - W_n)$$

On a démontré que $\forall$ n $\in \mathbb{N}$ ; $W_n \geq 4$, donc $4 - W_n \leq 0$, d'où $\frac{3}{4}(4 - W_n) \leq 0$ ; donc $W_{n+1} \leq W_n$ ;

La suite $(W_n)$ est donc décroissante.

**Conclusion :**$(W_n)$ étant décroissante et minorée, elle est donc convergente.

## III. Complément sur les suites :

### 1.Suites définies par récurrence :

On admet la propriété suivante :

**f** est une fonction continue sur un intervalle K, U une suite à valeurs dans K définie par la formule de récurrence : $\mathbf{U_{n+1} = f(U_n)}$ . Si U est convergente, alors sa limite est une solution $\alpha$ de l'équation $\mathbf{f(x) = x}$.

On dit que x est un point fixe de la fonction $f$.

Cette propriété ne permet pas de démontrer qu'une suite est convergente, mais de calculer la limite d'une suite, sachant qu'elle est convergente.

Cette propriété est une implication, sa contraposée donne la remarque suivante :

**Remarque 5 :**

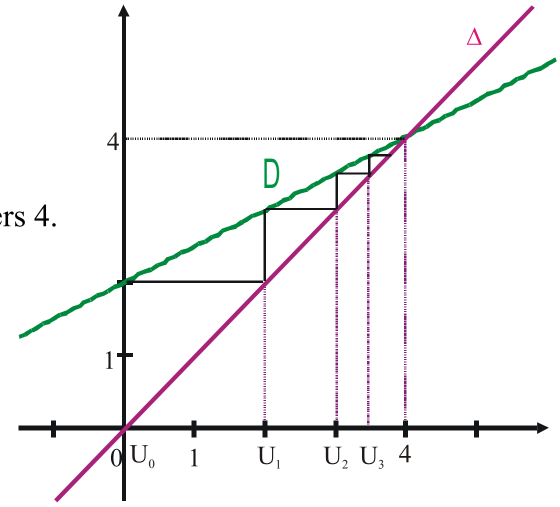
*f* est une fonction continue sur un intervalle K, U une suite à valeurs dans K définie par la formule de récurrence : $\mathbf{U_{n+1} = f(U_n)}$ ; si l'équation$\mathbf{f(x) = x}$ n'a pas de solutions dans K, alors la suite U est divergente.

**Exemple 19 :**

Soit la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{2}x + 2$, ( $\mathcal{D}$ ) et ($\Delta$) les droites d'équations respectives $\mathbf{y = f(x)}$ et $\mathbf{y = x}$.

Ces droites se coupent au point d'abscisse 4.

La construction sur (OI) des premiers termes de la suite $(U_n)$ permet de conjecturer que cette suite est croissante et converge vers 4. L'équation $f(x) = x$ a une solution : 4, donc si la suite $(U_n)$ est convergente, elle converge vers 4.




- Démontrons que la suite $(U_n)$ est convergente ;

On a : $\forall n \in \mathbb{N}$ ; $U_{n+1} - 4 = \frac{1}{2}U_n + 2 - 4$

$$= \frac{1}{2}U_n - 2 = \frac{1}{2}(U_n - 4),$$

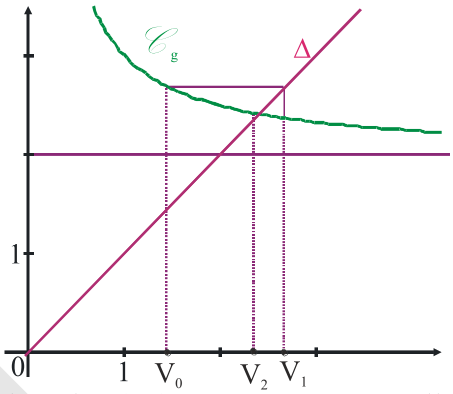
On en déduit que : $\forall n \in \mathbb{N}$ ; $U_n - 4 = \frac{1}{2^n}(U_0 - 4)$, or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} = 0$,donc la suite $(U_n)$ converge vers 4.

**Exemple 20 :**

Etudions la limite de la suite $(V_n)$ définie par $V_0 = \sqrt{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ ; $V_{n+1} = 2 + \frac{1}{V_n}$.

✓ Soit la fonction $g : \mapsto 2+\frac{1}{x}$ ; ($\mathscr{C}_g$) sa courbe représentative et ($\Delta$) la droite d'équation y = x.

✓ La construction sur (OI) des premierstermes de la suite $(V_n)$ permet de conjecturer que cette suite est convergente.




- L'équation $g(x) = x$ a deux solutions $1-\sqrt{2}$ et $1+\sqrt{2}$.
- Démontrons que : $\forall n \in \mathbb{N}$ ; $V_n \geq \sqrt{2}$.

On a : $V_0 = \sqrt{2}$ ; $\sqrt{2} \geq \sqrt{2}$ ; supposons que : $V_k \geq \sqrt{2}$.

$V_{k+1} = 2 + \frac{1}{V_k}$ ; $V_k \geq \sqrt{2} \Rightarrow 0 < \frac{1}{V_k} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow$

$2 < 2 + \frac{1}{V_k} \leq 2 + \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow V_{k+1} > 2 \Rightarrow V_{k+1} \geq \sqrt{2}$.

Donc, $\forall n \in \mathbb{N}$, $V_n \geq \sqrt{2}$. La suite $(V_n)$ est positive, d'où si la suite $(V_n)$ est convergente, elle converge vers $1+\sqrt{2}$. Démontrons que la suite $V_n$ est convergente.

Appliquons l'inégalité des accroissements finis à la fonction $g$ sur l'intervalle $[\sqrt{2}\ ;\ +\infty[$.

On a : $g'(x) = \frac{-1}{x^2}$, donc $\forall x \in [\sqrt{2}\ ;\ +\infty[$, $|g'(x)| = \frac{1}{x^2}$.

$x \geq \sqrt{2} \Rightarrow x^2 \geq 2 \Rightarrow \frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{2}$ ; donc $\forall x \in [\sqrt{2}\ ;\ +\infty[$, $|g'(x)| \leq \frac{1}{2}$, on obtient ; $\forall n \in \mathbb{N}$,

$|g(V_n) - g(1+\sqrt{2})| \leq \frac{1}{2}|V_n - (1+\sqrt{2})|$, c'est-à-dire $\forall n \in \mathbb{N}$,

$|V_{n+1} - (1+\sqrt{2})| \leq \frac{1}{2}|V_n - (1+\sqrt{2})|$, on en déduit que :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $|V_n - (1+\sqrt{2})| \leq (\frac{1}{2})^n |V_0 - (1+\sqrt{2})| \Leftrightarrow |V_n - (1+\sqrt{2})| \leq \frac{1}{2^n}$. On a $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$.

Donc $\lim\limits_{n\to\infty} |V_n - (1+\sqrt{2}| = 0$ ; d'où $\lim\limits_{n\to\infty} V_n = 1+\sqrt{2}$ .Donc, la suite $(V_n)$ converge vers $1+\sqrt{2}$.

**Exemple 21 :**

Etudions la convergence de la suite **U** définie par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = U_n + \frac{1}{Un} \end{cases}$.

✓ Considérons la fonction $g : x \mapsto x + \frac{1}{x}$, on a : $U_{n+1} = g(U_n)$

✓ Résolution de l'équation $g(x) = x$, c'est-à-dire $x + \frac{1}{x} = x$ ; c'est-à-dire $\frac{1}{x} = 0$, cette équation n'admet pas de solution, donc la suite U est divergente.

## 2. Suites adjacentes :

**Définition :**

Deux suites $(U_n)$ et $(V_n)$ sont dites adjacentes si et seulement si, l'une est croissante, l'autre est décroissante et $\lim\limits_{n\to\infty}(V_n - U_n) = 0$.

## 3. Théorème des suites adjacentes :

Si deux suites $(U_n)$ et $(V_n)$ sont adjacentes, alors elles sont convergentes et admettent la même limite.

De plus, si $(U_n)$ est croissante, $(V_n)$ décroissante, alors en notant $\ell$ leur limite commune :

Pour tout entier naturel n, $U_0 \le U_n \le \ell \le V_n \le V_0$ et $\ell$ est l'unique réel tel que pour tout entier naturel n, $U_n \le \ell \le V_n$.

**Exemple 22 :**

Soient $(U_n)$ et $(V_n)$ les suites définies sur $\mathbb{N}$ par : $U_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$ ; $V_n = U_n + \frac{1}{n \times n!}$.

Démontrer que les suites $(U_n)$ et $(V_n)$ sont adjacentes.

Par définition de $(U_n)$ on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $U_{n+1} = U_n + \frac{1}{(n+1)!}$, donc $U_{n+1} - U_n = \frac{1}{(n+1)!}$,

d'où $U_{n+1} - U_n > 0$,

Donc, $U_{n+1} > U_n$, ce qui implique que la suite $(U_n)$ est strictement croissante.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $V_n - U_n = \frac{1}{nn!}$, ce qui met en évidence que la suite $(V_n - U_n)$ converge vers 0.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $V_{n+1} - V_n = (U_{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!}) - (U_n + \frac{1}{nn!})$,

$$= U_{n+1} - U_n + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{nn!},$$

$$= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{nn!},$$

$$= \frac{1}{(n+1)n!} + \frac{1}{(n+1)^2 n!} - \frac{1}{nn!}$$

$$= \frac{n(n+1) + n - (n+1)^2}{n(n+1)^2 n!} = \frac{n^2 + n + n - n^2 - 2n - 1}{n(n+1)^2 n!}$$

$V_{n+1} - V_n = \frac{-1}{n(n+1)^2 n!} \Rightarrow V_{n+1} - V_n < 0 \Rightarrow V_{n+1} < V_n$.

Ce qui prouve que la suite $(V_n)$ est strictement décroissante.

**En résumé**, (Un) est croissante, $(V_n)$ est décroissante et $(V_n - U_n)$ converge vers 0, ce qui permet de conclure que les suites $(U_n)$ et $(V_n)$ sont adjacentes.

## Savoir-faire

### A. Applications :

**Exercice 1 :**

$(U_n)$ est la suite définie par : $U_0 = 1$ et pour tout naturel n, $U_{n+1} = \dfrac{U_n}{\sqrt{(U_n)^2+1}}$, exprimer son terme général en fonction de n.( On pourra s'aider du calcul des premiers termes ).

**Solution :**

$U_0 = 1$ et $U_{n+1} = \dfrac{U_n}{\sqrt{(U_n)^2+1}}$, après calcul on obtient, $U_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ; $U_2 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ ; $U_3 = \dfrac{1}{\sqrt{4}}$, ce qui nous invite à démontrer par récurrence que pour tout naturel n ; $U_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$.

- La propriété est vraie pour n = 0, car $U_0 = 1 = \dfrac{1}{\sqrt{0+1}}$.
- Supposons la propriété vraie pour un naturel p, $U_p = \dfrac{1}{\sqrt{p+1}}$ et démontrons la pour p+ 1.

On a : $U_{p+1} = \dfrac{U_p}{\sqrt{U_p^2+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{p+1}} \times \dfrac{1}{\sqrt{(\frac{1}{\sqrt{p+1}})^2+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{p+1}} \times \dfrac{1}{\sqrt{\frac{1}{p+1}+1}}$

$$= \frac{1}{\sqrt{(p+1)\times(\frac{1}{p+1}+1)}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{p+1}{p+1}+p+1}} = \frac{1}{\sqrt{1+(p+1)}} = \frac{1}{\sqrt{(p+1)+1}},$$

D'après le principe de récurrence, nous avons démontré : pour tout naturel n : $U_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$.

**Exercice 2 :**

Donner un majorant et un minorant de la suite définie par son terme général $U_n$.

1) $U_n = -\dfrac{1}{n+1}$ ; 2) $U_n = \sin n$.

**Solution :**

1) $U_n = -\dfrac{1}{n+1}$ ; la suite est définie sur $\mathbb{N}$ pour tout naturel n, on a : $0 < \dfrac{1}{n+1} \leq 1$,

d'où : $-1 \leq -\dfrac{1}{n+1} < 0$,

Donc, $-1 \leq U_n < 0$. On en déduit que -1 est un minorant de la suite U et que 0 est un majorant.

2) $U_n = \sin n$, la suite U est définie sur $\mathbb{N}$ pour tout naturel n, on a : $-1 \leq U_n \leq 1$, on peut alors affirmer que la suite U est bornée par -1 et 1.

**Exercice 3 :**

Etudier le sens de variation de la suite :U : $n \mapsto \dfrac{3n+5}{n+1}$.

**Solution :**

La suite est défini sur $\mathbb{N}$ et pour tout naturel

$$U_{n+1}-U_n=\frac{3(n+1)+5}{(n+1)+1}-\frac{3n+5}{n+1}=\frac{3n+8}{n+2}-\frac{3n+5}{n+1}=\frac{(3n+8)(n+1)-(3n+5)(n+2)}{(n+2)(n+1)}=\frac{-2}{(n+2)(n+1)}$$

D'où $U_{n+1}-U_n<0$, donc **U** est strictement décroissante.

## Exercice 4 :

Etudier la convergence et déterminer la limite éventuelle de la suite U.

$$1)U:n\mapsto\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{3}\quad;\quad 2)U:n\mapsto\frac{3n^2+2n+1}{5n-3}$$

**Solution :**

$1)U:n\mapsto\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{3}$ ; cette suite est définie sur $\mathbb{N}^*$ et pour tout naturel n : $-1\leq\cos\frac{n\pi}{3}\leq 1$ ;

Donc si de plus, $n\neq 0$ ; $\frac{1}{n}\times(-1)\leq\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{3}\leq\frac{1}{n}\times 1\Leftrightarrow\frac{-1}{n}\leq\frac{1}{n}U_n\leq\frac{1}{n}$.

Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{-1}{n}=0$. On en déduit que U converge vers 0.

$2)U:n\mapsto\frac{3n^2+2n+1}{5n-3}$ ; cette suite est définie sur $\mathbb{N}$, pour tout naturel n,

$$U_n=\frac{3n^2+2n+1}{5n-3}=\frac{3n^2(1+\frac{2}{3n}+\frac{1}{3n^2})}{5n(1-\frac{3}{5n})}=\frac{3n}{5}\frac{(1+\frac{2}{3n}+\frac{1}{3n^2})}{(1-\frac{3}{5n})}\;;$$

Lorsque $n\to+\infty$ ; les suites $\frac{2}{3n}$ ; $\frac{1}{3n^2}$ ; $\frac{-3}{5n}$ ont pour limites 0. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3}{5}n=+\infty$.

D'où la suite U diverge vers $+\infty$

## Exercice 5 :*

U est la suite définie par son premier terme $U_0$ et pour tout naturel n, $U_{n+1}=2U_n e^{-U_n}$.

On suppose que la suite U converge vers un réel $\ell$.

Soit f la fonction $x\mapsto 2xe^{-x}$.

1) Justifier que la suite : $n\mapsto f(U_n)$ converge vers $f(\ell)$.

2) En utilisant le fait que $(U_n)$ et $(U_{n+1})$ ont la même limite, déterminer les valeurs possibles du réel $l$.

**Solution**

1) On a : $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=\ell$. De plus la fonction $f: x\mapsto 2xe^{-x}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et en particulier en $l_0$, donc $\lim\limits_{x\to l}f(x)=f(l)$. Il vient : $\lim\limits_{n\to+\infty}f(U_n)=f(l)$, c'est –dire que la suite : $n\mapsto f(U_n)$ converge vers $f(\ell)$.

2) la suite $(U_{n+1})$ qui est égale à la suite $n\mapsto f(U_n)$ converge vers $f(l)$ ; puisque les suites (Un+1) et (Un) ont la même limite $\ell$ ; il vient $f(l)=l$, c'est-à-dire $2le^{-l}=l$ soit $2le^{-l}-l=0$, soit :

$$l(2e^{-l}-1)=0 \text{ soit } l=0 \text{ ou } 2e^{-l}-1=0\;;\quad 2e^{-l}-1=0\Leftrightarrow 2e^{-l}=1\Leftrightarrow\frac{2}{e^l}=1\Leftrightarrow 2=e^l\Leftrightarrow l=\ln 2.$$

**Finalement** les valeurs possibles du réel $\ell$ sont **0** et **ln2**.

** Cet exercice ne pourra être traité qu'après avoir introduit la fonction exponentielle.*

## Exercice 6 :

On définit les suites U et V par $U_0 = 1$ ; $V_0 = 2$, et pour tout entier naturel **n** : $U_{n+1} = \frac{U_n + 2V_n}{3}$ , $V_{n+1} = \frac{U_n + 4V_n}{5}$ .

1) On pose : $W = V - U$, démontrer que la suite est géométrique. Préciser la limite de **W** et exprimer $W_n$ en fonction **n**.
2) Exprimer $U_{n+1} - U_n$ et $V_{n+1} - V_n$ en fonction de $W_n$.

   En déduire le sens de variation des suites **U** et **V**.
3) Justifier que **U** et **V** sont convergentes et ont la même limite qui sera notée $\ell$.
4) On pose $T = 3U + 10V$. Démontrer que la suite T est constante. En déduire la valeur de $\ell$..

**Solution :**

1) Pour tout entier naturel n,

$$W_{n+1} = V_{n+1} - U_{n+1} = \frac{U_n + 4V_n}{5} - \frac{U_n + 2V_n}{3} = \frac{3U_n + 12V_n - 5U_n - 10V_n}{15}$$

$$= \frac{-2U_n + 2V_n}{15} = \frac{2}{15}(V_n - U_n).$$

Donc, $W_{n+1} = \frac{2}{15}W_n$. d'où W est une suite géométrique de raison $\frac{2}{15}$. Comme : $|\frac{2}{15}| < 1$, donc :

$\lim\limits_{n\to} W_n = 0$. De plus, $W_n = W_0(\frac{2}{15})^n = (V_0 - U_0)(\frac{2}{15})^n = (2-1)(\frac{2}{15})^n = (\frac{2}{15})^n$

2) Pour tout entier naturel n,

- $U_{n+1} - U_n = \frac{U_n + 2V_n}{3} - U_n = \frac{U_n + 2V_n - 3U_n}{3} = \frac{2V_n - 2U_n}{3} = \frac{2}{3}(V_n - U_n) = \frac{2}{3}W_n$
- $V_{n+1} - V_n = \frac{U_n + 4V_n}{5} - V_n = \frac{U_n + 4V_n - 5V_n}{5} = \frac{U_n - V_n}{5} = -\frac{1}{5}(V_n - U_n) = -\frac{1}{5}W_n$

D'après la question 1), la suite W est à termes strictement positifs, on en déduit que : $(U_n)$ est strictement croissante et que $(V_n)$ est strictement décroissante.

3) D'après les deux questions précédentes, la suite U est croissante et le suite V est décroissante, alors la suite V – U a pour limite 0, on en déduit que U et V sont adjacentes.

Ce qui explique que les suites U et V sont convergentes et ont la même limite $\ell$ .

4) $T_{n+1} = 3U_{n+1} + 10V_{n+1} = 3 \times \frac{U_n + 2V_n}{3} + 10\frac{U_n + 4V_n}{5} = U_n + 2V_n + 2U_n + 8V_n = 3U_n + 10V_n = T_n$.

Donc, $(T_n)$ est une suite constante.

On en déduit, en particulier $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n = T_0 = 3U_0 + 10V_0 = 23$, d'autre part, $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n = 3\ell + 10\ell = 13\ell$.

Donc, $\ell$ vérifie $13\ell = 23$ ; d'où : $\ell = \dfrac{23}{13}$.

## Exercice 7 :

Soit (Un) la suite définie par $U_0 = 5$ et la relation de récurrence : $U_{n+1} = \sqrt{2+U_n}$.

1) Démontrer par récurrence que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $2 \leq U_{n+1} \leq U_n$.

2 .a) Justifier que la suite $(U_n)$ est convergente et que sa limite, notée $l$, est supérieure ou égale à **2**.

b) Démontrer que $\ell$ vérifie : $l = \sqrt{2+l}$, en déduire la valeur de $l$.

## Solution :

Démontrons par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$, $2 \leq U_{n+1} \leq U_n$.

1) $U_0 = 5$ et $U_1 = \sqrt{2+U_0} = \sqrt{2+5} = \sqrt{7}$ ; donc $2 \leq U_1 \leq U_0$. La propriété demandée est vérifiée pour n = 0. Soit p un entier naturel quelconque : si $2 \leq U_{p+1} \leq U_p$, alors $4 \leq 2 + U_{p+1} \leq 2 + U_p \Rightarrow \sqrt{4} \leq \sqrt{2+U_{p+1}} \leq \sqrt{2+U_p} \Rightarrow 2 \leq U_{p+2} \leq U_{p+1}$. Donc, la propriété est héréditaire, d'après le principe de récurrence, on peut affirmer que pour tout n de $\mathbb{N}$ ; $2 \leq U_{n+1} \leq U_n$.

2.a) D'après la question 1) $(U_n)$ est décroissante et minorée, donc elle est convergente, sa limite $\ell$ vérifie $\ell \geq 2$.

b) Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} U_{n+1} = l \Leftrightarrow l = \sqrt{2+l} \Leftrightarrow l^2 = 2 + l \Leftrightarrow (l+1)(l-2) = 0$,

d'où $l = 2$ ou $l = -1$. Or $l \geq 2$, donc $l = 2$.

## Exercice 8 : *Loi de refroidissement de Newton*

La loi de refroidissement de Newton stipule que le taux d'évolution de la tempirature d'un corps est proportionnel à la différence entre la température de ce corps et celle du milieu environnant.

Une tasse de café est servie à une température initiale de 80°C dans un milieu dont la température , exprimée en degré celcius, supposée constante, est notée M.

Le but de cet exercice est d'étudier lerefroidissement du café en appliquant la loi de refroidissement suivant le modèle suivant :

Pour tout entier naturel$n$, on note $T_n$ la température du café à l'instant $n$, avec $T_n$ exprimé en degré celsius et $n$ en minute. On a ainsi $T_0$.

On modélise la loi de Newton entre deux minutes consécutives quelconques $n$ et $n+1$ par l'égalité : $T_{n+1} - T_n = k(T_n - M)$ ; où $k$ est une constante réelle.

Dans la suite, on choisit $M = 10$et $k = -0{,}2$.

1. Dans le contexte, peut-on conjecturer le sens de variation de la suite ?
2. Montrer que pour tout entier naturel $n$ : $T_{n+1} = 0{,}8T_n + 2$.

3. On pose, pour tout entier naturel $n$ : $S_n = T_n - 10$.
   a. Montrer que $(S_n)$ est une suite géométrique. Préciser sa raison et son premier terme $S_0$.
   b. Montrer que pour tout entier naturel $n$, on a : $T_{n+1} = 70 \times (0{,}8)^n + 10$.
   c. Déterminer la limite la suite $(T_n)$
4. Au bout de combien de minutes la température du café tombera à 40°C ?

**Solution:**

1. Le café est chaud au départ, dans une pièce dont la température est fraiche, le café va refroidir et sa température va aller vers celle de la pièce, donc la suite $(T_n)$ est décroissante.
2. Pour tout entier naturel$n$,$T_{n+1} - T_n = -0{,}2(T_n - \ 10) \Rightarrow T_{n+1} = T_n - 0{,}2(T_n - \ 10)$

$$\Rightarrow T_{n+1} = (0{,}8) \times T_n + 2$$

3. On pose, pour tout entier naturel$n$,$S_n = T_n - 10$.
   a. Pour tout entier naturel $n$, $S_{n+1} = T_{n+1} - 10 = \big((0{,}8) \times T_n + 2\big) - 10 = (0{,}8) \times T_n - 8$ ;
   donc $S_{n+1} = (0{,}8) \times (T_n - 10)$, d'où : $S_{n+1} = (0{,}8) \times S_n$.
   La suite $(S_n)$ est géométrique de raison $q = 0{,}8$ et de premier terme :
   $$S_0 = T_0 - 10 = 80 - 10 = 70.$$
   b. On en déduit que pour tout entier naturel $n$, $S_n = S_0 \times q^n = 70 \times (0{,}8)^n$, comme :
   $S_n = T_n - 10 \Rightarrow T_n = S_n + 10$, d'où : $T_n = 70 \times (0{,}8)^n + \ 10$.
   c. -1<0,8<1, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (0{,}8)^n = 0$ et aussi $\lim\limits_{n\to+\infty} 70 \times (0{,}8)^n = 0$, d'où : $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n = 10$.
4. Au début $T_0$, on calcule $T_1$ par la formule $T_1 = (0{,}8) \times T_0 + 2 = 66$ ;
   $T_2 = (0{,}8) \times T_1 + 2 = 54{,}8$ ; puis $T_3 = (0{,}8) \times T_2 + 2 = 45{,}84$ et enfin :
   $T_4 = (0{,}8) \times T_3 + 2 = 38{,}67$.
   On en déduit qu'au bout de 4 minutes, la température du café est tombée à 40°.

