



REPUBLIQUE ISLAMIQUE DE MAURITANIE

Honneur - Fraternité - Justice

MINISTERE DE L'EDUCATION ET DE LA
REFORME DU SYSTEME D'ENSEIGNEMENT
INSTITUT PEDAGOGIQUE NATIONAL

Mathématiques

7ème LM

Réalisé par

Mohameden Sid ahmed
Inspecteur de l'enseignement
secondaire

Eljed Elmoctar
Professeur de l'enseignement
secondaire

Révisé par

Mohamed Yahya Mohamed Abdallahi
Inspecteur de l'enseignement
secondaire

Tall Cheikh Oumar
Professeur de l'enseignement
secondaire

Maquettiste

Oumry Ahmed Bebbia

2026



IPN



Préface

Dans le cadre de la mise en œuvre des orientations nationales visant l'amélioration de la qualité de l'enseignement et l'adaptation des apprentissages aux exigences du développement, l'Institut Pédagogique National a le plaisir de mettre à la disposition des enseignants et des élèves cette nouvelle collection de manuels scolaires scientifiques destinés au second cycle de l'enseignement secondaire.

Ces ouvrages couvrent l'ensemble des filières du lycée, aussi bien scientifiques que littéraires, dans les disciplines des Mathématiques, des Sciences de la Nature, de la Physique et de la Chimie. Ils ont été élaborés conformément aux programmes officiellement en vigueur et traduisent la volonté des autorités éducatives de garantir à tous les apprenants des ressources pédagogiques de qualité, adaptées aux objectifs de formation et aux réalités de notre système éducatif.

Depuis la réécriture des programmes en 1999 jusqu'à la validation des programmes actuellement en vigueur en 2022, notre système éducatif a connu plusieurs étapes de réforme et de modernisation curriculaires. Toutefois, cette collection marque une avancée historique, puisqu'il s'agit de la première fois que les filières littéraires, notamment les Lettres Modernes (LM) et les Lettres Originelles (LO), bénéficient de manuels scolaires dans les disciplines scientifiques pour tous les niveaux du second cycle, de la 5^e à la 7^e année. Les filières LO ont, en outre, bénéficié de manuels rédigés en langue arabe afin de répondre aux spécificités linguistiques et pédagogiques de ces séries et de garantir une meilleure accessibilité des contenus scientifiques aux apprenants concernés.

Le travail réalisé dans le cadre de ce projet a consisté, d'une part, à la révision de douze titres correspondant aux manuels des disciplines de base dans les différents niveaux du lycée et, d'autre part, à la conception de vingt-deux nouveaux titres couvrant les autres. Cette entreprise éditoriale d'envergure témoigne de l'engagement des autorités éducatives à renforcer les ressources pédagogiques nationales et à accompagner efficacement la mise en œuvre des nouveaux programmes.

Conscient de l'importance stratégique du manuel scolaire dans le processus d'enseignement-apprentissage, l'Institut Pédagogique National a mobilisé les meilleures compétences nationales pour la réalisation de cette tâche. Des inspecteurs, des conseillers pédagogiques et des professeurs expérimentés, reconnus pour leur expertise scientifique et pédagogique, ont ainsi été sélectionnés afin de concevoir et de réviser des ouvrages répondant aux exigences de qualité académique, pédagogique et didactique.

Les équipes de conception se sont attachées à produire des manuels clairs, structurés et accessibles, favorisant le développement des connaissances, des compétences et de l'esprit scientifique chez les apprenants. Une attention particulière a été accordée à la cohérence des contenus, à la progressivité des apprentissages, à l'intégration des activités pratiques ainsi qu'à l'exploitation d'illustrations et de situations d'apprentissage adaptées au contexte national.

L'Institut Pédagogique National tient à exprimer sa profonde gratitude à la Banque Islamique de Développement pour l'appui précieux qu'elle a apporté à ce projet. Grâce à son financement, toutes les étapes de cette importante œuvre éducative ont pu être réalisées, depuis la rédaction et la révision des manuscrits jusqu'à leur édition, leur correction et leur impression. Cet accompagnement constitue une contribution majeure au développement de l'éducation et au renforcement de la qualité des apprentissages dans notre pays.

L'Institut Pédagogique National adresse également ses sincères remerciements à tous ceux qui ont contribué à l'aboutissement de cette œuvre : auteurs, relecteurs, inspecteurs, équipes techniques et partenaires ayant accompagné les différentes phases de conception et de production.

Nous espérons que ces manuels constitueront des outils pédagogiques efficaces au service des enseignants et des élèves et qu'ils contribueront au renforcement de l'enseignement des sciences, à l'amélioration des performances scolaires et à la formation d'une génération capable de participer activement au développement national.

Le Directeur Général de l'Institut Pédagogique National
Dr. Cheikh Mouadh Sidi Abdalla

IPN

Avant-Propos

Le présent ouvrage de Mathématiques, destiné aux élèves de la classe de Terminale LM, s'inscrit dans le cadre du programme officiel.

Il a pour objectif de fournir aux apprenants un support rigoureux, structuré et conforme aux orientations pédagogiques.

L'ouvrage est articulé autour de six chapitres fondamentaux :

1. Équations et inéquations ;
2. Généralités sur les fonctions ;
3. Fonctions logarithmiques
4. Fonctions exponentielles ;
4. Suites numériques ;
5. Probabilités.

Chaque chapitre développe les notions essentielles, illustrées par des exemples précis et suivies d'exercices gradués.

L'ensemble vise à consolider les acquis, à préparer les élèves efficacement aux épreuves de Baccalauréat et à doter ces derniers des compétences nécessaires pour la poursuite de leurs études supérieures.

Cet ouvrage se veut également un outil de référence pour les enseignants, leur offrant une base claire pour l'accompagnement et l'évaluation des élèves.

Nous espérons que ce livre sera non seulement un manuel de travail, mais aussi un compagnon de réussite.

Les auteurs :

Mohameden Sid ahmed
Inspecteur de Mathématiques de
l'enseignement secondaire

Eljed El Moctar
Professeur de Mathématiques de
l'enseignement secondaire

IPN

Table des matières

Chapitre 1 Equations et Inéquations.....9

I. Equations du second degré :.....	9
II. Inéquations du second degré :.....	12
III. Exercices :.....	16

Chapitre 2 Généralités sur les fonctions.....23

I. Limites de fonctions.....	23
II. Dérivation.....	29
III. Etude des fonctions et leurs représentations graphiques.....	32
IV. Exercices :.....	33

Chapitre 3 Fonctions logarithmes:.....45

I. Définitions et propriétés :.....	45
II. Limites et Dérivées :.....	45
III. Exercices	47

Chapitre 4 Fonctions exponentielles.....55

I. Définitions et propriétés :.....	55
II. Limites et Dérivées :.....	55
III. Etude des variations de la fonction exponentielle (exp).....	56
IV. Exercices.....	56

Chapitre 5 Suites numériques.....63

I. Définition et notation:.....	63
II. Modes de définition d'une suite numérique:.....	63
III. Monotonie, minoration, majoration:.....	64
IV. Suites Arithmétiques et Suites Géométriques:.....	65
V. Limite d'une suite :.....	68
VI. Exercices:.....	71

Chapitre 6 Dénombrements et Probabilités.....81

I. Langage des ensembles : (Rappels).....	81
II. Probabilités:.....	84
III. Exercices:.....	86
Bibliographie:.....	95

IPN

Chapitre 1

Equations et Inéquations

I. Equations du second degré

1. Définition

Une équation de la forme $ax^2 + bx + c = 0$; où a ; b et c sont des réels donnés et a non nul est appelée équation du second degré à une inconnue.

Le discriminant de cette équation est le nombre $\Delta = b^2 - 4ac$

Si	alors l'ensemble des solutions est :
$\Delta < 0$	Φ
$\Delta = 0$	$\left\{ -\frac{b}{2a} \right\}$
$\Delta > 0$	$\{x_1, x_2\}$ avec $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$
Si	alors :
x_1 et x_2 sont les solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$	$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ et $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$
$a + b + c = 0$	L'ensemble des solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ est $\left\{ 1, \frac{c}{a} \right\}$
$a - b + c = 0$	L'ensemble des solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ est $\left\{ -1, \frac{-c}{a} \right\}$

Exemple 1 :

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes par deux méthodes :

a) $x^2 + 3x + 2 = 0$; b) $5x^2 - 3x - 2 = 0$; c) $-4x^2 + 3x + 1 = 0$;

d) $5x^2 + 3x - 2 = 0$; e) $7x^2 + 3x - 4 = 0$; f) $9 - 4x^2 = 0$;

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes

a) $x^2 - 6x + 9 = 0$; b) $x^2 + 10x + 25 = 0$; c) $x^2 - x + \frac{1}{4} = 0$; d) $x^2 + x + 1 = 0$; e) $5x^2 - 8x + 7 = 0$

Solution :

1. Résolvons par deux méthodes

Méthode 1	Méthode 2
a) $x^2 + 3x + 2 = 0$, $a = 1, b = 3$ et $c = 2$ $\Delta = b^2 - 4ac = 9 - 4.1.2 = 1 > 0$ l'équation admet deux solutions dans $\mathbb{R}$ $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 + \sqrt{1}}{2.1} = \frac{-2}{2} = -1$ et	a) $x^2 + 3x + 2 = 0$ $a = 1, b = 3$ et $c = 2$

$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 - \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = -2 \text{ donc } S = \{-1; -2\}$	On a $a - b + c = 0$ donc $S = \left\{-1; \frac{-c}{a}\right\} = \left\{-1; \frac{-2}{1}\right\}$ donc $S = \{-1; -2\}$
b) $5x^2 - 3x - 2 = 0$; $a = 1, b = -3$ et $c = -2$ $\Delta = b^2 - 4ac = 9 - 4 \cdot 5 \cdot (-2) = 49 > 0$, L'équation admet deux solutions dans $\mathbb{R}$ $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3 + \sqrt{49}}{2 \cdot 5} = 1$ $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3 - \sqrt{49}}{2 \cdot 5} = \frac{-2}{5} \Rightarrow S = \left\{1; \frac{-2}{5}\right\}$	b) $5x^2 - 3x - 2 = 0$ $a = 1, b = -3$ et $c = 2$ On a : $a + b + c = 0$ donc $S = \left\{1; \frac{c}{a}\right\} \Rightarrow S = \left\{1; \frac{2}{5}\right\}$
c) $-4x^2 + 3x + 1 = 0$, $a = -4, b = 3$ et $c = 1$ $\Delta = b^2 - 4ac = 9 - 4(-4) \cdot 1 = 25 > 0$ L'équation admet deux solutions dans $\mathbb{R}$ $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 + \sqrt{25}}{2 \cdot (-4)} = \frac{-1}{4}$ $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 - \sqrt{25}}{2 \cdot (-4)} = 1 \Rightarrow S = \left\{1; \frac{-1}{4}\right\}$	c) $-4x^2 + 3x + 1 = 0$, $a = -4, b = 3$ et $c = 1$ On a $a + b - c = 0$ donc $S = \left\{1; \frac{c}{a}\right\}$ $\Rightarrow S = \left\{1; \frac{-1}{4}\right\}$
d) $5x^2 + 3x - 2 = 0$ $a = 5, b = 3$ et $c = -2$ $\Delta = b^2 - 4ac = 9 - 4(5) \cdot (-2) = 49 > 0$ L'équation admet deux solutions dans $\mathbb{R}$ $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 + \sqrt{49}}{2 \cdot (5)} = \frac{2}{5} \text{ et}$ $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 - \sqrt{49}}{2 \cdot (5)} = -1 \text{ donc } S = \left\{-1; \frac{2}{5}\right\}$	d) $5x^2 + 3x - 2 = 0$; $a = 5, b = 3$ et $c = -2$ On a : $a - b + c = 0 \Rightarrow S = \left\{-1; \frac{-c}{a}\right\}$ donc $S = \left\{-1; \frac{2}{5}\right\}$
e) $7x^2 + 3x - 4 = 0$; $a = 7$; $b = 3$ et $c = -4$ $\Delta = b^2 - 4ac = 9 - 4(7) \cdot (-4) = 121 > 0$ L'équation admet deux solutions dans $\mathbb{R}$ $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 + \sqrt{121}}{2 \cdot (7)} = \frac{4}{7} \text{ et}$ $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 - \sqrt{121}}{2 \cdot (7)} = -1 \text{ donc } S = \left\{-1; \frac{4}{7}\right\}$	e) $7x^2 + 3x - 4 = 0$; $a = 7$; $b = 3$ et $c = -4$ On a : $a - b + c = 0 \Rightarrow S = \left\{-1; \frac{-c}{a}\right\}$ donc $S = \left\{-1; \frac{4}{7}\right\}$
f) $9 - 4x^2 = 0$ $a = -4, b = 0$ et $c = 9$ $\Delta = b^2 - 4ac = 0 - 4(-4)(9) = 144 > 0$ L'équation admet deux solutions dans $\mathbb{R}$	f) $9 - 4x^2 = 0$ $a = -4, b = 0$ et $c = 9$ $9 - 4x^2 = 0 \Rightarrow (3 - 2x)(3 + 2x) = 0$

$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{0 + \sqrt{144}}{2 \cdot (-4)} = \frac{3}{2} \text{ et }$ $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-0 - \sqrt{144}}{2 \cdot (-4)} = -\frac{3}{2}$ Donc $S = \left\{ -\frac{3}{2}; \frac{3}{2} \right\}$	$\Rightarrow \begin{cases} 3 - 2x = 0 \\ \text{ou} \\ 3 + 2x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ \text{ou} \\ x = -\frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow$ donc $S = \left\{ -\frac{3}{2}; \frac{3}{2} \right\}$
---	--

2) Résolvons dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes

a) $x^2 - 6x + 9 = 0$; $a = 1, b = -6$ et $c = 9 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 36 - 4(1)(9) = 0$ L'équation admet une seule solution dans $\mathbb{R}$ $x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{6}{2 \times 1} = 3$ donc $S = \{3\}$
b) $x^2 + 10x + 25 = 0$; $a = 1, b = 10$ et $c = 25 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 100 - 4(1)(25) = 0$ L'équation admet une seule solution dans $\mathbb{R}$, $x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-10}{2 \times 1} = -5$ donc $S = \{-5\}$
c) $x^2 - x + \frac{1}{4} = 0$; $a = 1; b = -1$ et $c = \frac{1}{4} \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4(1)\left(\frac{1}{4}\right) = 0$ L'équation admet une seule solution dans $\mathbb{R}$: $x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{1}{2 \times 1} = \frac{1}{2}$ donc $S = \left\{ \frac{1}{2} \right\}$
d) $x^2 + x + 1 = 0 \Rightarrow a = 1, b = 1$ et $c = 1 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4(1)(1) = -3 < 0$ $\Delta < 0 \Rightarrow$ L'équation n'admet pas de solution dans $\mathbb{R} \Rightarrow S = \Phi$
e) $5x^2 - 8x + 7 = 0 \Rightarrow a = 5; b = -8$ et $c = 7 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 64 - 4(5)(7) = -76 < 0$ $\Delta < 0 \Rightarrow$ L'équation n'admet pas de solution dans $\mathbb{R} \Rightarrow S = \Phi$

Exemple 2

La longueur d'un rectangle est 7 cm de plus que sa largeur. Si l'aire du rectangle est de 494 cm², trouver les dimensions de celui-ci.

Solution

Soit x , la largeur du rectangle. Alors, la longueur du rectangle est $x + 7$.

$$\text{Aire} = (x + 7) \times x = 494 \Rightarrow x^2 + 7x = 494 \Rightarrow x^2 + 7x - 494 = 0 \Rightarrow a = 1; b = 7 \text{ et } c = -494 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac$$

$$49 - 4(1)(-494) = 2025 = 45^2 \Rightarrow x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-7 + 45}{2 \cdot (1)} = 19 \text{ et } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-7 - 45}{2 \cdot (1)} = -26$$

La longueur étant positive, $x = 19 \Rightarrow$ la largeur est 19 et la longueur est 26.

II. Inéquations du second degré :

1. Définition

Toute inéquation pouvant se ramener à l'une des formes : $ax^2 + bx + c \leq 0$; $ax^2 + bx + c < 0$;

$ax^2 + bx + c \geq 0$ ou $ax^2 + bx + c > 0$ est une inéquation du second degré, où a est un réel non nul.

Pour résoudre une inéquation du second degré, on étudie le signe du trinôme :

$ax^2 + bx + c$; où a est un réel non nul, b et c des réels donnés.

Si	Alors		
$\Delta < 0$	x	$-\infty$	$+\infty$
	$ax^2 + bx + c$	Signe de a	
$\Delta = 0$, racine unique $x_0 = \frac{-b}{2a}$ le signe est	x	$-\infty$	$+\infty$
	$ax^2 + bx + c$	Signe de a	Signe de a
$\Delta > 0$ les racines x_1 et x_2 ($x_1 < x_2$)	x	$-\infty$	$+\infty$
	$ax^2 + bx + c$	Signe de a	Signe de a

Exemple :

1) Etudier le signe de :

a) $3x^2 + x - 4$; b) $-3x^2 + 2x + 5$; c) $x^2 + 4x + 4$; d) $5x^2 + 2x + 4$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes

a) $x^2 + 3x + 2 \leq 0$; b) $5x^2 - 3x - 2 \geq 0$; c) $-4x^2 + 3x + 1 > 0$

d) $5x^2 + 3x < 0$; e) $-7x^2 + 3x - 4 \geq 0$; f) $9 - 4x^2 \leq 0$

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes

a) $x^2 - 6x + 9 \geq 0$; b) $x^2 + 10x + 25 \leq 0$; c) $x^2 - x + \frac{1}{4} < 0$; d) $x^2 + x + 10 > 0$; e) $5x^2 - 8x + 7 \leq 0$

Solution

1) Etudions le signe

a) $3x^2 + x - 4$; $a = 3$; $b = 1$; $c = -4$, $\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4(3)(-4) = 49 > 0$, Le trinôme admet

deux racines dans $\mathbb{R}$, $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 + \sqrt{49}}{2(3)} = 1$ et $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 - \sqrt{49}}{2(3)} = -\frac{4}{3}$

D'où le tableau de signe de : $3x^2 + x - 4$

x	$-\infty$	$-\frac{4}{3}$	1	$+\infty$
$3x^2 + x - 4$	+	-	+	+

b) $-3x^2 + 2x + 5$; $a = -3$; $b = 2$ et $c = 5$;

$\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4(-3)(5) = 64 > 0$ Donc le trinôme admet deux racines dans $\mathbb{R}$:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 + \sqrt{64}}{2 \cdot (-3)} = -1 \text{ et } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 - \sqrt{64}}{2 \cdot (-3)} = \frac{5}{3}$$

d'où le tableau de signe de : $-3x^2 + 2x + 5$

x	$-\infty$	-1	$\frac{5}{3}$	$+\infty$	
$-3x^2 + 2x + 5$	$-$	o	$+$	o	$-$

c) $x^2 + 4x + 4$; $a = 1$; $b = 4$ et $c = 4 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 16 - 4(1) \cdot (4) = 0 \Rightarrow$ Le trinôme admet une seule racine dans $\mathbb{R}$: $x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2 \cdot (1)} = -2$, d'où le tableau de signe de : $x^2 + 4x + 4$

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$x^2 + 4x + 4$	+	o	+

d) $5x^2 + 2x + 4$ $a = 1, b = 2$ et $c = 4 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4(5) \cdot (4) = -76 < 0$ donc le trinôme n'a pas de racine dans $\mathbb{R}$, d'où le tableau de signe de : $5x^2 + 2x + 4$

x	$-\infty$	$+\infty$
$5x^2 + 2x + 4$	+	+

2) Résolvons les inéquations

a) $x^2 + 3x + 2 \leq 0$; $a = 1$; $b = 3$; $c = 2$;

$\Delta = b^2 - 4ac = 9 - 4(1)(2) = 1 > 0$; l'équation admet deux solutions dans $\mathbb{R}$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 + \sqrt{1}}{2 \cdot (1)} = -1 \text{ et } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 - \sqrt{1}}{2 \cdot (1)} = -2$$

D'où le tableau de signe de : $x^2 + 3x + 2$

x	$-\infty$	-2	-1	$+\infty$	
x^2+3x+2	+	o	-	o	+

Donc $S = [-2; -1]$

b) $5x^2 - 3x - 2 \geq 0$; $a = 5$; $b = -3$; $c = -2$; $\Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 9 - 4(5)(-2) = 49 > 0$;

l'équation admet deux solutions dans $\mathbb{R}$; $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3 + \sqrt{49}}{2 \cdot (5)} = 1$ et $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3 - \sqrt{49}}{2 \cdot (5)} = \frac{-2}{5}$

D'où le tableau de signe de : $5x^2 - 3x - 2$

x	$-\infty$	$\frac{-2}{5}$	1	$+\infty$
$5x^2-3x-2$	+	$\circ$	$\circ$	+

Donc $S = \left] -\infty; \frac{-2}{5} \right] \cup [1; +\infty[$

$$c) -4x^2 + 3x + 1 > 0$$

$\Delta = b^2 - 4ac = 9 - 4(-4)(1) = 25 > 0$; l'équation admet deux solutions dans $\mathbb{R}$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 + \sqrt{25}}{2 \cdot (-4)} = \frac{-1}{4} \text{ et } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 - \sqrt{25}}{2 \cdot (-4)} = 1$$

d'où le tableau de signe de : $-4x^2 + 3x + 1$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{4}$	1	$+\infty$
$-4x^2 + 3x + 1$		-	+	-

$$\text{Donc } S = \left] -\frac{1}{4}; 1 \right[$$

d) $5x^2 + 3x < 0$; on pose $x(5x + 3) = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = -\frac{3}{5} \Rightarrow$ l'équation admet deux solutions dans $\mathbb{R}$

D'où le tableau de signe de : $5x^2 + 3x$

x	$-\infty$	$-\frac{3}{5}$	0	$+\infty$
$5x^2 + 3x$		+	-	+

$$\text{Donc } S = \left] -\frac{3}{5}; 0 \right[$$

$$e) -7x^2 + 3x - 4 > 0; \quad a = -7; \quad b = 3; \quad c = -4;$$

$\Delta = b^2 - 4ac = 9 - 4(-7)(-4) = -103 < 0$; l'équation n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$

D'où le tableau de signe de : $-7x^2 + 3x - 4$

x	$-\infty$	$+\infty$
$-7x^2 + 3x - 4$		-

$$\text{Donc } S = \emptyset$$

$$f) 9 - 4x^2 \leq 0 \Rightarrow (3 - 2x)(3 + 2x) \leq 0 \Rightarrow \text{Les solutions sont } \frac{3}{2} \text{ et } -\frac{3}{2}$$

D'où le tableau de signe de : $9 - 4x^2$

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$9 - 4x^2$		-	+	-

$$\text{Donc } S = \left] -\infty; -\frac{3}{2} \right] \cup \left[\frac{3}{2}; +\infty \right[$$

3) Résolvons les inéquations

$$a) x^2 - 6x + 9 \geq 0; \quad a = 1; \quad b = -6 \text{ et } c = 9 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 36 - 4(1)(9) = 0$$

$$\text{L'équation admet une seule solution dans } \mathbb{R}: x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{6}{2 \cdot (1)} = 3$$