## B. Exercices divers :

**1.** On considère la suite U définie sur $\mathbb{N}$ par :

$U_0 = 2$ et $U_{n+1} = \dfrac{9}{6-U_n}$.

Démontrer par récurrence que : pour tout n élément de $\mathbb{N}$, $U_n < 3$.

**2.** Déterminer que pour tout naturel n :

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

**3.** Dans chacun des cas suivants, étudier si la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée, minorée.

a) $U_n = \dfrac{2n+1}{n+2}$ ; b) $U_n = n(\dfrac{1}{2}+(-1)^n)$

c) $U_n = \dfrac{2+\sin n}{3-\cos n}$ ; d) $U_n = n\cos^2(\dfrac{n\pi}{4})$

**4.** Déterminer un majorant et un minorant de la suite U : $n \mapsto \dfrac{-3+e^{-n}}{2+\sin n}$.

**5.** U est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = \dfrac{1}{2}U_n - 1$. Montrer que U est bornée par -2 et 1.

**6.** Démontrer que les suites suivantes sont bornées

a) $U_n = \dfrac{2n-3}{5n-2}$ ; b) $U_n = \ln(n+1) - \ln n$

c) $U_n = \sqrt{n^2+2} - n$ ; d) $U_n = \dfrac{2n+\cos n}{n^2}$

**7.** On considère la suite définie par :

$$x_n = \frac{1}{1+n^2} + \frac{1}{2+n^2} + \dots + \frac{1}{n+n^2}$$

Calculer les cinq premiers termes. Etudier le sens de variation de cette suite.

**8.** Dans chacun des cas suivants, étudier le sens de variation de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

a) $U_n = \dfrac{n}{n+1}$ ; b) $U_n = \dfrac{n^2+2}{n+1}$

c) $U_n = \dfrac{e^n}{n!}$ ; d) $U_n = n - \ln(1+n)$

**9.** U est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$U_0 = 1$ et $U_{n+1} = \sqrt{2+U_n}$.

Montrer que l'on a pour tout n de $\mathbb{N}$, $1 \le U_n < 2$.

Etudier le sens de variation de la suite U.

**10.** Soit la suite $(U_n)$ définie par :

$U_0 = 3$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $U_{n+1} = 2U_n - 4$.

Conjecturer à l'aide d'une représentation graphique le sens de variation de la suite $(U_n)$.

Démontrer cette conjecture.

Même question pour la suite $(V_n)$ définie par

$V_0 = 0$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $V_{n+1} = \dfrac{2+3V_n}{2+V_n}$.

**11.** On sait que les suites U, V et W définies ci-dessous sont convergentes. Calculer leur limite.

U) $\begin{cases} U_0 = -0,5 \\ U_{n+1} = U_n(1+U_n) \end{cases}$ ; V) $\begin{cases} V_0 = -1 \\ V_{n+1} = \sqrt{2+Vn} \end{cases}$ ;

W) $\begin{cases} W_0 = 12 \\ W_{n+1} = 0,25(1+W_n) \end{cases}$

**12.** Dans chacun des cas suivants préciser la fonction $f$ telle que : $U_n = f(n)$, puis déterminer la limite de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

a) $U_n = n - \dfrac{1}{n+1}$ ; b) $U_n = \dfrac{3n^2 - 1}{(2n+1)^2}$

c) $U_n = n(e^{\frac{1}{n}} - 1)$ ; d) $U_n = \dfrac{\ln(1+n)}{1+\sqrt{n}}$

**13.** Dans chacun des cas suivants, déterminer la limite de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

a) $U_n = 5\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$ ; b) $U_n = 7(-0,75)^{n+1}$

c) $U_n = 25 + \left(\dfrac{\pi}{3}\right)^{2n}$ ; d) $U_n = 25 - \left(\dfrac{3}{\pi}\right)^n$

e) $U_n = \dfrac{n^2}{2^n}$ ; f) $U_n = \dfrac{3^n}{4^n}$

**14.** Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite géométrique de premier terme 2 et de raison $\dfrac{1}{3}$. Etudier la convergence de la suite $(U_n)$ et de la suite $V_n$ de terme général : $V_n = \sum_{p=1}^{n} U_p$ .

**15.** Dans chacun des cas suivants, utiliser les propriétés de comparaison pour étudier la limite de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

a) $U_n = \text{con} - n$ ; b) $U_n = n + (-1)^n \cos n$

c) $U_n = \ln n + (-1)^n$ ; d) $U_n = (-)^n - 3^n$

e) $U_n = \dfrac{\sin n^3}{1+n}$ ; f) $U_n = 1 + \dfrac{\sin n}{\sqrt{n}}$

g) $U_n = \dfrac{n(1-\cos n)}{n^2+1}$ ; h) $U_n = \left(\dfrac{3}{4}\right)^n \sin n$

**16.** Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $U_0 = 1$ et $\forall\, n\in\mathbb{N}$

$U_{n+1} = \dfrac{U_n}{U_n^2 + 2}$.

a) Démontrer que: $\forall n\in\mathbb{N}$ , $U_{n+1} < \dfrac{U_n}{2}$

b) En déduire la limite de la suite $(U_n)$.

**17.** Soit a un nombre réel tel que : $0 \le a \le 1$

et $(U_n)$ la suite définie par $U_0 = a$ et $\forall n\in\mathbb{N}$ ,

$U_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1+U_n}{2}}$ .

A) Conjecturer graphiquement la limite de cette suite.

B) On pose $U_0 = \cos\alpha$ ($\alpha\in[0\,;\dfrac{\pi}{2}]$).

a) Démontrer que : $\forall n\in\mathbb{N}$ , $U_n = \cos\left(\dfrac{\alpha}{2^n}\right)$ ,

b) En déduire la limite de la suite $(U_n)$.

**18.** Soit $(U_n)$ et $(V_n)$ deux suites définies par :

$$\begin{cases} 0 < U_0 < V_0 \\ \forall n\in\mathbb{N},\ U_{n+1} = \sqrt{U_n V_n} \\ \forall n\in\mathbb{N},\ V_{n+1} = \dfrac{U_n + V_n}{2} \end{cases}$$

1) Démontrer par récurrence que les suites $(U_n)$ et $(V_n)$ sont strictement positives.

2. a) calculer $V_{n+1}^2 - U_{n+1}^2$ et en déduire que :

$\forall n\in\mathbb{N}$ , $U_n \le V_n$ .

b) Démontrer que la suite $(U_n)$ est croissante et que $(V_n)$ est décroissante.

c) Démontrer par récurrence que : $\forall\, n\in\mathbb{N}$ ,

$0 \le V_n - U_n \le \left(\dfrac{1}{2}\right)^n (V_0 - U_0)$

En déduire que : $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} V_n$ .

**19.** Soit $(U_n)$ la suite définie par $U_0 = 2$ et la relation de récurrence : $U_{n+1} = \dfrac{U_n + 2}{2U_n + 1}$.

1. a) Justifier que pour tout n de $\mathbb{N}$ ; $U_n$ est strictement positif.

b) Si la suite (Un) converge, quelle est sa limite ?

2.) Le plan étant rapporté à un repère orthonormé, tracer la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction

$f : x \mapsto \dfrac{x+2}{2x+1}$ et la droite d'équation y = x

(on se limitera au cadrage : $0 \le x \le 2{,}2$ et $0 \le y \le 1{,}5$)
Visualiser graphiquement $U_1$ ; $U_2$ ; $U_3$ et $U_4$.

Que peut-on conjecturer au sujet de la convergence de la suite ?

3.) Pour démontrer la conjecture, on considère la suite $(V_n)$ définie pour tout n de $\mathbb{N}$,

$$V_n = \frac{U_n - 1}{U_n + 1}.$$

a) Démontrer que $(V_n)$ est une suite géométrique. Quelle est sa limite ?

Exprimer $V_n$ en fonction de n.

b) Exprimer $U_n$ en fonction de $V_n$. En déduire la limite de $(U_n)$. Enfin, exprimer $U_n$ en fonction de n.

**20.** On considère la suite U définie sur $\mathbb{N}$ par :

$U_0 = 1{,}5$ et pour tout entier naturel n,

$U_{n+1} = U_n^2 - U_n + 3$.

1) Démontrer que la suite U est croissante

2) a) On suppose dans cette question que la suite U converge vers un réel l.

Donner alors, une équation du second degré vérifiée par l.

b) En déduire que la suite U est divergente.

**21. Rebonds d'une balle**

Une balle tombe d'une hauteur de 20 mètres.

Elle rebondit à chaque fois, en faisant du surplace, aux trois quarts de la hauteur précédente.

1. Au bout de combien de rebonds peut-elle être considérée comme immobile (on considère qu'elle est immobile dès que la hauteur du rebond est inférieure à 1 millimètre) ?
2. Quelle est alors la distance totale parcourue par la balle ?

**22. Étudier l'évolution d'une population d'oiseaux**

Une espèce protégée d'oiseaux niche sur une île. On a constaté que sa population diminue de 10 % chaque année.

Une association tente de limiter cette diminution en introduisant sur l'île 100 nouveaux oiseaux chaque année.

Fin 2023, on recensait 1 600 oiseaux.

1. On note $(U_n)$ la suite, définie pour tout entier naturel $n$, du nombre d'oiseaux à la fin de l'année $(2023 + n)$.
   a. Donner la valeur de $U_0$.
   b. Déterminer une relation de récurrence entre $U_{n+1}$ et $U_n$.
   c. À l'aide de la calculatrice ou d'un logiciel, déterminer les huit premiers termes de la suite. Qu'observe-t-on ?
2. Soit $(V_n)$ la suite définie, pour tout $n \in$ $n \in \mathbb{N}$, par $V_n = U_n - 1\,000$.
   a. Montrer que la suite $(V_n)$ est une suite géométrique de raison 0,9 et donner $V_0$.
   b. En déduire $V_n$ et $U_n$ en fonction de $n$.
   c. La population des oiseaux passera-t-elle sous la barre de 1100 oiseaux ? Si oui, en quelle année ?
   d. La population des oiseaux passera-t-elle sous la barre de 1 000 oiseaux ?

**23.** On considère la suite $(u_n)$ définie par :

$u_0 = \dfrac{1}{2}$ et telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{3u_n}{2u_n + 1}$

1. a. Calculer $u_1$ et $u_2$.

   b. Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n, $0 < u_n$.

2. On admet que $u_n < 1, \forall n \in \mathbb{N}$

   Montrer que la suite $u_n$ est croissante.

3. Soit $(v_n)$ la suite définie par :

$\forall n \in \mathbb{N}, \ v_n = \dfrac{u_n}{1-u_n}$

   a. Montrer que la suite $(v_n)$ est une suite géométrique de raison 3.

   b. Exprimer $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n$ en fonction de n.

   c. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \dfrac{3^n}{3^n+1}$.

   d. Déterminer la limite de la suite $(u_n)$.

**24.Suites de sommes**

Pour tout entier naturel $n$ non nul, $u_n$ est le nombre correspondant à $\underbrace{1111...11}_{n \text{ chiffres } 1}$

On définit la somme $S_n$ par :
$S_n = 1 + 11 + 111 + \ldots + \underbrace{1111...11}_{n \text{ chiffres } 1}$.

Par exemple, on a $u_3 = 111$ et $S_3 = 123$.

1. Calculer les sommes $S_1$ à $S_9$.
2. Quelle est, pour $n < 10$, l'expression de $S_n$ en fonction de $n$ ?
3. Calculer $u_{10}$, $u_{11}$ et $u_{12}$. L'expression trouvée dans la question 2 est-elle toujours valide ?

**25.Population de bactéries**

1.Une population de bactéries est placée dans un milieu favorable à son développement. Le nombre de bactéries augmente de 60 % toutes les heures. On considère la suite $(u_n)$ dont les termes sont égaux au nombre de bactéries, en milliers, présentes au bout de $n$ heures.

a. Sachant que $u_0 = 1$, démontrer que pour tout entier naturel $n$, on a $u_n = (1{,}6)^n$.

b. Représenter graphiquement la suite $(u_n)$ par un nuage de points, pour $n$ allant de 0 à 4.

c. Peut-on prévoir facilement le nombre de bactéries présentes au bout de 2 heures et 30 minutes ? au bout de 2 heures et 45 minutes ?

2. a. Calculer l'accroissement relatif du nombre de bactéries entre les instants 1 et 2 (c'est-à-dire entre la fin de la première heure et la fin de la deuxième heure), puis entre les instants 2 et 3.

   Que peut-on constater ?

   b. Le nombre $g$ de bactéries à l'instant 2,5 doit être tel que les accroissements relatifs entre les instants 2 et 2,5 et entre les instants 2,5 et 3 soient égaux.

   Démontrer que $g = \sqrt{u_2 u_3}$.

   On dit alors que $g$ est la moyenne géométrique des nombres $u_2$ et $u_3$.

c. Quel est le nombre de bactéries présentes au bout de 2 heures 30 minutes ?

d. De même, à combien peut-on estimer le nombre de bactéries présentes à l'instant $t = 2$ h 45 ?

CHAPITRE 6

# Calcul intégral

## Faire savoir

## L'essentiel du chapitre

### I. Primitives :

#### 1. Notion de primitive :

**Définition :**

Soit une fonction $f$ continue sur un intervalle I.
On appelle primitive de $f$ sur I, toute fonction $F$ dérivable sur I, telle que pour tout x de I :
$F'(x) = f(x)$.

#### 2. Propriétés des primitives :

**Théorème 1 :**

Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.

**Théorème 2 :**

Si une fonction f admet une primitive $F$ sur un intervalle I, alors toute fonction **G** :$x \mapsto F(x)+k$, où k est un réel, est une primitive de $f$ sur I toutes les primitives de $f$ sur I sont de cette forme.

**Théorème 3 :**

Si la fonction $f$ admet des primitives sur I, il existe une seule primitive **G** vérifiant $G(x_0) = y_0$, $x_0$ appartient à I et $y_0$ étant un réel donné.

**Exemple 1 :**

Soit la fonction $f : x \mapsto (2x-1)(x^2-x+1)^4$.
Déterminer la primitive $F$ de f qui vérifie $F(1) = 2$. La fonction f est une fonction polynôme définie et continue sur $\mathbb{R}$. En posant $U(x) = x^2-x+1$, f s'écrit $U' \times U^4$, donc F est de la forme $\frac{1}{5}U^5 + k$ d'où $F(x) = \frac{1}{5}(x^2-x+1)^5 + k$. $F(1) = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{5}(1-1+1)^5 + k = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{5} + k = 2 \Leftrightarrow k = 2 - \frac{1}{5} = \frac{9}{5}$,

Donc $F(x) = \frac{1}{5}(x^2-x+1)^5 + \frac{9}{5}$.

#### 3. Primitives des fonctions usuelles :

| Fonction | Primitive | Domaine de définition des primitives |
|---|---|---|
| $x \mapsto a$ ( $a \in \mathbb{R}$ ) | $x \mapsto ax + k$ | $\mathbb{R}$ |
| $x \mapsto x^n$ ( $n \in \mathbb{N}$ ) | $x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1} + k$ | $\mathbb{R}$ |
| $x \mapsto \frac{1}{x^n} (n \in \mathbb{N}^*; n \neq 1)$ | $x \mapsto \frac{-1}{(n-1)x^{n-1}} + k$ | $\mathbb{R}^*$ |
| $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ | $x \mapsto 2\sqrt{x} + k$ | $\mathbb{R}_+^*$ |
| $x \mapsto \cos x$ | $x \mapsto \sin x + k$ | $\mathbb{R}$ |
| $x \mapsto \sin x$ | $x \mapsto -\cos x + k$ | $\mathbb{R}$ |

| | | |
|---|---|---|
| $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ | $x \mapsto$ Lnx+k | $]0\,;+\infty[$ |
| $x \mapsto 1+\tan^2 x$ | $x \mapsto$ tanx+k | $\mathbb{R}/\left\{\dfrac{\pi}{2}+2k\pi;\ k\in\mathbb{Z}\right\}$ |

### 4. Primitives des fonctions composées :

*f* est une fonction continue sur I

| Si *f* est de la forme | Alors *F* est de la forme | Si *f* est de la forme | Alors *F* est de la forme |
|---|---|---|---|
| U'$U^n$ ( $n \in \mathbb{N}$ ) | $\dfrac{1}{n+1}U^{n+1}+k$ | $U'(x)\left(1+\tan^2 U(x)\right)$ | $\tan U(x)$ +k |
| $\dfrac{U'}{U^n}(n\in\mathbb{N}^*;n\neq 1)$ | $-\dfrac{1}{(n-1)U^{n-1}}+k$ | $\dfrac{U'(x)}{U(x)}$ | $\ln U(x)$ +k ; $U(x)>0$ |
| $\dfrac{U'}{\sqrt{U}}$ | $2\sqrt{U}+k$ | $U'(x)\ e^{U(x)}$ | $e^{U(x)}$ +k |
| U'cosU | sinU +k | $U'(x)\ \ln U(x)$; $U(x)>0$ | $U(x)\ln U - U(x)$+k |
| U'sinU | -cosU + k | | |

## II. Notion d'intégrale :

**Définition :**

**a** et **b** sont deux réels d'un intervalle **I** et **f** une fonction continue sur **I.** L'intégrale de **a** à **b** de la fonction **f** est le réel $F(b)-F(a)$ ; où **F** est une primitive quelconque de **f** sur **I**.

**Notation :**

L'intégrale de a à b de la fonction **f** se note $\int_a^b f(t)dt$ et se lit : ''somme de **a** à **b** de **f(t)dt** ''

Dans cette écriture, la lettre t est une variable muette qui peut être remplacée par n'importe quelle autre lettre, hormis a, b et *f*, déjà choisies pour désigner des objets précis.

On peut écrire : $\int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du = \int_a^b f(x)dx = ...$

On écrit souvent le réel **F(b)–F(a)** sous la forme condensée : $[F(t)]_a^b$ , et on écrit : $\int_a^b f(t)dt = [F(t)]_a^b$

**Exemple 2 :**

$\int_0^\pi \sin(t)dt = [-\cos(t)]_0^\pi = -\cos\pi + \cos 0 = 1+1 = 2$.

## III. Intégrale et primitive :

**Théorème 4 :**

F est une fonction continue sur un intervalle **I**. La primitive de *f* qui s'annule en un point **a** de **I** est la fonction **G** définie sur **I** par : $G(x) = \int_a^x f(t)dt$.

**Exemple 3 :**

La fonction *ln* est sur ]0 ; +∞ [ la primitive, nulle en **1**, de la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t}$, donc pour tout réel $x>0$ ; $\ln x = \int_1^x \dfrac{dt}{t}$.

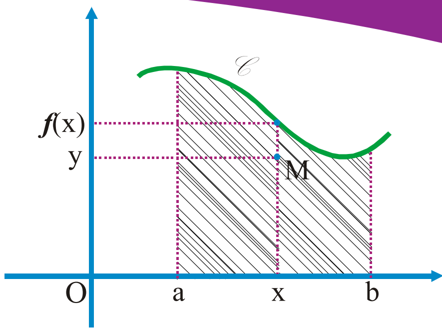
**A retenir**

La dérivée sur I de la fonction $G:\ x\mapsto \int_a^x f(t)dt$ est la fonction $g:\ x\mapsto f(x)$ ; donc **G'(x) = f(x).**

## IV. Aires et Intégrales :

**Théorème 5 :**

$f$ est une fonction continue et positive sur l'intervalle [a ; b], $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de $f$ dans un repère orthogonal $(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j})$. Alors, l'aire du domaine limité par $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations : $x = a$ et $x = b$ est $\int_a^b f(t)dt$

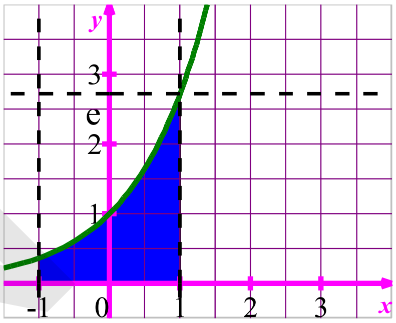



**Remarque 1 :**

Le domaine D peut aussi être décrit comme :l'ensemble des points **M(x ; y)** avec $\begin{cases} a \le x \le b \\ 0 \le y \le f(x) \end{cases}$

**Exemple 4 :**

$f(x) = e^x$, $\mathscr{C}_f$ est la représentation graphique de $f$ dans un repère orthogonal. Calculer l'aire $\mathcal{A}$ du domaine limité par $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations :
x = -1 et x = 1.




$\mathcal{A} = \int_{-1}^{1} f(t)dt = \int_{-1}^{1} e^x dx = \left[e^x\right]_{-1}^{1} = e - \frac{1}{e} \simeq$ 2,35 unités d'aires.

## V. Propriétés de l'intégrale :

### 1. Linéarité :

**Théorème 6 :**

Soient $f$ et $g$ deux fonctions continues sur un intervalle I.
a et b deux réels de I, et $\alpha$ et $\beta$ deux réels quelconques, alors ;

$\int_a^b (\alpha f + \beta g)(t)dt = \alpha\int_a^b f(t)dt + \beta\int_a^b g(t)dt$.

**Exemple 5 :**

$$\int_0^\pi (2\sin t - 3t)dt = 2\int_0^\pi \sin t\,dt - 3\int_0^\pi t\,dt = 2\left[-\cos t\right]_0^\pi - 3\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^\pi = 4 - 3\frac{\pi^2}{2}$$

### 2. Relation de Chasles :

**Théorème 7 :**

$f$ est une fonction continue sur un intervalle I. Pour tous réels **a ; b ; c** de **I**, on a :

$\int_a^c f(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt$.

En posant **a = b = c** dans le théorème précédent on obtient : $\int_a^a f(t)dt = 0$.

En utilisant ce théorème avec : **a = c**, on obtient : $\int_a^b f(t)dt = -\int_b^a f(t)dt$.

### 3. Comparaison d'intégrales :

**Théorème 8 :**

$f$ est une fonction continue sur un intervalle **I**. **a** et **b** sont deux réels de **I** avec $a \le b$ :

Si $f$ est positive sur I, alors $\int_a^b f(t)dt \ge 0$.

**Remarque 2 :**

Si $f$ est négative sur I, alors $\int_a^b f(t)dt \le 0$.

**Conséquence :**

Si $f$ et $g$ sont deux fonctions continues sur un intervalle I, si a et b sont deux réels de I, avec $a \le b$ et
Si $f \le g$ sur I alors, $\int_a^b f(t)dt \le \int_a^b g(t)dt$.

## 4. Intégrales et valeur absolue :

**Théorème 9 :**

Si $f$ est une fonction continue sur un intervalle [a ; b] ; on a : $\left|\int_a^b f(t)dt\right| \le \int_a^b |f(t)|dt$

## 5.Inégalité de la moyenne :

**Théorème 10 :**

Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle I. a et b appartiennent à I (a < b).

Si, sur l'intervalle [a ; b], on a : $m \le f \le M$, alors : $m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M$.

## 6. Valeur moyenne :

**Définition :**

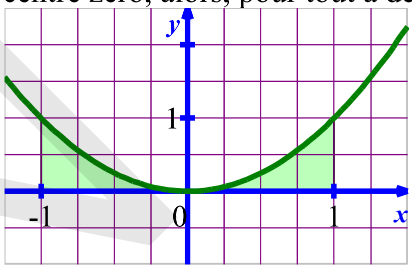
$f$ est une fonction continue sur l'intervalle [a ; b], avec a < b.

la valeur moyenne de f sur [a ; b] est le réel $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$.

# VI. Propriétés des intégrales de fonctions paires, impaires, périodiques :

1) Si $f$ est une fonction continue et paire sur un intervalle I de centre zéro, alors, pour tout a de I :

$$\int_{-a}^{a} f(t)dt = 2\int_0^a f(t)dt.$$

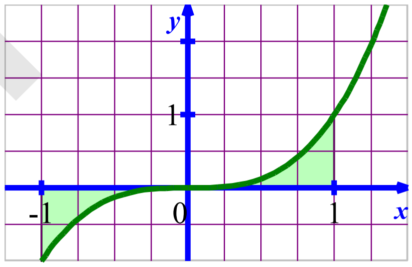



**Exemple 6 :**

$$\int_{-1}^{1} t^2dt = 2\int_0^1 t^2dt = 2\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

2) Si $f$ est une fonction continue et impaire sur un intervalle I de centre zéro, alors, pour tout a de I :

$$\int_{-a}^{a} f(t)dt = 0$$

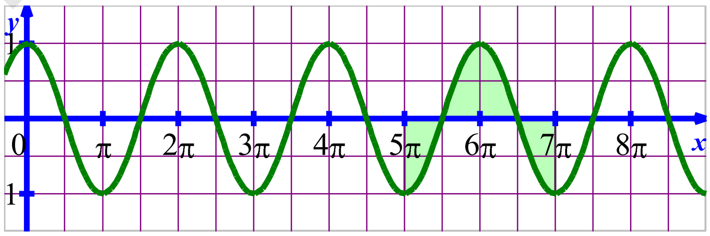



**Exemple 7 :**

$$\int_{-1}^{1} t^3dt = 0 \quad ; \int_{-\pi}^{\pi} \sin t dt = 0$$

c) Si $f$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et de période T, alors, pour tout réel a :

$$\int_a^{a+T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt$$




**Exemple 8 :**

$$\int_{5\pi}^{7\pi} \cos t dt = \int_0^{2\pi} \cos t dt = [\sin t]_0^{2\pi} = 0.$$

# VII. Calculs d'intégrales :

## 1. Utilisation de primitives :

La connaissance d'une primitive **F** de la fonction **f** sur [a ; b] permet le calcul de $\int_a^b f(t)dt$ ;

$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$ (D'après la définition de l'intégrale).

**Exemple 9 :** Calculons l'intégrale : $J = \int_0^2 (x\sqrt{x^2+3})\, dt$.

On remarque que la fonction h définie par : $h(x) = x\sqrt{x^2+3}$, peut s'écrire : $h = \frac{1}{2}f^{\frac{1}{2}}f'$, une primitive de $f^{\frac{1}{2}}f'$ est $\frac{2}{3}f^{\frac{3}{2}}$ ; donc une primitive H de h sur $\mathbb{R}$ est :

$H(x)=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}(x^2+3)^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{3}(x^2+3)^{\frac{3}{2}}$ ; d'où : $J=H(2)-H(0)=\frac{7}{3}\sqrt{7}-\sqrt{3}$.

### 2. Changement de variable :

$\lambda$ et $\mu$ sont deux nombres réels, $\lambda \neq 0$.

Soit **f** une fonction continue sur I. **a** et **b** deux réels tels que : $\lambda a+\mu \in I$ et $\lambda b+\mu \in I$,

calculons $\int_a^b f(\lambda x+\mu)dx$, connaissant une primitive **F** de **f**.

Puisque $f$ a pour primitive F, alors $x \mapsto F(\lambda x+\mu)$ a pour dérivée $x \mapsto \lambda f(\lambda x+\mu)$.

Donc, $x \mapsto f(\lambda x+\mu)$ a pour primitive $x \mapsto \frac{1}{\lambda}F(\lambda x+\mu)$, ce qui donne le résultat cherché :

$$\int_a^b f(\lambda x+\mu)dx=\frac{1}{\lambda}\left[F(\lambda x+\mu)\right]_a^b=\frac{1}{\lambda}\left[F(\lambda b+\mu)-F(\lambda a+\mu)\right].$$

**Exemple 10 :**

Soit à calculer $\int_1^2 \frac{1}{(2x+1)^2}dx$. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est continue sur $]0,+\infty[$ ; $2x+1 \in ]0,+\infty[$, pour $x \in ]0,+\infty[$. Puisque $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ a pour primitive $x \mapsto \frac{-1}{x}$, alors $x \mapsto \frac{-1}{2x+1}$ a pour dérivée : $x \mapsto 2\times\frac{1}{(2x+1)^2}$ et $x \mapsto \frac{1}{(2x+1)^2}$ a pour primitive $x \mapsto \frac{-1}{2}\times\frac{1}{2x+1}$ ; donc :

$$\int_1^2 \frac{1}{(2x+1)^2}dx=\left[\frac{-1}{2}\times\frac{1}{2x+1}\right]_1^2=\frac{-1}{10}+\frac{1}{6}=\frac{1}{15}.$$

### 3. Intégration par parties :

**Théorème 11 :**

Si $f$ et $g$ sont deux fonctions dérivables sur l'intervalle I, si les fonctions dérivées $f$'et $g$' sont continues sur I, alors, pour tous réels a et b de I, on a :

$$\int_a^b f(t)g'(t)dt=\left[f(t)g(t)\right]_a^b-\int_a^b f'(t)g(t)dt$$

**Exemple 11 :** Calculer : $I=\int_0^\pi x\sin x dx$ et $J=\int_1^2 x\ln x dx$.

Calcul de I = $\int_0^\pi x\sin x dx$ Posons : $f(x) = x$ et $g'(x) = \sin x$. Donc ; $f'(x) = 1$ et $g(x) = -\cos x$.

D'où : $I=\int_0^\pi x\sin x dx=\left[-x\cos x\right]_0^\pi-\int_0^\pi(-\cos x)dx = \left[-x\cos x\right]_0^\pi+\left[\sin x\right]_0^\pi=\pi.$

Calcul de $J=\int_1^2 x\ln x dx$ : Posons : $f(x)=\ln x$ et $g'(x)=x$. Donc $f'(x)=\frac{1}{x}$ et $g(x)=\frac{x^2}{2}$

D'où $J=\int_1^2 x\ln x dx=\left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^2-\int_1^2\frac{x}{2}dx=\left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^2-\left[\frac{x^2}{4}\right]_1^2=2\ln 2-\frac{3}{4}.$

## VIII. Calcul d'aires et de volumes :

### 1. Calcul d'aires :

Soient $f$ et $g$ deux fonctions continues sur [a ; b], telles que : pour tout x de[a ; b], $f(x) \leq g(x)$.

dans un repère orthonormé, l'aire de la surface limitée par les représentations graphiques de $f$ et $g$ et les deux droites d'équations respectives x = a et x = b est $\mathcal{A} = \int_a^b [g(x) - f(x)]\,dx$.

**Exemple 12 :**

Soient $f$ et $g$ deux fonctions définies par : $f(x) = x^2 - 2x + 2$ ; $g(x) = -x^2 + 6$. Calculons l'aire $\mathcal{A}$ de la surface limitée par les deux courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$

(courbes respectives de $f$ et $g$ dans un repère orthonormé).

Nous avons : $f'(x) = 2x - 2$ ; $g'(x) = -2x$

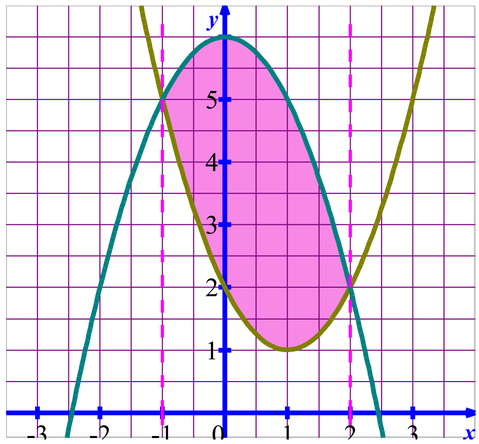



**Tableau de variation de f :**

| x | $-\infty$ | | 1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | - | 0 | + | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | ↘ | 1 | ↗ | $+\infty$ |

**Tableau de variation de g :**

| x | $-\infty$ | | 0 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | + | 0 | - | |
| $g(x)$ | $-\infty$ | ↗ | 6 | ↘ | $-\infty$ |

En plus, les abscisses des points d'intersections vérifient l'équation : $x^2 - 2x + 2 = -x^2 + 6$, soit $2x^2 - 2x - 4 = 0$, d'où $x^2 - x - 2 = 0$, on en déduit les coordonnées des points d'intersections $A(-1;5)$ et $B(2\,;2)$ Sur l'intervalle [-1 ; 2] $f(x) \le g(x)$ ; donc :

$$\mathcal{A} = \int_{-1}^{2} [g(x) - f(x)]\,dx = \int_{-1}^{2} (-x^2 + 6 - x^2 + 2x - 2)\,dx = \int_{-1}^{2} (-2x^2 + 2x + 4)\,dx\,;$$

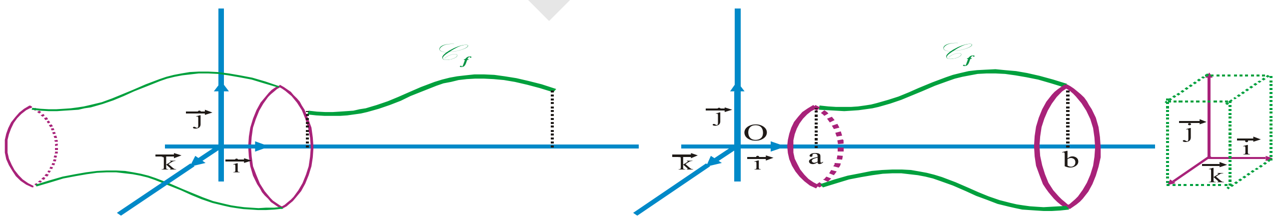
$$\mathcal{A} = \left[\frac{-2}{3}x^3 + x^2 + 4x\right]_{-1}^{2} = \left[\frac{-16}{3} + 4 + 8\right] - \left[\frac{2}{3} + 1 - 4\right] = 9(\text{unités d'aires})$$

## 2. Calcul de volumes :

L'espace est rapporté à un repère orthogonal $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$.

Soient $f$ une fonction dérivable sur un intervalle I, et a , b des réels de I tels que a ≤ b.

Le solide de révolution engendré par la rotation de $\mathscr{C}_f$ autour de l'axe des abscisses, et limité par les plans d'équation x = a ; x = b, a pour volume : $\int_a^b \pi\left(f(t)\right)^2 dt$ **unité de volume**.




L'unité de volume est celle du pavé droit d'arêtes [O ; A] ; [O ; B] et [O ; C] ;

**Exemple 13 :**

Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction $x \mapsto e^x$. Par rotation autour de l'axe $(O\,;\vec{i})$, le domaine plan limité par, la droite $(O\,;\vec{i})$ et les droites d'équations x = -1 et x = 1 engendre un solide de révolution, noté $\mathscr{S}$. Calculons le volume de $\mathscr{S}$. La fonction $x \mapsto e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et en particulier sur [-1 ; 1]. Le volume de $\mathscr{S}$ est :

$$\int_{-1}^{1} \pi(e^x)^2\,dx = \int_{-1}^{1} \pi e^{2x}\,dx = \pi\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_{-1}^{1} = \frac{\pi}{2}(e^2 - \frac{1}{e^2}) \simeq 11{,}394 \text{ UV}$$

## Savoir-faire

# A. Applications :

### Exercice 1 :

Déterminer la primitive $F$ de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ vérifiant $F(1) = 1$.

**Solution :**

$f$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$, elle admet donc des primitives sur $\mathbb{R}$.

$f$ s'écrit sous la forme : $\dfrac{1}{2}\dfrac{U'}{\sqrt{U}}$ (en posant $U(x) = x^2 + 1$), les primitives de $f$ sont sous la forme : $\sqrt{U}+k$. Donc $F(x) = \sqrt{x^2+1}+k$ .

$F(1) = 1 \Leftrightarrow \sqrt{2}+k = 1 \Leftrightarrow k = 1 - \sqrt{2}$, d'où $F(x) = \sqrt{x^2+1}+1-\sqrt{2}$.

### Exercice 2 :

Calculer les intégrales A ; B ; C et D proposées :

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x dx \quad ; \quad B = \int_0^1 \frac{4x^3+8x}{(x^4+4x^2+2)^3}dx$$

$$C = \int_1^2 \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}dx \quad ; \quad D = \int_1^e \frac{\ln x}{x}dx$$

**Solution :**

- La fonction $f$ définie par $f(x) = \sin^2 x \cos x$ peut s'écrire $f(x) = U'U^2$ / $U(x) = \sin x$.

  Donc $f$ a pour primitive $F = \dfrac{U^3}{3}$, d'où $A = \left[\dfrac{\sin^3 x}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \dfrac{1}{3}$.

- La fonction $f$ définie par $f(x) = \dfrac{4x^3+8x}{(x^4+4x^2+2)^3}$ peut s'écrire $f(x) = \dfrac{U'(x)}{U^3(x)}$ ;

  avec $U(x) = x^4 + 4x^2 + 2$.

  Donc, $f$ a pour primitive $F = \dfrac{-1}{2U^2}$ ; d'où $B = \left[\dfrac{-1}{2(x^4+4x^2+2)^2}\right]_0^1 = \dfrac{-1}{98}+\dfrac{1}{8} = \dfrac{45}{392}$.

- La fonction $f$ définie par $f(x) = \dfrac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$ peut s'écrire $f = -\ U'e^U$ ; avec $U(x) = \dfrac{1}{x}$.

  Donc $f$ a pour primitive : $F = -e^U$, d'où $C = \left[-e^{\frac{1}{x}}\right]_1^2 = -e^{\frac{1}{2}}+e = e-\sqrt{e}$.

- La fonction $f$ définie par $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ peut s'écrire $f = U'U$ / $U(x) = \ln x$.

  Donc $f$ a pour primitive $F = \dfrac{U^2}{2}$, d'où $D = \left[\dfrac{\ln^2 x}{2}\right]_1^e = \dfrac{1}{2}\left[\ln^2 e - \ln^2 1\right] = \dfrac{1}{2}$

### Exercice 3 :

Calculer les intégrales proposées à l'aide d'une intégration par parties.

$$A = \int_0^{\pi} x \cos x dx \quad ; \quad B = \int_{-1}^{0}(x+2)e^{x+1}dx \quad ; \quad C = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} x^2 \sin x dx .$$

**Solution :**

- $A=\int_0^{\pi} x\cos x dx;$ **Posons** $U'(x)=\cos x \Rightarrow U(x)=\sin x$ ; $V(x)=x \Rightarrow V'(x)=1$.

  Donc ; $A=\left[x\sin x\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\sin x dx=\left[x\sin x\right]_0^{\pi}-\left[-\cos x\right]_0^{\pi}=-2$.

- $B=\int_{-1}^{0}(x+2)e^{x+1}dx$ ; Posons $f'(x)=e^{x+1}$ $\Rightarrow f(x)=e^{x+1}$ ; $g(x)=x+2$ $\Rightarrow g'(x)=1$.

  Donc ; $B=\left[(x+2)e^{x+1}\right]_{-1}^{0}-\int_{-1}^{0}e^{x+1}dx=\left[(x+2)e^{x+1}\right]_{-1}^{0}-\left[e^{x+1}\right]_{-1}^{0}$

  $=\left[2e-1\right]-\left[e-1\right]=2e-1-e+1=e.$

- $C=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}x^2\sin x dx$. Posons $f'(x)=\sin x \Rightarrow f(x)=-\cos x$ ; $g(x)=x^2 \Rightarrow g'(x)=2x$,

  donc ; $C=\left[-x^2\cos x\right]_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}-\int_{-1}^{0}-2x\cos x dx=\left[-x^2\cos x\right]_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}+2\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}x\cos x dx$.

  Calculons maintenant : $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}x\cos x dx$ en utilisant une deuxième intégration par parties .

  Posons $U'(x)=\cos x \Rightarrow U(x)=\sin x$ ; $V(x)=x \Rightarrow V'(x)=1$.

  Donc ; $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}x\cos x dx=\left[x\sin x\right]_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}-\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\sin x dx=\left[x\sin x\right]_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}+\left[\cos x\right]_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}$

  $=\frac{\pi}{3}\sin(\frac{\pi}{3})+\frac{\pi}{3}\sin(-\frac{\pi}{3})+\cos(\frac{\pi}{3})-\cos(\frac{-\pi}{3})=0$ ;

  d'où $C=\left[-x^2\cos x\right]_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}+2\times 0=-(\frac{\pi}{3})^2\cos(\frac{\pi}{3})+(-\frac{\pi}{3})^2\cos(\frac{-\pi}{3})=0$.

**Remarque :**

Nous pouvions trouver la valeur de cette intégrale directement en remarquant que C est de la forme $\int_{-a}^{a}f(x)dx$ ; avec $f$ impaire.

**Exercice 4 :**

Soit la fonction $f$ définie par $f(x)=\cos^4 x$.

a) Linéariser $f$ en utilisant les formules d'Euler.

b) Calculer l'intégrale A définie par $A=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 x dx$ .

**Solution :**

a) Pour tout réel, on a : $\cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$, donc

$$f(x)=\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^4=\frac{1}{2^4}\left(e^{i4x}+4e^{i3x}e^{-ix}+6e^{i2x}e^{-i2x}+4e^{ix}e^{-i3x}+e^{-i4x}\right)=$$

$$\frac{1}{16}\left(e^{i4x}+4e^{i2x}+6+4e^{-i2x}+e^{-i4x}\right)=\frac{1}{8}\left(\frac{e^{i4x}+e^{-i4x}}{2}+4\frac{e^{i2x}+e^{-i2x}}{2}+3\right)$$

$$=\frac{1}{8}\cos 4x+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{3}{8}.$$

b) $A=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{8}\cos 4x+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{3}{8}\right)dx = \left[\frac{1}{32}\sin 4x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{3}{8}x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{3\pi}{16}.$

**Exercice 5 :**

Calculer la valeur moyenne de la fonction f entre a et b dans les deux cas suivants :

a) $f(x) = 3x^2$ ; a = 0 ; b = 2 ; b) $f(x) = \sin x$ ; a = 0 ; b = 2π.

**Solution :**

a) $m=\frac{1}{2-0}\int_0^2 3x^2dx=\frac{1}{2}\left[x^3\right]_0^2=\frac{1}{2}[8-0]=4$ ;

b) $m=\frac{1}{2\pi-0}\int_0^{2\pi}\sin x dx=\frac{1}{2\pi}[-\cos x]_0^{2\pi}=\frac{1}{2\pi}[-\cos 2\pi+\cos 0]=\frac{1}{2\pi}\times 0=0$.

**Exercice 6 :**

Majorer et minorer : $I_n=\int_0^1\frac{x^n}{1+x}dx$, puis déduisez-en que la suite $(I_n)$ converge vers 0.

**Solution :**

$0\le x\le 1 \Rightarrow 1\le 1+x\le 2 \Rightarrow \frac{1}{2}\le\frac{1}{1+x}\le 1 \Rightarrow \frac{x^n}{2}\le\frac{x^n}{1+x}\le x^n$ ;

donc ; $\int_0^1\frac{x^n}{2}dx\le\int_0^1\frac{x^n}{1+x}dx\le\int_0^1 x^n dx \Rightarrow \left[\frac{x^{n+1}}{2(n+1)}\right]_0^1\le I_n\le\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1\Rightarrow\frac{1}{2(n+1)}\le I_n\le\frac{1}{(n+1)}$.

Puisque $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2(n+1)}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{(n+1)}=0$, alors $\lim_{n\to+\infty} I_n=0$ ( Théorème des Gendarmes).

Donc ( $I_n$ ) converge vers 0.

**Exercice 7 :**

Trouver une primitive sur l'intervalle] 0 ; +∞ [ de la fonction $\ln x$.

**Solution :**

La fonction $\ln x$ est continue sur ] 0 ; +∞ [, elle a donc des primitives. Sa primitive nulle en 1 est la fonction F définie sur ] 0 ; +∞ [ par : $F(x)=\int_1^x \ln t dt$.

Pour calculer cette intégrale, nous utiliserons une intégration par parties.

Posons : $f'(t)=1\Rightarrow f(t)=t$ ; $g(t)=\ln t\Rightarrow g'(t)=\frac{1}{t}$ ;

donc ; $F(x)=[t\ln t]_1^x-\int_1^x\frac{1}{t}tdt=[t\ln t]_1^x-\int_1^x dt=[t\ln t]_1^x-[t]_1^x\Rightarrow F(x)=x\ln x-x+1$.

**Exercice 8 :**

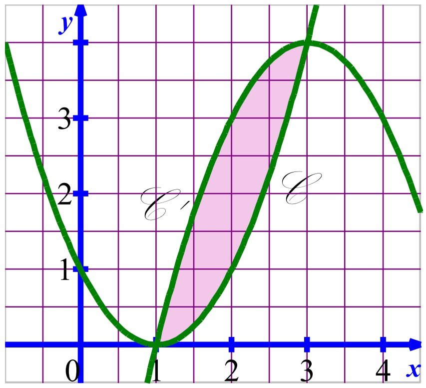
Soient $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}$' les courbes respectives des fonctions $f(x)=(x-1)^2$ et $g(x)=-x^2+6x-5$

a) Déterminer l'intersection de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}$'; puis tracer $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}$'dans un repère orthonormé .

b) Calculer l'aire du domaine défini par $\begin{cases}1\le x\le 3\\ f(x)\le y\le g(x)\end{cases}$

**Solution :**

a) Coordonnées des points d'intersection : (1 ; 0) ; et (3 ; 4).




b) $A = \int_1^3 (g(x) - f(x))dx = \int_1^3 (-x^2 + 6x - 5 - x^2 + 2x - 1)dx$

$= \int_1^3 (-2x^2 + 8x - 6)dx = \left[\frac{-2x^3}{3} + 4x^2 - 6x\right]_1^3$

$= \left(\frac{-54}{3} + 36 - 18\right) - \left(\frac{-2}{3} + 4 - 6\right) = \frac{8}{3} \text{UA} = \frac{8}{3} 0,25 = \frac{2}{3} \text{cm}^2$ .

**Exercice 9 :**

r et h sont deux réels strictement positifs.

Soit la fonction $f$ définie sur l'intervalle [0 ; h] par : $f(x) = \frac{r}{h}x$.

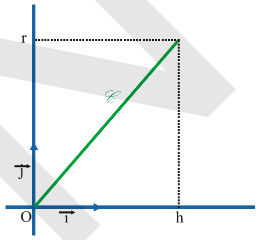
a) Tracer la courbe $\mathscr{C}$ de $f$ dans un repère orthonormé ( O ; $\vec{i}$ ; $\vec{j}$ ).

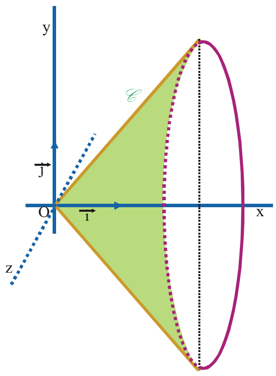
Le solide engendré par la rotation de $\mathscr{C}$ autour de l'axe ( O ; $\vec{i}$ ) est un cône de révolution de hauteur h et sa base a pour rayon r.

b) Calculer le volume $V$ de ce cône.

**Solution :**

a) Voici la construction demandée




b) $V = \int_0^h \pi f^2(x)dx = \int_0^h \pi \frac{r^2}{h^2} x^2 dx = \pi \frac{r^2}{h^2} \int_0^h x^2 dx$

$= \pi \frac{r^2}{h^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h = \pi \frac{r^2}{h^2} \times \frac{h^3}{3} \Rightarrow V = \frac{\pi r^2 h}{3}$.

## B. Exercices divers

**1.** Déterminer les primitives, en précisant sur quel(s) intervalle(s) elles sont définies, des fonctions :

a) $f(x) = x^2 + 3x - 4$; b) $f(x) = \dfrac{2}{x^2} - \dfrac{3}{x^3}$ ;

c) $f(x) = \dfrac{1-x}{(x^2-2x+3)^2}$

**2.** Même question pour :

a) $f(x) = \dfrac{2x+3}{\sqrt{x^2+3x+2}}$ ; b) $f(x) = \sin x\cos^3 x$ ;

c) $f(x) = \dfrac{\cos x}{\sin^2 x}$ .

**3.** Donner la primitive $F$ de f si $F(x_0) = y_0$, pour chacune des fonctions $f$ définies par :

a) $f(x) = (2x - 1)^3$; $F(0) = 0$ ;

b) $f(x) = (2x - 1)(x^2 - x + 1)^4$ ; $F(1) = 1$

c) $f(x) = \dfrac{-2}{x^2}$ ; $F(1) = 0$

**4.** Même exercice pour :

a) $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$ ; $F(-1) = 1$ ;

b) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4x+2}}$ ; $F(2) = 4$ ;

c) $f(x) = \dfrac{x}{(x^2-1)^2}$ ; $F(2) = 4$.