D'où le tableau de signe de : $x^2 - 6x + 9$

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$x^2 - 6x + 9$	$+$	$ $	$+$

Donc $S =]-\infty ; +\infty[$

b) $x^2 + 10x + 25 \leq 0$; $a = 1$; $b = 10$ et $c = 25 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 100 - 4(1) \cdot (25) = 0$

L'équation admet une seule solution dans $\mathbb{R}$: $x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-10}{2 \cdot (1)} = -5$

D'où le tableau de signe de : $x^2 + 10x + 25$

x	$-\infty$	-5	$+\infty$
$x^2 + 10x + 25$	$+$	$ $	$+$

Donc $S = \{-5\}$

c) $x^2 - x + \frac{1}{4} < 0$; $a = 1$; $b = -1$ et $c = \frac{1}{4} \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4(1) \cdot \left(\frac{1}{4}\right) = 0$

L'équation admet une seule solution dans $\mathbb{R}$: $x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{1}{2 \cdot (1)} = \frac{1}{2}$

D'où le tableau de signe de : $x^2 - x + \frac{1}{4}$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$x^2 - x + \frac{1}{4}$	$+$	$ $	$+$

Donc $S = \{ \} = \Phi$

d) $x^2 + x + 10 > 0$; $a = 1, b = 1$ et $c = 10 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4(1) \cdot (10) = -39 < 0$ donc l'équation n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$; D'où le tableau de signe de : $x^2 + x + 10$

x	$-\infty$	$+\infty$
$x^2 + x + 10$	$+$	

Donc $S =]-\infty ; +\infty[$

e) $-5x^2 + 8x - 7 \leq 0$; $a = -5$; $b = 8$ et $c = -7 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 64 - 4(-5)(-7) = -76 < 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
$-5x^2 + 8x - 7$	$-$	

Donc $S =]-\infty ; +\infty[$

III. Exercices

1. Exercices corrigés

Exercice 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $x^2 + x + 2 = 0$; b) $5x^2 - 21x - 20 = 0$; c) $-4x^2 + 4x - 1 = 0$;
 d) $5x^2 + 3x = 0$; e) $7x^2 - 4 = 0$; f) $9 + 3x^2 = 0$;

Solution

a) $x^2 + x + 2 = 0 \Rightarrow \Delta = 1 - 4 \times 1 \times 2 = -7 < 0 \Rightarrow S = \emptyset$

b) $5x^2 - 21x - 20 = 0 \Rightarrow \Delta = 21^2 - 4(5)(-20) = 441 + 400 = 841 = 29^2 \Rightarrow$

$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{21 + 29}{2 \cdot (5)} = 5$ et $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{21 - 29}{2 \cdot (5)} = \frac{-4}{5} \Rightarrow S = \left\{ 5; \frac{-4}{5} \right\}$

c) $-4x^2 + 4x - 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 4^2 - 4(-4)(-1) = 0 \Rightarrow x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{-8} = \frac{1}{2} \Rightarrow S = \left\{ \frac{1}{2} \right\}$

d) $5x^2 + 3x = 0 \Rightarrow x(5x + 3) = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $5x + 3 = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = \frac{-3}{5} \Rightarrow S = \left\{ 0; \frac{-3}{5} \right\}$

e) $7x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{4}{7} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{4}{7}} = \frac{2}{\sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{7}}{7}$ ou $x = -\frac{2\sqrt{7}}{7} \Rightarrow S = \left\{ -\frac{2\sqrt{7}}{7}; \frac{2\sqrt{7}}{7} \right\}$

f) $9 + 3x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = -3$ et cela est impossible donc $S = \emptyset$

Exercice 2

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes

a) $x^2 + 3x \leq 0$; b) $2x^2 - x - 1 \geq 0$; c) $-4x^2 + 3x + 1 > 0$
 d) $\frac{x+3}{x-1} \leq 0$; e) $x^2 + 2x + 1 > 0$; f) $9x^2 + 1 < 0$

Solution

a) $x^2 + 3x \leq 0$; $x^2 + 3x = 0 \Rightarrow x(x + 3) = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = -3$ d'où le tableau de signe

x	$-\infty$	-3	0	$+\infty$	
x^2+3x	+		-		+

Donc $S = [-3; 0]$

b) $2x^2 - x - 1 \geq 0 \Rightarrow \Delta = (-1)^2 - 4(2)(-1) = 9 \Rightarrow x_1 = \frac{1+3}{4} = 1$ et $x_2 = \frac{1-3}{4} = \frac{-1}{2}$ d'où le tableau de signe

x	$-\infty$	$\frac{-1}{2}$	1	$+\infty$	
$2x^2-x-1$	+		-		+

Donc $S = \left] -\infty; \frac{-1}{2} \right] \cup [1; +\infty[$

$$c) -4x^2 + 3x + 1 > 0 \Rightarrow \Delta = (3)^2 - 4(-4)(1) = 25 \Rightarrow x_1 = \frac{-3+5}{2 \times (-4)} = \frac{-1}{4} \text{ et } x_2 = \frac{-3-5}{2 \times (-4)} = 1$$

d'où le tableau de signe

x	$-\infty$	$\frac{-1}{4}$	1	$+\infty$
$-4x^2 + 3x + 1$	-	o	o	-

$$\text{Donc } S = \left] \frac{-1}{4} ; 1 \right[$$

$$d) \frac{x+3}{x-1} \leq 0 ; x+3=0 \Rightarrow x=-3 ; x-1=0 \Rightarrow x=1 \text{ d'où le tableau de signe}$$

x	$-\infty$	-3	1	$+\infty$
$x+3$	-	o	+	+
$x-1$	-	-	o	+
$\frac{x+3}{x-1}$	+	o	-	+

$$\text{Donc } S = [-3 ; 1[$$

$$e) x^2 + 2x + 1 > 0 \Rightarrow \Delta = (2)^2 - 4(1)(1) = 0 \Rightarrow x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{2} = -1$$

d'où le tableau de signe

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$x^2 + 2x + 1$	+	o	+

$$\text{Donc } S =]-\infty ; -1[\cup]-1 ; +\infty[$$

$$f) 9x^2 + 1 < 0 ; 9x^2 + 1 = 0 \Rightarrow 9x^2 = -1 \Rightarrow 9x^2 + 1 \text{ n'a pas de racine, d'où le tableau de signe}$$

x	$-\infty$	$+\infty$
$9x^2 + 1$	+	+

$$\text{Donc } S = \Phi$$

Exercice 3

Résoudre les équations et les inéquations suivantes

$$a) -5x^2 + 8x = 0 ; b) 2x^2 - 32 = 0 ; c) x^2 + 8 = 0 ; d) -x^2 + 8x - 12 \geq 0 ;$$

$$e) x^2 + x - 6 < 0 ; f) -x^3 + x^2 + 12x = 0 ; g) \frac{x^2 - 1}{2x - 4} = 4 ; h) \frac{2x^2 - 1}{x - 1} = \frac{3x + 8}{2}$$

Solution

$$a) -5x^2 + 8x = 0 \Rightarrow x(-5x + 8) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } -5x + 8 = 0 \Rightarrow S = \left\{ 0 ; \frac{8}{5} \right\}$$

$$b) 2x^2 - 32 = 0 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = 4 \text{ ou } x = -4 \Rightarrow S = \{4 ; -4\}$$

$$c) x^2 + 8 = 0 \Rightarrow x^2 = -8 \Rightarrow S = \Phi$$

$$d) -x^2 + 8x - 12 \geq 0 \Rightarrow \Delta = 64 - 4 \times (-1) \times (-12) = 16 \Rightarrow x_1 = \frac{-8 + \sqrt{16}}{2 \cdot (-1)} = 2 \text{ et } x_2 = \frac{-8 - \sqrt{16}}{2 \cdot (-1)} = 6$$

D'où le tableau de signe

x	$-\infty$	2	6	$+\infty$
$-x^2 + 8x - 12$		-	+	-

Donc $S = [2 ; 6]$

$$e) x^2 + x - 6 < 0 \Rightarrow \Delta = 1 - 4 \times 1 \times (-6) = 25 \Rightarrow x_1 = \frac{-1 + \sqrt{25}}{2 \cdot (1)} = 2 \text{ et } x_2 = \frac{-1 - \sqrt{25}}{2 \cdot (1)} = -3$$

D'où le tableau de signe

x	$-\infty$	-3	2	$+\infty$
$x^2 + x - 6$		+	-	+

Donc $S =]-3 ; 2[$

$$f) -x^3 + x^2 + 12x = 0 \Rightarrow x(-x^2 + x + 12) \Rightarrow x = 0 \text{ ou } -x^2 + x + 12 = 0 \Rightarrow \Delta = 1 - 4 \times (-1) \times 12 = 49$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{-1 + \sqrt{49}}{2 \cdot (-1)} = -3 \text{ et } x_2 = \frac{-1 - \sqrt{49}}{2 \cdot (-1)} = 4 \Rightarrow S = \{-3 ; 0 ; 4\}$$

$$g) \frac{x^2 - 1}{2x - 4} = 4 \Rightarrow \begin{cases} 2x - 4 \neq 0 \\ x^2 - 1 = 8x - 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ x^2 - 8x + 15 = 0 \end{cases} ; \Delta = 64 - 4(1)(15) = 4 \Rightarrow$$

$$x_1 = \frac{8 + 2}{2 \cdot (1)} = 5 \neq 2 \text{ et } x_2 = \frac{8 - 2}{2 \cdot (1)} = 3 \neq 2 \Rightarrow S = \{3 ; 5\}$$

$$h) \frac{2x^2 - 1}{x - 1} = \frac{3x + 8}{2} \Rightarrow \begin{cases} 4x^2 - 2 = (3x + 8)(x - 1) \\ x - 1 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x^2 - 2 = 3x^2 + 5x - 8 \\ x \neq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 5x + 6 = 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \Delta = 25 - 24 = 1 \Rightarrow x_1 = \frac{5 + \sqrt{1}}{2 \cdot (1)} = 3 \neq 1 \text{ et } x_2 = \frac{5 - \sqrt{1}}{2 \cdot (1)} = 2 \neq 1 \Rightarrow S = \{3 ; 2\}$$

Exercice 4

Trouver deux entiers relatifs consécutifs dont le produit donne 182.

Solution

Soit x , le plus petit de ces deux entiers relatifs

$$(x+1) \times x = 182 \Rightarrow x^2 + x = 182 \Rightarrow x^2 + x - 182 = 0 \Rightarrow a = 1, b = 1 \text{ et } c = -182 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac =$$

$$1 - 4(1)(-182) = 729 = 27^2 \Rightarrow x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 + 27}{2 \cdot (1)} = 13 \text{ et } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 - 27}{2 \cdot (1)} = -14$$

Donc les deux entiers sont 13 et 14 ou -13 et -14.

Exercice 5

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes

$$a) x^2 - 6x + 5 = 0 \quad ; \quad b) 2x^2 - 10x + 12 = 0 \quad ; \quad c) x^2 - 7x + 8 = 0 \quad ; \quad d) 5x^2 + 13x + 6 = 0$$

Solution

a) $x^2 - 6x + 5 = 0$; $a = 1$; $b = -6$; $c = 5$ on a $a + b + c = 0 \Rightarrow S = \{1; 5\}$

b) $2x^2 - 10x + 12 = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 100 - 4(2)(12) = 4 > 0 \Rightarrow$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{10 + \sqrt{4}}{2(2)} = 3 \text{ et } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{10 - \sqrt{4}}{2(2)} = 2 \text{ donc } S = \{2; 3\}$$

c) $x^2 - 7x + 8 = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 49 - 4(1)(8) = 17 > 0 \Rightarrow$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{7 + \sqrt{17}}{2} \text{ et } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{7 - \sqrt{17}}{2} \text{ donc } S = \left\{ \frac{7 - \sqrt{17}}{2}; \frac{7 + \sqrt{17}}{2} \right\}$$

d) $5x^2 + 13x + 6 = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 169 - 4(5)(6) = 49 > 0$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-13 + \sqrt{49}}{2(5)} = \frac{-3}{5} \text{ et } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-13 - \sqrt{49}}{2(5)} = -2 \text{ donc } S = \left\{ -2; \frac{-3}{5} \right\}$$

Exercice 6

1) Etudier le signe de :

a) $x^2 + 3x - 4$; b) $-5x^2 + 2x + 7$; c) $x^2 + 4x + 4$; d) $5x^2 + 2x + 4$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes

a) $x^2 + 3x - 4 \geq 0$; b) $-5x^2 + 2x + 7 > 0$; c) $x^2 + 4x + 4 < 0$; d) $5x^2 + 2x + 4 \leq 0$

Solution

1) L'étude du signe

a) $x^2 + 3x - 4$; $a = 1$; $b = 3$; $c = -4$ on a $a + b + c = 0 \Rightarrow x_1 = 1$; $x_2 = -4$

d'où le tableau de signe

x	$-\infty$	-4	1	$+\infty$	
x^2+3x-4	+	$\circ$	-	$\circ$	+

b) $-5x^2 + 2x + 7$; $a = -5$; $b = 2$; $c = 7$ on a $a - b + c = 0 \Rightarrow x_1 = -1$; $x_2 = \frac{7}{5}$ d'où le tableau de signe

x	$-\infty$	-1	$\frac{7}{5}$	$+\infty$	
$-5x^2+2x+7$	$-$	$\circ$	$+$	$\circ$	$-$

c) $x^2 + 4x + 4 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 16 - 4(1)(4) = 0$ $x_0 = \frac{-4}{2} = -2$

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$x^2 + 4x + 4$	+	○	+

d) $5x^2 + 2x + 4 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4(5)(4) = -76 < 0$ d'où le tableau de signe

x	$-\infty$	$+\infty$
$5x^2 + 2x + 4$	+	+

2) Résolvons dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes

a) $x^2 + 3x - 4 \geq 0$; d'après le tableau de signe de la question 1)a) on a $S =]-\infty; -4] \cup [1; +\infty[$;

b) $-5x^2 + 2x + 7 > 0$; d'après le tableau de signe de la question 1)b) on a $S = \left] -1; \frac{7}{5} \right[$;

c) $x^2 + 4x + 4 < 0$; d'après le tableau de signe de la question 1)c) on a $S = \Phi$;

d) $5x^2 + 2x + 4 \leq 0$ d'après le tableau de signe de la question 1)d) on a $S = \Phi$

Exercice 7

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes

a) $x^2 - 14x + 49 \leq 0$; b) $2x^2 + 43x - 22 \leq 0$; c) $x^2 - x + 3 \geq 0$

Solution

a) $x^2 - 14x + 49 \leq 0$; $a = 1$; $b = -14$ et $c = 49 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 196 - 4 \times (1) \times (49) = 0$;

L'équation admet une seule solution dans $\mathbb{R}$: $x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{14}{2 \cdot (1)} = 7$

D'où le tableau de signe de : $x^2 - 14x + 49$

x	$-\infty$	7	$+\infty$
$x^2 - 14x + 49$	$+$	0	$+$

Donc $S = \{7\}$

b) $2x^2 + 43x - 22 \leq 0$; $a = 2$; $b = 43$ et $c = -22 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 1849 - 4 \times (2) \times (-22) = 2025 = 45^2$

$x_1 = \frac{-43 + 45}{4} = \frac{1}{2}$; $x_2 = \frac{-43 - 45}{4} = -22$; D'où le tableau de signe :

x	$-\infty$	-22	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$2x^2 + 43x - 22$	$+$	0	$-$	$+$

Donc $S = \left[-22; \frac{1}{2} \right]$

c) $x^2 - x + 3 \geq 0$; $a = 1$; $b = -1$ et $c = 3 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4(1)(3) = -11 < 0$

D'où le tableau de signe de : $x^2 - x + 3$

x	$-\infty$	$+\infty$
$x^2 - x + 3$	$+$	$+$

Donc $S = \mathbb{R}$

Exercice 8

Un groupe d'élèves a besoin de partager 2700 MRU pour organiser une fête de fin d'année.

Ils décident de se cotiser. À la dernière minute, 3 de ces élèves décident de ne pas participer, augmentant la part de chacun des autres de 30 MRU. Combien d'élèves étaient dans le groupe initial ?

Solution

Soit x le nombre d'élèves et y la part de chacun

$$xy = 2700 \text{ et } (x-3)(y+30) = 2700 \Rightarrow (x-3)(xy+30x) = 2700x \Rightarrow (x-3)(2700+30x) = 2700x \\ \Rightarrow (x-3)(90+x) = 90x \Rightarrow x^2 - 3x - 270 = 0 \Rightarrow \Delta = 9 + 1080 = 1089 = 33^2$$

$$x_1 = \frac{3+33}{2} = 18 \text{ et } x_2 = \frac{3-33}{2} = -15 \text{ (rejetée)}$$

Donc le nombre initial d'élèves est 18 dont chacun devait donner 150 MRU ($150 \times 18 = 2700$).

Après le désistement de 3 élèves, il reste 15 élèves dont chacun cotise 180.

Exercice 9

On veut doubler l'aire d'un terrain sous forme d'un rectangle de dimensions 24.5m et 16m de sorte qu'il devienne sous forme d'un carré.

De combien doit-on augmenter la longueur et la largeur de ce terrain rectangulaire ?

Solution

Soit x le côté du carré. L'aire initiale est : $24,5 \times 16 = 392m^2$

Le double de l'aire initiale : $392 \times 2 = 784m^2$

L'aire du carré est $784m^2$

$$\Rightarrow x^2 = 784 \Rightarrow x = 28 \text{ accepté ou } x = -28 \text{ réjeté et } 28 = 24,5 + 3,5 \text{ et } 28 = 16 + 12$$

On augmente la longueur de 3,5m et la largeur de 12m

Exercice 10

Trouver deux nombres réels dont la somme est 30 et le produit 221

Solution

Soient α et β deux nombres alors on a : $\alpha + \beta = 30$ et $\alpha\beta = 221$ donc α et β sont les solutions de l'équation:

$$x^2 - 30x + 221 = 0 ; a = 1 ; b = -30 \text{ et } c = 221 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 900 - 4(1)(221) = 16$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{30+4}{2} = 17 ; x_2 = \frac{30-4}{2} = 13 \text{ donc les deux nombres cherchés sont 13 et 17.}$$

1. Exercices non corrigés

Exercice 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes

$$a) x^2 + 6x = 0 ; b) -2x^2 - 3 = 0 ; c) x^2 - 5x - 6 = 0 ; d) -x^2 + 5x - 6 = 0 ;$$

$$e) 9x^2 + x - \frac{7}{4} = 0 ; f) x^2 + 6x - 55 = 0 ; g) \frac{-x^2 - x + 31}{x-8} = 2 ; h) \frac{5x^2 - 2x - 3}{x-1} = \frac{3x+8}{2}$$

Exercice 2

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes

$$a) x^2 + 6x > 0 ; b) -2x^2 - 3 \leq 0 ; c) x^2 - 5x - 6 \leq 0 ; d) -x^2 + 5x - 6 \geq 0 ;$$

$$e) 9x^2 + x - \frac{7}{4} < 0 ; f) x^2 + 6x - 55 < 0 ; g) \frac{-x^2 - x + 31}{x-8} \geq 2 ; h) \frac{5x^2 - 2x - 3}{x-1} > \frac{3x+8}{2}$$

Exercice 3

Trouver trois entiers naturels consécutifs dont la somme des carrés vaut 509.

Exercice 4

Un éleveur possède un certain nombre de chèvres.

Son enfant qui fait le lycée remarque que le carré du nombre de têtes est égal au triple du nombre de pattes plus le nombre de têtes. Quel est le nombre de chèvres ?

Exercice 5

1) Etudier le signe de :

a) $3x^2 + 5x - 8$; b) $-5x^2 + 2x$; c) $2x^2 + 4x - 30$; d) $x^2 + 2x + 4$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes

a) $3x^2 + 5x \geq 8$; b) $-5x^2 \leq 2x$; c) $2x^2 + 4x - 30 > 0$; d) $x^2 + 2x + 4 < 0$

Exercice 6

Soit l'équation : $x^2 - x - 1 = 0$ (E)

a) Vérifier que $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est une solution de (E)

b) En déduire la deuxième solution (E) sans calculer Δ

c) Retrouver les solutions de (E) en utilisant Δ

Exercice 7

Un terrain rectangulaire de dimensions $7m$ et $4m$.

Quelle sont les valeurs de x dans l'intervalle $[0;7]$ que l'on doit ajouter à la largeur et retrancher de la longueur de ce terrain de sorte la surface dépasse $18m^2$

Exercice 8

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes

a) $(2x+5)(x-4)=0$; b) $(x^2-4)(2x-7)=0$; c) $\frac{5x-6}{-x+2}=0$; d) $\frac{5x-6}{-x^2+2x+12}=0$
e) $\frac{x^2+x+6}{-x^2+2x+12}=0$; f) $x-1+\frac{2}{x-3}=6$; g) $x^2+2+\frac{x^3-3}{x-3}=4$; h) $\frac{5x^2-2x-3}{x-1}=\frac{7x+12}{2}$

Exercice 9

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes

a) $(2x+5)(x-4)>0$; b) $(x^2-4)(2x-7)\leq 0$; c) $\frac{5x-6}{-x+2}>0$; d) $\frac{5x-6}{-x^2+2x+12}\geq 0$
e) $\frac{x^2+x+6}{-x^2+2x+12}\geq 0$; f) $x-1+\frac{2}{x-3}\geq 6$; g) $x^2+2+\frac{x^3-3}{x-3}<4$; h) $\frac{5x^2-2x-3}{x-1}\leq \frac{7x+12}{2}$

Exercice 10

Soit l'équation : $3x^2 + 7x + 3 = 0$ (E)

a) Sans résoudre l'équation (E), montrer qu'elle admet 2 solutions inverses.

b) Résoudre l'équation (E) et vérifier que les solutions sont bien inverses.

Chapitre 2

Généralités sur les fonctions

I. Limites de fonctions

1. Rappel

a. Classification

- $f : x \mapsto ax$: C'est une fonction linéaire dont la représentation graphique est une droite qui passe par l'origine (polynôme de degré 1)
- $g : x \mapsto ax + b$: C'est une fonction affine (polynôme de degré 1) dont la représentation graphique est une droite qui ne passe pas par l'origine dans le cas où $b \neq 0$
- $h : x \mapsto ax^2 + bx + c$: C'est une fonction polynôme de degré 2 ($a \neq 0$)
- $k : x \mapsto a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_0 + c$ ($a_n \neq 0$) : (cas général)
Est une fonction polynôme de degré n
- $u : x \mapsto \frac{p(x)}{q(x)}$: où p et q sont deux polynômes, u une fonction rationnelle

b. Domaine de définition d'une fonction

Le domaine de définition d'une fonction f est l'ensemble des réels ayant une image par f (chaque élément a une image unique) et on le note D_f , ce qui signifie :

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / f(x) \text{ existe}\}$$

Remarque

Pour déterminer le domaine d'une fonction on utilise les règles du tableau suivant

Les polynômes sont définis sur $\mathbb{R}$	La fonction $\sqrt{u(x)}$ est définie lorsque $u(x)$ existe et positive	La fonction $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ est définie lorsque $u(x)$ et $v(x)$ existent et $v(x) \neq 0$
Si l'expression de la fonction provient d'une situation, le domaine peut changer selon le contexte de la situation		

Exemple :

Donner le domaine de définition de f dans les cas :

a) $f(x) = x^2 - 4x + 3$

b) $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$

c) $f(x) = \sqrt{x+1}$

d) $ABCD$ un rectangle de dimensions $AB = 7$ et $AD = 4$.