**5.** Dans les deux cas suivants, linéariser la fonction $f$ et déterminer une primitive $F$ de $f$ sur $\mathbb{R}$ : a) $f(x) = \cos^4$ ; b) $f(x) = \sin^6 x$

**6.** Calculer les intégrales suivantes :

$$I = \int_{-3}^{2} 2x^4 \;;\; J = \int_0^{\pi} \sin 2t\,dt \;;\; K = \int_3^1 \frac{dx}{1+x}$$

$$L = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \left(1+\tan^2 u\right)du \;;\; M = \int_0^2 e^x dx \;;\; N = \int_1^2 \frac{dx}{x^2}$$

**7.** Calculer les intégrales :

$$A = \int_0^1 t\sqrt{t^2+1}\,dt \;;\; B = \int_1^4 \frac{x+1}{x^2+2x+3}dx;$$

$$C = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{e^{\frac{1}{t^2}}}{t^3}dt \quad ;\; D = \int_0^1 \frac{2x}{(x^2+1)^2}dx$$

**8.** Calculer les intégrales :

$$E = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^3 x}dx \quad ;\; F = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\cos x\,dx$$

**9.** Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'une intégration par parties :

$$A = \int_0^{\pi} x\sin x\,dx \;; \qquad B = \int_1^e \ln t\,dt;$$

$$C = \int_{-1}^{0} (2x+1)e^{-x}dx \;; \qquad D = \int_1^2 \frac{\ln x}{x^2}dx$$

$$E = \int_1^2 x\ln x\,dx \;; \qquad F = \int_5^{10} \frac{x}{\sqrt{x-1}}dx$$

**10.** Linéariser pour calculer les intégrales :

$$I = \int_0^{\pi} \sin^4 x\,dx \;; \qquad J = \int_0^{2\pi} \sin^2 x\cos^4 x\,dx \;;$$

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\sin^4 x\,dx \;; \qquad L = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x\,dx.$$

**11.** Transformer les fonctions à l'aide d'une formule trigonométrique et calculer l'intégrale :

a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx$ ; b) $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos^3 x\,dx$ ;

c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x\,dx$ ; d) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^3 2x\,dx$ ;

e) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\cos^5 x\,dx$ ; $f = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^3 x}dx.$

**12.** A l'aide de deux intégrations par parties successives, calculer les intégrales A et B définies par :

$$A = \int_0^1 x^2 e^x dx \;;\; B = \int_0^{\pi} e^x \sin x\,dx.$$

Soit :

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos^2 x\,dx \;;\; B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin^2 x\,dx.$$

a) Calculer A + B ;

b) Calculer A – B par intégration par parties.

c) Déduire des questions a) et b) les valeurs de **A** et **B.**

**13.** Pour tout naturel n, on pose : $I_n = \displaystyle\int_0^1 t^n e^t dt$

a) A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ : $I_n = e - n\, I_{n-1}$

b) Calculer $I_0$, puis $I_1$ ; $I_2$ ; $I_3$.

**14.** $I_n = \displaystyle\int_0^e (\ln x)^n\,dx$, où **n** est un entier naturel non nul.

a) En utilisant une intégration par parties, trouvez une relation entre $I_{n-1}$ et $I_n$.

b) Déduisez- en la valeur de $I_4$.

**15.** 1) Soit **f** la fonction définie pour $x \neq 1$ par : $f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + x}{1 - x}$ ; Déterminer les réels **a ; b ; c ; d** tels que l'on ait, pour tout $x \neq 1$ : $f(x) = ax^2 + bx + c + \frac{d}{1-x}$.

b) Calculer : $I = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx$.

2) Calculer, à l'aide d'une intégration par parties : $J = \int_0^{\frac{1}{2}} (3x^2 - 6x + 1)\ln(1-x)dx$

**16.** D est l'ensemble des points M(x ; y) du plan tels que : $\begin{cases} 0 \le x \le \pi \\ 0 \le y \le \sin x \end{cases}$

1) L'unité graphique est 2cm. Représenter D. Calculer l'aire de D en unités d'aire, puis en $cm^2$.

2) L'unité est $\frac{6}{\pi}$ cm sur l'axe des abscisses et 4 cm sur l'axe des ordonnées. Représenter D. Quelle est l'aire de D en $cm^2$ ?

**17.** $f$ est la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$. D est le domaine délimité par la courbe C de $f$, la droite des abscisses, les droites d'équations : **x = 1** et **x = e**. l'unité graphique est 3cm.

a) Représenter D.

b) Calculer l'aire de D en $cm^2$.

**18.** 1) Etudier la fonction numérique $f$ qui, au réel x associe : $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$, puis tracer sa représentation graphique dans un repère orthonormé.

2) Déterminer l'aire du domaine constitué par les points M(x ; y), dont les coordonnées vérifient : $\begin{cases} 2 \le x \le e^2 \\ 0 \le y \le f(x) \end{cases}$

**19.** Soit $f$ la fonction définie par : $f(x) = (x + 2)e^{-x}$,

Etudier f et construire sa courbe représentative dans un plan rapporté à un repère orthonormé.

2) Calculer l'aire de la partie de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ définie par : $\begin{cases} 0 \le x \le \lambda \\ 0 \le y \le f(x) \end{cases}$ ; où $\lambda$ est un réel strictement positif.

Quelle est la limite de cette aire lorsque $\lambda$ tend vers $+\infty$ ?

**20.** a) Donner le tableau de variation de la fonction $f : [0 ; \pi] \mapsto \sin^2 x$.

Tracer la courbe $C_f$ de $f$ (l'unité graphique est 9 cm) dans un repère orthonormé.

b) Montrer que pour tout réel x :

$\sin^4 x = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x$.

c) Calculer le volume en $cm^3$ du solide S engendré par la révolution autour de la droite des abscisses (Ox) de la plaque définie par : $\begin{cases} 0 \le x \le \pi \\ 0 \le y \le \sin^2 x \end{cases}$

**21.** On considère les intégrales :

$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{(\cos x)^2}$ ; $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{(\cos x)^4}$.

1.a) Quelle est la dérivée de la fonction tangente ?

b) Calculer I.

2.a) Soit la fonction $f : [0 ; \frac{\pi}{4}] \to \mathbb{R}.\ x \mapsto \frac{\sin x}{\cos^3 x}$

Démontrer que $f$ est dérivable sur $[0 ; \frac{\pi}{4}]$ et que $f'(x) = \frac{3}{\cos^4 x} - \frac{2}{\cos^2 x}$, $\forall x \in [0 ; \frac{\pi}{4}]$

b) Déduire du calcul précédent une relation entre I et J, puis calculer J

**22.** Soit $(U_n)$ la suite numérique définie par :

$U_0 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x+1}}$ ; $\forall n \in \mathbb{N}^*, U_n = \int_0^1 \frac{x^n dx}{\sqrt{x+1}}$

1. Soit $f$ l a fonction telle que : $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^n}\right)$).

Déterminer la dérivée de $f$, calculer $U_0$.

2. Calculer $U_1$. calculer $U_2$ à l'aide d'une intégration par parties.

3. Démontrer que: $\forall x \in [0 ; 1]$,

$0 \le \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} \le x^n$.

Déduire en que la suite $(U_n)$ converge vers **0**.

CHAPITRE 7

# Equations différentielles

## Faire savoir

### L'essentiel du chapitre

### I. Notion d'équation différentielle :

Soit *f* une fonction dérivable autant de fois que c'est nécessaire sur un intervalle I.

**Définition:**

On appelle équation différentielle toute équation qui lie *f* à ses dérivées successives.

**Degré d'une équation différentielle :**

Le degré d'une équation différentielle est l'ordre supérieur de la dérivée figurant dans cette équation.

Une équation est dite du premier degré lorsqu'elle lie la fonction et sa dérivée première.

Une équation est dite du second degré lorsqu'elle lie la fonction, sa dérivée première et sa dérivée seconde. etc.

L'inconnue dans une équation différentielle est une fonction. Ces fonctions sont notées d'habitude «y».

Résoudre une équation différentielle c'est trouver toutes les fonctions qui la vérifient.

### II. L'équation $y' + ay = 0$ ( a réel) :

**Théorème 1 :**

Les fonctions solutions de l'équation différentielle du premier degré $\mathbf{y' + ay = 0}$ ( a réel) sont les fonctions $\mathbf{x \mapsto Ae^{-ax}}$ ( A réel quelconque).

Il existe une unique solution de cette équation vérifiant la condition initiale $\mathbf{y(x_0) = y_0}$ ($x_0$ et $y_0$ des réels donnés).

Cette fonction est la fonction : $\mathbf{x \mapsto y_0 e^{-a(x-x_0)}}$.

### III. L'équation $y'' + ay' + by = 0$ ( a, b des réels)

#### 1. Les équations de référence :

**Théorème 2 :**

| **Equations de référence** ($\omega$ un réel non nul) | **fonctions solutions** (A , B réels quelconques) |
|---|---|
| $\mathbf{y'' = 0}$ | $\mathbf{y = Ax + B}$ |
| $\mathbf{y'' - \omega^2 y = 0}$ | $\mathbf{y = Ae^{\omega x} + Be^{-\omega x}}$ |
| $\mathbf{y'' + \omega^2 y = 0}$ | $\mathbf{y = A\cos\omega x + B\sin\omega x}$ |

#### 2. Résolution de l'équation du second degré $y'' + ay' + by = 0$ :

**L'idée générale**

- Procéder à un changement de fonction pour ramener la résolution de cette équation différentielle à une équation de référence.
- Exprimer alors les solutions de l'équation différentielle et les interpréter à l'aide de l'équation caractéristique associée à savoir l'équation du second degré $\mathbf{r^2 + ar + b = 0}$ (inconnue r).

**Le changement de fonction :**

Soit y une fonction affine sur $\mathbb{R}$, et $\alpha$ un réel, on définit alors la fonction Z par $\mathbf{Z = ye^{-\alpha x}}$, les rudiments de calcul différentiel permettent d'avancer que :

y est une solution de l'équation différentielle **y''+ ay' + by = 0** équivaut à : Z est solution de l'équation :

$\mathbf{Z'' + (a + 2\alpha)Z' + (\alpha^2 + a\alpha + b)Z = 0}$. Prendre $\alpha = -\frac{a}{2}$ s'impose ; nous voilà amenés à une équation de référence, résumons :

$$y'' + ay' + b = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} Z = ye^{-\frac{a}{2}x} \\ Z'' = (\frac{a^2 - 4b}{4})Z \end{cases} \quad (E)$$

**L'équation caractéristique :**

Considérons l'équation du second degré $r^2 + ar + b = 0$, d'inconnue r appelée équation caractéristique, le discriminant de cette équation est égal à $a^2 - 4b$, de ce fait l'ensemble (E) des solutions précédentes s'écrit :

$$(E')\begin{cases} y = Ze^{-\frac{a}{2}x} \\ Z'' = (\frac{\Delta}{4})Z \end{cases}$$

; Il n'y a plus qu'à résoudre grâce au théorème 2 l'équation de référence $Z'' = (\frac{\Delta}{4})Z$ et à interpréter les résultats obtenus à l'aide des racines de l'équation caractéristique.

## IV. Les résultats :

**Théorème 3 :**

| **Equation caractéristique** $r^2 + ar + b = 0$ | **Fonctions solutions** $(y'' + ay' + by = 0)$ |
|---|---|
| 2 racines réelles distinctes $r_1$ ; $r_2$. | $y = Ae^{r_1x} + Be^{r_2x}$ |
| 1 racine réelle double r | $y = (Ax + B)e^{rx}$ |
| 2 racines complexes conjuguées $\alpha + i\beta$ ; $\alpha - i\beta$ ; | $y = e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x)$ |

**Démonstration**

- $\Delta > 0$ : Ecrivons $\Delta = \omega^2$ ; $\omega$ un réel non nul.

Les racines de l'équation caractéristique sont alors : $r_1 = \frac{-a+\omega}{2}$ ; $r_2 = \frac{-a-\omega}{2}$.

De, $Z'' = (\frac{\Delta}{4})Z$ et du théorème 2 nous tirons : $Ae^{\frac{\omega}{2}x} + Be^{-\frac{\omega}{2}x}$ (A ; B réels)

Avec $Z = ye^{\frac{a}{2}x}$, il vient : $y = Ae^{(\frac{-a+\omega}{2})x} + Be^{(\frac{-a-\omega}{2})x}$ ; soit $y = Ae^{r_1x} + Be^{r_2x}$ ( A ; B réels).

- $\Delta = 0$ : la racine double de l'équation caractéristique est $r = -\frac{a}{2}$.

Nous avons, alors $\mathbf{Z'' = 0}$ d'où $\mathbf{Z = Ax + B}$ ( A, B réels)

La relation $y = Ze^{-\frac{a}{2}x} = Ze^{rx}$ conduit immédiatement à $y = (Ax + B)e^{rx}$ ( A, B réels).

- $\Delta < 0$ : Ecrivons cette fois $\Delta = -\omega^2$ ; $\omega$ réel non nul.

Les racines de l'équation caractéristique sont alors,

$r_1 = \frac{-a+i\omega}{2}$ ; $r_2 = \frac{-a-i\omega}{2}$

Avec $Z'' = -(\frac{\omega}{2})^2 Z$ et le théorème 2 il vient :

$\mathbf{Z = (A\cos\frac{\omega}{2}x + B\sin\frac{\omega}{2}x)}$ **(A ; B réels),** puis $\mathbf{y = e^{\frac{-a}{2}x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x)}$ ; ( A ; B réels) ;

dès lors qu'on écrit : $\mathbf{r_1 = \alpha + i\beta}$ ; $\mathbf{r_2 = \alpha - i\beta}$$\mathbf{(\alpha = \frac{-a}{2}\ ;\ \beta = \frac{\omega}{2})}$.

## V. Avec les conditions initiales :

**Théorème 4 :**

Il existe une unique solution de l'équation différentielle $\mathbf{y'' + ay' + by = 0}$ satisfaisant aux conditions initiales : $\mathbf{y(x_0) = y_0}$ : $\mathbf{y'(x_0) = y'_0}$ ; $\mathbf{x_0}$ ; $\mathbf{y_0}$ ; $\mathbf{y'_0}$ des réels donnés.

## VI. Equation avec second membre :

**Exemple 1 :**

| | |
|---|---|
| I) Soit l'équation différentielle (E) $y' - 2y = e^x$.<br>1) Vérifier que la fonction **g :** $x \mapsto -e^x$ est solution de ( E).<br>2) Montrer qu'une fonction ***f*** est solution de ( E) si et seulement si ***f* – g** est solution de $y' - 2y = 0$ (E')<br>3) Résoudre E' puis E. | II) On considère l'équation différentielle<br>(1) : $y'' - y' - 6y = -6x - 1$<br>1) Déterminer un polynôme ***g*** du premier Degré solution de (1).<br>2) Démontrer qu'une fonction f est solution de (1) si et seulement si ***f* – *g*** est solution de l'équation différentielle $y'' - y' - 6y = 0$ (2 ).<br>3) En déduire les solutions de (1). |
| **Réponse :** | **Réponse :** |
| Avec $\boldsymbol{g}(x) = -e^x$ , il vient $\boldsymbol{g}'(x) = -e^x$, d'où : $\boldsymbol{g}'(x) - 2\boldsymbol{g}(x) = e^x$,<br>la fonction $\boldsymbol{g}(x) = -e^x$ est donc solution de E.<br>Comme $\boldsymbol{g}'(x) - 2\boldsymbol{g}(x) = e^x$ pour tout réel x, il est équivalent de dire $\boldsymbol{f}'(x) - 2\boldsymbol{f}(x) = e^x$ ou<br>$\boldsymbol{f}'(x) - 2\boldsymbol{f}(x) = \boldsymbol{g}'(x) - 2\boldsymbol{g}(x)$<br>d'une autre manière :<br>$\boldsymbol{f}$ solution de E $\Leftrightarrow (\boldsymbol{f}-\boldsymbol{g})' - 2(\boldsymbol{f}-\boldsymbol{g}) = 0$.<br>Ainsi ***f*** est solution de E $\Leftrightarrow \boldsymbol{f}-\boldsymbol{g}$ solution de (E').<br>Les fonctions solutions de l'équation $y' - 2y = 0$ étant les fonctions :<br>$\mathbf{x \mapsto Ae^{2x} (A\ réel)}$. On en déduit que les solutions de( E) sont les fonctions $A(\mathbf{e^{2x} - e^x})$. | Posons $\boldsymbol{g}(x) = ax + b$ avec a, b réels, la fonction $\mathbf{x \mapsto (ax+b)}$ est solution de ( 1 )<br>signifie que : $-a - 6(ax + b) = -6x - 1$ ; on en déduit aisément que a = 1 ; b = 0 ;<br>la fonction $\mathbf{x \mapsto x}$ est solution de (1).<br>L'égalité $\boldsymbol{g}''(x) - \boldsymbol{g}'(x) - 6g(x) = -6x - 1$ vraie pour tout x, montre que ***f*** solution de (1) équivaut à<br>$\boldsymbol{f}'' - \boldsymbol{f}' - 6\boldsymbol{f} = \boldsymbol{g}'' - \boldsymbol{g}' - 6\boldsymbol{g}$<br>ou encore $(\boldsymbol{f}-\boldsymbol{g})'' - (\boldsymbol{f}-\boldsymbol{g})' - 6(\boldsymbol{f}-\boldsymbol{g}) = 0$.<br>Ceci établi l'équivalence ***f*** est solution de (1) $\Leftrightarrow \boldsymbol{f}-\boldsymbol{g}$ est solution de (2)<br>les solutions de $y'' - y' - 6y = 0$ sont les fonctions $\mathbf{x \mapsto Ae^{3x} + Be^{-2x}}$. On en déduit que les solutions de (1) sont les fonctions :<br>$\mathbf{x \mapsto Ae^{3x} + Be^{-2x}} + x$ : A et B réels quelconques. |

## Savoir-faire

## A. Applications :

### I. Exemples prototypes :

| Exemple 1 : Résoudre : $y''-3y'-4y=0$ | Exemple 2 : Résoudre : $y''+4y'+4=0$ |
|---|---|
| **Réponse :** | **Réponse :** |
| L'équation caractéristique $r^2-3r-4=0$ admet deux solutions réelles : $r_1=-1$ ; $r_2=4$. Les fonctions solutions de l'équation différentielle $y''-3y'-4y=0$ sont les fonctions : $x\mapsto Ae^{-x}+Be^{4x}$, A et B des réels quelconques | L'équation caractéristique $r^2+4r+4=0$ admet une solution réelle double $r=-2$. Les solutions de l'équation différentielle $y''+4y'+4=0$ sont les fonctions $x\mapsto(Ax+B)e^{-2x}$ ( A ; B réels quelconques). |

**Exemple 3 :**

Résoudre : $y''+2y'+5y=0$

**Réponse :**

Les racines de l'équation caractéristique $r^2+2r+5=0$ sont les complexes conjuguées : $-1+2i$ et $-1-2i$.

Nous en déduisons les fonctions solutions de cette équation différentielle qui sont $x\mapsto e^{-x}(A\cos 2x+B\sin 2x)$ ( A ; B réels).

**Exemple 4 :**

| 1) Déterminer la fonction y telle que : $y''+2y'+2y=0$ ; $y(0)=1$ ; $y'(0)=-1$. | 2) Le plan étant muni d'un repère orthonormal (xOy), existe-t-il une fonction f ayant les propriétés suivantes et si oui l'expliciter : $f$ est solution de **E** : $y''-3y'+2y=0$ la courbe représentative de $f$ passe le point A(0 ; 1) et admet en ce point une tangente parallèle à (Ox). |
|---|---|
| **Réponse :** | **Réponse :** |
| L'équation caractéristique : $r^2+2r+2=0$ a pour solution $-1+i$ et $-1-i$. Les solutions de l'équation sont alors $y=e^{-x}(A\cos x+B\sin x)$ Les conditions : $y(0)=1$ et $y'(0)=-1$ conduisent à A = 1 et B = 0, donc la fonction cherchée est : $f(x)=e^{-x}\cos x$ | Les conditions ci-dessus peuvent être résumées en : f est solution de $y''-3y'+2=0$ et $f(0)=1$ ; $f'(0)=0$. Le théorème 4 affirme l'existence et l'unicité d'une telle fonction. **Explicitons :** L'équation caractéristique $r^2-3r+2=0$ a pour racines 1 et 2. Il existe donc deux réels A et B tels que $f(x)=Ae^x+Be^{2x}$. Les conditions $f(0)=1$ et $f'(0)=0$ conduisent à $A+B=1$ et $A+2B=0$ d'où $A=2$ et $B=-1$. La fonction $f$ est alors définie par $f(x)=2e^x-e^{2x}$. |

## II. Situations conduisant à une équation différentielle :

### A) Chute libre d'un corps :

Un corps de masse m lâché sans vitesse initiale subit en chute libre une force de freinage d'intensité F proportionnelle à la vitesse v : F = –kv ( où k coefficient de forme est positif).

1) Montrer que la fonction du temps $\mathbf{x \mapsto v(t)}$ est une solution sur [0 ; +∞[

   de l'équation différentielle $\mathbf{y' + \frac{k}{m} y = g}$ ( où g est l'accélération de la pesanteur).

2) Trouver une fonction constante solution de cette équation.

   En déduire que : $\mathbf{V(t) = \frac{mg}{k}(1 - e^{\frac{-k}{m}t})}$ , et interpréter $\mathbf{v = \frac{mg}{k}}$.

**Solution :**

Le bilan des forces appliquées sur le corps se résume au poids et à la force de freinage.

Le théorème fondamental de la dynamique permet alors d'écrire la relation (valable à chaque instant t) : mg – kv(t) = mγ(t) (où γ(t ) est l'accélération à l'instant t).

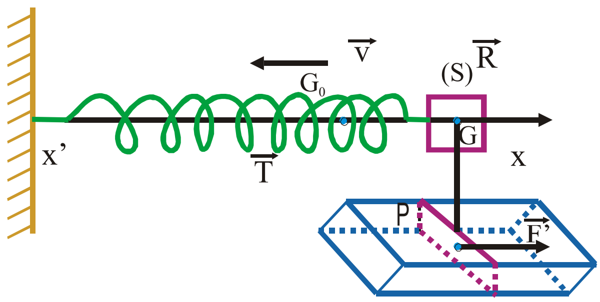
En tenant compte de $\gamma(t) = v'(t)$ on obtient $\mathbf{v'(t) + \frac{k}{m} v(t) = g}$.

Il est facile de voir que la fonction constante t $\mapsto \mathbf{\frac{mg}{k}}$ est une solution particulière de l'équation différentielle (1) : $\mathbf{y' + \frac{k}{m} y = g}$. Comme la solution générale de l'équation sans second membre est $\mathbf{y = Ae^{-\frac{k}{m}t}}$, la solution générale de (1) est : $t \mapsto \mathbf{Ae^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k}}$ , la condition initiale $\mathbf{v(0) = 0}$ conduit à : $\mathbf{A = \frac{-mg}{k}}$, d'où l'expression de **v** : $\mathbf{v(t) = \frac{mg}{k}\left(1 - e^{\frac{-k}{m}t}\right)}$, on vérifie que $\mathbf{\lim_{t \to +\infty} v(t) = v = \frac{mg}{k}}$,

v apparaît donc comme la vitesse limite du corps.

### B) Oscillateurs mécaniques amortis :

On considère le dispositif ci-contre, le solide (S) de masse m peut coulisser sans frottement suivant un axe horizontal ; le solide est muni d'une palette de masse négligeable trempant dans un liquide , la force de frottement qu'exerce le liquide sur la palette est proportionnelle à la vitesse de cette dernière, elle est de la forme : $\vec{F}' = -f\,\vec{v}$ .




- La raideur du ressort est égale à k.
- Ecrire l'équation différentielle du mouvement.

**Solution :**

**1. Choix du repère**

L'axe horizontale (xx') est muni d'un repère (O ; $\vec{i}$ ) ; où O est le point $G_O$ correspondant à la position du centre d'inertie G du solide. Lorsque le ressort n'est pas tendu.

La position de g est alors repérée en fonction du temps t par son abscisse x(t) dans un repère : $\overrightarrow{G_O G_t} = x(t).\vec{i}$.

**2. L'équation du mouvement**

- Bilan des forces exercées sur le système ''Solide ; Palette''.

Ce système est soumis à son poids $\vec{P}$, à la réaction $\vec{R}$ de l'axe orthogonal à l'axe, à la force $\vec{T}$ exercée par le ressort : $\vec{T} = -k\overrightarrow{G_O G} = -k\, x(t).\vec{i}$ et enfin à la force $\vec{F'}$ exercée par le liquide : $\vec{F'} = -f\vec{v} = -fx'(t).\vec{i}$.

Le théorème du centre d'inertie conduit à écrire $\vec{P} + \vec{R} + \vec{T} + \vec{F'} = m\vec{a}_G$ ; où $\vec{a}_G$ est le vecteur accélération de **G** : $\vec{a}_G = x''(t).\vec{i}$.

Par projection orthogonale sur l'axe (O ; $\vec{i}$ ), on obtient : $-kx(t) - fx'(t) = mx''(t)$;

soit $mx'' + fx' + kx = 0$ ; et c'est l'équation du mouvement.

## C) Radioactivité & datation avec carbone 14 :

On note $f(t)$ le nombre d'atomes de carbone **14** existant à l'instant **t** dans un échantillon de matière organique. On montre que la fonction **f** vérifie pour tout réel **t** : $f'(t) = -kf(t)$ et $f(0) = N_0$ ; où **k** est un réel strictement positif (constante radioactive de l'élément).