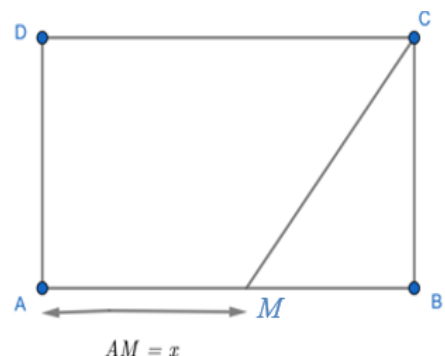
M est un point de $[AB]$ tel que $AM = x$, ($M \neq A$)

$f(x) = \text{Aire}(AMCD)$

Solution :

a) $f(x) = x^2 - 4x + 3$ puisque f est un polynôme alors :

$D_f = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$



b) $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ est définie si $x-1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$ donc $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\} =]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$

c) $f(x) = \sqrt{x+1}$ est définie si : $x+1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1 \Rightarrow D_f = [-1; +\infty[$

d) ABCD un rectangle de dimensions $AB = 7$ et $AD = 4$.

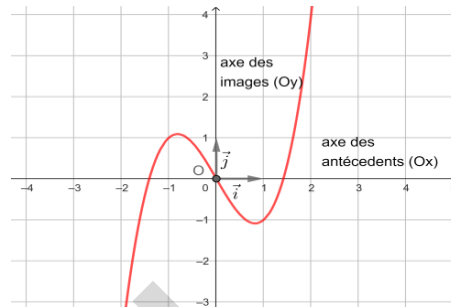
L'aire du trapèze est $f(x) = \frac{(x+7) \times 4}{2} = 2x+14$

M étant un point de $[AB]$ tel que $AM = x \Rightarrow 0 < x \leq 7$ donc le domaine est l'intervalle $]0; 7]$

bien que l'expression de f suggère que $D_f = \mathbb{R}$

c. Courbe d'une fonction :

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, la courbe représentative ou graphique de la fonction f est l'ensemble des points $M(x; y)$ tels que : $x \in D_f$ et $y = f(x)$



Exemple

On considère la fonction : $f(x) = \frac{x^2 - x + 2}{x - 4}$

Quels sont parmi les points $A(0; \frac{-1}{2})$; $B(-1; \frac{4}{5})$; $C(2; -2)$ et $D(4; -2)$

ceux qui appartiennent à la courbe de f .

Solution

□ $f(0) = \frac{0^2 - 0 + 2}{0 - 4} = \frac{-1}{2}$ donc $A(0; \frac{-1}{2})$ est un point de la courbe de f .

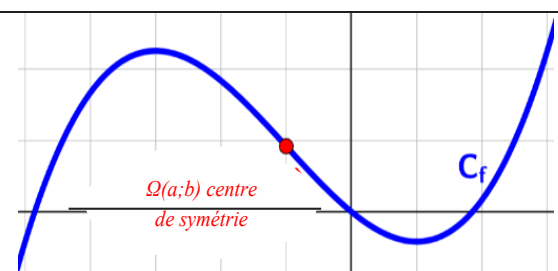
□ $f(-1) = \frac{(-1)^2 - 1 + 2}{-1 - 4} = \frac{-4}{5}$ donc $B(-1; \frac{4}{5})$ n'est pas un point de la courbe de f .

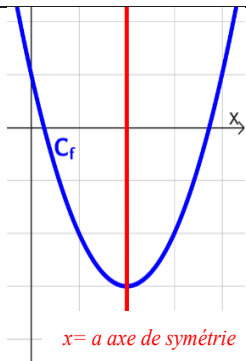
□ $f(2) = \frac{2^2 - 2 + 2}{2 - 4} = -2$ donc $C(2; -2)$ est un point de la courbe de f .

□ $D_f = \mathbb{R} \setminus \{4\} =]-\infty; 4[\cup]4; +\infty[\Rightarrow 4 \notin D_f \Rightarrow D(4; -2)$ n'est pas un point de la courbe de f

Remarque :

Lors de la représentation graphique d'une fonction, nous pouvons parfois rencontrer des éléments de symétrie, tels que :

Élément de symétrie	Définition	Interprétation graphique
Centre de symétrie	Le point $\Omega(a; b)$ est un centre de symétrie pour la courbe de la fonction f si $\begin{cases} D_f \text{ symétrique par rapport à } a \\ \forall x \in D_f, f(2a - x) + f(x) = 2b \end{cases}$	

Axe de symétrie	La droite (D) d'équation $x = a$ est un axe de symétrie du graphe de la fonction f si : $\begin{cases} D_f \text{ symétrique par rapport à } a \\ \forall x \in D_f, f(2a-x) = f(x) \end{cases}$	
-----------------	--	---

Exemple :

1) Montrer que la droite (D) d'équation $x = -1$ est un axe de symétrie pour le graphique de la fonction $f(x) = x^2 + 2x + 1$.

2) Montrer que le point $\Omega(1,2)$ est un centre de symétrie pour le graphique de la fonction

$$g(x) = \frac{2x+3}{x-1}$$

Réponse :

1) $f(x) = x^2 + 2x + 1$, un polynôme, donc $D_f = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$

D_f est symétrique par rapport à -1 .

La droite (D) : $x = -1$ est un axe de symétrie si : $f(-2-x) = f(x)$

$$\text{On a : } f(-2-x) = (-2-x)^2 + 2(-2-x) + 1 = 4 + 4x + x^2 - 4 - 2x + 1 = x^2 + 2x + 1 = f(x)$$

Donc la droite (D) : $x = -1$ est un axe de symétrie pour la courbe de f

2) $g(x) = \frac{2x+3}{x-1}$ est une fonction rationnelle : $D_f =]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$ (symétrique par rapport à 1)

Le point $\Omega(1;2)$ est un centre de symétrie si : $g(2-x) + g(x) = 4$

On a :

$$g(2-x) + g(x) = \frac{2(2-x)+3}{(2-x)-1} + \frac{2x+3}{x-1} = \frac{-2x+7}{-x+1} + \frac{2x+3}{x-1} = \frac{2x-7}{x-1} + \frac{2x+3}{x-1} = \frac{4x-4}{x-1} = 4$$

Donc le point $\Omega(1;2)$ est le centre de symétrie du graphe de la fonction g .

2. Limites usuelles

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty ; \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty ; \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty ; \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty ; \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty ; \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 ; \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0 ; \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty ; \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty ; \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{1}{x-a} = -\infty ; \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{1}{x-a} = +\infty$$

Règles :

- La limite d'un polynôme à l'infini est la limite du terme de plus haut degré.
- La limite d'une fonction rationnelle à l'infini est la limite du quotient des termes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur.

3. Opérations sur les limites

□ Le tableau suivant donne la limite de la somme de deux fonctions f et g .

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	$l \in \mathbb{R}$	$l \in \mathbb{R}$	$l \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	$l' \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)]$	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI	$-\infty$

□ Le tableau suivant donne la limite du produit de deux fonctions f et g .

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	$l \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	$l' \in \mathbb{R}$	$l' > 0$	$l' < 0$	$l' > 0$	$l' < 0$	∞	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \times g(x)]$	$l \times l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$

□ Le tableau suivant donne la limite du quotient de deux fonctions f et g .

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	$l \in \mathbb{R}$	$l \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	∞
$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	$l \neq 0$	∞	$l' > 0$	$l' < 0$	$l' > 0$	$l' < 0$	0	∞
$\lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]$	$\frac{l}{l'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI	FI

Remarque : Les formes : $+\infty - \infty$; $0 \times \infty$; $\frac{0}{0}$ et $\frac{\infty}{\infty}$ sont des formes indéterminées (FI)

Exemple

Déterminer les limites suivantes

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [5x^2 + 2x - 5] ; \lim_{x \rightarrow +\infty} [2x^2 - 3x + 4] ; \lim_{x \rightarrow -\infty} [-3x^2 + 4x + 7]$$

$$\lim_{x \rightarrow l^+} \left[\frac{x^2 + x + 1}{x - 1} \right] ; \lim_{x \rightarrow l^-} \left[\frac{x^2 + x + 1}{x - 1} \right] ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^2 + x + 1}{3x + 2} \right]$$

Réponse

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [5x^2 + 2x - 5] = \lim_{x \rightarrow +\infty} 5x^2 = +\infty ;$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [2x^2 - 3x + 4] = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [-3x^2 + 4x + 7] = \lim_{x \rightarrow -\infty} -3x^2 = -\infty ;$$

$$\lim_{x \rightarrow l^+} \left[\frac{x^2 + x + 1}{x - 1} \right] = \frac{3}{0^+} = +\infty$$

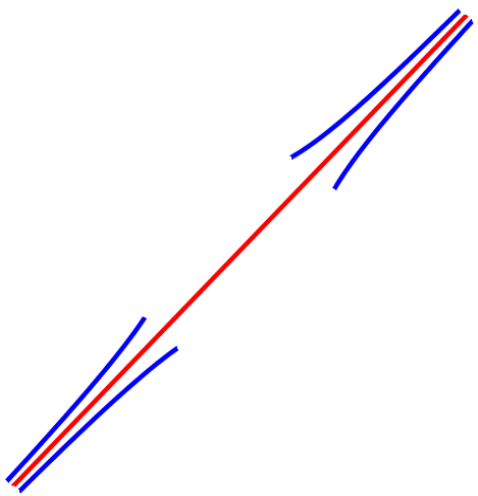
$$\lim_{x \rightarrow l^-} \left[\frac{x^2 + x + 1}{x - 1} \right] = \frac{3}{0^-} = -\infty ;$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^2 + x + 1}{3x + 2} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{3x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{3} = +\infty$$

4. Asymptotes et branches infinies

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ et C la courbe d'une fonction f .

a. Asymptotes

Nature de l'asymptote	Définition	Interprétation graphique
Verticales	La droite D d'équation : $x = a$ est une AV si $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty$	
Horizontale	La droite D d'équation : $y = b$ est une AH si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$ ou $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$	
Oblique	La droite D d'équation : $y = ax + b$ Est une AO si $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ ou $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$	

b) Branches paraboliques

Nature de la branche	Définition	Interprétation graphique
Branches paraboliques de direction (Ox)	$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \pm\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \pm\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 \end{cases}$	
Branches paraboliques de direction (Oy)	$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \pm\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty \end{cases}$ ou $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \pm\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty \end{cases}$	

Exemple 1

Dans chacun des cas suivants, calculer les limites de la fonction f aux bornes du domaine de définition en précisant les asymptotes et branches éventuelles de sa courbe dans un RON.

a) $f(x) = \frac{3x+1}{x-2}$

b) $f(x) = \sqrt{x+2}$

c) $f(x) = x^2 + 3x + 1$

Solution

a) $f(x) = \frac{3x+1}{x-2}$ est définie lorsque $x-2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 2 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\} =]-\infty; 2[\cup]2; +\infty[$

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{3x+1}{x-2} \right] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{3x}{x} \right] = 3$ donc la droite d'équation : $y=3$ est une asymptote

horizontale (AH) à la courbe de f en $+\infty$ et $-\infty$.

$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left[\frac{3x+1}{x-2} \right] = \frac{7}{0^-} = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left[\frac{3x+1}{x-2} \right] = \frac{7}{0^+} = +\infty$ donc la droite

d'équation : $x=2$ est une asymptote verticale (AV) à la courbe de f .

b) $f(x) = \sqrt{x+2}$ est définie lorsque $x+2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2 \Rightarrow D_f = [-2; +\infty[$

$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \sqrt{0} = 0$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{x+2}] = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{\sqrt{x+2}}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x+2}{x\sqrt{x+2}} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x+2}{x} \times \frac{1}{\sqrt{x+2}} \right] = 1 \times 0 = 0$$

Donc la courbe de f admet une branche parabolique de direction (Ox) en $+\infty$.

$$c) f(x) = x^2 + 3x + 1, f \text{ étant un polynôme, } D_f = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [x^2 + 3x + 1] = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{x^2 + 3x + 1}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{x^2}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} [x] = -\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [x^2 + 3x + 1] = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^2 + 3x + 1}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^2}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [x] = +\infty;$$

Donc la courbe de f possède une branche parabolique de direction (Oy) en $+\infty$ et une en $-\infty$.

Exemple 2

Montrer que la courbe de la fonction $f(x) = \frac{2x^2 - x + 3}{x - 1}$ admet une asymptote oblique

d'équation : $y = 2x + 1$

Solution

$$f(x) - (2x + 1) = \frac{2x^2 - x + 3}{x - 1} - (2x + 1) = \frac{2x^2 - x + 3 - (2x + 1)(x - 1)}{x - 1} \Rightarrow$$

$$f(x) - (2x + 1) = \frac{2x^2 - x + 3 - 2x^2 + 2x - x + 1}{x - 1} = \frac{4}{x - 1} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (2x + 1)] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{4}{x - 1} \right] = 0$$

Donc la courbe de f admet une asymptote oblique d'équation : $y = 2x + 1$ en $+\infty$ et $-\infty$.

II. Dérivation

1. Dérivées des fonctions usuelles

Fonction	Domaine de définition	Dérivée	Domaine de dérivabilité
a (constante)	$\mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$	0	$\mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$
x	$\mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$	1	$\mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$
x^2	$\mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$	$2x$	$\mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$
x^3	$\mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$	$3x^2$	$\mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$
x^n ($n \in \mathbb{N}$)	$\mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$	nx^{n-1}	$\mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$
$\sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+ = [0; +\infty[$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+^* =]0; +\infty[$
$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^* =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^* =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$

2. Opérations sur les dérivées

f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I

Fonctions	Dérivées
$a \times f$ (a constante)	$a \times f'$
$f + g$	$f' + g'$
$f \times g$	$f' \times g + f \times g'$
f^n ($n \in \mathbb{N}^*$)	$n \times f' \times f^{n-1}$
$\sqrt{f}$ ($f \geq 0$)	$\frac{f'}{2\sqrt{f}}$
$\frac{1}{f}$ ($f \neq 0$)	$\frac{-f'}{f^2}$
$\frac{f}{g}$ ($g \neq 0$)	$\frac{f' \times g - f \times g'}{g^2}$

Exemple

Compléter le tableau suivant :

Fonction	Dérivées	Fonction	Dérivées
$f(x) = -5x + 1$		$f(x) = -5x + 1$	$f'(x) = -5$
$g(x) = x^3 - 3x^2 + x + 3$		$g(x) = x^3 - 3x^2 + x + 3$	$g'(x) = 3x^2 - 6x + 1$
$h(x) = \frac{2x+5}{x+3}$		$h(x) = \frac{2x+5}{x+3}$	$h'(x) = \frac{1}{(x+3)^2}$
$u(x) = \frac{x^2-x+2}{x-2}$		$u(x) = \frac{x^2-x+2}{x-2}$	$u'(x) = \frac{x^2-4x}{(x-2)^2}$
$v(x) = \sqrt{2x+3}$		$v(x) = \sqrt{2x+3}$	$v'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+3}}$

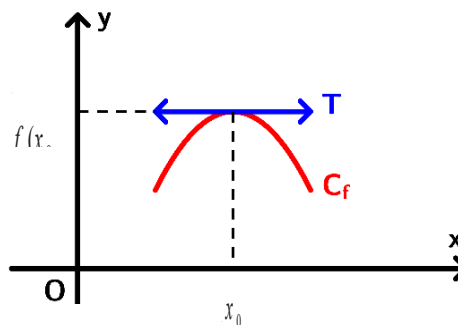
3. Variation d'une fonction

Soit f une fonction et I une partie de D_f ($I \subseteq D_f$)

- f est croissante sur I si $f'(x)$ est positive pour tout x de I ($\forall x \in I, f'(x) \geq 0$)
- f est décroissante sur I si $f'(x)$ est négative pour tout x de I ($\forall x \in I, f'(x) \leq 0$)
- f admet un extrémum $f(x_0)$ en x_0 sur I si $f'(x)$ s'annule et change son signe en x_0 .

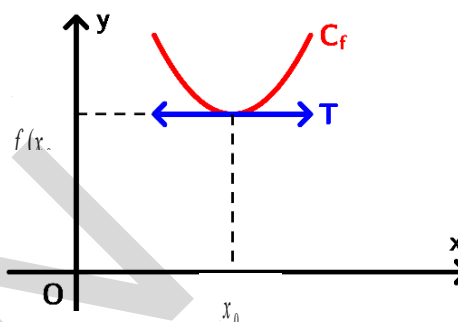
x	x_0
$f'(x)$	
$f(x)$	M

$f(x_0) = M$ est la valeur maximale sur I
 $\forall x \in I; f(x) \leq M$
 (M est un maximum relatif)
 Si $I = \mathbb{R}$ (M est un maximum absolu)



x	x_0
$f'(x)$	$-$ $+$
$f(x)$	m

$f(x_0) = m$ est la valeur minimale sur I
 $\forall x \in I; f(x) \geq m$
 (m est un minimum relatif)
 Si $I = \mathbb{R}$ (m est un minimum absolu)



4. Equation de la tangente

Si f est une fonction dérivable en x_0 alors la courbe de f admet une tangente T au point $(x_0; f(x_0))$ d'équation : $T : y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

Exemple

Soit la fonction définie par : $f(x) = x^2 - 4x + 7$

- 1) Déterminer le domaine de définition de f .
- 2) Calculer la dérivée de f et donner l'équation réduite de la tangente en $x_0 = 1$
- 3) Déterminer les extrémums de f .
- 4) Donner le tableau de variation de f .

Solution

- 1) On a : $f(x) = x^2 - 4x + 7$; $D_f = \mathbb{R}$ car f est un polynôme.
- 2) La dérivée de $f(x) = x^2 - 4x + 7$ est $f'(x) = 2x - 4 \Rightarrow f(1) = 4$ et $f'(1) = -2$

Donc l'équation réduite de la tangente en $x_0 = 1$ est

$$y = f'(1)(x - 1) + f(1) = -2(x - 1) + 4 = -2x + 6 \Rightarrow T : y = -2x + 6$$

- 3) Les extrémums : $f'(x) = 0 \Rightarrow 2x - 4 = 0 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2$ d'où le signe de $f'(x)$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

$\Rightarrow f'(x)$ s'annule en 2 et change son signe donc, elle admet en 2 un extremum $f(2) = 3$

4) Tableau de variation de f

On a $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^2 = +\infty$ d'où le tableau de variation de f .

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	3	$+\infty$

III. Etude des fonctions et leurs représentations graphiques

1. Plan d'étude d'une fonction:

Pour étudier une fonction, on procède comme suit :

- 1) Déterminer le domaine de définition
- 2) Étudier la parité (pour restreindre le champ d'étude)
- 3) Calculer les limites aux bornes du domaine de définition (pour en déduire les asymptotes verticales ou horizontales)
- 4) Trouver les asymptotes obliques ou les branches infinies éventuelles.
- 5) Calculer la dérivée
- 6) Étudier le signe de la dérivée
- 7) Déterminer les valeurs limites
- 8) Construire un tableau des variations de la fonction
- 9) Déterminer les équations des tangentes (si nécessaire)
- 10) Tracer les asymptotes, et la courbe de la fonction (thème d'étude)

Exemple

Etudier la fonction $f(x) = \frac{x+3}{x-2}$ en utilisant ce plan d'étude

Solution

Domaine de définition :

$$x - 2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 2 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\} \Rightarrow D_f =]-\infty; 2[\cup]2; +\infty[$$

Limites :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{x+3}{x-2} \right] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{x}{x} \right] = 1$$

Ainsi, la droite d'équation $y = 1$ est une asymptote horizontale à la courbe de la fonction f en $+\infty$ et $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left[\frac{x+3}{x-2} \right] = \frac{5}{0^-} = -\infty ; \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left[\frac{x+3}{x-2} \right] = \frac{5}{0^+} = +\infty$$

Ainsi, la droite d'équation $x = 2$ est une asymptote verticale à la courbe de la fonction f

Dérivée

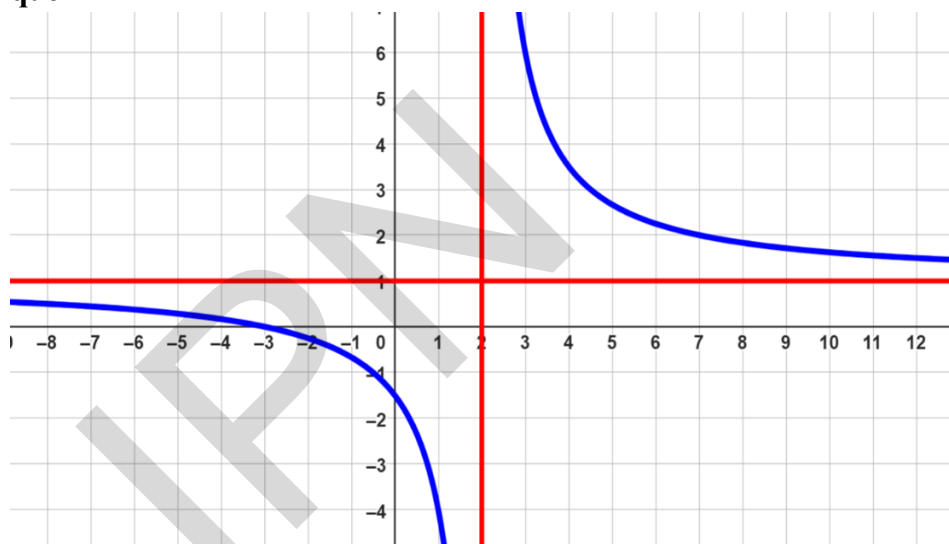
$$f'(x) = \left(\frac{x+3}{x-2} \right)' = \frac{(x+3)' \times (x-2) - (x+3) \times (x-2)'}{(x-2)^2} = \frac{1 \times (x-2) - 1 \times (x+3)}{(x-2)^2} \Rightarrow$$

$$f'(x) = \frac{x-2-x-3}{(x-2)^2} = \frac{-5}{(x-2)^2} < 0$$

Tableau de variation

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$-$
$f(x)$	1	$+\infty$	1

Représentation graphique



IV. Exercices

1. Exercices corrigés

Exercice 1

Déterminer les limites suivantes :

$$1. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 6x + 9}{x - 2}; \quad 2. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + 1}{x^2 - x + 1}; \quad 3. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 4x + 1}{2x^2 - 3x + 2}; \quad 4. \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 4};$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 4}; \quad 6. \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{(x - 2)^2}; \quad 7. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 6x + 8}; \quad 8. \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{(x - 1)^3}$$

Solution :

$$1. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 6x + 9}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty; \quad 2. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + 1}{x^2 - x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x} = \frac{2}{-\infty} = 0$$

$$3. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 4x + 1}{2x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{2x^2} = \frac{3}{2}; \quad 4. \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 4} = \frac{4^2 - 5 \times 4 + 6}{4 - 4} = \frac{2}{0^+} = +\infty;$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 4} = \frac{4^2 - 5 \times 4 + 6}{4 - 4} = \frac{2}{0^-} = -\infty ; \quad 6. \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{(x-2)^2} = \frac{1}{(2-2)^2} = \frac{1}{(0^-)^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 6x + 8} = \frac{4^2 - 7 \times 4 + 12}{4^2 - 6 \times 4 + 8} = \frac{0}{0} (F.I.); \quad x^2 - 7x + 12 \text{ et } x^2 - 6x + 8 \text{ ont pour facteur commun : } x - 4$$

$$x^2 - 7x + 12 = (x - 4)(x - 3) \text{ et } x^2 - 6x + 8 = (x - 4)(x - 2) \text{ donc}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 6x + 8} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(x-3)}{(x-4)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-3}{x-2} = \frac{4-3}{4-2} = \frac{1}{2}.$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{(x-1)^3} = \frac{1^3 - 1^2 - 1 + 1}{(1-1)^3} = \frac{0}{0} (F.I.); \quad \text{La division euclidienne de : } x^3 - x^2 - x + 1 \text{ par } x - 1 \text{ donne}$$

$$x^3 - x^2 - x + 1 = (x-1)(x^2 - 1) = (x-1)(x+1)(x-1) = (x-1)^2 (x+1)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{(x-1)^3} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)^2 (x+1)}{(x-1)^3} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+1}{x-1} = \frac{1+1}{1-1} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{(x-1)^3} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+1}{x-1} = \frac{1+1}{1^- - 1} = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