1°) Donner l'expression de $f(t)$ en fonction de $N_0$, **k** et **t**.

2°) On appelle période(ou demi-vie)de l'élément radioactif le temps **T** au bout duquel la moitié des atomes se sont désintégrés. Sachant que $k = 1{,}238\times10^{-4}$ et que **t** est évalué en années, déterminer la demi-vie du carbone **14.**

3°) Le carbone **14** est renouvelé constamment chez les êtres vivants ; à la mort de ceux-ci l'assimilation cesse et le carbone **14** présent se désintègre. Des archéologues ont trouvé des fragments d'os dont la teneur en carbone **14** est **40%** de celle d'un fragment d'os actuel de même masse, pris comme témoin. Calculer l'âge de ces fragments.

**Solution :**

1°) La fonction **f** est solution de l'équation différentielle : $y' + ky = 0$. Elle est de la forme $f(t) = Ae^{-kt}$. A l'instant t = 0 : $f(0) = Ae^{-k\times 0} = N_0$ donc $A = N_0$. Par suite : $f(t) = N_0\, e^{-kt}$.

2° ) La demi-vie du carbone 14 est T telle que $f(T) = Ne^{-kT} = \frac{1}{2}N_0$ soit $-kT = -\ln 2$.

Donc : $T = \frac{\ln 2}{k} = \frac{\ln 2}{1{,}238\times10^{-4}} \cong 5599$ *ans*.

3°) $f(t) = N_0\, e^{-kt} = 0{,}4\times N_0 \Leftrightarrow -kt = \ln(0{,}4)$, donc : $t = -\frac{\ln(0{,}4)}{k} = -\frac{\ln(0{,}4)}{1{,}238\times10^{-4}} \cong 7401$ *ans.*

## Exercices divers :

**Les exercices marqués par une étoile sont réservés aux élèves de la série Mathématiques**

**1.** Résoudre les équations différentielles :

1) $y' - 3y = 0$ ; 2) $y' + \frac{1}{2}y = 0$ ; 3) $5y' - 2y = 0$

4) $\frac{2}{3}y' + y = 0$ ; 5) $3y' + 4y = 0$; 6) $2y' + y\sqrt{2} = 0$

**2.** Résoudre les équations différentielles et déterminer la solution qui vérifie la condition initiale :

1) $y' + 2y = 0$ ; $y(0) = 1$; 2) $y' - 5y = 0$ ; $y(2) = 7$

3) $2y' - 3y = 0$; $y(2) = e$ ; 4) $7y' + 4y = 0$ ; $y(7) = e^5$

5) $y' + 0{,}5y = 0$; $y(2) = 1$ ; 6) $0{,}4y' - 1{,}5y = 0$; $y(0) = 1$

7) $y'\sqrt{2} - y = 0$ ; $y(0) = e^2$; 8) $y' - \pi y = 0$ ; $\ln(y(2)) = \pi$

**3.** Résoudre les équations différentielles

1) $y'' = y$ ; 2) $y'' + y = 0$ ; 3) $y'' - 2y = 0$

4) $y'' + 3y = 0$ ; 5) $y'' - 4y' + 3y = 0$ ;

6) $y'' + y' + y = 0$ ; 7) $y'' + 4y' - 5y = 0$ ;

8) $y'' + 4y' + 5y = 0$ ; 9) $y'' - 2y' + y = 0$ ;

10) $y'' - 0{,}1y' - 0{,}2y = 0$ ;

11) $y'' - 4y' + 7y = 0$ ; 12) $y'' - 4y' - 4y = 0$ ;

13) $2y'' - 5y' - 3y = 0$ ; 14) $2y'' + y'\sqrt{2} + y = 0$ ;

15) $4y'' + 4y' + y = 0$ ; 16) $9y'' + 6y' + y = 0$ ;

**4.** Résoudre les équations différentielles et déterminer la solution qui vérifie les conditions initiales données.

1) $y'' + 4y = 0$ ; $y(\frac{\pi}{2}) = -1$ ; $y'(\frac{\pi}{2}) = 1$ ;

2) $y'' - \pi y = 0$ ; $y(0) = \pi$ ; $y'(0) = \pi$ ;

3) $y'' + 9y = 0$ ; $y(\pi) = 1$ ; $y'(\pi) = 0$ ;

4) $4y'' + 121y = 0$ ; $y(0) = 1$ ; $y'(0) = 11$ ;

5) $y'' - y' - 2y = 0$ ; $y(1) = 1$ ; $y'(1) = 0$ ;

6) $y'' - 2y' + 5y = 0$ ; $y(\pi) = 0$ ; $y'(\pi) = -1$ ;

7) $y'' + y' + \frac{1}{4}y = 0$ ; $y(0) = 0$ ; $y'(0) = 1$ ;

8) $y' - 4y' - 13y = 0$ ; $y(0) = 2$ ; $y'(0) = 0$ ;

9) $2y'' + y' - 10y = 0$ ; $y(1) = 1$ ; $y'(1) = 0$ ;

10) $4y'' - 8y' + 5y = 0$ ; $y(0) = 1$ ; $y'(0) = 0$ ;

11) $y'' - 4y' = 0$ ; $y(0) = 8$ ; $y'(0) = 4$

12) $y'' - 9y' = 0$ ; $y(0) = 1$ ; $y'(0) = 2$ ;

13) $8y'' = y'$ ; $y(0) = 1$ ; $y'(0) = \frac{1}{2}$ ;

14) $5y'' - 3y' = 0$ ; $y(0) = 1$ ; $y'(0) = 1$ ;

**5.** a) Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' - y' - 2y = 0$

b) Déterminer les solutions $g$ qui vérifient $g(0) = 3$ et $g'(0) = 0$.

c) Déterminer le signe de $g(x)$.

**6.** On considère l'équation différentielle :

$g''(x) - 2g'(x) + g(x) = 0$.

Où $g$ désigne une fonction numérique définie et deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ que l'on cherche à déterminer $g'$ et $g''$ sont la dérivée et la dérivée seconde de $g(x)$.

1) Résoudre cette équation différentielle

2) Déterminer la solution de cette équation qui vérifie les deux conditions suivantes :

- La courbe représentant cette fonction passe par le point $I(0 ; 4)$,
- La tangente à cette courbe en ce point a pour cœfficient directeur le nombre 2.(le plan étant muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{I} ; \vec{J})$).

**7.** 1) Montrer que si y est une solution d'une équation différentielle du second degré $y'' + ay' + by = 0$ (a, b réels), il en est de même que la dérivée $y'$.

2) En déduire qu'une primitive de la fonction de la forme $x \mapsto e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x)$

(A ; B ; $\alpha$ ; $\beta$ réels ) est encore de la forme

$x \mapsto e^{\alpha x}(\lambda\cos\beta x + \mu\sin\beta x)$ ( $\lambda$ et $\mu$ réels).

**8.** On a considéré une solution de chacune des équations différentielles suivantes :

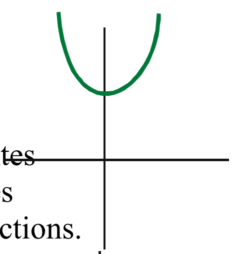
1) $y'' + 2y' + y = 0$ ;

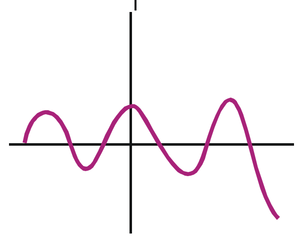
2) $y'' - 2y' + 2y = 0$

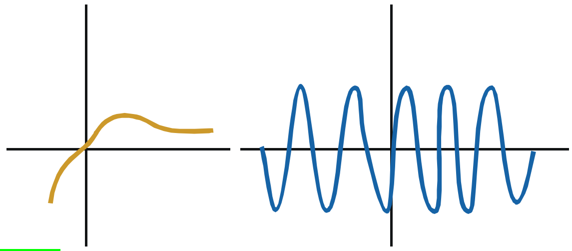
3) $0{,}01y'' + y = 0$ ;

4) $0{,}01y'' - y = 0$.

Les figures ci-contre et les suivantes donnent sommairement l'allure des courbes représentatives de ces fonctions. Associer chaque courbe à son équation différentielle.







**9** Expliciter la fonction solution de :

$$\begin{cases} y''+\pi y'-e^{1995}y=0 \\ y(0)=y'(0)=0 \end{cases}$$

**10** Résoudre les équations différentielles avec second membre:

1) $y' = x + \sin x$ ; 2) $y' = \sin 3x$ ; 3) $xy' = 1$

4) $y'\sqrt{x} = 1$ ; 5) $y'' = 2x^3 - 5x^2 + 7x - 1$

6) $y'' = \sin x + \cos x$ ; 7) $y'' = e^{2x} + e^{-2x}$ ;

8) $y'' = 1 + \tan^2 x$

**11** On souhaite résoudre l'équation différentielle (E) suivante sur $\mathbb{R}$ : $(1-x)y'-y=x$.

a) Résoudre l'équation (E) sur $I_1 = ]-\infty\,;1[$ et sur $I_2 = ]1\,;+\infty[$

On suppose qu'il existe une solution de l'équation (E) sur, notée f.

b. Calculer f(0)

c. En utilisant, a) donner l'expression de f sur $\mathbb{R}$

d. Montrer que f est solution de l'équation (E)

**12** On considère l'équation différentielle

$f''(x) - 3f'(x) + 2f(x) = 8x^2 - 24x$ $(E_1)$ ;

où $f$ désigne une fonction numérique définie et deux fois dérivable que l'on cherche à déterminer, $f'$ et $f''$ sa dérivée 1ère et sa dérivée seconde.

1) Déterminer les nombres réels a ; b et c pour que la fonction numérique définie par :

$g(x) = ax^2 + bx + c$ soit solution de l'équation $(E_1)$ dans $\mathbb{R}$. Démontrer que la fonction $f$ est solution de $(E_1)$ si et seulement si la fonction $h = f - g$ est solution de l'équation différentielle :

$h'' - 3h' + 2h = 0$ $(E_2)$

2) Résoudre $(E_2)$. En déduire les solutions de l'équation différentielle $(E_1)$.

Déterminer la solution particulière $\varphi$ de l'équation $(E_1)$ telle que : $\varphi(0) = 0$ ; $\varphi'(0) = 0$.

**13** On se propose de résoudre l'équation différentielle : $y' - 2y = \dfrac{-2}{1+e^{-2x}}$ (E).

1) Soit $g$ une fonction dérivable et **f** la fonction définie par $f(x)=g(x)e^{2x}$. Montrer que **f** est solution de (E) si et seulement si

$$g'(x)=\frac{-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$$

2) En déduire toutes les solutions de ( E ).

**14** Soit (E ) l'équation différentielle du second ordre : $y''-3y'+2y=0$ (E ).

1.a) Quelles sont les solutions de (E ) ?

b) Quelle est la solution de ( E ) dont la courbe représentative $\mathscr{C}$ admet au point d'abscisse x = 0 la même tangente que la courbe $\mathscr{C}'$ représentative de $y = e^{2x}$. On dit que $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ sont tangentes.

2) Représenter dans un même repère orthonormé les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ dont on précisera les positions relatives.

3) $\lambda$ étant un réel strictement positif, soit $h_\lambda$ les fonctions telles que : $h_\lambda(x) = -2\lambda e^{2x} + 2\lambda e^{x}$

a) Montrer que $h_\lambda$ est solution de (E).

b) Soit $\mathscr{C}_\lambda$ la courbe représentative de $h_\lambda$

Montrer que les courbes $\mathscr{C}_\lambda$ sont tangentes en leur point commun.

c) Préciser les positions relatives de $\mathscr{C}_\lambda$ et $\mathscr{C}$

B) Soit E' l'équation différentielle :

$$y''-3y'+2y=-x^2+x+2 \quad (E')$$

1) Trouver un polynôme du second degré ($P$) solution de l'équation (E).

2) On pose : $f(x) = g(x) - \dfrac{1}{2}x^2 - x$.

Montrer que **f** est solution de E' si et seulement si $g$ est solution de E. En déduire les fonctions **f** solutions de (E').

**15** Résoudre l'équation différentielle $y''' + y'' = 0$ ( poser $Z = y''$ et résoudre l'équation différentielle dont Z est solution).

**16** **Du doubleau triple**

Une grandeur (non nulle) **y** évolue à une vitesse proportionnelle à elle-même. On sait que cette grandeur double tous les dix ans. Combien de temps lui faut-il pour tripler ?

**17** Pour chacune des équations différentielles, déterminer une fonction g de la forme indiquée qui soit solution de l'équation (E), puis montrer qu'une fonction $f$ est solution de (E) si et seulement si $(f-g)$ est une solution de l'équation sans second membre associée à (E), en déduire tous les solutions de (E).

1) $2y'+3y=6x^2-7x+2$ (E); $g$ est un polynôme de degré 2

2) $y'+2y=e^{-2x}$ (E) ; $g : x \mapsto (ax+b)e^{-2x}$ (a,b réels)

3) $y'+y=\sin x$ (E); $g$: $x \mapsto \lambda\sin x+\mu\cos x$ ($\lambda,\mu$ réels)

4) $2y' - 3y = 6(x^2+x-1)$ (E) ;
$g : x \mapsto P(x)e^{-3x}$ ;où P est un polynôme

5) a) $y'+y=x^3+2$ ($E_1$) ; b) $y''-4y=x^3-1$ ($E_2$)
$g$ polynôme de degré 3.

6) a) $y'' + 2y' + 5y = \sin x$ ( $E_1$ )
b) $y'' + 2\sqrt{3}\,y' - y = \cos x$ ( $E_2$ )
$g : x \mapsto \lambda\cos x + \mu\sin x$

7) $y''-5y'+6y = 3e^{4x}$ ; (E) ;
$g : x \mapsto Ae^{4x}$ (A réel).

8) $y'' - 5y' + 6y = 5e^{2x}$ ; (E) ;
$g : x \mapsto (Ax+B)e^{2x}$ ; ( A ; B réels).

**18** Soient les équations différentielles :
(E) : $y'-y=-e^x$ **et** (Eo) **:** $y'-y=0$.

1°)Vérifier que la fonction définie par :
$\mathbf{f(x)=(3-x)e^x}$ est solution de **(E).**

2°)Résoudre l'équation différentielle **(Eo).**

3°) Montrer que la fonction u est solution de **(E)** si et seulement si $\mathbf{u-u_0}$ est solution de **(Eo).**

4°)En déduire les solutions de **(E).**

5°)Déterminer la solution **f** de **(E)** qui s'annule en **1**.

**19** Résoudre les équations différentielles du premier degré suivantes :

$\mathbf{x^3y'+x^2y=1}$ ; $\mathbf{y'-y\ln x=x^x}$ ;
$\mathbf{y'+2y=xe^{-x}}$ $\mathbf{y'+2y=xe^{-2x}}$ ;
$\mathbf{y'+y=x\cos x}$

**20** **Loi de refroidissement de Newton**

La loi de refroidissement de Newton s'énonce ainsi : *"la vitesse de refroidissement d'un corps inerte est proportionnelle à la différence de température entre ce corps et le milieu ambiant"*. On suppose que la température de l'air ambiant est constante égale à 25°C. Dans ces conditions, la température d'un corps passe de 100°C à 70°C en 15 minutes. Au bout de combien de temps se trouvera-t-il à 40°C ?

**21** **Dissolutiond'une substance**

Une substance se dissout dans l'eau.
On admet que la vitesse de dissolution est proportionnelle à la quantité non encore dissoute. À l'instant $t = 0$ ($t$ en minutes), on place 20 grammes de cette substance dans une grande quantité d'eau. Sachant que les dix premiers grammes se dissolvent en cinq minutes, donner une expression de la quantité dissoute f($t$), en grammes, en fonction de $t$.

**22*** **Modèle de Verhelst – Loi logistique continue**

On repique des plantes de 10cm de haut sous une serre. On sait que la taille maximale de ces plantes est de1m.
On note f($t$) la taille, en m, d'une plante après $t$ jours. (On a donc f(0)=0,1).
Le modèle de Verhulst consiste à considérer que la vitesse de croissance de la plante évolue suivant la relation :

$\mathbf{f'(t)=af(t)\big(1-f(t)\big)}$ ; où $a$ est une constante dépendant des conditions expérimentales.
Autrement dit, f est une solution, sur $\mathbb{R}_+$,de l'équation différentielle : $\mathbf{y'=ay(1-y)}$.

1° On pose, pour tout $t$ de $\mathbb{R}_+$: $z(t) = \dfrac{1}{f(t)}$.

Déterminer une équation différentielle satisfaite par z, puis la résoudre(sur $\mathbb{R}_+$).

En déduire que pour tout réel $t$ de $\mathbb{R}_+$ on a:

$$f(t) = \frac{1}{9e^{-at} + 1}$$

2) On observe qu'au bout de 15 jours, la plante mesure 19cm.

Calculer $a$ (on arrondira à $10^{-2}$ près).

3) Étudier la limite de f en $+\infty$ et préciser son sens de variation.

4) Représenter graphiquement la fonction f.

5)Au bout de combien de jours, la plante dépassera-t-elle 90cm de haut ?

**23** Résoudre les équations différentielles du premier degré suivantes :

$y'' - 4y' + 3y = e^{2x}$ ; $y'' + y' + y = x^3$ ;

$y'' + 2y' + 3y = xe^x$ ; $y'' - 2y' + 2y = e^x \sin x$

**24** Soit (E) l'équation différentielle $9y'' + \pi^2 y = 0$

1) Résoudre l'équation différentielle (E) :

2) On désigne par f la solution particulière de (E) dont la courbe représentative, dans un repère orthonormé passe par le point $P(1; -\sqrt{2})$ et admet en ce point une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

a) En utilisant les données ci-dessus, préciser f(1) et f'(1)

b) Déterminer f

c) Vérifier que :

$f(x) = \sqrt{2}\cos\left[\frac{\pi}{3}(x+2)\right]$, pour tout réel x.

Montrer que f est périodique, de période 6.

**25*** 1. On souhaite résoudre l'équation différentielle de second ordre suivante à coefficients non constants :

(E) : $(x+1)y'' + (2x-1)y' + (x-2)y = 0$.

a) Poser $z = y' + y$. Montrer que $z$ vérifie une équation différentielle du premier ordre.

b) Résoudre cette équation et en déduire les solutions de (E).

2. Résoudre l'équation différentielle :

$(1+x^2)y'' - (1+x^2-2x)y' + 2xy = 0$.

**26*** On considère l'équation différentielle :

$y^{(3)} - 6y'' + 12y' - 8y = 0$ $(E)$

1) Vérifier que la fonction $y = e^{2x}$ est solution de (E)

2) Soit la fonction f trois fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et g la fonction $g(x) = f(x)e^{-2x}$

a) Démontrer que f est solution de (E) si et seulement si : $g^{(3)} = 0$

b) En déduire sur $\mathbb{R}$ les solutions de (E)

**27*** Etude et représentation d'une solution d'une équation différentielle

**PARTIE A :**

1) On considère l'équation différentielle :

$y'' + 2y' + y = 0$ (E).

Déterminer les solutions générales de (E)

2) Soit (E') l'équation différentielle

$y'' + 2y' + y = 2e^{-x}$

a) Vérifier que la fonction $h(x) = x^2e^{-x}$ est une solution de (E')

b) Démontrer que la fonction f est solution de (E') si et seulement si $g = f - h$ est une solution de (E)

c) Déterminer toutes les solutions de (E)

d) Déterminer la solution de (E') qui vérifie :

$f(0) = 4$ et $f'(0) = 0$

**PARTIE B :**

1) Etudier les variations et tracer la courbe de la fonction $f(x) = (2+x)^2e^{-x}$

2) En remarquant que $f$ est une solution de (E'), déterminer une primitive F de f sur $\mathbb{R}$ en calculant $\int_0^x (f''(t) + 2f'(t) + f(t))dt$

3) On pose $I_n = \int_0^n f(t)dt$.

a) Exprimer $I_n$ en fonction de n et interpréter graphiquement le résultat.

b) Etudier la convergence de la suite $I_n$ puis en déduire l'aire de l'ensemble des points $M(x,y)$ du plan tels que :

$x \leq 0$ et $0 \leq y \leq f(x)$

CHAPITRE 8

# Probabilité et echantillonnage*

## Faire savoir

### L'essentiel du chapitre

### I. Dénombrement : (Rappel)

**1.Produit cartésien d'ensembles finis :**

**Définition :**

E et F sont deux ensembles finis et non vides.
Le produit cartésien de E par F, noté $E \times F$, est l'ensemble des couples (x ; y) formés d'un élément x de E suivi d'un élément y de F.

**Théorème 1 :**

Si E et F sont des ensembles finis tels que CardE = n et CardF = p, alors $E \times F$ est un ensemble fini et $\mathrm{Card}(E \times F) = np$.

**2. p-liste- arrangement- permutation :**

**a. p-liste :**

**Définition :**

Soit E un ensemble fini et n son cardinal, soit p un entier naturel non nul.
Une p-liste d'éléments de E est un p-uplet $(a_1 ; a_2 ; \dots ; a_p)$ constitué d'éléments de E. L'ensemble des p-listes d'éléments de E se note $E^p$.

**Théorème 2 :**

E est un ensemble fini tel que CardE = n. Pour tout naturel $p \geq 1$, on a : $\mathrm{Card}\, E^p = n^p$.

**b. Arrangement- permutation :**

**Définition :**

n et p sont des naturels tels que $1 \leq p \leq n$ et F est un ensemble à n éléments.
Un arrangement de p éléments de F est un p-uplet d'éléments deux a deux distincts de F.

**Théorème 3 :**

Le nombre d'arrangements de p éléments d'un ensemble à n éléments, avec $1 \leq p \leq n$, est :
$n(n-1)\dots(n-p+1)$. On note ce nombre $\mathbf{A}_n^p$, soit $\mathbf{A}_n^p = n(n-1)\dots(n-p+1)$.

**c. Permutation :**

**Définition 1 :**

n est un naturel non nul et F est un ensemble tel que cardF = n. Une permutation des éléments de F est un arrangement de n éléments de F.
D'après le théorème précédent, le nombre de permutation est :
$\mathbf{A}_n^n = n(n-1)\dots(n-n+1) = n(n-1)\dots \times 2 \times 1$.

**Définition 2 :**

n est un naturel non nul, on désigne par n! ( qui se lit factorielle n ) le nombre défini par :

- $n! = n(n-1)\dots \times 2 \times 1$ ; pour tout $n \neq 0$ ;
- et $0! = 1$.

**NB : *Les démonstrations du cours relatives à l'echantionnage sont réservées aux élèves de la 7 ème Série Mathématiques.**

**Théorème 4 :**
Le nombre de permutations de n éléments est n!.

### d. Autre écriture de $A_n^p$ :

La notation ''factorielle'' permet d'écrire d'une autre façon le nombre $A_n^p$, on a :

$A_n^p = n(n-1)\dots(n-p+1)$,

Multiplions et divisons simultanément ce produit de facteurs par $(n-p)\dots\times2\times1$, il vient :

$$A_n^p = \frac{n(n-1)\dots(n-p+1)(n-p)\times\dots\times2\times1}{(n-p)\times\dots\times2\times1!}, \text{ d'où } A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}.$$

### 3. Parties à p éléments d'un ensemble à n éléments :( $p \leq n$)

**Théorème 5 :**

Le nombre de parties à p éléments d'un ensemble à n éléments, avec $p \leq n$, est $\frac{A_n^p}{p!}$, on note ce nombre $C_n^p$, on a donc ; $C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{(n-p)!p!}$

**Définition :**
Une partie à p éléments d'un ensemble F à n éléments ($p \leq n$) s'appelle une combinaison de p éléments de n éléments de F.

### 4.Propriétés des $C_n^p$ :

a) pour tout naturel n : $C_n^0 = 1$ et $C_n^n = 1$

b) pour tout naturel $n \geq 1$ : $C_n^1 = n$

c) pour tout naturel n et p tels que $p \leq n$ on a : $C_n^{n-p} = C_n^p$

d) pour tout naturel n et p tels que $1 \leq p \leq n\text{-}1$ : on a : $C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$. La propriété (d) va permettre de calculer rapidement de proche en proche les $C_n^p$ sans utiliser $\frac{n!}{(n-p)!p!}$ sur le tableau qui suit, appelé triangle de Pascal, à l'intersection de la ligne ''n'' et de la colonne ''p'' on lit le naturel $C_n^p$.
On le complète en commençant à remplir la colonne ''p = 0'' à l'aide des chiffres 1 ( car $C_n^0 = 1$ ) et la diagonale à l'aide des chiffres 1 ( car $C_n^n = 1$). On le complète ensuite en utilisant à chaque fois la propriété ( d ).