Exercice 2

Dans chacun des cas suivants, déterminer D_f et calculer les limites aux bornes puis déterminer les asymptotes et les branches infinies éventuelles

$$a) f(x) = \frac{3x+2}{x^2+1}; \quad b) f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 4; \quad c) f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}; \quad d) f(x) = \frac{x^3+1}{x^2+x+1}$$

Solution

$$a) f(x) = \frac{3x+2}{x^2+1}; \quad \text{comme } x^2+1 \neq 0 \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad D_f = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ est une AH en } +\infty \text{ et } -\infty.$$

$$b) f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 4; \quad f(x) \text{ étant un polynôme, } D_f = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty \Rightarrow (C_f) \text{ a BP de direction } (Oy) \text{ en } +\infty \text{ et } -\infty.$$

$$c) f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}; \quad \text{si } x^2-1 \neq 0 \text{ alors } x \neq 1 \text{ et } x \neq -1 \text{ donc } D_f =]-\infty; -1[\cup]-1; 1[\cup]1; +\infty[$$

$$\square \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1 \Rightarrow y = 1 \text{ est une AH en } +\infty \text{ et } -\infty.$$

$$\square \quad \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) \text{ et } \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) \text{ on a :}$$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
x^2-1	+	$\circ$	$\circ$	+

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2+1}{x^2-1} = \frac{2}{0^+} = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2+1}{x^2-1} = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = \frac{2}{0^-} = -\infty; \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

donc les droites : $x=1$ et $x=-1$ sont des AV pour (C_f) .

$$d) f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2 + x + 1}; \text{ pour : } x^2 + x + 1 = 0 \text{ on a : } \Delta = 1 - 4(1)(1) = -3 < 0 \text{ donc } D_f = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty; \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1; \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1 = a \text{ et on a aussi}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^3 + 1}{x^2 + x + 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 + 1 - x^3 - x^2 - x}{x^2 + x + 1} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^2}{x^2} = -1 = b \Rightarrow y = x - 1 \text{ est une AO en } +\infty \text{ et } -\infty.$$

Exercice 3

Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes :

$$f(x) = 3x^2 - 5x + 2; g(x) = \frac{3x + 2}{2x - 1}; h(x) = \frac{3x^2 - 2x + 3}{x + 4}; k(x) = \sqrt{x^2 + 1}$$

Solution

$$f(x) = 3x^2 - 5x + 2 \Rightarrow f'(x) = 6x - 5; g(x) = \frac{3x + 2}{2x - 1} \Rightarrow g'(x) = \frac{3(2x - 1) - 2(3x + 2)}{(2x - 1)^2} = \frac{-7}{(2x - 1)^2};$$

$$h(x) = \frac{3x^2 - 2x + 3}{x + 4} \Rightarrow h'(x) = \frac{(6x - 2)(x + 4) - 1(3x^2 - 2x + 3)}{(x + 4)^2} = \frac{6x^2 + 22x - 8 - 3x^2 + 2x - 3}{(x + 4)^2} =$$

$$\frac{3x^2 + 24x - 11}{(x + 4)^2}; k(x) = \sqrt{x^2 + 1} \Rightarrow k'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

Exercice 4

Choisir la bonne réponse

	Fonction	A	B	C
1	$f(x) = x^3 + x^2 - 4x - 2$	$f'(x) = 3x^2 + 2x - 2$	$f'(x) = 3x^2 + 2x - 4$	$f'(x) = 3x^2 + x^2 - 2x - 2$
2	$g(x) = \frac{3x + 2}{2x + 3}$	$g'(x) = \frac{5}{(2x + 3)^2}$	$g'(x) = \frac{3}{2x + 3}$	$g'(x) = \frac{3x + 2}{(2x + 3)^2}$
3	$h(x) = \frac{x^2 + 2x - 4}{x + 3}$	$h'(x) = \frac{2x + 2}{(x + 3)^2}$	$h'(x) = x^2 + 2x - 4$	$h'(x) = \frac{x^2 + 6x + 10}{(x + 3)^2}$
4	$k(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 3}$	$k'(x) = \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 2x - 3}}$	$k'(x) = \sqrt{2x + 2}$	$k'(x) = 2x + 2$

Solution

Questions	1	2	3	4
Réponses	B	A	C	A

Exercice 5

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{2x^2 + 3x + 1}{x - 1}$.

1. Déterminer $\mathcal{D}_f$, ses bornes, préciser les limites de f en ces bornes et en déduire les asymptotes éventuelles à $\mathcal{C}_f$.

2. Déterminer les réels a , b et c tels que : $f(x) = ax + b + \frac{c}{x - 1}$.

Puis en déduire que $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote oblique qu'on notera Δ .

3. Etudier les positions relatives de $\mathcal{C}_f$ et Δ .

Solution :

1. Déterminons $\mathcal{D}_f$, précisons les limites de f en ces bornes et déduisons-en les asymptotes éventuelles à $\mathcal{C}_f$:

$$f(x) = \frac{2x^2 + 3x + 1}{x - 1} \text{ existe si } x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$$

$$\text{Donc ; } \mathcal{D}_f = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 1\} \text{ d'où } \mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{1\} =]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$$

Les bornes de $\mathcal{D}_f$ sont : $-\infty$, 1^- , 1^+ , $+\infty$.

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 + 3x + 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 3x + 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \frac{6}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \frac{6}{0^+} = +\infty \end{cases} \Rightarrow x = 1 \text{ est une AV pour } (\mathcal{C}_f).$$

2. Déterminons les réels a , b et c tels que : $f(x) = ax + b + \frac{c}{x - 1}$

$$= \frac{(ax + b)(x - 1) + c}{x - 1} = \frac{ax^2 + (b - a)x + c - b}{x - 1} = \frac{2x^2 + 3x + 1}{x - 1}.$$

$$\text{Par identification, on a : } \begin{cases} a = 2 \\ b - a = 3 \Rightarrow a = 2, b = 5, c = 6 \Rightarrow f(x) = 2x + 5 + \frac{6}{x - 1} \\ c - b = 1 \end{cases}$$

Déduisons-en que $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote oblique qu'on notera Δ :

Soit Δ la droite d'équation : $y = 2x + 5$

Comme $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - y) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{6}{x-1} \right) = 0$ alors $\Delta : y = 2x + 5$ est une AO à (C_f) en $\pm\infty$.

3. Etudions les positions relatives de C_f et Δ .

Pour étudier les positions relatives de C_f et Δ , on étudie le signe de : $f(x) - y = \frac{6}{x-1}$

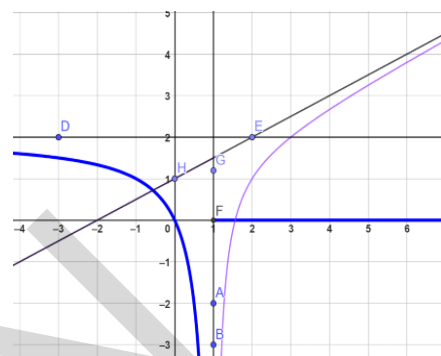
x	$-\infty$	1	$+\infty$
6	+		+
$x-1$	-	0	+
$\frac{6}{x-1}$	-		+
P.R	Δ/C_f		C_f/Δ

Exercice 6

La courbe ci-contre est celle d'une fonction f

Par lecture graphique

- Déterminer le domaine de définition D de f .
- Déterminer les limites de f aux bornes de D .
- Déterminer les équations des asymptotes de C_f .



Solution

a) La fonction est définie sur $D =]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$

b) Pour les limites aux bornes de D on a :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2 ; \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty ; \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$$

c) Déterminer les équations des asymptotes de la courbe de f

La courbe de f possède trois asymptotes : une AV : $x=1$; en $-\infty$ une AH : $y=2$

et en $+\infty$ une AO : $y=ax+b$ passant par $E(2;2)$ et $H(0;1)$ donc $a = \frac{2-1}{2-0} = \frac{1}{2}$ et

$b=1$ car la droite coupe (oy) en 1, donc $y = \frac{1}{2}x + 1$

Exercice 7

La courbe ci-contre est celle d'une fonction f

a) Déterminer la bonne réponse parmi les réponses proposées

	Question	A	B	C
1	La courbe de f	n'admet pas de branche	admet une BP svt(Ox)	Admet une BP svt(Oy)
2	$f(0) =$	1	2	0
3	$f(-2) =$	1	2	$f(1)$
4	$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} =$	$-\infty$	$+\infty$	1

Q	1	2	3	4
R	C	B	C	B



Exercice 8

Soit la fonction définie par $f(x) = x^3 - 3x - 2$ et soit (C) sa courbe représentative.

1) a) Déterminer le domaine de définition de f

b) Calculer les limites $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis interpréter.

2) a) Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f .

b) Déterminer l'intersection de (C) avec l'axe des ordonnées.

c) Construire (C)

Solution

1) a) $f(x) = x^3 - 3x - 2$ est un polynôme donc $D_f = \mathbb{R}$.

b) $f(x) = x^3 - 3x - 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$;

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$

Donc la courbe de f admet une BP direction (Oy) en $+\infty$ et $-\infty$.

2) a) Calculons $f'(x)$ et dressons le tableau de variation de f .

$$f(x) = x^3 - 3x - 2 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

Dressons le tableau de variation de f .

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	-	+
$f(x)$	$-\infty$	0	-4	$+\infty$

b) Déterminons l'intersection de (C) avec l'axe des ordonnées.

On a : $f(x) = x^3 - 3x - 2 \Rightarrow f(0) = -2 \Rightarrow$ La courbe coupe (Oy) en $(0; -2)$

c) Construisons (C)



Exercice 9

Soit la fonction définie par $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ et soit (C) sa courbe représentative.

- 1) a) Déterminer le domaine de définition de f et l'écrire sous forme de réunion d'intervalles.
- b) Calculer les limites : $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ en déduire que la courbe (C) admet deux asymptotes et donner leurs équations.

c) Déterminer les réels a et b tels que pour tout $x \in D_f$ on a : $f(x) = a + \frac{b}{x-1}$

d) Etudier la position relative de (C) et $\Delta: y = 2$.

2) a) Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f .

b) Déterminer l'intersection de (C) avec les axes de coordonnées.

c) Construire (C)

Solution

1)a) $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ existe si $x-1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$

Donc ; $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 1\}$ d'où, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\} =]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$

b) Les bornes de D_f sont : $-\infty, 1^-, 1^+, +\infty$.

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x} = 2 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x} = 2 \end{cases} \Rightarrow y = 2 \text{ est une AH en } +\infty \text{ et } -\infty.$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \frac{3}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \frac{3}{0^+} = +\infty \end{cases} \Rightarrow x = 1 \text{ est une AV pour } (C_f).$$

c) Déterminons les réels a et b tels que : $f(x) = a + \frac{b}{x-1}$

On utilise le tableau de Horner

	2	1
1		2
	2	3

Donc $a = 2$ et $b = 3$

$$f(x) = 2 + \frac{3}{x-1}$$

d) Etudions les positions relatives de (C) et Δ .

On a $f(x) = 2 + \frac{3}{x-1}$ et $f(x) - y = \frac{3}{x-1}$

Pour étudier les positions relatives de (C) et Δ , on étudie le signe de $f(x) - y = \frac{3}{x-1}$:

qui a le même signe que : $x-1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)-y$	-		+
PR	Δ / C_f		C_f / Δ

2) a) Calculer $f'(x)$ et dressons le tableau de variation de $f(x)$.

$$f(x) = 2 + \frac{3}{x-1} \Rightarrow f'(x) = -\frac{3}{(x-1)^2} < 0$$

d'où le tableau de variation de f

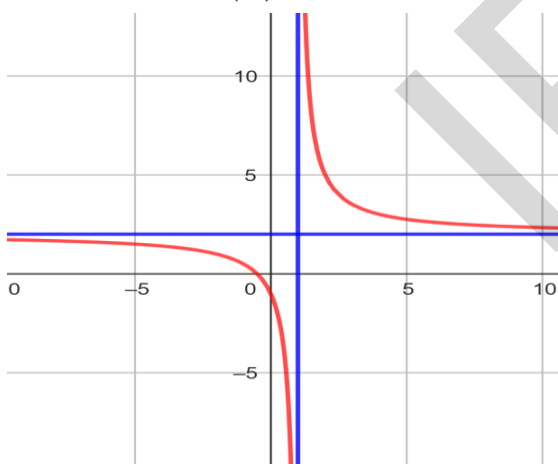
x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	-		-
$f(x)$	2 $\nearrow -\infty$	$+\infty \searrow 2$	2

b) Déterminons l'intersection de (C) avec les axes des coordonnées.

$$f(x) = \frac{2x+1}{x-1} \Rightarrow f(0) = -1 \Rightarrow \text{La courbe coupe } (Oy) \text{ au point } (0; -1)$$

$$f(x) = 0 \Rightarrow 2x+1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \text{La courbe coupe } (Ox) \text{ au point } \left(-\frac{1}{2}; 0\right).$$

c) Construisons (C)



Exercice 10

Soit la fonction définie par $f(x) = \frac{2x^2 - x + 1}{x-1}$ et soit (C) sa courbe représentative.

1) a) Déterminer le domaine de définition de f et l'écrire sous forme de réunion d'intervalles.

b) Calculer les limites: $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ en déduire que (C) admet une asymptote dont on donnera une équation.

c) Déterminer les réels a ; b et c tels que pour tout $x \in D_f$ on a: $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-1}$

d) Montrer que la droite $\Delta: y = 2x + 1$ est une asymptote oblique à (C) et étudier la position

relative de (C) et Δ .

2) a) Calculer $f'(x)$ étudier son signe.

b) Dresser le tableau de variation de f .

c) Déterminer l'intersection de (C) avec l'axe des ordonnées.

d) Construire (C)

Solution

$$a) f(x) = \frac{2x^2 - x + 1}{x - 1} \text{ existe si } x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$$

$$\text{Donc ; } \mathcal{D}_f = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 1\} \text{ d'où, } \mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{1\} =]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$$

b) Les bornes de $\mathcal{D}_f$ sont : $-\infty, 1^-, 1^+, +\infty$.

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - x + 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - x + 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x = +\infty \end{cases}$$

(Inexistence d'asymptote horizontale, éventualité d'asymptote oblique).

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \frac{2}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \frac{2}{0^+} = +\infty \end{cases} \Rightarrow x = 1 \text{ est une AV pour } (C_f).$$

c) Déterminons les réels a , b et c tels que : $f(x) = ax + b + \frac{c}{x - 1}$

On utilise le tableau de Horner

	2	-1	1
1		2	1
	2	1	2

Donc $a = 2$; $b = 1$ et $c = 2$

$$f(x) = 2x + 1 + \frac{2}{x - 1}$$

d) Montrons que la droite : $\Delta : y = 2x + 1$ est une asymptote oblique à (C) et étudions la position relative de (C) et Δ .

On a $f(x) = 2x + 1 + \frac{2}{x - 1}$ et $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2}{x - 1} = 0 \Rightarrow \Delta : y = 2x + 1$ est une AO à (C_f) en $\pm\infty$.

Pour étudier les positions relatives de C_f et Δ , on étudie le signe de : $f(x) - y = \frac{2}{x - 1}$

qui a le même signe que : $x - 1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x) - y$	-		+
PR	Δ / C_f		C_f / Δ

2) a) Calculer $f'(x)$ étudier son signe.

$$f(x) = 2x + 1 + \frac{2}{x-1} \Rightarrow f'(x) = 2 - \frac{2}{(x-1)^2} = \frac{2(x-1)^2 - 2}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 4x}{(x-1)^2},$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2x^2 - 4x \Rightarrow x = 0 \text{ ou } x = 2$$

d'où le tableau de signe de $f'(x)$ et le tableau de variation de f .

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	-1	$-\infty$	$+\infty$	7	$+\infty$

c) Déterminons l'intersection de (C) avec l'axe des ordonnées.

$$\text{On a : } f(x) = 2x + 1 + \frac{2}{x-1} \Rightarrow f(0) = -1 \Rightarrow \text{La courbe coupe } (Oy) \text{ au point } A(0; -1).$$

d) Construisons (C)



2. Exercices non corrigés

Exercice 1 :

Déterminer les limites suivantes :

$$\begin{aligned} 1. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 4x + 9}{x^2 - 2} ; \quad 2. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + 1}{x^2 - 2x + 1} ; \quad 3. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x^3 - 3x + 1}{x^2 - x + 2} ; \quad 4. \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{-5x + 6}{x^2 - 8x + 16} \\ 5. \lim_{x \rightarrow 6^-} \frac{3x^2 - 5x}{x - 6} ; \quad 6. \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 4}{(x - 2)^2} ; \quad 7. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 7x + 6}{x^2 + x - 2} ; \quad 8. \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{(x - 1)^3} \end{aligned}$$

Exercice 2

Dans chacun des cas suivants, déterminer D_f et calculer les limites aux bornes puis déterminer les asymptotes et les branches infinies éventuelles

$$a) f(x) = \frac{x^2 + 2x + 5}{2x^2 + 1} ; b) f(x) = -x^3 + 4x^2 - 3x + 2 ; c) f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - x - 2} ; d) f(x) = \frac{3x^3 + 1}{x^2 + 5x + 4}$$

Exercice 3

Déterminer les dérivées des fonctions suivantes :

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 2; \quad g(x) = \frac{3x^2 + 2}{x + 1}; \quad h(x) = \frac{-2x^2 - 5x + 7}{x - 4}; \quad k(x) = \sqrt{2x^2 + x + 3}$$

Exercice 4

Choisir la bonne réponse

	Fonction	A	B	C
1	$f(x) = x^4 + 5x^2 - 2x + 3$	$f'(x) = 3x^2 + 2x - 4$	$f'(x) = 3x^2 + x^2 - 2x - 2$	$f'(x) = 4x^3 + 10x - 2$
2	$g(x) = \frac{x+2}{3x-1}$	$g'(x) = \frac{5}{(3x-1)^2}$	$g'(x) = \frac{-7}{(3x-1)^2}$	$g'(x) = \frac{3x+2}{(3x-1)^2}$
3	$h(x) = \frac{x^2+3x-1}{x+3}$	$h'(x) = \frac{2x+2}{(x+3)^2}$	$h'(x) = \frac{x^2+6x+10}{(x+3)^2}$	$h'(x) = x^2 + 2x - 4$
4	$k(x) = \sqrt{2x^2 + x - 3}$	$k'(x) = \frac{4x+1}{2\sqrt{2x^2 + x - 3}}$	$k'(x) = \sqrt{4x+1}$	$k'(x) = \frac{4x-2}{2\sqrt{2x^2 + x - 3}}$

Exercice 5

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{2x^2 - 2x - 1}{x - 1}$.

1. Déterminer $\mathcal{D}_f$, ses bornes, préciser les limites de f en ces bornes et en déduire les asymptotes éventuelles à $\mathcal{C}_f$.

2. Déterminer les réels a , b et c tels que : $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-1}$.

puis en déduire que $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote oblique qu'on notera Δ .

3. Etudier les positions relatives de $\mathcal{C}_f$ et Δ .

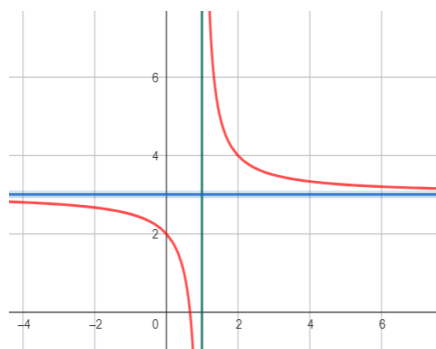
Exercice 6

La courbe ci-contre est celle d'une fonction f

a) Déterminer le domaine de définition D de f .

b) Déterminer graphiquement les limites de f aux bornes de D .

c) Déterminer les équations des asymptotes de la courbe de f .

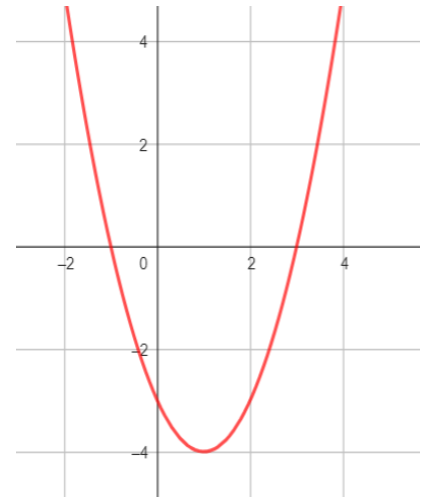


Exercice 7

La courbe ci-contre est celle d'une fonction f

a) Déterminer la bonne réponse parmi les réponses proposées dans le tableau suivant

	Question	A	B	C
1	La courbe de f	n'admet pas de branche	admet une BP svu (Ox)	Admet une BP svu (Oy)
2	$f(0) =$	-3	2	0
3	$f(-1) =$	1	2	$f(3)$
	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) =$	$-\infty$	$+\infty$	1
4	$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} =$	$+\infty$	$-\infty$	0



Exercice 8

Soit la fonction définie par $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 1$ et soit (C) sa courbe représentative.

- 1) a) Déterminer le domaine de définition de f
- b) Calculer les limites $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis interpréter.
- 2) a) Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f .
- b) Déterminer l'intersection de (C) avec l'axe des ordonnées.
- c) Construire (C)

Exercice 9

Soit la fonction définie par $f(x) = \frac{3x+1}{-x+2}$ et soit (C) sa courbe représentative.

- 1) a) Déterminer le domaine de définition de f et l'écrire sous forme de réunion d'intervalles.
- b) Calculer les limites : $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ en déduire que la courbe (C) admet deux asymptotes et donner leurs équations.
- c) Déterminer les réels a et b tels que pour tout $x \in D_f$ on a : $f(x) = a + \frac{b}{-x+2}$
- d) Etudier la position relative de (C) et $\Delta: y = -3$.
- 2) a) Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f .
- b) Déterminer l'intersection de (C) avec les axes de coordonnées.
- c) Construire (C)

Exercice 10

Soit la fonction définie par $f(x) = \frac{x^2 - x - 9}{x - 3}$ et soit (C) sa courbe représentative.

- 1) a) Déterminer le domaine de définition de f et l'écrire sous forme de réunion d'intervalles.
- b) Calculer les limites : $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ en déduire que (C) la courbe de f admet une asymptote dont on donnera une équation.

Chapitre 3

Fonctions logarithmes

I. Définitions et propriétés

1. Définition

Soit l'intervalle $I =]0 ; +\infty[$, la fonction notée $\ln$ définie et dérivable sur I dont la dérivée est la fonction : $x \rightarrow \frac{1}{x}$ et qui s'annule en 1 est appelée fonction logarithme népérien.

2. Conséquences et propriétés

x et y appartenant à $]0 ; +\infty[$

$\ln$ est définie sur $]0 ; +\infty[$	$(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad \forall x \in]0 ; +\infty[$	$\ln 1 = 0 ; \ln e = 1 (e \approx 2.7)$
$\ln x = \ln y \Leftrightarrow x = y$	$\ln x \geq \ln y \Leftrightarrow x \geq y$	$\ln x = y \Leftrightarrow x = e^y (y \in \mathbb{R})$
$\ln xy = \ln x + \ln y$	$\ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y$	$\ln x^r = r \ln x (r \in \mathbb{Q})$
$\ln \sqrt{x} = \frac{1}{2} \ln x$	$\ln \frac{1}{x} = -\ln x$	$\ln e^x = x (x \in \mathbb{R})$

3. Le domaine de définition

f est une fonction définie par	Domaine de définition de f
$f(x) = \ln(u(x))$	$D_f = \{x \in \mathbb{R} / u(x) \text{ existe et } u(x) > 0\}$
$f(x) = \ln[(u(x))^2]$	$D_f = \{x \in \mathbb{R} / u(x) \text{ existe et } u(x) \neq 0\}$
$f(x) = \ln u(x) $	$D_f = \{x \in \mathbb{R} / u(x) \text{ existe et } u(x) \neq 0\}$

II. Limites et Dérivées

1. Limites usuelles

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty ; \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0 ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln x} = +\infty$$

Exemple

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \ln(x-1) = -\infty ; \lim_{x \rightarrow 2^+} [(x-2) \ln(x-2)] = 0 ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x^2 + 3x) = +\infty ;$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \times \frac{x}{x-1} = 0 \times 1 = 0$$

2. Dérivées et variations de $\ln$:

a) Dérivées

$$\blacksquare (\ln x)' = \frac{1}{x} \quad \forall x \in]0 ; +\infty[$$

- $(\ln u(x))' = \frac{u'(x)}{u(x)} \quad (u(x) > 0)$
- $(\ln|u(x)|)' = \frac{u'(x)}{u(x)} \quad (u(x) \neq 0)$

Exemple

Compléter le tableau suivant :

$f(x)$	$\ln(2x+1)$	$\ln(x^2+2x)$	$x^2+\ln(2x)$	$\ln x+3 $	$\ln \frac{x-1}{3x+4}$
$f'(x)$					

Solution

$$\begin{aligned}
 (\ln(2x+1))' &= \frac{(2x+1)'}{2x+1} = \frac{2}{2x+1}; & (\ln(x^2+2x))' &= \frac{(x^2+2x)'}{x^2+2x} = \frac{2x+2}{x^2+2x} \\
 (x^2+\ln(2x))' &= 2x + \frac{(2x)'}{2x} = 2x + \frac{2}{2x} = 2x + \frac{1}{x} = \frac{2x^2+1}{x}; & (\ln|x+3|)' &= \frac{(x+3)'}{x+3} = \frac{1}{x+3}; \\
 (\ln \frac{x-1}{3x+4})' &= \frac{(\frac{x-1}{3x+4})'}{\frac{x-1}{3x+4}} = \frac{(x-1)'(3x+4) - (x-1)(3x+4)'}{(3x+4)^2} \times \frac{3x+4}{x-1} = \frac{7}{(3x+4)(x-1)}
 \end{aligned}$$

$f(x)$	$\ln(2x+1)$	$\ln(x^2+2x)$	$x^2+\ln(2x)$	$\ln x+3 $	$\ln \frac{x-1}{3x+4}$
$f'(x)$	$\frac{2}{2x+1}$	$\frac{2x+2}{x^2+2x}$	$\frac{2x^2+1}{x}$	$\frac{1}{x+3}$	$\frac{7}{(3x+4)(x-1)}$

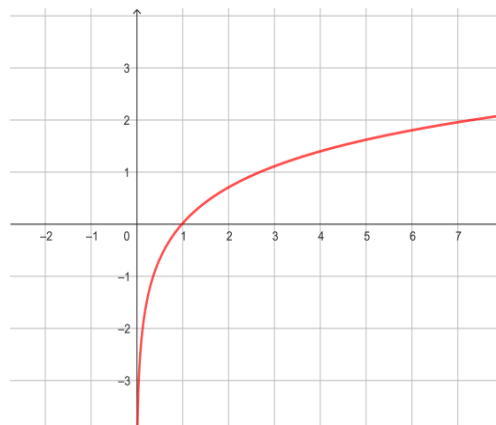
b) Variations de $\ln$

Soit $f(x) = \ln x$; f est définie sur $]0; +\infty[$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} =$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$, donc on a donc une asymptote verticale : $x = 0$ et une BP de direction (Ox) en $+\infty$.

$f'(x) = \frac{1}{x} > 0$ d'où le tableau de variation de f et sa courbe.

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$



III. Exercices

1. Exercices corrigés

Exercice 1 :

a) Exprimer en fonction de $\ln 2$ les nombres suivants : $A = \ln 8$; $B = \ln\left(\frac{1}{16}\right)$; $C = \frac{1}{2} \ln 16$

b) Exprimer en fonction de $\ln 2$ et $\ln 3$ les nombres suivants :

$$A = \ln 24 \quad ; \quad B = \ln 144 \quad ; \quad C = \ln\left(\frac{8}{9}\right)$$

c) Ecrire les nombres A et B à l'aide d'un seul logarithme :

$$A = 2\ln 3 + \ln 2 + \ln\left(\frac{1}{2}\right) \quad ; \quad B = \frac{1}{2} \ln 9 - 2\ln 3$$

Solution

$$a) A = \ln 8 = \ln(2^3) = 3\ln 2 \quad ; \quad B = \ln\left(\frac{1}{16}\right) = -\ln 16 = -\ln 2^4 = -4\ln 2 \quad .$$

$$C = \frac{1}{2} \ln 16 = \frac{1}{2} \ln 2^4 = \frac{1}{2} \times 4\ln 2 = 2\ln 2$$

$$b) A = \ln 24 = \ln(3 \times 8) = \ln 3 + \ln 8 = \ln 3 + \ln(2^3) = \ln 3 + 3\ln 2$$

$$B = \ln 144 = \ln 12^2 = 2\ln 12 = 2\ln(3 \times 4) = 2(\ln 3 + \ln 4) = 2(\ln 3 + 2\ln 2) = 2\ln 3 + 4\ln 2$$

$$C = \ln\left(\frac{8}{9}\right) = \ln 8 - \ln 9 = \ln 2^3 - \ln 3^2 = 3\ln 2 - 2\ln 3$$

$$c) A = 2\ln 3 + \ln 2 + \ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln 3^2 + \ln 2 - \ln 2 = \ln 9$$

$$B = \frac{1}{2} \ln 9 - 2\ln 3 = \ln \sqrt{9} - 2\ln 3 = \ln 3 - 2\ln 3 = -\ln 3 = \ln \frac{1}{3}$$

Exercice 2 :

Compléter le tableau suivant, à partir des arrondis : $\ln 2 \approx 0.7$ et $\ln 3 \approx 1.1$

a	2	3	4	6	8	9	27	72	216
$\ln a$									

Solution

On a $\ln 2 = 0.7$ et $\ln 3 = 1.1$ à 10^{-1} près

On calculi : $\ln(4) = 2\ln 2 = 2 \times 0.7 = 1.4$; $\ln 6 = \ln(2 \times 3) = \ln 2 + \ln 3 = 0.7 + 1.1 = 1.8$

$$\ln 8 = \ln 2^3 = 3\ln 2 = 3 \times 0.7 = 2.1 \quad ; \quad \ln 9 = \ln 3^2 = 2\ln 3 = 2 \times 1.1 = 2.2 \quad ; \quad \ln 27 = \ln(3^3) = 3\ln 3 = 3 \times 1.1 = 3.3 \quad .$$

$$\ln 72 = \ln(9 \times 8) = \ln 9 + \ln 8 = 2.2 + 2.1 = 4.3$$

$$\ln 216 = \ln(27 \times 8) = \ln 27 + \ln 8 = 3.3 + 2.1 = 5.4$$

D'où le tableau

a	2	3	4	6	8	9	27	72	216
$\ln a$	0.7	1.1	1.4	1.8	2.1	2.2	3.3	4.3	5.4

Exercice 3 :

Comparer x et y : a) $x = 3\ln 2$ et $y = 2\ln 3$; b) $x = \ln 5 - \ln 2$ et $y = \ln 12 - \ln 5$

Solution :

a) On a $x = 3\ln 2 = \ln 2^3 = \ln 8$; $y = 2\ln 3 = \ln 3^2 = \ln 9$. Puisque la fonction $\ln$ est strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$ et $8 < 9$ on aura $\ln 8 < \ln 9$ c'est-à-dire : $x < y$

b) On a : $x = \ln 5 - \ln 2 = \ln \frac{5}{2} = \ln(2.5)$; $y = \ln 12 - \ln 5 = \ln \frac{12}{5} = \ln(2.4)$

Puisque la fonction $\ln$ est strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$ et $2.4 < 2.5$ on aura : $y < x$

Exercice 4 :

En utilisant les propriétés de $\ln$ calculer :

$$A = \ln(e^2) ; B = \ln(e^3) ; C = \ln\left(\frac{1}{e^2}\right) ; D = \ln\sqrt{e} \text{ et } E = \ln(e\sqrt{e})$$

Solution

$$A = \ln(e^2) = 2\ln e = 2 \times 1 = 2 ; B = \ln(e^3) = 3\ln e = 3 \times 1 = 3$$

$$C = \ln\left(\frac{1}{e^2}\right) = -\ln(e^2) = -2\ln e = -2 ; D = \ln(\sqrt{e}) = \frac{1}{2}\ln e = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$$

$$E = \ln(e\sqrt{e}) = \ln e + \ln\sqrt{e} = 1 + \frac{1}{2}\ln e = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

Exercice 5 :

Le son se manifeste par des variations de pression de l'air. L'unité de mesure de la pression de l'air est le pascal.

La pression de l'air s'exerçant sur le tympan de l'oreille humaine qui perçoit un son dont le niveau se mesure en décibels. On note $p_0 = 2 \times 10^{-5}$ et pour une pression de p pascal s'exerçant

sur le tympan, avec $p \geq p_0$; le niveau sonore perçu est égal à $f(p) = \frac{20}{\ln(10)} \ln(50000p)$

a) Quel est le niveau sonore perçu pour une pression de 2 pascals ? 0,2 pascal ? 0,02 pascal ? Calculer $f(p_0)$.

b) À partir d'un niveau sonore de 120 décibels. On ressent une douleur.

Déterminer la pression p correspondant à ce niveau sonore.

Solution

$$a) \text{ On a : } f(p) = \frac{20}{\ln(10)} \ln(50000p)$$

On calcule

$$\blacksquare f(2) = \frac{20}{\ln(10)} \ln(50000 \times 2) = \frac{20}{\ln(10)} \ln(100000) = \frac{20}{\ln(10)} \ln(10^5) = \frac{20}{\ln(10)} 5 \ln(10) = 100$$

$$\blacksquare f(0.2) = \frac{20}{\ln(10)} \ln(50000 \times 0.2) = \frac{20}{\ln(10)} \ln(10000) = \frac{20}{\ln(10)} \ln(10^4) = \frac{20}{\ln(10)} 4 \ln(10) = 80$$

$$\blacksquare f(0.02) = \frac{20}{\ln(10)} \ln(50000 \times 0.02) = \frac{20}{\ln(10)} \ln(1000) = \frac{20}{\ln(10)} \ln(10^3) = \frac{20}{\ln(10)} 3 \ln(10) = 60$$

$$\blacksquare f(p_0) = \frac{20}{\ln(10)} \ln(50000 \times p_0) = \frac{20}{\ln(10)} \ln(50000 \times 2 \times 10^{-5}) = \frac{20}{\ln(10)} \ln(10^0) = \frac{20}{\ln(10)} \ln(1) = 0$$

b) On résout : $f(p) \geq 120 \Rightarrow$

$$f(p) \geq 120 \Rightarrow \frac{20}{\ln(10)} \ln(50000 p) \geq 120 \Rightarrow \ln(50000 p) \geq \frac{120 \ln(10)}{20}$$

$$\Rightarrow \ln(50000 p) \geq 6 \ln(10) \Rightarrow 50000 p \geq 10^6 \Rightarrow p \geq \frac{1000000}{50000} \Rightarrow p \geq 20$$

La pression correspondant au niveau sonore de 120 décibels est donc de 20 Pascals

Exercice 6 :

Préciser l'ensemble de définition puis résoudre les équations suivantes :

a) $\ln x = 2$; b) $\ln(2+5x) = \ln(x+6)$; c) $\ln(x-1) + \ln(x-3) = \ln 3$; d) $\frac{2(1+\ln x)}{x} = 0$

Solution

a) $\ln x = 2$ est définie sur $I =]0 ; +\infty[$; $\ln x = 2 \Rightarrow x = e^2 \in I \Rightarrow S = \{e^2\}$

b) $\ln(2+5x) = \ln(x+6)$ est définie si : $\begin{cases} 2+5x > 0 \\ x+6 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -\frac{2}{5} \\ x > -6 \end{cases} \Rightarrow x > -\frac{2}{5} \Rightarrow x \in J = \left] -\frac{2}{5} ; +\infty \right[;$

$\ln(2+5x) = \ln(x+6) \Rightarrow 2+5x = x+6 \Rightarrow 4x = 4 \Rightarrow x = 1 \in J \Rightarrow S = \{1\}$

c) $\ln(x-1) + \ln(x-3) = \ln 3$ est définie si $\begin{cases} x-1 > 0 \\ x-3 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x > 3 \end{cases} \Rightarrow x \in K =]3 ; +\infty[$

$\ln(x-1)(x-3) = \ln 3 \Rightarrow (x-1)(x-3) = 3 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 3 \Rightarrow x^2 - 4x = 0 \Rightarrow$

$x = 0 \notin K$ ou $x = 4 \in K \Rightarrow S = \{4\}$

d) $\frac{2(1+\ln x)}{x} = 0$ L'équation est définie si et seulement si : $x \in I =]0 ; +\infty[$

$\frac{2(1+\ln x)}{x} = 0 \Rightarrow 1 + \ln x = 0 \Rightarrow \ln x = -1 \Rightarrow x = e^{-1} = \frac{1}{e} \in I \Rightarrow S = \left\{ \frac{1}{e} \right\}$

Exercice 7 :

Préciser l'ensemble de définition puis résoudre les équations suivantes :

1) $(\ln x)^2 + \ln x - 6 = 0$; 2) $\ln(2x-5) = 1$; 3) $\ln \left| \frac{x-1}{2x-1} \right| = 0$; 4) $\ln \left(\frac{2x-1}{x-1} \right) = 0$

Solution

1) $(\ln x)^2 + \ln x - 6 = 0$ qui est définie sur $]0 ; +\infty[$

En posant : $X = \ln x$ on aura $X^2 + X - 6 = 0 \Rightarrow \Delta = 1 - 4(1)(-6) = 25 \Rightarrow$ les solutions

$$X_1 = \frac{-1+5}{2} = 2 ; X_2 = \frac{-1-5}{2} = -3 \Rightarrow \begin{cases} \ln x = 2 \\ \text{ou} \\ \ln x = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = e^2 > 0 \\ \text{ou} \\ x = e^{-3} > 0 \end{cases} \Rightarrow S = \{e^2 ; e^{-3}\}$$

2) $\ln(2x-5) = 1$ qui est définie sur $\left] \frac{5}{2} ; +\infty \right[; \ln(2x-5) = 1 \Rightarrow$

$$2x-5 = e \Rightarrow x = \frac{5+e}{2} > \frac{5}{2} \Rightarrow S = \left\{ \frac{5+e}{2} \right\}$$

3) $\ln \left| \frac{x-1}{2x-1} \right| = 0$ qui est définie sur $D = \left] -\infty ; \frac{1}{2} \right[\cup \left] \frac{1}{2} ; 1 \right[\cup 1 ; +\infty \right[$

$$\ln \left| \frac{x-1}{2x-1} \right| = 0 \Rightarrow \left| \frac{x-1}{2x-1} \right| = 1 \Rightarrow \begin{cases} \frac{x-1}{2x-1} = 1 \\ \text{ou} \\ \frac{x-1}{2x-1} = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-1 = x-1 \\ \text{ou} \\ 2x-1 = -x+1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=0 \in D \\ \text{ou } x = \frac{2}{3} \in D \end{cases} \Rightarrow S = \left\{ 0 ; \frac{2}{3} \right\}$$

4) $\ln \left(\frac{2x-1}{x-1} \right) = 0$ qui est définie sur $D' = \left] -\infty ; \frac{1}{2} \right[\cup 1 ; +\infty \right[$

$$\ln \left(\frac{2x-1}{x-1} \right) = 0 \Rightarrow \frac{2x-1}{x-1} = 1 \Rightarrow 2x-1 = x-1 \Rightarrow x=0 \in D' \Rightarrow S = \{0\}$$

Exercice 8 :

Préciser l'ensemble de définition puis résoudre les équations suivantes :

a. $\ln(x+1) = \ln(2x-3)$; b. $\ln \left(\frac{2x-4}{x-1} \right) = 0$

Solution

a) $\ln(x+1) = \ln(2x-3)$ qui est définie si $\begin{cases} x > -1 \\ x > \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow x \in I = \left] \frac{3}{2} ; +\infty \right[$

$$\ln(x+1) = \ln(2x-3) \Rightarrow x+1 = 2x-3 \Rightarrow x=4 \in I \Rightarrow S = \{4\}$$

b) $\ln \left(\frac{2x-4}{x-1} \right) = 0$ qui est définie si $\frac{2x-4}{x-1} > 0 \Rightarrow x \in J = \left] -\infty ; 1 \right[\cup 2 ; +\infty \right[$

$$\ln \left(\frac{2x-4}{x-1} \right) = 0 \Rightarrow \frac{2x-4}{x-1} = 1 \Rightarrow 2x-4 = x-1 \Rightarrow x=3 \in J \Rightarrow S = \{3\}$$

Exercice 9 :

Préciser l'ensemble de définition puis résoudre les inéquations suivantes :

1) $\ln(2+5x) \leq \ln(x+6)$; 2) $\ln(x-1) + \ln(x-3) < \ln 3$; 3) $\ln x \geq 2$

Solution

$$1) \ln(2+5x) \leq \ln(x+6) \text{ qui est définie si: } \begin{cases} 2+5x > 0 \\ x+6 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -\frac{2}{5} \\ x > -6 \end{cases} \Rightarrow x > -\frac{2}{5} \Rightarrow$$

$$x \in J = \left] -\frac{2}{5}; +\infty \right[; \ln(2+5x) \leq \ln(x+6) \Rightarrow \begin{cases} 2+5x \leq x+6 \\ x > -\frac{2}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x \leq 4 \\ x > -\frac{2}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq 1 \\ x > -\frac{2}{5} \end{cases} \Rightarrow -\frac{2}{5} < x \leq 1 \Rightarrow S = \left] -\frac{2}{5}; 1 \right]$$

$$2) \ln(x-1) + \ln(x-3) < \ln 3 \text{ qui est définie si } \begin{cases} x-1 > 0 \\ x-3 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x > 3 \end{cases} \Rightarrow x \in K =]3; +\infty[$$

$$\ln(x-1)(x-3) < \ln 3 \Rightarrow (x-1)(x-3) < 3 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 < 3 \Rightarrow x^2 - 4x < 0;$$

$$\begin{cases} x > 3 \\ x^2 - 4x < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 3 \\ 0 < x < 4 \end{cases} \Rightarrow 3 < x < 4 \Rightarrow S =]3; 4[$$

$$3) \ln x \geq 2 \text{ est définie sur } I =]0; +\infty[; \ln x \geq 2 \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \geq e^2 \end{cases} \Rightarrow x \geq e^2 \Rightarrow S = [e^2; +\infty[$$

Exercice 10 :

Résoudre les inéquations suivantes où n un entier naturel :

$$a) (1,2)^n \geq 4; \quad b) (0,8)^n \leq 0.1$$

Solution

$$a) (1,2)^n \geq 4 \Rightarrow \ln(1,2)^n \geq \ln 4 \Rightarrow n \ln(1,2) \geq \ln 4 \Rightarrow n \geq \frac{\ln 4}{\ln(1,2)} \Rightarrow n \geq 7.6 \Rightarrow n \geq 8$$

$$b) (0,8)^n \leq 0.1 \Rightarrow \ln(0,8)^n \leq \ln(0.1) \Rightarrow n \ln(0.8) \leq \ln(0.1) \Rightarrow n \geq \frac{\ln(0.1)}{\ln(0.8)} \Rightarrow n \geq 10.31 \Rightarrow n \geq 11$$

Exercice 11 :

$$1) \text{ Développer l'expression : } A(x) = (x-1)(x+1)(x-2)$$

$$2) \text{ Résoudre l'équation suivante : } \ln(x^3 + 2) = \ln(2x^2 + x)$$

Solution

$$1) A(x) = (x-1)(x+1)(x-2) = (x^2-1)(x-2) = x^3 - 2x^2 - x + 2;$$

$$2) \ln(x^3 + 2) = \ln(2x^2 + x) \text{ est définie si } \begin{cases} x^3 + 2 > 0 \\ 2x^2 + x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > \sqrt[3]{-2} \\ x \in \left] -\infty, -\frac{1}{2} \right[\cup]0, +\infty[\end{cases}$$

$$\text{L'ensemble de définition de l'équation est } D = \left] \sqrt[3]{-2}, -\frac{1}{2} \right[\cup]0, +\infty[$$

$$\ln(x^3 + 2) = \ln(2x^2 + x) \Rightarrow x^3 + 2 = 2x^2 + x \Rightarrow x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0 \Rightarrow (x-1)(x+1)(x-2) = 0 \\ \Rightarrow x = 1 \in D \text{ ou } x = -1 \in D \text{ ou } x = 2 \in D \Rightarrow S = \{-1; 1; 2\}$$

Exercice 12 :

- 1) Développer l'expression : $(2x-1)(x+2)(x-3)$
 2) Soit le polynôme défini par : $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 11x + 6$.
 Résoudre dans $\mathbb{R}$; $P(x) = 0$

- 3) Dédurre de la question 2) les solutions de l'équation suivante :

$$2(\ln x)^3 - 3(\ln x)^2 - 11\ln x + 6 = 0$$

Solution

$$1) (2x-1)(x+2)(x-3) = (2x-1)(x^2-x-6) = 2x^3 - 3x^2 - 11x + 6;$$

$$2) P(x) = 0 \Rightarrow 2x^3 - 3x^2 - 11x + 6 = 0 \Rightarrow (2x-1)(x+2)(x-3) = 0 \Rightarrow S = \left\{-2; \frac{1}{2}; 3\right\} \Rightarrow$$

$$3) 2(\ln x)^3 - 3(\ln x)^2 - 11\ln x + 6 = 0 \text{ en posant } X = \ln x \text{ on trouve : } 2X^3 - 3X^2 - 11X + 6 = 0$$

$$\Rightarrow X = \frac{1}{2} \text{ ou } X = -2 \text{ ou } X = 3 \Rightarrow \ln x = \frac{1}{2} \text{ ou } \ln x = -2 \text{ ou } \ln x = 3 \Rightarrow$$

$$x = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e} \text{ ou } x = e^{-2} \text{ ou } x = e^3 \Rightarrow S = \{\sqrt{e}; e^{-2}; e^3\}$$