**Triangle de Pascal**

| n \ p | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | . | . | . |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | | | | | | | | | | | |
| 1 | 1 | 1 | | | | | | | | | | |
| 2 | 1 | 2 | 1 | | | | | | | | | |
| 3 | 1 | 3 | 3 | 1 | | | | | | | | |
| 4 | 1 | 4 | 6 | 4 | 1 | | | | | | | |

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **5** | **1** | **5** | **10** | **10** | **5** | **1** | | | |
| **6** | **1** | **6** | **15** | **20** | **15** | **6** | **1** | | |
| **7** | **1** | **7** | **21** | **35** | **35** | **21** | **7** | **1** | |
| **8** | **1** | **8** | **28** | **56** | **70** | **56** | **28** | **8** | **1** |
| . | | | | | | | | | |
| . | | | | | | | | | |
| . | | | | | | | | | |

### 5. Le binôme de Newton :

Pour tous complexes a et b , et pour tout naturel $n \geq 1$

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p a^{n-p} b^p = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \dots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n$$

Cette égalité est appelée formule du binôme de Newton.

- Le nombre de parties d'un ensemble à n éléments est $2^n$.

## II. Probabilité :

### 1. Vocabulaire :

#### a. Expérience aléatoire, univers :

Une expérience aléatoire est une expérience dont on ne peut prévoir avec certitude quel en sera le résultat, avant de l'effectuer.

L'ensemble des résultats possibles d'une expérience aléatoire est appelé univers.

**Exemple 1 :**

Lancer un dé à six faces numérotées de 1 à 6 est une expérience aléatoire.

L'univers de cette expérience est $\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$.

#### b. Evénement :

Un événement est une partie de l'univers.

**Exemple 2 :**

Dans l'exemple précédent $A = \{1 ; 3 ; 5\}$ est un événement.

A est l'événement ''obtenir un nombre impair'' ; $B = \{6\}$ est un événement élémentaire.

- $\phi$ est l'événement impossible
- l'univers $\Omega$ est l'événement certain

#### c. Si A et B sont deux événements :

- $A \cap B$ est l'événement '' A et B''
- $A \cup B$ est l'événement '' A ou B''

**d. Evénements incompatibles :** Si $A \cap B = \phi$ , on dit que A et B sont incompatibles ( disjoints)

**e. Evénement contraire :** $\overline{A}$ est l'événement contraire de A.

On a : $A \cap \overline{A} = \phi$ ; $A \cup \overline{A} = \Omega$ , où $\Omega$ est l'univers lié à l'expérience.

### 2. Notion de probabilité :

Considérons une expérience aléatoire d'univers $\Omega$.

La probabilité d'un événement A est un nombre, compris entre 0 et 1, mesurant les ''chances'' que cet événement A peut se produire ; c'est la somme des probabilités des événements élémentaires inclus dans A. On note ce nombre souvent P(A). Si tous les événements élémentaires ont la même probabilité, on dit que l'hypothèse d'équiprobabilité est satisfaite. On a alors, pour tout événement A : $P(A) = \dfrac{\text{card}A}{\text{card}\Omega}$.

**Exemple 3 :**
On jette un dé à six faces numérotés de 1 à 6, non truqué.
Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
A : ‘‘ avoir un nombre pair’’; B ‘’avoir un multiple de 3’’ ; C ’’avoir un nombre supérieur a 2’’
**Réponse :**
L’univers de cette épreuve est $\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$.

- $A = \{2 ; 4 ; 6\}$ ; $P(A) = \frac{cardA}{card\Omega} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$
- $B = \{3 ; 6\}$ ; $P(B) = \frac{cardB}{card\Omega} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$
- $C = \{3 ; 4 ; 5 ; 6\}$ ; $P(C) = \frac{cardC}{card\Omega} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

## 3.Propriétés :
Considérons une expérience aléatoire d’univers $\Omega$
- Pour tout événement A on a : $0 \leq P(A) \leq 1$
- La probabilité de l’événement certain est 1 ; celle de l’événement impossible est 0 :

$P(\Omega) = 1$ ; $P(\phi) = 0$.
- Si A et $\overline{A}$ sont deux événements contraires, alors, $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
- Pour tous événements A et B, la probabilité de la réunion $A \cup B$ est

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
- Si A et B sont incompatibles on a : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

## 4. Probabilité conditionnelle :

**Définition :**
A et B sont deux événements et A n’est pas l’événement impossible, c’est-à-dire $P(A) \neq 0$.
On appelle probabilité conditionnelle de B, sous l’hypothèse A (c’est-à-dire la probabilité pour que B se réalise sachant que A est réalisé), le réel, noté $P(B/A)$ ou $P_A(B)$ et défini par :

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

## 5. Evénements indépendants :
**Définition**
A et B sont deux événements et B n’est pas l’événement certain, ni l’événement impossible ( $P(B) \neq 1$ et $P(B) \neq 0$ ).
Dire que A est indépendant de B en probabilité signifie que : $P(A/B) = P(A/\overline{B})$.

**Théorème 6 :**
A et B sont deux événements indépendants si et seulement si : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

## 6. Variable aléatoire :
**Définition 1 :**
$\Omega$ est l’ensemble des issues (univers) d’une expérience aléatoire.
Toute fonction définie sur $\Omega$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ est appelée une variable aléatoire.
Une variable aléatoire est noté à l’aide d’une lettre majuscule : X ; Y ; Z ;…

## Exemple 4 :

On considère trois pièces de monnaie discernables, non truquées. On jette les trois pièces et on considère la variable aléatoire X associée au nombre de côtés ''pile'', obtenus (on désignera le côté pile par P et le côté face par F).

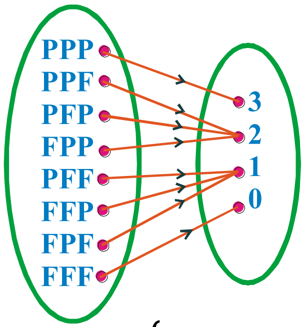
Déterminer l'ensemble des valeurs de X.

Soit $\Omega$ l'univers associé à cette expérience, donc,

$\Omega = \{\mathbf{FFF ; FFP ; FPF ; PFF ; PPF; PFP ; FPP ; PPP}\}$.

L'ensemble des valeurs de X est noté

$X(\Omega) = \{\mathbf{0 ; 1 ; 2 ; 3}\}$.




## Définition 2 :

X est une variable aléatoire définie sur un ensemble fini $\Omega$ et $X(\Omega) = \{\mathbf{x_1 ; x_2 ; ... ; x_n}\}$ est l'ensemble des valeurs possibles de X.

On appelle loi de probabilité de X la fonction $\boldsymbol{f}$ de $X(\Omega)$ dans $[0 ; 1]$, qui à chaque xi associe la probabilité de l'événement $A_i$, réunion des événements élémentaires d'images $x_i$ par X.

Pour tout naturel i, $1 \le i \le n$, on note $\boldsymbol{f}(x_i) = P(A_i) = P(X= x_i)$.

## Exemple 5 :

Reprenons l'exemple précédent des trois pièces de monnaie.

$X(\Omega) = \{\mathbf{0 ; 1 ; 2 ; 3}\}$ ; $P(X = 0) = P(\{\mathbf{FFF}\}) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{8}}$ ; $P(X = 1) = P(\{\mathbf{FFP ; FPF ; PFF}\}) = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{8}}$

$P(X = 2) = P(\{\mathbf{PPF ; PFP ; FPP}\}) = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{8}}$ ; $P(X = 3) = P(\{\mathbf{PPP}\}) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{8}}$.

Le tableau suivant représente la loi de probabilité de X.

| Xi | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $P(X= x_i)$ | $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{8}}$ | $\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{8}}$ | $\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{8}}$ | $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{8}}$ |

## Définition 3 :

X est une variable aléatoire définie sur un ensemble $\Omega$.

On appelle fonction de répartition de X la fonction F de $\mathbb{R}$ dans [O ; 1], définie pour tout réel a par : $F(a) = P(X < a)$.

## Définition 4 :

$\{\mathbf{x_1 ; x_2 ; ... ; x_n}\}$ est l'ensemble des images d'une variable aléatoire X. pour tout naturel i tel que : $1 \le i \le n$ ; $P_i = P(X = x_i)$.

On appelle espérance mathématique de X le réel noté E(X), défini par : $E(X) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{x_i p_i}$.

## Définition 5 :

X est une variable aléatoire dont l'ensemble des images est $x_1$ ; $x_2$ ; …$x_n$ et dont l'espérance mathématique est $E(X) = m$.

Posons pour tout naturel i ; tel que : $\mathbf{1 \le i \le n ; p_i = p(X = x_i)}$. On appelle :

a) Variance de X , le réel noté V(X), tel que : $\mathbf{V(X) = E[(X\text{-}m)^2] = \sum_{i=1}^{n}(xi - m)^2 p_i}$.

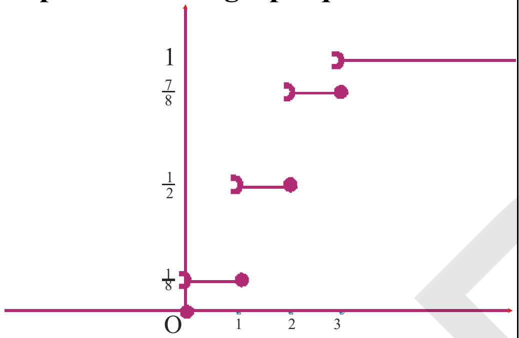
b) Ecart- type de X le réel noté $\boldsymbol{\sigma}\mathbf{(X)} = \sqrt{\mathbf{V(X)}}$.

**Remarque 1 :**
Il est souvent plus commode de calculer V(X) grâce à la formule de Koenig :
$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

**Exemple 6 :**
Il s'agit de reprendre encore l'exemple précédent.
Définir la fonction de répartition F de X et la représenter
Calculer l'espérance mathématique E(X), la variance et l'écart type $\boldsymbol{\sigma(X)}$ de X.

**Réponse :**
a) $X(\Omega) = \{0 ; 1 ; 2 ; 3\}$ ;

$$\begin{cases} \bullet \text{ si } x \in ]-\infty ; 0] ; F(x) = 0 ; \quad \bullet \text{si } x \in ]0 ; 1] ; F(x) = \frac{1}{8} ; \quad \bullet \text{ si } x \in ]1 ; 2] ; F(x) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{4}{8} \\ \bullet \text{ si } x \in ]2 ; 3] ; F(x) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \frac{7}{8} ; \quad \bullet \text{ si } x \in ]3 ; +\infty[ ; F(x) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = 1. \end{cases}$$

| **Représentation graphique de F** | b) L'espérance mathématique de X |
|---|---|
| <br> | $E(X) = 0 \times P(X = 0) + 1 \times P(X = 1) + 2 \times P(X = 2) + 3 \times P(X = 3)$,<br>$E(X) = 0 + \frac{3}{8} + \frac{6}{8} + \frac{3}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$.<br>La variance de X : $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 =$<br>$(0)^2P(X = (0) + (1)^2P(X = 1) + (2)^2P(X = 2) + (3)^2P(X = 3) - \left(\frac{3}{2}\right)^2$<br>$V(X) = 0 + \frac{1}{8} + \frac{12}{8} + \frac{9}{8} - \frac{9}{4} = \frac{22}{8} - \frac{9}{4} = \frac{11}{4} - \frac{9}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ ;<br>$\boldsymbol{\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}}$ |

## 7. Schéma de Bernoulli – Loi binomiale :

- On appelle suite d'épreuves ( ou schéma ) de Bernoulli l'expérience qui consiste à répéter plusieurs fois, de façon indépendante, une épreuve ayant deux issues possibles : l'une appelée ''succès'', l'autre appelée ''échec''.
- Soit une suite de n épreuves de Bernoulli avec, pour chaque épreuve, la probabilité p pour le succès ( donc : $q = 1 - p$ pour l'échec).

Soit k un élément de $\{0;1 ; 2 ; ... ; n\}$ la probabilité $P_k$ d'obtenir k succès au cours de ces n épreuves vérifie : $P_k = \boldsymbol{C_n^k p^k q^{n-k}}$.

L'application $k : \mapsto P_k$ est appelée loi binomiale de paramètre (n ; p).

**Exemple 7 :**
a) Lors d'un examen, on pose à un candidat une question en lui proposant trois réponses ; parmi elles ; une seule est correcte. le candidat choisit au hasard l'une des réponses proposées. Quelle est la probabilité pour qu'il donne la réponse exacte ?
b) Un test se compose de quatre questions posées dans les conditions ci-dessus. Quelle est la probabilité pour que le candidat donne les réponses exactes à trois questions ? à quatre questions ?

**Réponse :**

Il est clair que la probabilité que le candidat donne la réponse exacte est $\frac{1}{3}$.

b) Un test est une suite de quatre questions dont les réponses sont indépendantes deux à deux. Une réponse peut être soit exacte, soit fausse. Il s'agit donc d'un schéma de Bernoulli.

- 4 est le nombre d'épreuves, donc n = 4 ; $\frac{1}{3}$ est la probabilité d'un succès ; p = $\frac{1}{3}$,
- $\frac{2}{3}$ est la probabilité d'un échec : q = $\frac{2}{3}$

Il en résulte que la probabilité $p_3$ que le candidat donne trois bonnes réponses est :

$p_3 = C_4^3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^1 = \frac{8}{81}$.

De même, la probabilité que le candidat donne quatre bonnes réponses est

$p_4 = C_4^4 \times \left(\frac{1}{3}\right)^4 \left(\frac{2}{3}\right)^0 = \frac{1}{81}$.

**Théorème 7 :**

Soit X une variable aléatoire qui comptabilise le nombre de succès obtenus dans un schéma de Bernoulli de paramètre (n ; p), alors, on a :

- $P(X = k) = C_n^k \times p^k q^{n-k}$ ;
- $E(X) = np$ ;
- $V(X) = npq$.

## III. Lois continues :*(Variables aléatoires à densité )*

### 1. Densité de probabilité :

**Définition 1 :**

On appelle densité de probabilité d'une variable aléatoire X toute fonction f continue et positive sur un intervalle I($[a\,;\,b]$, $]-\infty, a]$ $[a\,;+\infty[$ ou $\mathbb{R}$ ) et telle que $P(x \in I) = \int_{x \in I} f(x)dx = 1$

Pour tout intervalle $J = [\alpha\,;\,\beta]$ contenu dans I, on a : $P(x \in I) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = 1$

**Définition 2 :**

La fonction F définie par $F(x) = P(X \leq x)$ est appelée fonction de répartition de la variable aléatoire X : $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ ou $F(x) = \lim\limits_{a \to \infty} \int_a^x f(t)dt$

**Définition 3 :**

L'espérance mathématique d'une variable aléatoire continue X de densité f sur I est :

$E(x) = \int_{t \in I} tf(t)dt$

**Remarque 2 :**

Comme la probabilité que X prenne une valeur isolée est nulle on a :

$P([\alpha\,;\,\beta]) = P([\alpha\,;\,\beta[) = P(]\alpha\,;\,\beta]) = P(]\alpha\,;\,\beta[)$

**Exemple 8 :**

Soit la fonction f définie sur [0 ; 1] par $f(x) = 2x$.
Montrer que f définit une densité de probabilité.

**Réponse :**

f est continue positive et on a : $\int_0^1 F(t)\,dt = \int_0^1 2t\,dt = (x^2)_0^1 = 1$ donc f définit bien une fonction de densité.

**Exemple 9 :**
Soit la fonction $f(x) = kx^2$. Déterminer le réel k pour que f définisse une fonction de densité sur l'intervalle $[0 ; 1]$.
**Réponse :**
Pour que f définisse une fonction de densité il faut que $\int_0^1 f(t)dt = 1$ ; donc on a :
$\int_0^1 kt^2\, dt = 1$ ; ce qui fait $\left[\frac{kx^3}{3}\right]_0^1 = 1$. Donc $\frac{k}{3} = 1$ ; d'où : $k = 3$.

## 2. Loi uniforme ou loi à densité homogène :

**Définition :**
On dit que la variable aléatoire X suit la loi uniforme sur un intervalle $I = [a ; b]$ avec $a < b$ si sa densité est constante et est définie pour tout $t \in [a ; b]$ par $f(t) = \frac{1}{b-a}$.
**Conséquence :**
Pour tout intervalle $J = [\alpha ; \beta]$ contenu dans I on a : $P(x \in J) = \int_\alpha^\beta \frac{1}{b-a} dt = \frac{\beta-\alpha}{b-a}$ ;
La probabilité est donc proportionnelle à la longueur de l'intervalle considéré.
**Espérance mathématique :**
L'espérance mathématique de la loi uniforme sur un intervalle $I = [a ; b]$ est donnée par :
$E(X) = \frac{a+b}{2}$ ; en effet : $E(X) = \int_a^b tf(t)\, dt = \int_a^b \frac{t}{b-a} dt = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}$.
**Exemple 10 :**
On choisit au hasard un nombre entre $-3\ et\ 5$
a)Calculer la probabilité d'obtenir un nombre strictement inferieur à 1 .
b) Calculer la probabilité d'obtenir un nombre supérieur ou égal à 3.
c) Calculer la probabilité que le nombre choisi soit strictement inferieur à 1 sachant qu'il est positif.
**Réponse :**
a)Le choix d'un nombre entre $-3\ et\ 5$ suit une loi uniforme sur $[-3 ; 5]$de densité $f(t) = \frac{1}{8}$

$$P(X < 1) = P([-3 ; 1[) = \frac{1-(-3)}{5-(-3)} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

b)$P(X \geq 3) = P([3 ; 5]) = \frac{5-3}{5-(-3)} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$
c)$P_{X\geq 0}(X < 1) = \frac{P([-3 ; 1[\cap[0 ; 5])}{P([0 ; 5])} = \frac{P([0 ; 1[)}{P([0 ; 5])} = \frac{1}{5}$

## 3. Loi exponentielle ou loi sans mémoire :

**Définition :**
On dit que la variable aléatoire X suit la loi exponentielle de paramètre $\alpha > 0$ si sa densité est une fonction de la forme :$f(t) = \alpha e^{-\alpha t}$ sur$[0 ; +\infty[$.
**Conséquences :**
La fonction de répartition $F(x) = \int_a^x \alpha e^{-\alpha t} = 1 - e^{-\alpha x}$
F définit bien une densité de probabilité car $\lim\limits_{+\infty} F(x) = 1$

$$P(X \leq a) = F(a) = 1 - e^{-\alpha a}$$
$$P(X > a) = e^{-\alpha a} = 1 - F(a)$$
$$P(a \leq x \leq b) = F(b) - F(a) = e^{-\alpha a} - e^{-\alpha b}$$

Loi sans mémoire (ou sans vieillissement) : La loi exponentielle est une loi sans mémoire c'est-à-dire :$\forall t > 0\ et\ \forall h > 0\ on\ a\ P_{X\geq h(X\geq h+t)} = P(X \geq h)$

**Exemple 11 :**

Le temps (en heures) nécessaire pour réparer un ordinateur suit une loi exponentielle de paramètre $\alpha = 1$

a) Calculer la probabilité que la durée de réparation dépasse 2 heures.

b) Calculer la probabilité que la durée de réparation dépasse 4 heures étant donné qu'elle a dépassé déjà 3 heures.

**Réponse :**

a) $P(X \geq 2) = 1 - \int_0^2 e^{-x} dx = e^{-2} = 0;135.$

b) $P_{X\geq3(X\geq4)} = P_{X\geq3(X\geq3+1)} = P(X \geq 1) = e^{-1} = 0.368.$

## 4. Loi normale :

### a. Loi centrée réduite :

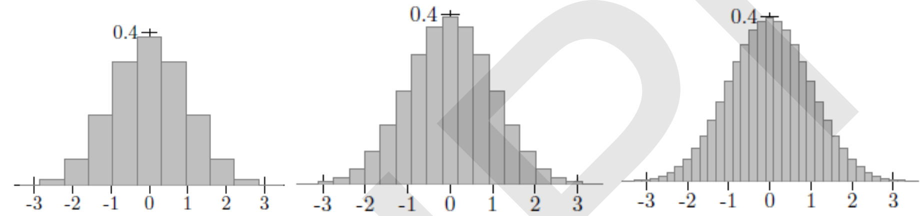
**Théorème 8 :**(de Moivre-Laplace).

Soit $\mathbf{X_n} \sim B(n, p)$, on note $\mathbf{Z_n} = \dfrac{\mathbf{X_n - E(X_n)}}{\mathbf{\sigma(X_n)}} = \dfrac{\mathbf{X_n - np}}{\sqrt{\mathbf{np(1-p)}}}$.

La v.a. centrée réduite associée (i.e. $E(\mathbf{Z_n}) = 0$ et $\sigma(\mathbf{Z_n}) = 1$). Alors $P(\mathbf{Z_n} \in [a\ ;\ b])$ converge vers

$$\int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}} dx.$$

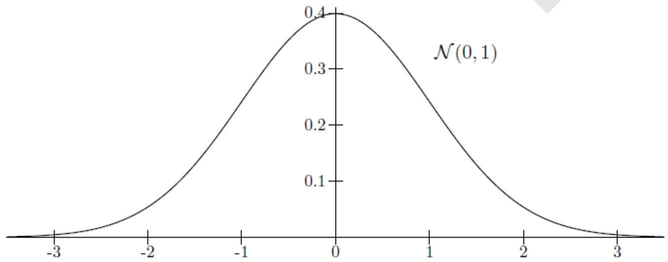
**Preuve :** Admise. Visuellement cependant, on peut observer une stabilisation de la densité (discrète) de la suite $(Zn)$, ici pour $p = 0,\ 5$ :




$n = 10$ $n = 30$ $n = 100$

**Définition :**

La loi de densité $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}$ sur $\mathbb{R}$ est la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,\ 1)$.



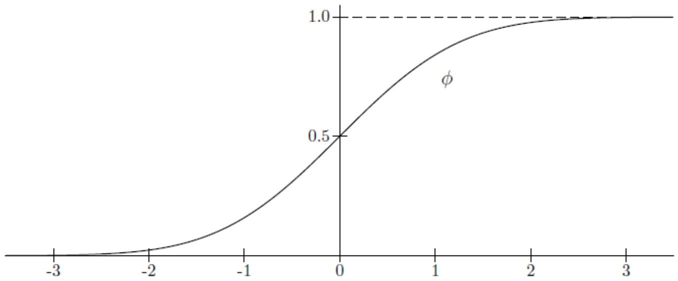

**Remarque 3 :**

- La suite de v.a. $(\mathbf{Z_n})$ *converge en loi* vers $\mathcal{N}(0,\ 1)$.
- La densité de la loi $\mathcal{N}(0,\ 1)$ est paire.
- Par conséquent, si la v.a. $\mathbf{X}$ suit la loi $\mathcal{N}(0,\ 1)$ alors $P(\mathbf{X} < 0) = P(\mathbf{X} > 0) = \dfrac{1}{2}$
- Cette densité ne possède pas de primitive s'écrivant avec des fonctions usuelles.
- Cette densité s'écrase très vite lorsque $x$ s'éloigne de 0.

• La courbe de la densité N(0, 1) est une *gaussienne*, et la loi N(0, 1) est fréquemment appelée *gaussienne* ou *loi de Laplace-Gauss*.

**Définition :**

On note $\varphi$ la fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$.




**Théorème 9 :**

Si $X$ suit la loi $\mathcal{N}(0, 1)$, de fonction de répartition $\varphi$, alors :

- $P(a \leq X \leq b) = \varphi(b) - \varphi(a)$ ;
- $\varphi(-a) = 1 - \varphi(a)$ ;
- $P(-a \leq X \leq a) = 2\varphi(a) - 1$.

**Théorème 10 :**

Si $X$ suit $\mathcal{N}(0; 1)$ et $\alpha \in ]0; 1[$ alors il existe un unique réel $\mathbf{u}_\alpha$ vérifiant l'égalité

$P(-\mathbf{u}_\alpha \leq \mathbf{X} \leq \mathbf{u}_\alpha) = 1 - \alpha$.

**Remarque 4 :**

Avec un logiciel de calcul on obtient les deux résultats à connaitre suivants :

• $P(-1{,}96 \leq X \leq 1{,}96) \approx 0{,}95$ ;
• $P(-2{,}58 \leq X \leq 2{,}58) \approx 0{,}99$.

**Remarque 5 :**

Une v.a. suivant la loi normale a été construite comme limite d'une suite de v.a. d'espérance nulle et de variance égale à 1.
Le théorème suivant prouve qu'il en est bien sur de même pour cette v.a. limite.