2. Exercices non corrigés**Exercice 1 :**

- 1) Écrire les expressions en fonction de $\ln 2$; $\ln 3$ et $\ln 5$.

$$A = \ln 40 ; B = \ln(3\sqrt{2}) ; C = \ln(2^3 \times 5^7) ; D = \ln\left(\frac{3^2}{45}\right) ; E = \ln(3\sqrt{12})$$

- 2) Simplifier au maximum l'écriture des réels suivants :

$$A = \ln(216) - 3(\ln 2 + \ln 3) ; B = 3(\ln 3 + \ln 5) - \ln 27 - 2\ln 10 - \ln\left(\frac{1}{4}\right) ; C = 2\ln(2 + \sqrt{5}) + \ln(9 - 4\sqrt{5})$$

Exercice 2 :

- 1) Résoudre les équations suivantes :

$$a) x^2 + 3x + 2 = 0 ; b) x^2 + x + 2 = 0 ; c) -x^2 - x + 2 = 0 ; d) 2x^2 + 3x + 1 = 0 ; e) x^2 + 4x + 4 = 0 ;$$

- 2) En déduire les solutions des équations :

$$a) (\ln x)^2 + 3\ln x + 2 = 0 ; b) (\ln x)^2 + \ln x + 2 = 0 ; c) -(\ln x)^2 - \ln x + 2 = 0 ;$$

$$d) 2(\ln x)^2 + 3\ln x + 1 = 0 ; e) (\ln x)^2 + 4\ln x + 4 = 0 ;$$

Exercice 3 :

- 1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$a) \ln(x-4)(3x-5) = \ln 10 ; b) \ln(x-2) + \ln(x-1) = \ln 2 ; c) (\ln x)^2 + 4\ln x - 5 = 0 ;$$

$$d) \ln(x+3) + 2 = 5 + \ln(x-1) ; e) \ln(2x-3) = -1 ; f) \ln|x-1| = \ln 2$$

- 2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$$a) \ln(4x-8) \geq \ln(3x+6) ; b) (\ln x)^2 - 3\ln x + 2 \leq 0 ; c) \ln(2-x) + \ln(x+4) \geq \ln(3x+2) ;$$

$$d) \ln(x^2-9) \geq \ln(x+11) ; e) -2(\ln x)^2 - 5\ln x < -3 ; f) \ln[(x+2)^2] < 6$$

Exercice 4 :

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants :

$$a) \begin{cases} \ln x + \ln y = \ln 12 \\ \ln x - \ln y = \ln 3 \end{cases} ; b) \begin{cases} \ln 2x + \ln y = 0 \\ \ln x - \ln 2y = \ln 3 \end{cases} ; c) \begin{cases} x + y = 3 \\ \ln x + \ln y = \ln 2 \end{cases} ; d) \begin{cases} 2\ln x + \ln y^3 = 0 \\ \ln\left(\frac{x^2}{y}\right) = \frac{-13}{2} \end{cases}$$

Exercice 5 :

Déterminer D_f puis calculer les limites aux bornes de D_f

$$a) f(x) = 2x - 4\ln x ; b) f(x) = \ln\left(\frac{x+4}{1-x}\right) ; c) f(x) = 2x\ln x - \frac{2x}{x+1} ; d) f(x) = \frac{-x}{2} + \ln\left(\frac{x-1}{x}\right)$$

Exercice 6 :

Calculer la dérivée de f dans chacun des cas suivants :

$$a) f(x) = \ln(3x-2) + \ln(x-5) ; b) f(x) = \ln(x-1)(3x+2) ; c) f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right) ;$$

$$d) f(x) = (1-\ln x)\ln x ; e) f(x) = 2x - \ln x ; f) f(x) = \frac{-x}{2} + \ln\left(\frac{x-1}{x}\right)$$

Exercice 7 :

Soit f la fonction définie : $f(x) = 2x - \ln x$ et C sa courbe représentative

- 1) Déterminer l'ensemble de définition de f noté D_f
- 2) Calculer les limites aux bornes de D_f puis en déduire les asymptotes éventuelles
- 3) Calculer la dérivée f' ; en déduire le sens de variation et le tableau de variation de f
- 4) Recopier et compléter le tableau suivant à l'aide de votre calculatrice

x	0,5	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(x)$									

- 5) Tracer la courbe C

Exercice 8 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé

Soit f la fonction définie : $f(x) = 4x - \ln x$ et C sa courbe représentative

- 1) Déterminer l'ensemble de définition D_f de f .
- 2) Calculer les limites aux bornes de D_f puis en déduire les asymptotes éventuelles
- 3) Calculer la dérivée f' de f puis étudier son signe
- 4) Dresser le tableau de variation de f .
- 5) Déterminer une équation de la tangente T à C au point d'abscisse 1

Exercice 9 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé

Soit f la fonction définie : $f(x) = x + 1 + \ln x$ et C sa courbe représentative

- 1) Déterminer l'ensemble de définition D_f de f .
- 2) Calculer les limites aux bornes de D_f puis étudier les branches infinies de C .
- 3) a) Calculer la dérivée f' de f puis étudier son signe
b) Dresser le tableau de variation de f
c) Déterminer une équation de la tangente T à C au point d'abscisse 1
- 4) a) Compléter le tableau suivant :

x	0,5	1	2	3	4	5
$f(x)$						

b) Construire la courbe C

Exercice 10 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé

Soit f la fonction définie $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ et C sa courbe représentative

- 1) Déterminer l'ensemble de définition D_f de f .
- 2) Calculer les limites aux bornes de D_f puis en donner une interprétation géométrique.
- 3) a) Calculer la dérivée f' de f puis étudier son signe
b) Dresser le tableau de variation de f
- 4) a) Compléter le tableau suivant :

x	0,5	1	2	3	4	5
$f(x)$						

b) Construire la courbe C

Exercice 11 :

Soit f la fonction définie par : $f(x) = x - \ln(1+x)$ et C sa courbe représentative

- 1) Déterminer l'ensemble de définition de f noté D_f
- 2) Calculer la dérivée f' ; en déduire le sens de variation et le tableau de variation de f
- 3) Donner une équation de la tangente T à C au point d'abscisse 1

Exercice 12 :

Soit f la fonction définie par : $f(x) = x - 1 + \ln\left(\frac{x-1}{x}\right)$ et C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}; \vec{j})$. (Unité 1cm)

- 1) Déterminer l'ensemble de définition D_f , puis en déduire les asymptotes éventuelles à C .
- 2) Calculer les limites aux bornes de D_f
- 3) Calculer la dérivée f' de f puis étudier son signe
- 4) Dresser le tableau de variation de f
- 5) Montrer que la droite $\Delta : y = x - 1$ est une asymptote oblique à C
- 6) Étudier la position relative de C et Δ . (on admet que le signe de $\ln(1+t)$ est celui de t où $t > -1$)
- 7) Tracer les asymptotes et la courbe C .

Exercice 13 :

- 1) Étudier le signe de : $\frac{2-x}{2+x}$ suivant les valeurs de x .
- 2) Soit f la fonction définie par : $f(x) = \ln\left(\frac{2-x}{2+x}\right)$ de courbe C dans un repère orthonormé
 - a) Déterminer l'ensemble de définition de f noté D_f
 - b) Dresser le tableau de variation de f
 - c) Donner une équation de la tangente T à C en 0
 - d) Construire la tangente en 0 à C et la courbe C .

Chapitre 4

Fonctions exponentielles

I. Définition et propriétés :

1. Définition

La fonction exponentielle notée $\exp$ qui à tout réel x associe e^x est la fonction réciproque de la fonction $x \rightarrow \ln x$

2. Conséquences et propriétés

e^x est définie sur $\mathbb{R}$	e^x est strictement positive sur $\mathbb{R}$	e^x est strictement croissante sur $\mathbb{R}$
$\forall x \in \mathbb{R}, \ln e^x = x$	$\forall x; y \in \mathbb{R}, e^x = e^y \Leftrightarrow x = y$	$\forall x; y \in \mathbb{R}, e^x \leq e^y \Leftrightarrow x \leq y$
$\forall x; y \in \mathbb{R}, e^{x+y} = e^x \times e^y$	$\forall x; y \in \mathbb{R}, e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$	$\forall x; y \in \mathbb{R}, (e^x)^y = e^{xy}$
$\forall x > 0, e^{\ln x} = x$	$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y > 0, e^x = y \Leftrightarrow x = \ln y$	$\forall x \in \mathbb{R}, e^{-x} = \frac{1}{e^x}$

Remarque :

Pour l'équation $e^x = a$ il y a deux cas possibles

- Si $a > 0$ alors l'équation a pour solution $x = \ln a$
- Si $a \leq 0$ alors l'équation n'a pas de solution

3. Domaine de définition :

La fonction f définie par	Domaine de définition de f
$f(x) = e^x$	$D_f = \mathbb{R}$
$f(x) = e^{u(x)}$	$D_f = D_u$

II. Limites et Dérivées :

1. Limites usuelles

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$$

Exemple

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{(x+1)} = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} \times \frac{x}{x+1} = +\infty \times 1 = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0;$$

2. Dérivées

$$(e^x)' = e^x; \quad (e^{-x})' = -e^x; \quad (e^{ax+b})' = a e^{ax+b}; \quad (e^{u(x)})' = u'(x) e^{u(x)}$$

Exemple

$$(e^{2x-3})' = 2e^{2x-3}; \quad (e^{x^2-2x+1})' = (2x-2)e^{x^2-2x+1};$$

$$\left(\frac{e^{2x-3}}{x+1}\right)' = \frac{2e^{2x-3}(x+1) - 1e^{2x-3}}{(x+1)^2} = \frac{(2x+1)e^{2x-3}}{(x+1)^2};$$

III. Etude des variations de la fonction exponentielle (exp)

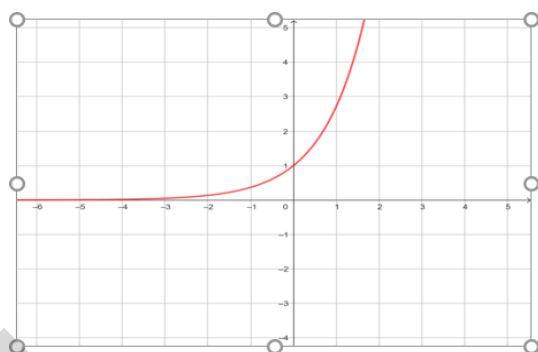
1. Etude de exp :

$f(x) = e^x \Rightarrow D_f = \mathbb{R}$ et on a : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$

Ainsi la courbe de f admet une AH : $y = 0$ en $-\infty$ et une BP suivant (Oy) en $+\infty$

$f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x > 0$ d'où le tableau de variation de f et sa courbe:

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	0	$+\infty$



IV. Exercices

1. Exercices corrigés :

Exercice 1

Simplifier les expressions suivantes :

$$A = e^3 \times e^4 ; B = \frac{e^{-5}}{e^2} ; C = \frac{e^{5x+7} \times e^{-x-3}}{e^{2x+3}} ; D = \frac{1}{e^{-1}} ; E = e^2 \times e^4 ; F = \frac{(e^{-5})^2}{e^2 \times e^{-6}} ; G = e^x \times e^{-x}$$

Solution

Simplifions les expressions suivantes :

$$A = e^3 \times e^4 = e^7 ; B = \frac{e^{-5}}{e^2} = e^{-7} ; C = \frac{e^{5x+7} \times e^{-x-3}}{e^{2x+3}} = \frac{e^{4x+4}}{e^{2x+3}} = e^{2x+1} ; D = \frac{1}{e^{-1}} = e$$

$$E = e^2 \times e^4 = e^{-2} ; F = \frac{(e^{-5})^2}{e^2 \times e^{-6}} = \frac{e^{-10}}{e^{-4}} = e^{-6} ; G = e^x \times e^{-x} = e^0 = 1$$

Exercice 2

Développer et simplifier les expressions suivantes :

$$A = e^x(e^x + 5) ; B = e^{-x}(e^x - 2) ; C = e^{2x}(e^x - e^{-x}) \text{ et } D = (e^x - 1)(e^x + 3)$$

Solution

Développons et simplifions les expressions suivantes :

$$A = e^x(e^x + 5) = e^{2x} + 5e^x ; B = e^{-x}(e^x - 2) = e^0 - 2e^{-x} = 1 - 2e^{-x} ; C = e^{2x}(e^x - e^{-x}) = e^{3x} - e^x$$

$$D = (e^x - 1)(e^x + 3) = e^{2x} + 3e^x - e^x - 3 = e^{2x} + 2e^x - 3$$

Exercice 3

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$1) 1)e^{2x+3} = e ; 2) 5e^x + 7 = 0 ; 3) e^x - 5 = 0 ; 4) e^x(e^x - 7) = 0 ; 5) e^{2x} - 5e^x + 6 = 0$$

Solution

Réolvons dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $e^{2x+3} = e \Rightarrow 2x+3=1 \Rightarrow 2x=1-3 \Rightarrow 2x=-2 \Rightarrow x=-1$

2) $5e^x + 7 = 0 \Rightarrow 5e^x = -7 \Rightarrow e^x = -\frac{7}{5}$ (impossible).

L'équation n'a pas de solution $S = \Phi$

3) $e^x - 5 = 0 \Rightarrow e^x = 5 \Rightarrow x = \ln 5 \Rightarrow$ donc $S = \{\ln 5\}$

4) $e^x(e^x - 7) = 0$ comme $e^x \neq 0$ alors $e^x - 7 = 0 \Rightarrow e^x = 7 \Rightarrow x = \ln 7 \Rightarrow S = \{\ln 7\}$

5) $e^{2x} - 5e^x + 6 = 0 \Rightarrow (e^x)^2 - 5e^x + 6 = 0$.

On pose $X = e^x$ on a : $X^2 - 5X + 6 = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 25 - 24 = 1 > 0$,

L'équation admet deux solutions dans $\mathbb{R}$:

$$X_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5+1}{2} = 3 ; X_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5-1}{2} = 2$$

$$X = 3 \Rightarrow e^x = 3 \Rightarrow x = \ln 3 \text{ ou } X = 2 \Rightarrow e^x = 2 \Rightarrow x = \ln 2$$

D'où l'ensemble des solutions de l'équation est $S = \{\ln 2 ; \ln 3\}$

Exercice 4

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante $x^2 + 4x - 5 = 0$

2) En déduire les solutions de l'équation : $e^{2x} + 4e^x = 5$

Solution

1) $x^2 + 4x - 5 = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 16 + 20 = 36 > 0$ L'équation admet deux solutions dans $\mathbb{R}$

$$: X_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4+6}{2} = 1 \text{ et } X_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4-6}{2} = -5$$

2) Les solutions de l'équation : $e^{2x} + 4e^x - 5 = 0 \Rightarrow (e^x)^2 + 4e^x - 5 = 0$

on pose $X = e^x$ on a : $X^2 + 4X - 5 = 0$ et d'après la question 1 on a : soit

$X = 1 \Rightarrow e^x = 1 \Rightarrow x = \ln 1 = 0$ ou $X = -5 \Rightarrow e^x = -5$ (impossible) d'où l'ensemble des solutions de l'équation est $S = \{0\}$

Exercice 5

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $e^{2x} + e^x - 2 = 0$; b) $e^{2x+1} + e^{x+1} - 2e = 0$

Solution

Réolvons dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $e^{2x} + e^x - 2 = 0 \Leftrightarrow (e^x)^2 + e^x - 2 = 0$

On pose $X = e^x$ on a : $X^2 + X - 2 = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 1 + 8 = 9 > 0$

L'équation admet deux solutions dans $\mathbb{R}$

$$X_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1+3}{2} = 1 \text{ et } X_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1-3}{2} = -2$$

Soit $X = 1 \Rightarrow e^x = 1 \Rightarrow x = \ln 1 = 0$ ou $X = -2 \Rightarrow e^x = -2$ (impossible) d'où l'ensemble des solutions de l'équation $S = \{0\}$

$$b) e^{2x+1} + e^{x+1} - 2e = 0 \Leftrightarrow e^1 ((e^x)^2 + e^x - 2) = 0$$

$e^1 \neq 0$ alors $(e^x)^2 + e^x - 2 = 0$ d'après la question précédente on a : $S = \{0\}$

Exercice 6

1) Développer l'expression suivante : $A(x) = (x-1)(x+1)(x-2)$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $e^{3x} - 2e^{2x} - e^x + 2 = 0$

b) $e^{x^3+2} = e^{2x^2+x}$

Solution

1) Développement de l'expression : $A(x) = (x-1)(x+1)(x-2)$

On a : $A(x) = (x-1)(x+1)(x-2) = (x^2-1)(x-2) = x^3 - 2x^2 - x + 2$

a) $e^{3x} - 2e^{2x} - e^x + 2 = 0 \Rightarrow (e^x)^3 - 2(e^x)^2 - e^x + 2 = 0$

En posant : $X = e^x$ on trouve $X^3 - 2X^2 - X + 2 = 0 \Rightarrow (X-1)(X+1)(X-2) = 0$

Soit $X = 1$ ou $X = -1$ ou $X = 2$

$e^x = 1 \Rightarrow x = \ln 1 = 0$ ou $e^x = -1$ n'a pas de solution ou $e^x = 2 \Rightarrow x = \ln 2$ Donc $S = \{0; \ln 2\}$

b) $e^{x^3+2} = e^{2x^2+x} \Rightarrow x^3 + 2 = 2x^2 + x \Rightarrow x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0 \Rightarrow (x-1)(x+1)(x-2) = 0 \Rightarrow$

$$\begin{cases} x = 1 & \text{ou} \\ x = -1 & \text{donc } S = \{-1; 1; 2\} \\ \text{ou } x = 2 \end{cases}$$

Exercice 7

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1) $e^{2x+3} < e$; 2) $5e^x + 7 > 0$; 3) $e^x - 5 \leq 0$; 4) $e^x(e^x - 7) > 0$

Solution

Réolvons dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1) $e^{2x+3} < e \Leftrightarrow e^{2x+3} < e^1 \Leftrightarrow 2x+3 < 1 \Leftrightarrow 2x+2 < 0 \Leftrightarrow x < -1 \Rightarrow S =]-\infty; -1[$

2) $5e^x + 7 > 0 \Leftrightarrow 5e^x > -7 \Leftrightarrow e^x > -\frac{7}{5}$ cette inéquation est vérifiée $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow S = \mathbb{R}$

3) $e^x - 5 \leq 0 \Leftrightarrow e^x \leq 5 \Rightarrow x \leq \ln 5 \Rightarrow S =]-\infty; \ln 5]$

4) $e^x(e^x - 7) > 0$ comme $e^x > 0$ alors $e^x - 7 > 0 \Rightarrow e^x > 7 \Rightarrow x > \ln 7 \Rightarrow S =]\ln 7; +\infty[$

Exercice 8

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1) $e^{2x} + e^x - 2 \geq 0$; 2) $e^{2x} - 3e^x + 2 \leq 0$; 3) $e^x - e^{-x} > 0$

Solution

Résolvons dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1) $e^{2x} + e^x - 2 \geq 0$

On pose : $X = e^x \Rightarrow e^{2x} + e^x - 2 = X^2 + X - 2 = (X+2)(X-1) = (e^x+2)(e^x-1)$

On a $e^x + 2 > 0$; $\forall x \in \mathbb{R}$. Donc le signe de $e^{2x} + e^x - 2$ est celui de $e^x - 1$, $e^{2x} + e^x - 2 \geq 0 \Rightarrow e^x - 1 \geq 0 \Rightarrow e^x \geq 1 \Rightarrow x \geq 0 \Rightarrow S = [0, +\infty[$

2) $e^{2x} - 3e^x + 2 \leq 0$ on pose $X = e^x$

$e^{2x} - 3e^x + 2 = X^2 - 3X + 2 = (X-2)(X-1) = (e^x-2)(e^x-1)$

$e^{2x} - 3e^x + 2 \leq 0$ si et seulement si $e^x \in [1, 2] \Rightarrow x \in [\ln 1, \ln 2] \Rightarrow S = [0 ; \ln 2]$

3) $e^x - e^{-x} > 0 \Rightarrow e^x - \frac{1}{e^x} > 0 \Rightarrow \frac{e^{2x} - 1}{e^x} > 0 \Rightarrow e^{2x} - 1 \geq 0$ car $e^x > 0$.

$e^{2x} - 1 > 0 \Rightarrow (e^x + 1)(e^x - 1) > 0 \Rightarrow e^x - 1 > 0 \Rightarrow e^x > 1 \Rightarrow x > 0 \Rightarrow S =]0 ; +\infty[$

Exercice 9

Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes :

$f(x) = 2e^x$; $g(x) = 2x + e^x$; $h(x) = e^{2x+1}$; $i(x) = (x^2 + 3x + 5)e^x$; $j(x) = \frac{4e^x}{e^x + 1}$.

Solution

Calculons la dérivée des fonctions suivantes :

$f(x) = 2e^x \Rightarrow f'(x) = 2e^x$; $g(x) = 2x + e^x \Rightarrow g'(x) = 2 + e^x$;

$h(x) = e^{2x+1} \Rightarrow h'(x) = 2e^{2x+1}$;

$i(x) = (x^2 + 3x + 5)e^x \Rightarrow i'(x) = (2x + 3)e^x + (x^2 + 3x + 5)e^x = (x^2 + 5x + 8)e^x$;

$j(x) = \frac{4e^x}{e^x + 1} \Rightarrow j'(x) = \frac{4e^x(e^x + 1) - e^x(4e^x)}{(e^x + 1)^2} = \frac{4e^{2x} + 4e^x - 4e^{2x}}{(e^x + 1)^2} = \frac{4e^x}{(e^x + 1)^2}$

Exercice 10

Un parachutiste de 80 Kg est lâché avec une vitesse initiale nulle à 5000 mètres d'altitude.

On considère la fonction V qui à tout instant t positif (en s), associe la vitesse (en m.s^{-1}) du parachutiste à cet instant.

On suppose que tant que le parachute n'est pas ouvert, $V(t) = 44(1 - e^{-0,5t})$

1) Etudier le signe de $44 - V(t)$ sur l'intervalle $[0 + \infty[$

2) En déduire une vitesse en m.s^{-1} , puis en km.h^{-1} , que ce parachutiste ne peut pas dépasser pendant sa chute.

Solution

1) On a $44 - V(t) = 44 - 44(1 - e^{-0,5t}) = 44 - 44 + 44e^{-0,5t} = 44e^{-0,5t} > 0$.

Une exponentielle étant toujours strictement positive, on en déduit que $44 - V(t) > 0$

2) De 1) On en déduit que $V(t) < 44$. Donc la vitesse du parachutiste ne peut pas dépasser 44 m.s^{-1} soit 158.4 km.h^{-1}

Exercice 11

Le nombre d'habitants d'une région ayant un fort taux de natalité est donné par la fonction exponentielle $f(t) = 12e^{0,05t}$.

$f(t)$ est la population exprimée en million d'habitants pour l'année $2000 + t$

- 1) A partir de quelle date la population aura-t-elle plus que triplé ?
- 2) Cette région ne peut pas nourrir plus de 20.000.000 (vingt million) de personnes.
Pendant combien d'années après 2000, la nourriture sera-t-elle suffisante ?

Solution

1) En 2000 la population de la région s'élève à $f(0) = 12e^{0,05 \times 0} = 12$ millions d'habitants.

La population aura plus que triplé pour les valeurs de t telles que

$$f(t) \geq 36 \Leftrightarrow 12e^{0,05t} \geq 36 \Leftrightarrow e^{0,05t} \geq 3 \Leftrightarrow 0,05t \geq \ln 3 \Leftrightarrow t \geq \frac{\ln 3}{0,05} \Leftrightarrow t \geq 21,97 \text{ à } 0,01 \text{ près}.$$

On peut affirmer que la population aura plus que triplé pour $t \geq 22$. soit à partir de l'année $2000 + 22 = 2022$

2) La nourriture sera suffisante tant que $f(t) \leq 20 \Leftrightarrow 12e^{0,05t} \leq 20 \Leftrightarrow e^{0,05t} \leq \frac{5}{3} \Leftrightarrow$

$$0,05t \leq \ln\left(\frac{5}{3}\right) \Leftrightarrow t \leq \frac{\ln\left(\frac{5}{3}\right)}{0,05} \Leftrightarrow t \leq 10,2 \text{ à } 0,1 \text{ près}.$$

on peut affirmer que la nourriture sera suffisante tant que $t \leq 10$. Soit jusqu'en $2000 + 10 = 2010$

Exercice 12

Soit f la fonction définie par $f(x) = xe^{\frac{-x}{2}}$

- 1) Etudier les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
- 2) Calculer la dérivée de f .
- 3) Dresser le tableau de variation de f .
- 4) Tracer la courbe représentative de f .

Solution

1) Etudions les limites

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^{\frac{-x}{2}} = (-\infty)(+\infty) = -\infty; \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{\frac{-x}{2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \frac{\frac{x}{2}}{e^{\frac{x}{2}}} = 2 \times 0 = 0$$

2) Calculons la dérivée de f

La dérivée : $f'(x) = 1 \cdot e^{\frac{-x}{2}} + \left(-\frac{1}{2}\right) e^{\frac{-x}{2}} x = \left(1 - \frac{1}{2}x\right) e^{\frac{-x}{2}} \Rightarrow f'(x) = \left(1 - \frac{1}{2}x\right) e^{\frac{-x}{2}}$,

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \left(1 - \frac{1}{2}x\right) e^{\frac{-x}{2}} = 0 \Rightarrow x = 2 \text{ d'où le TV de } f$$

3) Le tableau de variation de f

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$		0	
$f(x)$	$-\infty$	$\frac{2}{e}$	0

4) La courbe



2. Exercices non corrigés :

Exercice 1

Simplifier les expressions suivantes :

$$A = e^5 \times e^7 \times e^{-12}; \quad B = \frac{e^{-8} \times e}{e^{12} \times e^{-5}}; \quad C = e\sqrt{e} \times e^{-19}; \quad D = \frac{e^{15} \times (e^{-3} \times e^{-7})^4}{e^{-10}}$$

Exercice 2

Développer et simplifier les expressions suivantes :

$$A = 3e^{-x}(e^{5x} - 4e^x); \quad B = (e^{-x} + 4)(3e^x - 6); \quad C = e^{4x+11}(e^{-5x} + e^{-x+1}) \text{ et } D = (e^x + 9)(e^{2x} - e^x - 10)$$

Exercice 3

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$1) e^{x+5} = e^{4x+8}; \quad 2) e^{2x} - 14e^x = 0; \quad 3) e^{2x} - 25 = 0; \quad 4) (e^x + 8)(e^x - 20) = 0$$

Exercice 4

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$1) e^{2x^2+3x} = e^5; \quad 2) e^{3x} - e^x = 0; \quad 3) \frac{e^x - 4}{e^x + 6} = 0; \quad 4) e^x(e^{2x} - 7e^x) = 0; \quad 5) e^{2x} - 8e^x + 15 = 0;$$

Exercice 5

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$1) 3e^{2x} + 9e^x + 6 = 0; \quad 2) e^{3x+1} + e^{2x+1} = 2e^x$$

Exercice 6

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$$1) e^{x-4} < e^{-x-1}; \quad 2) e^x(-e^x + 1) > 0; \quad 3) e^{2x} - 8e^x \leq 0; \quad 4) (e^x - 4)(e^x - 7) > 0$$

Exercice 7

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1) $e^{2x} + 2e^x + 1 \geq 0$; 2) $e^{2x} - 3e^x + 12 \leq 0$; 3) $\frac{e^x - 5}{e^x - 2} > 0$

Exercice 8

Soit f la fonction définie par $f(x) = x - 1 + e^x$

- 1) Déterminer le domaine de définition de f et calculer les limites aux bornes de D_f
- 2) Montrer que la droite $d : y = x - 1$ est une asymptote oblique à la courbe de f .
- 3) Etudier la position relative de la courbe de f et l'asymptote $d : y = x - 1$.
- 4) Calculer la dérivée de f puis dresser le tableau de variation de f .
- 5) Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i} ; \vec{j})$

Exercice 9

Soit f la fonction définie par $f(x) = -2x + 3 + 2e^x$

- 1) Calculer la dérivée de f
- 2) Calculer les limites aux bornes de D_f
- 3) Dresser le tableau de variation de f
- 4) Donner l'équation de la tangente T à la courbe de f au point d'abscisse 0.

Exercice 10

Soit g la fonction définie par $g(x) = xe^x + 1$

- 1) Déterminer le domaine de définition de g .
- 2) Calculer les limites aux bornes de D_g .
- 3) Calculer la dérivée de g puis dresser le tableau de variation de g
- 4) Déterminer les asymptotes et les branches infinies à la courbe de g
- 5) Tracer la courbe de g dans un repère orthonormé

Chapitre 5

Suites numériques

I. Définition et notation

1. Définition

Une suite numérique est une application de $\mathbb{N}$ ou d'une partie de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.

Exemple

Soit U l'application qui à tout entier naturel n associe le réel $U(n)$ tel que :

$$U(n) = 5n + 7$$

Calculons $U(0)$, $U(2)$ et $U(100)$

$$U(0) = 5 \times 0 + 7 = 7 \quad ; \quad U(2) = 5 \times 2 + 7 = 17 \quad ; \quad U(100) = 5 \times 100 + 7 = 507$$

$U(0) = 5 \times 0 + 7 = 7$ est le premier terme de la suite et $U(n)$ est le terme de rang n

2. Notation

□ On note U_n au lieu $U(n)$.

Dans l'exemple précédent on écrit : $U_n = 5n + 7$

□ L'écriture (U_n) désigne la suite et U_n désigne le terme général de la suite (U_n) .

□ Ne pas confondre U_{n+1} et $U_n + 1$:

U_{n+1} désigne le terme de rang $(n+1)$ et $(U_n + 1)$ désigne le terme de rang n augmenté du nombre 1, c'est-à-dire : on ajoute 1 au terme de rang n .

II. Modes de définition d'une suite numérique

1. Définition directe (forme explicite)

Si on donne l'expression de la suite (U_n) en fonction de n , on dit que la suite est définie par sa forme explicite

Exemple

$$U_n = 2n - 3 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \quad ; \quad V_n = \frac{2n+3}{n-1} \text{ pour tout } n \geq 2 \quad ; \quad W_n = \sqrt{2n-7} \text{ pour tout } n > 3$$

$U_n = 2n - 3$	$V_n = \frac{2n+3}{n-1}$	$W_n = \sqrt{2n-7}$
$U_0 = -3 \quad ; \quad U_6 = 9$	$V_2 = 7 \quad ; \quad V_4 = \frac{11}{3}$	$W_4 = 1 \quad ; \quad W_7 = \sqrt{7}$

2. Définition par récurrence

Si la suite est définie par une relation entre deux termes consécutifs (ou trois termes consécutifs) et la donnée du premier terme (ou deux premiers termes), on dit qu'elle est une suite récurrente.

Exemple :

Calculer les deux premiers termes non donnés de chacune des suites

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = 2U_n + 3 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} V_0 = 1 \\ V_{n+1} = \frac{1-V_n}{3+V_n} \end{cases}.$$

Solution

$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = 2U_n + 3 \end{cases}$	$\begin{cases} V_0 = 1 \\ V_{n+1} = \frac{1-V_n}{3+V_n} \end{cases}$
$n=0 \Rightarrow \begin{cases} U_0 = 1 \\ U_1 = 2U_0 + 3 = 5 \end{cases} ;$ $n=1 \Rightarrow \begin{cases} U_1 = 5 \\ U_2 = 2U_1 + 3 = 13 \end{cases}$	$n=0 \Rightarrow \begin{cases} V_0 = 1 \\ V_1 = \frac{1-V_0}{3+V_0} = 0 \end{cases} ;$ $n=1 \Rightarrow \begin{cases} V_1 = 0 \\ V_2 = \frac{1-V_1}{3+V_1} = \frac{1}{3} \end{cases}$

III. Monotonie, minoration, majoration

1. Monotonie

- La suite (U_n) est croissante si $U_{n+1} - U_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$
- La suite (U_n) est décroissante si $U_{n+1} - U_n \leq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$
- La suite (U_n) est constante si $U_{n+1} - U_n = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$
- La suite (U_n) est monotone si elle est croissante ou décroissante

Exemple

Etudier la monotonie de chacune des suites suivantes :

$$U_n = 3n + 5 ; V_n = \frac{8}{n+2} ; \begin{cases} W_0 = 1 \\ W_{n+1} = W_n + 2 \end{cases}$$

Solution

$$U_n = 3n + 5 \Rightarrow U_{n+1} = 3(n+1) + 5 = 3n + 8 \Rightarrow U_{n+1} - U_n = 3n + 8 - (3n + 5) = 3 \geq 0$$

$\Rightarrow (U_n)$ est croissante

$$V_n = \frac{8}{n+2} \Rightarrow V_{n+1} = \frac{8}{n+3} \Rightarrow V_{n+1} - V_n = \frac{8}{n+3} - \frac{8}{n+2} = \frac{-8}{(n+3)(n+2)} \leq 0 \Rightarrow$$

(V_n) est décroissante

$$W_{n+1} = W_n + 2 \Rightarrow W_{n+1} - W_n = 2 \geq 0 \Rightarrow (W_n) \text{ est croissante}$$

2. Minoration et Majoration

- La suite (U_n) est majorée par M si $U_n \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- La suite (U_n) est minorée par m si $U_n \geq m \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- La suite (U_n) est bornée si $m \leq U_n \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Exemple

1) Soit (U_n) la suite définie par: $U_n = \frac{3n-5}{n}$, montrer que (U_n) est majorée par 3

2) Soit (V_n) la suite définie par: $V_n = \frac{7n+11}{n+1}$, montrer que (V_n) est minorée par 7

3) Soit (W_n) la suite définie par: $W_n = 9 + \frac{1}{n+2}$, montrer que (W_n) est bornée

1) $U_n = \frac{3n-5}{n}$, montrons que (U_n) est majorée par 3

on a $U_n = 3 - \frac{5}{n} \Rightarrow U_n - 3 = -\frac{5}{n} < 0 \Rightarrow U_n < 3$ donc (U_n) est majorée par 3

2) $V_n = \frac{7n+11}{n+1} \Rightarrow V_n = \frac{7n+7+4}{n+1} \Rightarrow V_n = 7 + \frac{4}{n+1} \Rightarrow V_n - 7 = \frac{4}{n+1} > 0$

$\Rightarrow V_n > 7$ donc (V_n) est minorée par 7

Solution

3) (W_n) est définie par: $W_n = 9 + \frac{1}{n+2} \Rightarrow W_n - 9 = \frac{1}{n+2} > 0 \Rightarrow (W_n)$ est minorée par 9,

d'autre part $n \geq 0 \Rightarrow n+2 \geq 2 \Rightarrow \frac{1}{n+2} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow 9 + \frac{1}{n+2} \leq 9 + \frac{1}{2} \Rightarrow W_n \leq \frac{19}{2}$

$\Rightarrow (W_n)$ est majorée par $\frac{19}{2}$

comme (W_n) est à la fois minorée et majorée elle est donc bornée

IV. Suites Arithmétiques et Suites Géométriques

1. Suite Arithmétique

a. Définition :

(U_n) est une suite arithmétique si et seulement s'il existe un réel constant r tel que $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} - U_n = r$ ou $U_{n+1} = U_n + r$ (r est appelée raison de la suite arithmétique)

Exemple

Soit (U_n) la suite définie par: $U_n = 3n + 13$, montrer que (U_n) est une suite arithmétique dont on déterminera la raison et le premier terme

Solution

$U_n = 3n + 13 \Rightarrow U_{n+1} = 3(n+1) + 13 \Rightarrow U_{n+1} = 3n + 16 \Rightarrow U_{n+1} - U_n = 3n + 16 - 3n - 13 \Rightarrow$
 $U_{n+1} - U_n = 3$ donc (U_n) est une suite arithmétique de raison $r=3$ et son premier terme $U_0 = 3 \times 0 + 13 = 13$

b. Propriétés

■ Terme général

Si (U_n) est une suite arithmétique de premier terme U_0 et de raison r , alors

$$\forall n \text{ et } p \in \mathbb{N}, \text{ on a : } U_n = U_0 + nr ; U_n = U_1 + (n-1)r ; U_n = U_p + (n-p)r ;$$

Remarque

Si (U_n) une suite arithmétique de raison r alors : $\frac{U_n - U_p}{n - p} = r$

Exemple

Soit (U_n) une suite arithmétique telle que $U_5 = 14$ et $U_{13} = 38$

a) Calculer la raison r de cette suite

b) Donner le terme général de (U_n)

Solution

a) On a : $r = \frac{U_{13} - U_5}{13 - 5} = \frac{38 - 14}{8} = \frac{24}{8} = 3$

b) On a : $U_n = U_p + (n-p)r$ on pose $p = 5 \Rightarrow U_n = U_5 + (n-5)r = 14 + 3(n-5) = 3n - 1$

■ Propriété caractéristique

Si $a ; b$ et c sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique alors on a :

$$a + c = 2b$$

■ Somme de termes consécutifs

Soit (U_n) une suite arithmétique, on pose : $S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$

$$S_n = \frac{(n+1)(U_0 + U_n)}{2}$$

Dans le cas général si $S_n = U_p + U_{p+1} + \dots + U_n$ alors on a

$$S_n = \frac{(n-p+1)(U_p + U_n)}{2} ; (n \geq p) ; S_n = \frac{(\text{nombre de termes})(\text{premier terme} + \text{dernier terme})}{2}$$

Exemple

Soit (U_n) une suite arithmétique telle que $U_3 = 25$ et $U_5 = 37$

a) Calculer U_4 en déduire r et U_0 .

b) Donner le terme général de (U_n)

c) Calculer la somme : $S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$

Solution

a) On a: $2U_4 = U_3 + U_5 = 25 + 37 = 62 \Rightarrow U_4 = \frac{62}{2} = 31$

$r = U_4 - U_3 = 31 - 25 = 6$ et $U_3 = U_0 + 3r \Rightarrow U_0 = U_3 - 3r = 25 - 18 = 7$.

b) On a : $U_0 = 7$ et $r = 6$ d'où le terme général de (U_n) : $U_n = U_0 + rn = 7 + 6n$

c) On a : $S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n = \frac{(n+1)(U_0 + U_n)}{2} = \frac{(n+1)(7 + 6n + 7)}{2} = \frac{(n+1)(6n + 14)}{2} = 3n^2 + 10n + 7$

2. Suite géométrique

a. Définition :

(U_n) est une suite géométrique si et seulement s'il existe un réel constant $q \neq 0$

tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{U_{n+1}}{U_n} = q$, ou $U_{n+1} = qU_n$ (q est la raison de la suite géométrique)

Exemple

Soit (U_n) la suite définie par: $U_n = 5 \times 3^n$, montrer que (U_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme

Solution

$$U_n = 5 \times 3^n \Rightarrow U_{n+1} = 5 \times 3^{n+1} \Rightarrow \frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{5 \times 3^{n+1}}{5 \times 3^n} \Rightarrow \frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{3^{n+1}}{3^n} \Rightarrow \frac{U_{n+1}}{U_n} = 3$$

donc (U_n) est une suite géométrique de raison $q = 3$ et son premier terme $U_0 = 5 \times 3^0 = 5$

b. Propriétés

■ Terme général

Si (U_n) est une suite géométrique de premier terme U_0 et de raison q , alors

$$U_n = U_0 \times q^n ; U_n = U_1 \times q^{n-1} ; U_n = U_p \times q^{n-p} ;$$

Remarque

Si (U_n) une suite géométrique de raison q alors : $q^{n-p} = \frac{U_n}{U_p}$

■ Propriété caractéristique

Si $a ; b$ et c sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique alors on a : $a \times c = b^2$

■ Somme de termes consécutifs

Soit (U_n) une suite géométrique, on pose : $S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$

$$S_n = \frac{U_0(1 - q^{n+1})}{1 - q} ; (q \neq 1)$$

Dans le cas général si $S_n = U_p + U_{p+1} + \dots + U_n$ alors

$$S_n = \frac{U_p(1-q^{n-p+1})}{1-q}; (n \geq p) \text{ on peut aussi \acute{e}crire : } S_n = \frac{\text{premier terme}(1-q^{\text{nombre de termes}})}{1-q} \quad (q \neq 1)$$

Exemple

Soit (U_n) une suite g\^eom\^etrique telle que $U_2 = 12$ et $U_5 = 64$

a) Calculer la raison q de cette suite

b) Donner le terme g\^en\^eral de (U_n)

c) Calculer $S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$

Solution

a) On a : $q^{5-2} = \frac{U_5}{U_2} \Rightarrow q^3 = \frac{96}{12} = 8 = 2^3 \Rightarrow q = 2$

b) On a : $U_n = U_2 \times q^{n-2} = 12 \times 2^{n-2} = 12 \times 2^{-2} \times 2^n = 3 \times 2^n$

c) On a : $S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n = \frac{U_0(1-q^{n+1})}{1-q} = \frac{3(1-2^{n+1})}{1-2} = -3 + 3 \times 2^{n+1}$

V. Limite d'une suite :

1. Limite finie :

Les suites de r\^ef\^erences : $\frac{1}{\sqrt{n}}$; $\frac{1}{n}$; $\frac{1}{n^2}$; $\frac{1}{n^\alpha}$ ($\alpha > 0$) et α^n ($|a| < 1$) ont pour limite 0 ou convergent vers 0 (ces limites sont finies et nulles)

2. Limite infinie

Les suites de r\^ef\^erences $\sqrt{n}$; n ; n^2 ; n^α ($\alpha > 0$) et a^n ($a > 1$) sont appel\^ees suites de r\^ef\^erence ayant pour limite $+\infty$ et si $a \leq -1$, la suite $n \rightarrow a^n$ qui est divergente n'a pas de limite.

3. Op\^erations et limites

(U_n) et (V_n) sont des suites r\^eelles ; l et l' sont des r\^eels :

a. Somme :

Si (U_n) a pour limite	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Si (V_n) a pour limite	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
Alors $U_n + V_n$ a pour limite	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	

b. Produit :

Si (U_n) a pour limite	l	$l \neq 0$	l	∞	∞
Si (V_n) a pour limite	l'	∞	0	∞	0
Alors $U_n \times V_n$ a pour limite	$l \times l'$	∞	0	∞	

c. Quotient :

Si (U_n) a pour limite	l	l	l	∞	0	l	∞	0	∞
Si (V_n) a pour limite	$l' \neq 0$	∞	0	l'	∞	∞	l'	0	∞
Alors $\frac{U_n}{V_n}$ a pour limite	$\frac{l}{l'}$	0	∞	∞	0	0	∞	$\times$	$\times$

Les formes : $\frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$; $0 \times \infty$; $-\infty + \infty$ sont des formes indéterminées

Définition

On dit qu'une suite est convergente si sa limite est finie, sinon on dit qu'elle est divergente.

Remarques :

Soit (U_n) une suite définie par $U_n = f(n)$

- Si f est une fonction polynôme, alors la limite de (U_n) est celle de terme de plus haut degré.
- Si f est une fonction rationnelle, alors la limite de (U_n) est celle du rapport des termes du plus haut degré du numérateur et du dénominateur lorsque n tend vers $+\infty$

Exemple

Déterminer les limites suivantes :

- 1) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (2n^3 - 6n^2 + n - 1)$
- 2) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (2n^3 - 3n + 2)(-n^2 - n + 6)$
- 3) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^4 - 5n^3 + 2n + 2}{n^2 - n^3}$
- 4) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-2 + \frac{5}{2n} - \frac{5}{n^2})(-1 + \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{8}{n^3})$
- 5) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[(-3 \times (11)^n + 16(\frac{2}{3})^n + 6(-0,018)^n) \right]$

Solution :

- 1) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (2n^3 - 6n^2 + n - 1) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2n^3 = +\infty$
- 2) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (2n^3 - 3n + 2)(-n^2 - n + 6) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (2n^3) \times \lim_{n \rightarrow +\infty} (-n^2) = (+\infty) \times (-\infty) = -\infty$
- 3) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^4 - 5n^3 + 2n + 2}{n^2 - n^3} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^4}{-n^3} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (-2n) = -\infty$

$$4) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-2 + \frac{5}{2n} - \frac{5}{n^2} \right) \left(-1 + \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{8}{n^3} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-2 + \frac{5}{2n} - \frac{5}{n^2} \right) \times \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-1 + \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{8}{n^3} \right) = -2 \times -1 = 2$$

$$5) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[(-3 \times (11)^n + 16 \left(\frac{2}{3} \right)^n + 6(-0,018)^n) \right] =$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[(-3 \times (11)^n) \right] + \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[16 \left(\frac{2}{3} \right)^n + 6(-0,018)^n \right] = -\infty + 0 = -\infty$$

4. Théorèmes sur les limites :

a. Théorème des gendarmes

Soient U_n ; V_n et W_n trois suites vérifiant :

$V_n \leq U_n \leq W_n$ à partir d'un rang donné et $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} W_n = l$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = l$

Exemple

Soit (U_n) la suite définie pour tout entier naturel non nul n par : $U_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{-1}{n+1} \leq U_n \leq \frac{1}{n+1}$

b) En déduire la limite de U_n

Solution

a) On a $\forall n \in \mathbb{N} : -1 \leq (-1)^n \leq 1 \Rightarrow \frac{-1}{n+1} \leq U_n \leq \frac{1}{n+1}$

b) On a $\forall n \in \mathbb{N} : \frac{-1}{n+1} \leq U_n \leq \frac{1}{n+1}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{-1}{n+1} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n+1} \right) = 0$

Donc d'après le théorème des gendarmes on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0$

b. Théorèmes de convergence

- ☐ Toute suite croissante et majorée est convergente.
- ☐ Toute suite décroissante et minorée est convergente.

Exemple

Soit (U_n) la suite définie pour tout entier naturel n par : $U_n = 3 - 5 \left(\frac{1}{2} \right)^n$

a) Montrer que (U_n) est croissante et majorée par 3

b) Que peut on en déduire ?

Solution

$$a) \text{ On a } U_n = 3 - 5\left(\frac{1}{2}\right)^n \Rightarrow U_{n+1} = 3 - 5\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \Rightarrow U_{n+1} - U_n = 3 - 5\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 3 + 5\left(\frac{1}{2}\right)^n = 5\left(\frac{1}{2}\right)^n \left[-\frac{1}{2} + 1\right] = 5\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \geq 0 \quad \text{Donc } (U_n) \text{ est croissante.}$$

$$U_n = 3 - 5\left(\frac{1}{2}\right)^n \Rightarrow U_n - 3 = -5\left(\frac{1}{2}\right)^n \leq 0 \Rightarrow U_n \leq 3 \Rightarrow (U_n) \text{ est majorée par } 3.$$

b) Comme (U_n) est croissante et majorée alors elle est convergente.