**Théorème 11 :**

Soit $X$ une v.a. suivant la loi N(0, 1). Alors : • $E(X) = 0$ ; • $V(X) = 1$.

## IV. Fluctuation et estimation :

### 1. Intervalle de fluctuation :

**Définition :**

Un *intervalle de fluctuation asymptotique* d'une v.a. $\boldsymbol{Y_n}$ au seuil $1 - \alpha$ est un intervalle $\boldsymbol{I_n}$ qui contient $\boldsymbol{Y_n}$ avec une probabilité égale à $1 - \alpha$ lorsque $n$ tend vers l'infini, i.e.

$\lim\limits_{x\to\infty} P(\boldsymbol{Y_n} \in \boldsymbol{I_n}) = 1 - \alpha$

**Théorème 12 :**

Si $\boldsymbol{X_n}$ suit la loi $B(n, p)$ alors pour tout $\alpha \in ]0; 1[$ on a $\lim\limits_{x\to\infty} P\left(\dfrac{\boldsymbol{X_n}}{\boldsymbol{n}} \in \boldsymbol{I_n}\right) = 1 - \alpha$ ;

où $\boldsymbol{I_n} = \left[\boldsymbol{p} - \boldsymbol{u_\alpha}\dfrac{\sqrt{\boldsymbol{p}(1-\boldsymbol{p})}}{\sqrt{\boldsymbol{n}}} ; \boldsymbol{p} + \boldsymbol{u_\alpha}\dfrac{\sqrt{\boldsymbol{p}(1-\boldsymbol{p})}}{\sqrt{\boldsymbol{n}}}\right]$.

**Preuve :**

Soit $\boldsymbol{X_n}$ suit la loi $B(n, p)$. Le théorème de Moivre-Laplace et la définition de $\boldsymbol{u_\alpha}$ montrent que

$\lim\limits_{x\to\infty} P\left(-\boldsymbol{u_\alpha} \leq \dfrac{\boldsymbol{X_n} - \boldsymbol{np}}{\sqrt{\boldsymbol{np}(1-\boldsymbol{p})}} \leq \boldsymbol{u_\alpha}\right) = \lim\limits_{x\to\infty} P(-\boldsymbol{u_\alpha} \leq \boldsymbol{X} \leq \boldsymbol{u_\alpha}\ \boldsymbol{u_\alpha})$ ; où $\boldsymbol{X}$ suit une loi centrée réduite.

On remarque ensuite que $-u_\alpha \leq \dfrac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq u_\alpha \Leftrightarrow -u_\alpha\sqrt{np(1-p)} \leq X_n - np \leq u_\alpha\sqrt{np(1-p)}$

soit $p - u_\alpha\sqrt{p(1-p)} \leq X_n \leq p + u_\alpha\sqrt{p(1-p)}$ .

**Remarque 6 :** $\dfrac{X_n}{n}$ représente la fréquence du nombre de succès de la binomiale $X_n$

**Corollaire 1 :**

L'intervalle de fluctuation de $\dfrac{X_n}{n}$ au seuil de 95% est alors a peu près :

$$\left[p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}};\ p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$$

**Preuve :** Il s'agit juste de se souvenir que $u_{0,05} \approx 1,96$..

**Remarque 7 :**

• Il est courant de considérera l'approximation asymptotique comme acceptable lorsque $n \geq 30$, $np \geq 5$ et $np(1-p) \geq 5$. Il ne faut cependant pas considérer cet usage comme une règle absolue mais plutôt comme un ordre d'idée.

• On a déjà vu que $p(1-p) \leq 025$ et par conséquent $1,96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, valeur qui a été utilisée en sixième année.

## IV. Estimation :

**Définition :**

Un *intervalle de confiance* pour une proportion $p$ à un niveau de confiance $1-\alpha$ est un intervalle aléatoire contenant la proportion $p$ avec une probabilité supérieure à $1-\alpha$, réalisé à partir d'un échantillon.

**Théorème 13 :** Soient $p$ une proportion fixée et $X_n$ *suit une loi* $\mathcal{B}(n, p)$.

Lorsque $n$ tend vers l'infini, l'intervalle : $\left[\dfrac{X_n}{n} - u_\alpha\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}};\ \dfrac{X_n}{n} + u_\alpha\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$ contient la proportion $p$ avec une probabilité de $1-\alpha$.

**Preuve :** Il s'agit d'une simple réécriture du théorème de fluctuation asymptotique. En effet on peut écrire $\dfrac{X_n}{n} \leq p + u_\alpha\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow \dfrac{X_n}{n} - u_\alpha\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leq p$ et de la même manière

$$\frac{X_n}{n} \leq p + u_\alpha\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow \frac{X_n}{n} - u_\alpha\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leq p$$

**Corollaire 2 :** Soit $p$ une proportion fixée. Lorsque $n$ est assez grand, l'intervalle :

$\left[\dfrac{X_n}{n} - \dfrac{1}{\sqrt{n}};\ \dfrac{X_n}{n} + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$ contient la proportion $p$ avec une probabilité d'au moins 0, 95.

**Preuve :** C'est encore une reprise de la section précédente, ou l'on a vu que $u_{0,05}\sqrt{p(1-p)} \leq 1$ .

La limite $1-\alpha$ du théorème précédent est donc $>0,95$ et il existe donc un rang $n_0$ a partir duquel la probabilité que $p$ soit dans l'intervalle ci-dessus est $>0,95$.

**Remarque 8 :**

• La proportion $p$ est alors un élément de l'intervalle $\left[\dfrac{X_n}{n} - \dfrac{1}{\sqrt{n}};\ \dfrac{X_n}{n} + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$,

avec un *niveau de confiance* de plus de 95%.
• On considérera ici encore, de manière indicative, que l'approximation est acceptable lorsque $n \geq 30$, $np \geq 5$ et $np(1-p) \geq 5$.
• L'intervalle de confiance ne nécessite pas ici de connaitre la proportion $p$ a priori.

### 3. Décision à partir de la fréquence d'un échantillon :

Quand les critères d'approximation sont vérifiés, l'intervalle de fluctuation asymptotique $I_n$ permet de déterminer des seuils de décision :

• pour accepter ou rejeter l'hypothèse selon laquelle $p$ est la proportion d'un caractère dans la population;

• pour déterminer si un échantillon issu de la population est représentatif.

On formule l'hypothèse que la proportion d'un caractère dans la population est $p$. On prélève dans la population un échantillon de taille $n$ et on note $f$ la fréquence observée du caractère étudié. Lorsque $n \geq 30$, $np \geq 5$ et $n(1-p) \geq 5$,on détermine $I_n$ l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil 95% de la fréquence $f$.

• Si la fréquence observée $f$ n'appartient pas à l'intervalle $I_n$, alors on rejette l'hypothèse selon laquelle $p$ est la proportion du caractère étudié dans la population avec un risque d'erreur de 5 %.

• Si la fréquence observée $f$ appartient à l'intervalle $I_n$, alors l'hypothèse selon laquelle $p$ est la proportion du caractère étudié dans la population est acceptée.

**Exemple 12 :**

Dans un cabinet d'assurance, une étude est réalisée sur la fréquence des sinistres déclarés par les clients ainsi que leur coût. Une enquête affirme que 30% des clients ont déclaré un sinistre au cours de l'année. Un expert indépendant interroge un échantillon de 100 clients choisis au hasard dans l'ensemble des clients du cabinet d'assurance.

L'expert constate que 19 clients ont déclaré un sinistre au cours de l'année. Déterminer, en justifiant, si l'affirmation du cabinet d'assurance : « 30% des clients ont déclaré un sinistre au cours de l'année » peut être validée par l'expert.

**Réponse :**

• **Analyse des données** :

– « Sur un échantillon de $n = 100$ clients. Il est constaté que 19 d'entre eux ont déclaré un sinistre.».

Donc la fréquence observée clients qui ont déclaré un sinistre est $f = 19 \div 100 = 0{,}19$ soit $f = 0{,}19$
– On veut tester l'hypothèse : « la proportion de clients qui ont déclaré un sinistre est $p = 30\%$ ».

**• Intervalle de fluctuation** :

On a pour le cas étudié, $n = 100$, $p = 30$ %. Vérifions les conditions d'application du théorème :

$$\begin{cases} n = 100 \geq 30 \\ np = 100 \times 0,3 = 30 \geq 5 \\ n(1-p) = 100 \times 0,7 = 70 \geq 5 \end{cases}$$

Un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de confiance de 95% de la fréquence $f$ dans un échantillon de taille $n = 100$ : est alors : $I_n = \left[ p - 1,96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ;\ p + 1,96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right] =$

$$\left[ 0,3 - 1,96\frac{\sqrt{0,3 \times 0,7}}{\sqrt{100}} ;\ 0,3 + 1,96\frac{\sqrt{0,3 \times 0,7}}{\sqrt{100}} \right].$$

Puisque les borne sont :

- $p - 1,96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \simeq 0,21018$. On arrondie la borne inférieure par défaut à $10^{-3}$ près soit $0,21$.
- $p + 1,96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \simeq 0,38982$. On arrondie la borne supérieure par excès à $10^{-3}$ près soit $0,39$.

Soit $I_n = [0,21 ; 0,39]$

**Conclusion :**

La fréquence observée $f = 0{,}19$ n'appartient pas à l'intervalle de fluctuation asymptotique $I_{100}$ , donc le résultat du contrôle remet en question l'hypothèse, avec un risque d'erreur de 5%.

## Savoir-faire

### A. Applications :

**Exercice 1 :**
On considère un réseau téléphonique dont les numéros de téléphone ont 8 chiffres. Quelle est la capacité théorique du réseau ?

**Solution :**
Un numéro de téléphone est un 8-uplet d'éléments de : $\{\mathbf{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9}\}$. Il y a donc $10^8$ numéros possibles, ce qui signifie que la capacité théorique du réseau est de 100 000 000 de numéros.

**Exercice 2 :**
Une assemblée de 30 personnes doit élire un bureau composé de quatre membres (un président ; un vice- président ; un secrétaire et un trésorier).
Combien y a-t-il de bureau possibles, sachant que chacune des 30 personnes est éligible et à n'importe quel poste ?

**Solution**
Elire un bureau revient à considérer un arrangement de quatre éléments de l'ensemble des 30 personnes, car une personne ne peut occuper deux postes différentes, d'où le nombre de bureaux possibles :$\boldsymbol{A_{30}^4 = 30 \times 29 \times 28 \times 27 = 657\,720}$.

**Exercice 3 :**
Dix cyclistes prennent le départ d'une course. Tous arrivent, il n'y a pas d'ex æquo. Combien y a-t-il de classements possibles ?

**Solution :**
Le nombre de classements est celui des permutations des éléments d'un ensemble de cardinal 10, c'est à-dire : 10 !, soit 3 628 800.

**Exercice 4 :**
Une classe comporte vingt élèves : douze filles et huit garçons.
Le professeur de Français décide de désigner un groupe de travail de trois élèves chargés de préparer un exposé.

a) Quel est le nombre de groupes possibles ?
b) Combien y a t-il de groupes constitués de trois filles ?
c) Combien y a-t-il de groupes constitués de deux filles et d'un garçon ?

**Solution :**

a) le nombre de groupes constitués est égal au nombre de combinaisons de 3 éléments d'un ensemble à 20 éléments soit $\mathbf{C_{20}^3 = \dfrac{20\times19\times18}{3\times2} = 1140}$

b) le nombre de groupes constitués de 3 filles est égal au nombre de combinaison de 3 éléments d'un ensemble à 12 éléments (le nombre de filles est 12), soit $\mathbf{C_{12}^3 = \dfrac{12\times11\times10}{3\times2} = 220}$.

c) le nombre de groupes constitués de deux filles et d'un garçon est :
$\mathbf{C_{12}^2 \times C_8^1 = \dfrac{12\times11}{2}\times8 = 6\times11\times8 = 528}$.

## Exercice 5 :

Un sac contient 6 boules blanches et 7 boules noires. On tire simultanément 3 boules de ce sac.

a) Quelle est la probabilité d'obtenir

- 3 boules blanches ?
- 3 boules noires ?
- 1 boule blanche et 2 boules noires ?
- 1 boule noire et 2 boules blanches ?

b) Vérifier les résultats précédents en calculant la somme des probabilités ainsi obtenues.

**Solution :**

Le nombre de tirages possibles est : $C_{13}^{3}$, donc card$\Omega$ = $C_{13}^{3} = \frac{13\times12\times11}{3\times2}$ ; d'où : card$\Omega$ = 286.

a) Le nombre de tirages de 3 boules blanches est : $C_6^3 = \frac{6\times5\times4}{3\times2} = 5\times4 = 20$.

Donc, la probabilité d'obtenir 3 boules blanches est : $p_1 = \frac{20}{286}$.

Le nombre de tirages de 3 boules noires est : $C_7^3 = \frac{7\times6\times5}{3\times2} = 7\times5 = 35$.

Donc, la probabilité d'obtenir 3 boules noires est : $p_2 = \frac{35}{286}$.

Le nombre de tirages de 2 boules noires et 1 boule blanche est : $C_7^2 \times C_6^1 = \frac{7\times6}{2}\times6 = 21\times6 = 126$.

La probabilité d'obtenir 2 boules noires et 1 boule blanche est : $p_3 = \frac{126}{286}$.

Le nombre de tirage de 2 boules blanches et 1 boule noire est $C_6^2 \times C_7^1 = 15\times7 = 105$,

La probabilité d'obtenir 2 boules blanches et une boule noire est : $p_4 = \frac{105}{286}$.

b) $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = \frac{20}{286} + \frac{35}{286} + \frac{126}{286} + \frac{105}{286} = \frac{20+35+126+105}{286} = \frac{286}{286} = 1$.

## Exercice 6 :

Une urne contient 5 boules numérotées de 1 à 5. On en tire simultanément deux boules.

a) Quelle est la probabilité d'obtenir :

- Deux chiffres de même parité ; - Deux chiffres de parités différentes ?

b) Calculer de deux façons la probabilité d'obtenir au moins un chiffre pair.

c) Calculer la probabilité d'obtenir au plus un chiffre pair.

**Solution :**

card$\Omega$ = $C_5^2 = \frac{5\times4}{2} = 10$, le nombre de chiffres pairs = 2, celui des chiffres impairs = 3.

a) la probabilité d'obtenir deux chiffres de même parité est : $\frac{C_2^2 + C_3^2}{10} = \frac{1+3}{10} = \frac{2}{5}$,

- la probabilité d'obtenir deux chiffres de parités différentes est : $\frac{C_2^1 \times C_3^1}{10} = \frac{2\times3}{10} = \frac{3}{5}$.

b) la probabilité d'obtenir au moins un chiffre pair peut être calculée ainsi :

$\frac{C_2^1 \times C_3^1 + C_2^2}{10} = \frac{6+1}{10} = \frac{7}{10}$, elle peut aussi être calculée, en utilisant l'événement contraire.

''Obtenir deux chiffres impairs'', cette probabilité est égale à : $\frac{C_3^2}{10} = \frac{3}{10}$,

donc la probabilité d'obtenir au moins un chiffre pair est : $1 - \frac{3}{10} = \frac{7}{10}$.

c) La probabilité d'obtenir au plus un chiffre pair est : $\frac{C_2^1 \times C_3^1 + C_3^2}{10} = \frac{9}{10}$.

**Exercice 7 :**

Une urne contient 4 boules rouges et 6 boules bleues. On tire, au hasard, successivement et sans remise deux boules de l'urne.

Déterminer la probabilité de l'événement A : ''Obtenir deux boules bleues'' et de l'événement B : '' Obtenir deux boules de couleurs différentes''.

**Solution :**

card$\Omega$ = $A_{10}^2 = 10\times 9 = 90$ ; $CardA = A_6^2 = 6\times 5 = 30$ ; $CardB = 2\times A_4^1 \times A_6^1 = 48$ ;

donc P(A) = $\frac{30}{90} = \frac{1}{3}$ ; $P(B) = \frac{48}{90} = \frac{8}{15}$.

**Exercice 8 :**

On considère un échantillon de 500 personnes composé de 200 hommes et 300 femmes ; parmi les hommes, 150 ont plus de 30 ans et, parmi les femmes, 200 ont plus de 30 ans.

On choisit au hasard une personne dans cet échantillon.

a) Sachant que cette personne est un homme, quelle est la probabilité pour qu'il ait plus de 30 ans ?

b) Sachant que cette personne a au plus 30 ans, quelle est la probabilité pour que ce soit un homme ?

**Solution :**

Le tableau suivant résume la situation étudiée.

| | $\leq 30$ ans | >30ans | Total |
|---|---|---|---|
| **Hommes** | 50 | 150 | 200 |
| **Femmes** | 100 | 200 | 300 |
| **Total** | 150 | 350 | 500 |

On considère comme univers l'ensemble $\Omega$ des personnes.

Soient les événements : A : ''la personne est un homme'' et B : ''la personne a plus de 30 ans''.

a) Il s'agit de calculer $P_A(B)$ ; $P_A(B) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)}$.

$P(A \cap B) = \frac{Card(A\cap B)}{Card\Omega} = \frac{150}{500}$ et $P(A) = \frac{CardA}{Card\Omega} = \frac{200}{500}$. Donc, $P_A(B) = \frac{150}{200} = \frac{3}{4}$.

b) la probabilité à calculer est : $P_{\overline{B}}(A)$ :

$P_{\overline{B}}(A) = \frac{P(A\cap \overline{B})}{P(\overline{B})}$ ; $P(A\cap \overline{B}) = \frac{Card(A\cap \overline{B})}{Card(\Omega)} = \frac{50}{500}$ ; $P(\overline{B}) = \frac{Card(\overline{B})}{Card(\Omega)} = \frac{150}{500}$,

donc, $P_{\overline{B}}(A) = \frac{50}{150} = \frac{1}{3}$.

**Exercice 9 :**

Un joueur dispose d'un dé à six faces ; trois blanches, deux sont vertes et une est rouge. Lors du lancé du dé, chaque face a la même probabilité d'apparition. Le joueur lance le dé et observe la couleur de la face supérieure.

- S'il observe une face rouge, il gagne 2F,
- S'il observe une face verte, il gagne 1F,

- S'il observe une face blanche, il relance le dé ; il gagne, alors 3F, pour une face rouge, il perd 1F pour une face verte et le jeu est arrêté sans gain ni perte pour une face blanche.

Soit X la variable aléatoire égale au gain algébrique de ce joueur.

a) Quelles sont les valeurs que peut prendre X ?
b) Déterminer la loi de probabilité de X.
c) Calculer l'espérance mathématique de X.

**Solution :**

a) Les valeurs que peut prendre X sont 2, 1, 3, -1,0 ; donc X ($\Omega$) =$\{-1, 0, 1, 2, 3\}$.

b) La loi de probabilité de X :

- $P(X = 2) = \frac{1}{6}$ ( probabilité d'observer une face rouge),
- $P(X = 1) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ (probabilité d'observer une face verte),
- $P(X = 3) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$ ( probabilité d'observer une face blanche puis une face rouge),
- $P(X = -1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ ( probabilité d'observer une face blanche puis une face verte.),
- $P(X = 0) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ ( probabilité d'observer une face blanche puis une face blanche),

Consignons tous les résultats dans un tableau

| k | 2 | 1 | 3 | -1 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|
| P(X = k) | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{4}$ |

c) $E(X) = 2\times\frac{1}{6} + 1\times\frac{1}{3} + 3\frac{1}{12} + (-1)\frac{1}{6} + (0)\frac{1}{4} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6}$ ; donc$E(X) = \frac{3}{4}$.

## Exercice 10 :

Un tireur vise une cible, à chaque tir, la probabilité pour qu'il touche la cible (succès) est 0,7. Il tire trois fois de suite, soit Y la variable aléatoire égale au nombre de succès au cours des trois tirs effectués.

Déterminer la loi de probabilité de Y. Calculer E(Y) ; V(Y) ; $\sigma$ (Y).

**Solution :**

$Y(\Omega) = \{0 ; 1 ; 2 ; 3\}$,

a) La loi de probabilité de Y :

- $P(Y = 0) = C_3^0(0,7)^0(0,3)^3 = 0,027$ ; $P(Y = 1) = C_3^1(0,7)^1(0,3)^2 = 0,189$ ;
- $P(Y = 2) = C_3^2(0,7)^2(0,3) = 0,441$ ; $P(Y = 3) = C_3^3(0,7)^3(0,3)^0 = 0,343$ ;

| k | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| P(X = k) | 0 ,027 | 0,189 | 0,441 | 0,343 |

b) E(Y) = np = 3 × 0,7 = 2,1 ; V(Y) = npq = 3× 0,7 ×0,3 = 0,63 ; $\sigma$ (Y) = $\sqrt{0,63}$

## Exercice 11 :

Ahmed et Leyla rentrent de l'école à pied. Leurs parents savent qu'ils doivent arriver entre 17h et 18h à la maison. On peut modéliser leur heure d'arrivée par une variable aléatoire X suivant la loi uniforme sur [17 ; 18].

1) Quelle est la probabilité qu'ils arrivent entre 17h et 17h15 ?

2) À quelle heure leurs parents peuvent-ils « espérer » les voir arriver ?

**Solution :**

1) Sous forme décimale, 17h15= 17,25h ; puis P(17 ≤X ≤17,25) = $\dfrac{17,25-17}{18-17}=0,25$.

2) On a E(X) = $\dfrac{17+18}{2}=17,5$ ; donc leurs parents peuvent espérer les voir arriver à 17h30.

**Remarque 1 :**

Pour la question **1**, on pourra considérer $f : x \mapsto \dfrac{1}{18-17}=1$ sur l'intervalle $[17;18]$ la fonction densité de $X$ et on calculera ainsi P(17 ≤X ≤17,25)= $\int_{17}^{17,25} f(x)dx=\int_{17}^{17,25} 1dx=[x]_{17}^{17,25}=0,25$.

**Exercice 12 :**

On considère que le temps d'attente en minutes à un guichet du service après-vente d'un magasin peut être modélisé par une variable aléatoire T suivant la loi exponentielle de paramètre 0,2.

1) Calculer au millième près la probabilité d'attendre un temps inférieur ou égal à 5 minutes.

2) Calculer au millième près la probabilité d'attendre plus de 10 minutes.

3) Un client se présente au guichet. Quel temps peut-il « espérer » attendre ?

**Solution :**

1) On calcule P(0 ≤ T ≤5) = 1 − $e^{-0,2\times5}$ =1 − $e^{-1} \simeq 0,632$.

2) On calcule P(T > 10) = $e^{-0,2\times10}=e^{-2}\simeq 0,135$.

3) E(T) = $\dfrac{1}{0,2}$ =5 ; donc le client peut espérer attendre 5 minutes.

**Remarque 2 :**

Dans le cas de la première probabilité, un calcul d'intégrale était envisageable :

la fonction de densité de T est la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par f (t) = $(0,2)e^{(-0,2)t}$.

La probabilité d'attendre un temps inférieur ou égal à 5 minutes est donc :

P(0 ≤T ≤5)= $\int_0^5 f(t)dt=\int_0^5 (0,2)e^{(-0,2)t}dt=\left[-e^{(-0,2)t}\right]_0^5=-e^{(-0,2)5}-\left(-e^{(-0,2)0}\right)$ =1 − $e^{-1}\simeq 0,632$.

**Exercice 13 :**

La proportion de chômeurs dans la population active est de 10%. Déterminer un intervalle de fluctuation au seuil de 95% de la fréquence des chômeurs dans les échantillons de taille 400. (Arrondir au millième).

**Solution :**

On a pour le cas étudié, $n$ = 400, $p$ = 10 %. Vérifions les conditions d'application du théorème :

$$\begin{cases} n=400\geq 30 \\ np=400\times0,1=40\geq5 \\ n(1-p)=400\times0,9=360\geq5 \end{cases}$$

Un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de confiance de 95% de la fréquence $f$ dans un échantillon de taille $n$ = 400 est alors :

$$I_n=\left[p-1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}};\ p+1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]=\left[0,1-1,96\frac{\sqrt{0,1\times0,9}}{\sqrt{400}};\ 0,1+1,96\frac{\sqrt{0,1\times0,9}}{\sqrt{400}}\right].$$

Puisque les borne sont :

- $p-1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \simeq 0{,}0706$. On arrondie la borne inférieure par défaut à $10^{-3}$ près soit $0{,}07$ .
- $p+1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \simeq 0{,}1294$ On arrondie la borne supérieure par excès à $10^{-3}$ près soit $0{,}13$.

Soit $I_n = [0{,}07\ ;\ 0{,}13]$

**Conclusion :** En considérant un échantillon de taille 400 dans la population, la probabilité que la fréquence de chômeurs dans cet échantillon appartienne à l'intervalle $I_{400}$ est voisine de 95%.
Autrement dit, il y a 95% de chances que la fréquence de chômeurs de cet échantillon soit comprise entre 7% et 13%.

## Exercice 14 :

On interroge au hasard 300 clients ayant effectué des achats sur un site internet et s'étant fait livrer le produit à domicile.
Le temps de livraison a été jugé raisonnable par 160 personnes interrogées.
Donner un intervalle de confiance de la proportion p de clients satisfaits.

**Solution :**

• **Analyse des données** :

– « *Sur un échantillon de n* = 300 *clients. Il est constaté que* 160 *sont satisfaits du temps de livraison.* ». Donc la fréquence observée de clients satisfaits du temps de livraison est $f = 160 \div 300 \simeq 0{,}533333333$ soit $f \simeq 0{,}533$.

•**Intervalle de confiance** :

On a pour le cas étudié, $n = 300, f \simeq 0{,}533$. Vérifions les conditions d'application du théorème :

$$\begin{cases} n = 300 \geq 30 \\ nf = 300 \times \frac{160}{300} = 160 \geq 5 \\ n(1-f) = 300 \times \frac{140}{300} = 140 \geq 5 \end{cases}$$

Un intervalle de confiance au seuil de confiance de 95% de la proportion $p$ est alors :

$$I_n = \left[ f - \frac{1}{\sqrt{n}} ;\ f + \frac{1}{\sqrt{n}} \right] = \left[ \frac{160}{300} - \frac{1}{\sqrt{300}} ;\ \frac{160}{300} + \frac{1}{\sqrt{300}} \right]$$

Puisque les bornes sont :

- $f - \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{160}{300} - \frac{1}{\sqrt{300}} \simeq 0{,}4756$.

  On arrondie la borne inférieure par défaut à $10^{-3}$ près soit $0{,}475$ .
- $f + \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{160}{300} + \frac{1}{\sqrt{300}} \simeq 0{,}59107$.

On arrondie la borne supérieure par excès à $10^{-3}$ près soit $0{,}592$.Soit $I_n = [0{,}475\ ;\ 0{,}592]$.

**Conclusion :**

Cet intervalle contient la proportion $p$ au niveau de confiance 95% (ou au risque d'erreur de 5%).
La proportion de clients satisfaits se situe donc, au niveau de confiance 95%, entre 47,5% et 59,2%.

## B. Exercices divers :

**1.** On dispose d'un dé à six faces numérotées de 1 à 6. On jette ce dé trois fois de suite pour former un nombre de trois chiffres, le chiffre des centaines étant obtenu par le premier jet, celui des dizaines par le deuxième jet et celui des unités par le troisième jet. Quel est le nombre de résultats possibles.

**2.** Dans une salle de classe il y a 20 chaises. De combien de façons peuvent prendre place 3élèves ? 5 élèves ?

**3.** De combien de façon peut-on distribuer 5 livres à 5 élèves ?

**4.** Une classe de trente cinq élèves élit deux délégués. Combien y a-t-il de choix possibles ?

**5.** un centre de recherche, on se propose de former pour une expérience une équipe de quatre chercheurs, choisis parmi quatre hommes et six femmes.
Combien d'équipes différentes peut-on former ?

**6.** Un sac renferme 15 jetons : 4 jetons blancs ; 6 jetons noires et 5 jetons rouges.
On extrait, au hasard, simultanément trois jetons du sac. Déterminer les probabilités des événements suivants :
A'' les trois jetons sont noirs'' ; B ''Deux jetons sont blancs et un rouge'' ; C''les trois jetons sont de couleurs différentes''.

**7.** On tire 3 boules dans une urne qui contient 4 boules rouges et 5 boules blanches.
Calculer la probabilité pour que les 3 boules soient rouges ;
a) Si le tirage a lieu successivement et sans remise
b) Si le tirage a lieu successivement et avec remise.
c) Si le tirage a lieu simultanément.

**8.** On dispose d'un dé cubique pipé dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
Soit i un élément de $\{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$ ; on note $p_i$ la probabilité de l'événement ''le résultat du lancer est i''.
1. Calculer $p_1$ ; $p_2$ ; $p_3$ ; $p_4$ ; $p_5$ ; $p_6$, sachant que : $p_2 = p_1$ ; $p_3 = 3\,p_1$ ; $p_4 = p_5 = 2\,p_1$ ; $p_6 = 2\,p_3$ 2. Calculer la probabilité d'obtenir un chiffre pair.

**9.** Une urne contient dix boules numérotées de 1 à 10, on en tire au hasard, successivement, et avec remise, deux boules.
a) Calculer la probabilité $p_1$ pour que la différence entre deux numéros tirés soit 4.
Calculer la probabilité $p_2$ pour que a) soit réalisé et que la somme des numéros soit 10.

**10** Un sac contient 8 boules blanches et 2 boules noires.
1. On en extrait au hasard et simultanément n boules, Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une boule noire ?
2. Combien de boules faut-il prendre simultanément pour que la probabilité d'avoir au moins une boule noire soit supérieure à $\frac{2}{3}$ ?

**11.** 1. $f$ est la fonction telle que : $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{2x^2 - x}$
Etudier ses variations et tracer sa représentation graphique.
2.a) n est un naturel non nul, une urne électorale contient n – 1 bulletins Non et n +1 bulletins ''Oui ''.
Pour réaliser un sondage sommaire, on prélève deux bulletins, chaque bulletin ayant la même probabilité d'être prélevé.
Calculer la probabilité $p_n$ de l'événement ''on a prélevé 2 bulletins portants des votes différents''
b) Utiliser la première question pour trouver le naturel $n_0$ pour lequel la probabilité $P_{n_0}$ est maximale. Calculer $P_{n_0}$.

**12** Une urne contient 3 boules blanches et 3 boules noires indiscernables au toucher. On tire au hasard et simultanément trois boules.
a) Calculer la probabilité de chacun des événements :
A :''Obtenir au moins une boule blanche''
B''obtenir au moins deux boules noires'' ;
C ''obtenir au moins une boule blanche et une boule noire''.

b) Calculer P(A\B) ; P(A\C) ; P(B\A) ; P(B\C) ; P(C\A) ; P(C\B).

**13** On lance deux fois un dé et à chaque issue on associe le couple (a ; b) où a est la face apparue au premier jet et b celle apparue au second.
On peut définir plusieurs variables aléatoires.
Pour chacune d'elle, déterminer sa loi de probabilité et son espérance mathématique :

- X : ‘‘ nombre apparu au premier jet ’’
- Y : ‘‘ nombre apparu au second jet ’’
- Z = X + Y
- U = XY

suivant :

| Z | $1-i\sqrt{3}$ | $\sqrt{2}$ | $-\sqrt{2}$ | $\sqrt{3}+i$ | 2i | -3 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lvert Z\rvert$ | | | | | | |
| argZ | | | | | | |

| Z | 1+ i | 2 | 1- i | $i\sqrt{2}$ | $1+i\sqrt{3}$ | -1 + i |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lvert Z\rvert$ | | | | | | |
| argZ | | | | | | |

Une boîte contient 12 cartons indiscernables au toucher, portant les 12 nombres complexes du tableau précédent (chaque carton porte un seul nombre complexe) .
2. On tire au hasard un carton de la boîte (on suppose l'équiprobabilité des tirages).

a) Quelle est la probabilité de tirer un carton portant un nombre réel ?
b) Quelle est la probabilité de tirer un carton portant un nombre complexe dont le module est $\sqrt{2}$ ?
c) Quelle est la probabilité de tirer un carton portant un nombre complexe dont un argument $\theta$ est tel que : $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ .

3. Un jeu consiste à tirer un carton de la boîte précédente, si le nombre complexe inscrit sur le carton tiré est de module 3, le joueur gagne 10.000 UM et le jeu s'arrête, sinon, le carton tiré est remis dans la boîte et le joueur procède à un deuxième tirage ; si ce carton porte un nombre complexe de module 3 le joueur gagne 8 000 UM, s'il est de module 2, il gagne 5 000 UM, sinon il ne gagne rien et le jeu s'arrête.
Soit X la variable aléatoire égale au gain du joueur.

a) Déterminer la loi de probabilité de X,
b) Calculer l'espérance mathématique E(X) de X.

**14** Une urne contient quatre boules vertes, deux blanches et une rouge, indiscernables au toucher. On tire au hasard et simultanément trois boules. Les tirages sont équiprobables.
Chaque boule verte tirée vaut 1F, chaque blanche 2F, la rouge 5F.
Soit X la variable aléatoire qui associe à chaque tirage de trois boules, le gain en francs.
Déterminer la loi de probabilité de X.
2. a) Calculer l'espérance mathématique E(X).
b) Quelle valeur positive ou négative aurait-il fallu attribuer à chaque boule blanche pour que E(X) soit nulle, les boules vertes et la boule rouge conservent leurs valeurs initiales.

**15** Une boîte contient neuf carrés numérotés de 1 à 9, une deuxième boîte contient quatre disques numérotés de 1 à 4. On tire indépendamment un objet de chacune des deux boîtes. Les objets d'une même boîte sont supposés avoir la même probabilité d'être tirés.
On considère la variable aléatoire X qui, à chaque tirage, associe la valeur absolue de la différence des nombres indiqués sur les objets tirés.
Déterminer la loi de probabilité de X et son espérance mathématique.
Déterminer et représenter graphiquement la fonction de répartition de X.

**16** On peint les six faces d'un cube de bois d'arête 3 cm. On le débite, par des traits de scie parallèle aux plans de faces, en 27 petits cubes d'arêtes 1 cm.
On place ces 2 7 petits cubes dans un sac.

1. On tire, au hasard, et simultanément, deux cubes du sac.

Soit X la variable aléatoire égale au nombre total de faces peintes que présentent les deux cubes tirés.

a) Quelles sont les valeurs prises par X ?
b) Déterminer la loi de probabilité de X.
c) Calculer l'espérance mathématique E(X) et l'écart-type $\sigma$ (X) de X.

2. On renouvelle trois fois le même tirage de deux petits cubes en remettant chaque fois les cubes tirés dans le sac.
Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de tirage où les deux cubes tirés ont, en tout, deux faces peintes. Donner la loi de probabilité de Y.

**17** 1. Reproduire et compléter le tableau

| N° | Question | Réponse A | Réponse B | Réponse C |
|---|---|---|---|---|
| 1 | Le nombre de tirage possible est | $C_6^3$ | $A_6^3$ | $6^3$ |
| 2 | La probabilité que le tirage soit unicolore est : | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{20}$ | $\frac{1}{2}$ |
| 3 | La probabilité que le tirage soit tricolore est | 0,3 | $\frac{11}{40}$ | $\frac{7}{6}$ |
| 4 | La probabilité que le tirage soit bicolore est : | $\frac{29}{40}$ | $\frac{6}{20}$ | $\frac{13}{20}$ |
| 5 | L'espérance mathématique de X est : | $\frac{9}{4}$ | $-\frac{7}{20}$ | 4 |

Recopie sur ta feuille le tableau en le complétant en choisissant la bonne réponse, aucune justification n'est demandée.

**18** Une urne contient six boules indiscernables au toucher dont trois sont rouge, deux sont vertes et une seule est jaune. On tire simultanément et au hasard, trois boules de cette urne.
Soit X la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe le nombre de couleurs de boules tirées.
Parmi les réponses proposées pour chaque question ci-après, une seule réponse est exacte :
2.) Etablir la loi de probabilité de X, puis calculer son espérance mathématique E(X) et son écart-type $\sigma(X)$

**19** Une urne contient **3** boules blanches, **2** boules vertes et **5** boules rouges. On tire simultanément et au hasard deux boules de l'urne.
1) a) Quelle est la probabilité de tirer deux boules blanches ?
b) Quelle est la probabilité de tirer deux boules vertes ?
c) Quelle est la probabilité de tirer deux boules rouges ?
2.) En déduire la probabilité de tirer deux boules de couleurs différentes.

3.) Un jeu consiste à tirer simultanément et au hasard deux boules de l'urne.
- Si les deux boules sont de couleurs blanches, alors on gagne **25** points.
- Si les deux boules sont de couleurs vertes, alors on gagne **100** points.
- Si les deux boules sont de couleurs rouges, alors on gagne **12** points.
- Si les deux boules sont de couleurs différentes, alors on gagne p points

On désigne par X la variable aléatoire égale au gain obtenu.
a) Déterminer la loi de probabilité de X,
b) Calculer l'espérance mathématique E(X) de X.
c) Déterminer la valeur de p pour laquelle E(X) = 10.

**20** Une urne contient six billes numérotées de **1** à **6**. On tire simultanément deux billes qui portent les numéros **n** et **p**. A chaque tirage, on associe la variable aléatoire **X** définie ainsi,
- Si **n** et **p** sont pairs, $\mathbf{X} = \frac{\mathbf{n+p}}{\mathbf{2}}$,
- Si **n** et **p** sont impairs, $\mathbf{X=0}$
- Sinon $\mathbf{X=|n-p|}$

Quelles sont les valeurs que peut prendre X ?

**21** Une cage contient sept pigeons dont cinq pigeonnes et deux pigeons mâles ; parmi ces pigeons on dispose de deux couples de plumage gris et de trois pigeonnes de plumage blanc. On tire au hasard et simultanément deux oiseaux de cette cage (les tirages sont équiprobables).
1. Quel est le nombre de tirages possibles ?
2. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
A : ''les deux oiseaux tirés sont du même sexe''
B : '' les deux oiseaux tirés sont de même couleur''
C :''les deux oiseaux tirés forment le même couple''
3. On considère la variable aléatoire réelle X qui à chaque tirage de deux oiseaux associe le nombre de pigeonnes contenues dans ce tirage.
a) Déterminer l'ensemble des valeurs de X et sa loi de probabilité
b) Calculer l'espérance mathématique de X.

**22** On considère une variable aléatoire X suivant la loi U ([0 ; 20]).
1) Quelle est la fonction de densité associée à cette variable aléatoire ?
2) Que vaut l'espérance de X ?
3) Soit t un réel de l'intervalle ([0 ; 20]). Déterminer l'expression de $P(X \leq t)$ en fonction de t.

**23** Kemal a dit à Salka qu'il passerait la voir chez elle pour récupérer un meuble entre 10h et 12h. N'ayant pas prévu d'heure précise, il peut arriver à tout instant.
1) Quelle loi suit la variable aléatoire H donnant l'heure d'arrivée de Kemal ?
2) Calculer la probabilité que Kemal arrive :
a) avant 11h20 b) entre 10h et 10h05 c) à 11h précise
3) Kemal n'est toujours pas arrivé à 10h40mn. Quelle est la probabilité qu'il arrive avant 11h20 ?

**24** Durée de vie d'un composant : Un composant électronique d'un robot a une durée de vie, en année, qui peut être modélisée par une variable aléatoire T suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda$. Une étude statistique a permis d'établir que $P(T < 5) = 0{,}1$. On arrondira tous les résultats au millième.
1) Déterminer la valeur de $\lambda$. Dans la suite, on prendra $\lambda = 0{,}02$.
2) Calculer la probabilité que ce composant ait une durée de vie supérieure ou égale à 14 ans.
3) Calculer la probabilité que ce composant ait une durée de vie inférieure ou égale à 10 ans.
4) Sachant que le composant a déjà fonctionné 7 ans, quelle est la probabilité qu'il ait une durée de vie supérieure ou égale à 21 ans ?
5) Donner une estimation de la durée de vie moyenne de ce composant.

**25** **Carbone 14 :**
La durée de vie, en années, d'un atome radioactif peut être modélisée par une variable aléatoire D suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda$. On appelle demi-vie de cet élément le nombre réel T tel que la probabilité que cet atome se désintègre avant T années soit égale à 0,5. Ainsi, la demi-vie du carbone 14 est 5 730 ans.
1) Calculer le paramètre $\lambda$ dans le cas du carbone 14.
2) Calculer la probabilité qu'un atome de carbone 14 se désintègre :
a) avant 1 000 ans ;
b) après 10 000 ans.
3) Déterminer la valeur de a telle que $P(D < a) = 0{,}95$ pour le carbone 14. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

**26** Une entreprise fabrique des rondelles métalliques. Une rondelle est conforme si son diamètre est compris entre 5 et 7 millimètres. On suppose que le diamètre, en millimètre, d'une rondelle suit la loi $N(6 ; 0{,}5^2)$.
1) Déterminer la probabilité qu'une rondelle soit conforme. Arrondir au millième.
2) On suppose que la production de chaque rondelle est indépendante des autres. À combien de rondelles non conformes peut-on s'attendre dans un stock de 500 000 ?
3) Le directeur général veut améliorer la qualité de la production. Il souhaite diviser le nombre de rondelles non conforme par deux, en utilisant des machines plus régulières. Quelle nouvelle valeur de l'écart-type $\sigma$ doit-il viser ? Arrondir au centième.

**27** Pour des raisons de logistique, les organisateurs d'un marathon ont décidé de modéliser le temps de parcours (en heure) de chacun des 2 000 participants par la loi normale de paramètres $\mu = 3{,}5$ et $\sigma = 0{,}5$.
1) Les organisateurs ont décidé d'installer le ruban sur la ligne d'arrivée deux heures après le départ du marathon. Selon ce modèle, quel est la probabilité qu'un coureur pris au hasard termine la course avant l'installation du ruban ?
2) Les organisateurs souhaitent commencer la cérémonie de remise des médailles pour les trois premiers coureurs quand 95 % des coureurs seront arrivés. Au bout de combien de temps doivent-ils prévoir de le faire.

**28** **Temps de guérison :** Wedou a remarqué que lorsqu'il est enrhumé, il se rétablit en moyenne en 4 jours et au minimum en 1 jour. Il souhaite modéliser son temps de guérison (en jour) par une variable aléatoire T. Dans l'exercice, on arrondira à $10^{-3}$ près si nécessaire.

**PARTIE A :**

On admet dans cette partie que T suit une loi uniforme.

1) Donner les paramètres de cette loi uniforme.

2) Trouver un intervalle I de la forme $[4 - u ; 4 + u]$ tel que $P(T \in I) = 0{,}95$.

3) Interpréter le résultat de la question précédente dans les termes de l'énoncé.

**PARTIE B :** Loi exponentielle

Expliquer pourquoi une loi exponentielle ne convient pas pour cette modélisation.

**PARTIE C :** Loi normale

1) Expliquer pourquoi une loi normale ne devrait normalement pas convenir pour cette modélisation.

2) Jemal, un ami de Wedou, lui propose néanmoins de modéliser le temps de guérison T par une variable aléatoire $N(4 ; \sigma^2)$ telle que $P(T \leq 1) = 0{,}01$.

a) Expliquer le choix de cette loi.

b) Déterminer σ. c) Trouver un intervalle J de la forme $[4 - u ; 4 + u]$ tel que $P(T \in J) = 0{,}95$.

**29** Selon une enquête de la DREES, 70 % des plus de 20 ans de la population française portent des lunettes ou des lentilles de contact. On considère un échantillon de 400 personnes tirées au sort dans la population française et on admet que la population française est suffisamment grande pour assimiler ce tirage au sort à un tirage avec remise. On note X le nombre de personnes qui portent des lunettes ou des lentilles dans l'échantillon.

1) Quelle loi suit X ?

2) Contrôler que n et p vérifient bien les conditions $n > 30$, $np > 5$ et $n(1 - p) > 5$.

3) En déduire l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence des porteurs de lunettes ou de lentilles dans cet échantillon.

4) Donner une interprétation concrète du résultat précédent.

**30** Dans une fabrique de chocolat, une machine met en forme les tablettes. Elle fabrique des tablettes imparfaites avec une probabilité 0,025. Quand une tablette est parfaitement formée, elle est vendue à 2 e. Lorsqu'elle est imparfaite, elle est vendue en vrac à 0,75 e dans le magasin d'usine. Chaque jour, l'usine produit 20 000 tablettes de chocolat.

1) Déterminer un intervalle de fluctuation de la fréquence de tablettes imparfaites au seuil de 95 %.

2) On suppose que toute la production est vendue. Déterminer un intervalle de fluctuation du chiffre d'affaires quotidien réalisé au seuil de 95 %.

**31** Amadou et Hawa observent le comportement de leur nouveau-né Khalidou. Ils ont remarqué qu'en moyenne, Khalidou s'endormait 30 minutes après chaque biberon. Ils modélisent le temps T (en heure) nécessaire à un endormissement de Khalidou par une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ.

1) Déterminer la valeur de λ.

2) a) Selon ce modèle, quelle est la probabilité que Khalidou mette plus d'une heure à s'endormir ? Arrondir au millième.

b) Amadou et Hawa doutent un peu du modèle. Ils ont remarqué que durant le mois de janvier, après 150 repas, Khalidou a seulement 10 fois mis plus d'une heure à s'endormir. Que peuvent-ils en conclure (on pourra utiliser un intervalle de fluctuation asymptotique) ?

3) Trouver une bonne raison en défaveur d'une loi exponentielle pour ce type de modélisation.

**32** On souhaite déterminer la proportion p d'oliviers affectés par la bactérie Xylella fastidiosa dans une région. Pour cela, on effectue un test de dépistage sur 530 oliviers et on note X le nombre d'arbres infectés. Après examens, on trouve que 77 arbres sont malades.

1) Déterminer une estimation de la proportion p à l'aide d'un intervalle de confiance au seuil de 95 %.

2) Combien d'arbres devrait-on tester pour avoir un intervalle de taille inférieure ou égale à 0,01 ?

3) Par combien doit-on multiplier la taille de l'échantillon de la question 1 pour avoir une précision dix fois plus grande de l'intervalle de confiance ?

**33 D’après Bac (Centres Étrangers - 2015)**

Un fournisseur produit deux sortes de cadenas. Les uns sont premier prix, et les autres sont haut de gamme. Un magasin de bricolage dispose d’un stock de cadenas provenant de ce fournisseur ; ce stock comprend un grand nombre de cadenas de chaque type.

1) Le fournisseur affirme que, parmi les cadenas haut de gamme, il n’y a pas plus de 3 % de cadenas défectueux dans sa production. Le responsable du magasin de bricolage désire vérifier la validité de cette affirmation dans son stock ; à cet effet, il prélève un échantillon aléatoire de 500 cadenas haut de gamme, et en trouve 19 qui sont défectueux. Ce contrôle remet-il en cause le fait que le stock ne comprenne pas plus de 3 % de cadenas défectueux ? On pourra pour cela utiliser un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 %.

2) Le responsable du magasin souhaite estimer la proportion de cadenas défectueux dans son stock de cadenas premier prix. Pour cela il prélève un échantillon aléatoire de 500 cadenas premier prix, parmi lesquels 39 se révèlent défectueux. Donner un intervalle de confiance de cette proportion au niveau de confiance 95 %.

**34 D’après Bac (Nouvelle-Calédonie - 2014)**

Les trois parties A, B et C sont indépendantes. Une fabrique de desserts glacés dispose d’une chaîne automatisée pour remplir des cônes de glace.

**PARTIE A :**

Les cônes de glace sont emballés individuellement puis conditionnés en lots de 2 000 pour la vente en gros. On considère que la probabilité qu’un cône présente un défaut quelconque avant son conditionnement en gros est égale à 0,003.

On nomme X la variable aléatoire qui, à chaque lot de 2 000 cônes prélevés au hasard dans la production, associe le nombre de cônes défectueux présents dans ce lot. On suppose que la production est suffisamment importante pour que les tirages puissent être supposés indépendants les uns des autres.

1) Quelle est la loi suivie par X ? Justifier la réponse et préciser les paramètres de cette loi.

2) Si un client reçoit un lot contenant au moins 12 cônes défectueux, l’entreprise procède alors à un échange de celui-ci. Déterminer la probabilité qu’un lot ne soit pas échangé ; le résultat sera arrondi au millième.

**PARTIE B :**

Chaque cône est rempli avec de la glace à la vanille. On désigne par Y la variable aléatoire qui, à chaque cône, associe la masse (exprimée en grammes) de crème glacée qu’il contient.

On suppose que Y suit une loi normale $N(110\,;\sigma^2)$, d’espérance $\mu=110$ et d’écart-type σ.

Une glace est considérée comme commercialisable lorsque la masse de crème glacée qu’elle contient appartient à l’intervalle [104 ; 116]. Déterminer une valeur approchée à $10^{-1}$près du paramètre σ telle que la probabilité de l’évènement « la glace est commercialisable » soit égale à 0,98.

**PARTIE C :**

Une étude réalisée en l’an 2000 a permis de montrer que le pourcentage de Français consommant régulièrement des glaces était de 84 %. En 2010, sur 900 personnes interrogées, 795 d’entre elles déclarent consommer des glaces. Peut-on affirmer, au niveau de confiance de 95 % et à partir de l’étude de cet échantillon, que le pourcentage de Français consommant régulièrement des glaces est resté stable entre les années 2000 et 2010 ?