Théorèmes de comparaison

□ On suppose qu'à partir d'un rang donné on a : $V_n \leq U_n$

Si (V_n) est divergente vers $+\infty$ alors (U_n) est divergente vers $+\infty$

□ On suppose qu'à partir d'un rang donné on a : $V_n \geq U_n$

Si (V_n) est divergente vers $-\infty$ alors (U_n) est divergente vers $-\infty$

Exemple

Soit (U_n) la suite définie par : $U_n = \frac{(-1)^n + n^3}{n}, n > 0$

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \geq n^2 - \frac{1}{n}$

b) En déduire la limite de U_n

Solution

Soit (U_n) la suite définie par : $U_n = \frac{(-1)^n + n^3}{n}, n > 0$

$$a) \text{ On a pour tout } n > 0 : -1 \leq (-1)^n \Rightarrow \frac{-1}{n} \leq \frac{(-1)^n}{n} \Rightarrow \frac{-1}{n} + n^2 \leq \frac{(-1)^n}{n} + n^2 \Rightarrow$$

$$\frac{-1}{n} + n^2 \leq \frac{(-1)^n + n^3}{n} \Rightarrow n^2 - \frac{1}{n} \leq U_n$$

$$b) \text{ On a pour tout } n > 0 : n^2 - \frac{1}{n} \leq U_n \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(n^2 - \frac{1}{n} \right) = +\infty,$$

d'après le théorème de comparaison $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = +\infty$

VI. Exercices

1. Exercices corrigés :

Exercice 1

(U_n) est une suite arithmétique de raison r

1- Sachant que $U_0 = 2$ et $r = -3$ calculer U_{10} et U_{100}

2- Sachant que $U_0 = 2$ et $U_1 = 5$ calculer r et U_5

3- Sachant que $U_{20} = -52$ et $U_{51} = -145$ expliciter U_n

4- Sachant que $U_0 = 3$ et que $U_{20} = U_{10} + 25$ expliciter U_n

5- Sachant que $U_2 + U_3 + U_4 = 15$ et $U_6 = 20$ calculer U_0 puis expliciter U_n

Solution

1- Si $U_0 = 2$ et $r = -3$ alors pour tout entier naturel n : $U_n = U_0 + r n = 2 - 3n$

ce qui nous permet de calculer $U_{10} = -28$ et $U_{100} = -298$

2- On calcule $r = U_1 - U_0 = 5 - 2 = 3$ donc pour tout entier naturel n on a

$U_n = U_0 + r n = 2 + 3n$ ce qui nous permet de calculer $U_5 = 17$

3- $U_{51} = U_{20} + r(51 - 20)$ on en déduit que $r = \frac{1}{31}(U_{51} - U_{20}) = \frac{1}{31}(-145 + 52) = \frac{-93}{31} = -3$ et pour

tout entier naturel n on a $U_n = U_{20} + r(n - 20) = -52 - 3(n - 20) = 8 - 3n$

4- Puisque $U_{20} = U_{10} + r(20 - 10)$ on en déduit que $10r = 25 \Rightarrow r = \frac{5}{2}$ ainsi pour tout entier

naturel n , $U_n = U_0 + r n = 3 + \frac{5}{2}n$

5- (U_n) est une suite arithmétique de raison r ;

$$U_2 + U_3 + U_4 = 15 \Rightarrow U_2 + U_2 + r + U_2 + 2r = 15 \Rightarrow 3U_2 + 3r = 15$$

$$\Rightarrow U_2 + r = 5, \text{ d'autre part on a : } U_6 = U_2 + 4r = 20 \Rightarrow U_2 + r + 3r = 20$$

$$\Rightarrow 5 + 3r = 20 \Rightarrow r = 5 \Rightarrow U_2 = 0$$

$$\text{On a } U_n = U_2 + r(n - 2) = 5n - 10$$

Exercice 2

On considère la suite définie par : $U_n = 3 \times 2^n$

a) Calculer U_1 , U_2 et U_3

b) Exprimer U_{n+1} en fonction de n

c) Démontrer que (U_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme U_0

Solution

On considère la suite définie par : $U_n = 3 \times 2^n$

a) $U_1 = 3 \times 2^1 = 6; U_2 = 3 \times 2^2 = 12$ et $U_3 = 3 \times 2^3 = 24$

b) $U_{n+1} = 3 \times 2^{n+1} = 3 \times 2 \times 2^n = 6 \times 2^n$

c) On a $\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{6 \times 2^n}{3 \times 2^n} = \frac{6}{3} = 2$ donc (U_n) est une suite géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $U_0 = 3 \times 2^0 = 3$

Exercice 3

Soit (U_n) une suite géométrique de raison q

a) On donne $U_0 = -1$ et $q = 2$ calculer U_7

b) On donne $U_0 = 7$ et $q = \frac{1}{2}$ calculer U_5

c) On donne $U_0 = 243$ et $q = \frac{-1}{3}$ calculer U_5

Solution

a) $U_0 = -1$ et $q = 2 \Rightarrow U_7 = U_0 \times q^7 = -1 \times 2^7 = -128$

b) $U_0 = 7$ et $q = \frac{1}{2} \Rightarrow U_5 = U_0 \times q^5 = 7 \times \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{7}{32}$

c) $U_0 = 243$ et $q = \frac{-1}{3} \Rightarrow U_5 = U_0 \times q^5 = 243 \times \left(\frac{-1}{3}\right)^5 = -1$

Exercice 4

Soit (U_n) une suite géométrique de raison q

a) On donne $U_0 = -3$ et $q = 2$ calculer $U_0 + U_1 + \dots + U_{10}$

b) On donne $U_1 = 64$ et $q = 0,5$ calculer $U_1 + U_2 + \dots + U_{12}$

c) On donne $U_1 = 5$ et $q = 0,9$ calculer $U_1 + U_6 + \dots + U_{20}$

Solution

Soit (U_n) une suite géométrique de raison q

a) $U_0 = -3$ et $q = 2 \Rightarrow U_0 + U_1 + \dots + U_{10} = U_0 \times \frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1 - q} = -3 \times \frac{1 - 2^{11}}{1 - 2} = -3 \times (2^{11} - 1) = -6141$

b) $U_1 = 64$ et $q = 0,5 \Rightarrow U_1 + U_2 + \dots + U_{12} = U_1 \times \left(\frac{1 - q^{12-1+1}}{1 - q}\right) = 64 \times \left(\frac{1 - (0,5)^{12}}{1 - 0,5}\right) = \frac{4095}{32}$

c) $U_1 = 5$ et $q = 0,9 \Rightarrow U_1 + U_6 + \dots + U_{20} = U_1 \times \left(\frac{1 - q^{20-1+1}}{1 - q}\right) = 5 \times \left(\frac{1 - (0,9)^{20}}{1 - 0,9}\right) = 43,92$

Exercice 5

Soit (U_n) une suite géométrique de raison q

a) On donne $U_2 = 17$ et $U_3 = 51$ calculer q et U_5

b) On donne $U_1 = 7$ et $U_3 = 112$ calculer q et U_6

c) On donne $U_7 = 11$ et $U_{10} = 377$ calculer q et U_{12}

Solution

$$a) U_2 = 17 \text{ et } U_3 = 51 \quad q = \frac{U_3}{U_2} = \frac{51}{17} = 3; U_5 = U_2 \times q^{5-2} = 17 \times 3^3 = 459$$

$$b) U_1 = 7 \text{ et } U_3 = 112 \text{ on a } U_3 = U_1 q^{3-1} \Rightarrow 112 = 7 \times q^2 \Rightarrow q^2 = \frac{112}{7} \Rightarrow q^2 = 16 \Rightarrow q = 4 \text{ ou } q = -4$$

$$\text{si } q = -4 \text{ alors } U_6 = U_1 q^{6-1} \Rightarrow U_6 = 7 \times (-4)^5 = -1792$$

$$\text{si } q = 4 \text{ alors } U_6 = U_1 q^{6-1} \Rightarrow U_6 = 7 \times (4)^5 = 1792$$

$$c) U_7 = 11 \text{ et } U_{10} = 3773 \text{ on a } U_{10} = U_7 q^{10-7} \Rightarrow 3773 = 11 \times q^3 \Rightarrow q^3 = \frac{3773}{11} \Rightarrow q^3 = 343 \Rightarrow q = 7$$

$$U_{12} = U_{10} \times q^2 = 3773 \times 7^2 = 184877$$

Exercice 6

Un nageur s'apprête à traverser une mer soit une distance de 21 km

Pendant la première heure, il parcourt 2,1 km et à cause de la fatigue, à chaque heure il ne nage que 90% de la distance nagée pendant l'heure précédente

U_n désigne la distance nagée pendant la $n^{\text{ième}}$ heure

a) Déterminer $U_1; U_2; U_5$ et U_{10}

b) Montrer que (U_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison

c) Caculer la distance parcourue en 10 heures ; en 20 heures

Solution

a) On a la distance nagée pendant la première heure est

$$U_1 = 2,1; U_2 = 2,1 \times 0,9 = 1,89; U_5 = 2,1 \times (0,9)^4 = 1,37781; U_{10} = 2,1 \times (0,9)^9 = 0,81358$$

b) On a $U_n = 0,9 \times U_{n-1}$ donc (U_n) est une suite géométrique de raison $q=0,9$

c) La distance parcourue en 10 heures: $U_1 + U_2 + \dots + U_{10} = U_1 \times \left(\frac{1-q^{10}}{1-q} \right) =$

$$2,1 \times \frac{1-(0,9)^{10}}{1-0,9} = 13,678 \text{ km}$$

La distance parcourue en 20 heures: $U_1 + U_2 + \dots + U_{20} = U_1 \times \left(\frac{1-q^{20}}{1-q} \right) =$

$$2,1 \times \frac{1-(0,9)^{20}}{1-0,9} = 18,45 \text{ km}$$

Exercice 7

On considère la suite (U_n) définie par: $U_0 = 2$ et $U_{n+1} = \frac{2}{3}U_n + 1$

1) Calculer $U_1; U_2$

2) On pose $V_n = U_n - 3$ montrer que (V_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme

3) Exprimer V_n en fonction de n puis U_n en fonction de n

Solution

$$1) \text{ On a } U_0=2; U_1=\frac{2}{3}U_0+1 \Rightarrow U_1=\frac{2}{3}\times 2+1=\frac{4}{3}+1=\frac{7}{3}; U_2=\frac{2}{3}U_1+1$$

$$\Rightarrow U_2=\frac{2}{3}\times \frac{7}{3}+1=\frac{14}{9}+1=\frac{23}{9}$$

$$2) V_n=U_n-3 \Rightarrow V_{n+1}=U_{n+1}-3 \Rightarrow V_{n+1}=\frac{2}{3}U_n+1-3 \Rightarrow V_{n+1}=\frac{2}{3}U_n-2 \Rightarrow$$

$$V_{n+1}=\frac{2}{3}(U_n-3) \Rightarrow V_{n+1}=\frac{2}{3}V_n \text{ donc } (V_n) \text{ est une suite géométrique de raison } q=\frac{2}{3}$$

$$\text{et son premier terme } V_0=U_0-3=2-3=-1$$

$$3) \text{ D'après le terme général : } V_n=V_0 \times q^n \Rightarrow V_n=-1 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n \Rightarrow V_n=-\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$\text{On a : } V_n=U_n-3 \Rightarrow U_n=V_n+3 \Rightarrow U_n=-\left(\frac{2}{3}\right)^n+3$$

Exercice 8

Déterminer les limites suivantes :

$$1) \lim_{n \rightarrow +\infty} (-3n^3 + 5n^2 + 6n - 1)$$

$$2) \lim_{n \rightarrow +\infty} (-n^3 - 6n - 1)(n^2 - 4n + 7)$$

$$3) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{7n^9 - 3n^5 + 2n + 2}{n^3 - n}$$

$$4) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-3 + \frac{10}{\sqrt{n}} - \frac{5}{n^2}\right) \left(-3 + \frac{10}{\sqrt{n}} - \frac{5}{n^2}\right)$$

$$5) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[(2 \times (3)^n - 5\left(\frac{-2}{5}\right)^n + 3(-0,25)^n) \right]$$

Solution :

$$1) \lim_{n \rightarrow +\infty} (-3n^3 + 5n^2 + 6n - 1) = \lim_{n \rightarrow +\infty} -3n^3 = -\infty$$

$$2) \lim_{n \rightarrow +\infty} (-n^3 - 6n - 1)(n^2 - 4n + 7) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (-n^3) \times \lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2) = -\infty \times +\infty = -\infty$$

$$3) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{7n^9 - 3n^5 + 2n + 2}{n^3 - n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{7n^9}{n^3} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 7n^6 = +\infty$$

$$4) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-3 + \frac{10}{\sqrt{n}} - \frac{5}{n^2}\right) \left(-3 + \frac{10}{\sqrt{n}} - \frac{5}{n^2}\right) = (-3 + 0 - 0)(-3 + 0 - 0) = -9$$

$$5) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[(2 \times (3)^n - 5\left(\frac{-2}{5}\right)^n + 3(-0,25)^n) \right] =$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} [2 \times (3)^n] + \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[-5\left(\frac{-2}{5}\right)^n + 3(-0,25)^n \right] = +\infty + 0 = +\infty$$

Exercice 9

Soit (U_n) la suite définie par
$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{U_n}{1+2U_n} \end{cases}$$

1) Calculer les termes $U_1; U_2$ et U_3 puis justifier que (U_n) n'est ni arithmétique ni géométrique

2) On admet que $U_n \neq 0$ et on pose $V_n = \frac{1}{U_n}$

- Montrer que (V_n) est une suite arithmétique puis donner son premier terme
- Exprimer (V_n) puis (U_n) en fonction de n
- Exprimer $S_n = V_0 + V_1 + V_2 + \dots + V_n$ en fonction de n , en déduire la somme des entiers naturels impaires inférieurs strictement à 2025

Solution :

1. Calculons les termes U_1 et U_2 puis justifions que (U_n) n'est ni arithmétique ni géométrique

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{U_n}{1+2U_n} \end{cases} \Rightarrow U_1 = \frac{U_0}{1+2U_0} = \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}; U_2 = \frac{U_1}{1+2U_1} = \frac{\frac{1}{3}}{1+\frac{2}{3}} = \frac{1}{3+2} = \frac{1}{5}$$

$$U_1 - U_0 = \frac{1}{3} - 1 = \frac{-2}{3}; U_2 - U_1 = \frac{1}{5} - \frac{1}{3} = \frac{-2}{15} \text{ donc } U_1 - U_0 \neq U_2 - U_1 \text{ donc } (U_n) \text{ n'est pas une SA}$$

$$\frac{U_1}{U_0} = \frac{\frac{1}{3}}{1} = \frac{1}{3}; \frac{U_2}{U_1} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{U_1}{U_0} \neq \frac{U_2}{U_1} \text{ donc } (U_n) \text{ n'est pas une SG}$$

2. On pose $V_n = \frac{1}{U_n}$

a) Montrons que (V_n) est une suite arithmétique puis donnons son premier terme

$$V_n = \frac{1}{U_n} \Rightarrow V_{n+1} = \frac{1}{U_{n+1}} = \frac{1+2U_n}{U_n} \Rightarrow V_{n+1} - V_n = \frac{1+2U_n}{U_n} - \frac{1}{U_n} = \frac{2U_n}{U_n} = 2$$

donc (V_n) est une suite arithmétique de raison $r = 2$ et premier terme $V_0 = \frac{1}{U_0} = 1$

b) Exprimons (V_n) puis (U_n) en fonction de n

$$V_n = V_0 + rn = 1 + 2n \Rightarrow \boxed{V_n = 1 + 2n} \text{ et comme } U_n = \frac{1}{V_n} \Rightarrow \boxed{U_n = \frac{1}{1+2n}}$$

c) Exprimons $S_n = V_0 + V_1 + V_2 + \dots + V_n$ en fonction de n , en déduire la somme des entiers naturels impaire inférieur à 2025

$$S_n = V_0 + V_1 + V_2 + \dots + V_n = \frac{(n+1)(V_0 + V_n)}{2} = \frac{(n+1)(1+1+2n)}{2} = \frac{2(n+1)^2}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{S_n = (n+1)^2}$$

La somme des entiers naturels impairs est inférieure à 2025:

$$S = 1 + 3 + 5 + \dots + 2023, \quad 1 + 2n = 2023 \Rightarrow n = 1011 \Rightarrow S = S_{1011} = (1011+1)^2 = 1012^2 = 1024144$$

Exercice 10

Soit (U_n) la suite définie par

$$\begin{cases} U_0 = \frac{1}{2} \\ U_{n+1} = \frac{4U_n + 2}{U_n + 5} \end{cases}$$

1. Calculer les termes U_1 ; U_2 et U_3 puis justifier que (U_n) n'est ni arithmétique ni géométrique
2. On pose $V_n = \frac{1-U_n}{2+U_n}$
 - a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique puis donner son premier terme.
 - b) Exprimer (V_n) puis (U_n) en fonction de n
3. Exprimer $S_n = V_0 + V_1 + V_2 + \dots + V_n$ en fonction de n ,

Solution

1. Calculons les termes U_1 et U_2 puis justifions que (U_n) n'est ni arithmétique ni géométrique

$$\begin{cases} U_0 = \frac{1}{2} \\ U_{n+1} = \frac{4U_n + 2}{U_n + 5} \end{cases} \Rightarrow U_1 = \frac{4U_0 + 2}{U_0 + 5} = \frac{2+2}{\frac{1}{2}+5} = \frac{8}{1+10} = \frac{8}{11}; \quad U_2 = \frac{4U_1 + 2}{U_1 + 5} = \frac{\frac{32}{11}+2}{\frac{8}{11}+5} = \frac{32+22}{8+55} = \frac{54}{63} = \frac{6}{7}$$

$$2) \text{ On pose } V_n = \frac{1-U_n}{2+U_n}$$

$$U_1 - U_0 = \frac{8}{11} - \frac{1}{2} = \frac{5}{22}; \quad U_2 - U_1 = \frac{6}{7} - \frac{8}{11} = \frac{10}{77} \quad \text{et} \quad \frac{5}{22} \neq \frac{10}{77} \quad \text{donc } (U_n) \text{ n'est pas une SA}$$

$$\frac{U_1}{U_0} = \frac{8}{11} \times \frac{2}{1} = \frac{16}{11}; \quad \frac{U_2}{U_1} = \frac{6}{7} \times \frac{11}{8} = \frac{33}{28} \quad \text{et} \quad \frac{16}{11} \neq \frac{33}{28} \quad \text{donc } (U_n) \text{ n'est pas une SG}$$

- a) Montrons que (V_n) est une suite géométrique puis donnons son premier terme

$$V_n = \frac{1-U_n}{2+U_n} \Rightarrow V_{n+1} = \frac{1-U_{n+1}}{2+U_{n+1}} = \frac{1-\frac{4U_n+2}{U_n+5}}{2+\frac{4U_n+2}{U_n+5}} = \frac{\frac{U_n+5-4U_n-2}{U_n+5}}{\frac{2U_n+10+4U_n+2}{U_n+5}} =$$

$$\frac{3-3U_n}{12+6U_n} = \frac{3(1-U_n)}{6(2+U_n)} = \frac{1}{2} V_n \Rightarrow \text{donc } (V_n) \text{ est une suite géométrique}$$

$$q = \frac{1}{2} \quad \text{et premier terme } V_0 = \frac{1-U_0}{2+U_0} = \frac{1-\frac{1}{2}}{2+\frac{1}{2}} = \frac{2-1}{4+1} = \frac{1}{5}$$

b) Exprimons (V_n) puis (U_n) en fonction de n

$$V_n = V_0 \times q^n = \frac{1}{5} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \Rightarrow \boxed{V_n = \frac{1}{5} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n} \text{ et comme } V_n = \frac{1-U_n}{2+U_n} \Rightarrow 2V_n + U_n V_n = 1 - U_n \Rightarrow$$

$$U_n V_n + U_n = 1 - 2V_n \Rightarrow U_n (V_n + 1) = 1 - 2V_n \Rightarrow U_n = \frac{1 - 2V_n}{1 + V_n} \Rightarrow U_n = \frac{1 - 2\left(\frac{1}{5} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{1 + \frac{1}{5} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n} =$$

$$\frac{5 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n}{5 + \left(\frac{1}{2}\right)^n} = \frac{5 \times (2)^n - 2}{5 \times (2)^n + 1} \Rightarrow \boxed{U_n = \frac{5 \times (2)^n - 2}{5 \times (2)^n + 1}}$$

c) Exprimons $S_n = V_0 + V_1 + V_2 + \dots + V_n$ en fonction de n ,

$$S_n = V_0 + V_1 + V_2 + \dots + V_n = \frac{V_0(1-q^{n+1})}{1-q} = \frac{1}{5} \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{2 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{5} = \frac{2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{5} = \frac{2^{n+1} - 1}{5 \times 2^n} =$$

$$\Rightarrow \boxed{S_n = \frac{2^{n+1} - 1}{5 \times 2^n}}$$

2. Exercices non corrigés :

Exercice 1

On considère la suite (U_n) définie par : $U_n = n^2 - 4n - 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

a) Calculer $U_0, U_1, U_2; U_3$ et U_4 .

b) Montrer que (U_n) est minoré par -7 .

c) Etudier le sens de variation de (U_n)

Exercice 2

On considère la suite (U_n) définie par $\begin{cases} U_0 = -2 \\ U_{n+1} = U_n - 4 \end{cases}$

a) Calculer $U_0, U_1, U_2; U_3$ et $U_4 \dots$

b) Etudier le sens de variation de (U_n)

c) Quel est la nature de (U_n) ?

Exercice 3

Montrer que les suites suivantes sont bornées

$$U_n = \frac{1}{n+4}, \quad n \geq 0 \quad ; \quad V_n = \frac{2n+3}{n+4}, \quad n \geq 0 \quad ; \quad W_n = \frac{-2n+2}{n-4}, \quad n \geq 5$$

Exercice 4

Etudier le sens de variations de la suite (U_n) dans les cas suivants :

1) $U_n = n^2$ pour $n \in \mathbb{N}$

2) $U_n = 3n - 5$ pour $n \in \mathbb{N}$

3) $U_n = 1 + \frac{1}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$

4) $U_n = \frac{1}{n+4}$ pour $n \in \mathbb{N}$

5) $U_n = \frac{n}{n+1}$ pour $n \in \mathbb{N}$

6) $U_n = 2n^2 - 1$ pour $n \in \mathbb{N}$

Exercice 5

1) Calculer les 5 premiers termes de (U_n) et étudier son sens de variation dans les cas :

a) $U_n = 4n - 2$; b) $U_n = 2n^2 - 5n + 3$; c) $U_n = \frac{n-1}{2n+7}$; d) $U_n = n^3 - 4$

2) Calculer la limite de (U_n) dans chacun des cas précédents.

Exercice 6 :

Soit $U_{n+1} = \frac{9}{6-U_n}$; $U_0 = -1$; On pose : $V_n = \frac{1}{U_n - 3}$

1)a) Calculer $U_1 ; U_2 ; U_3 ; V_0 ; V_1 ; V_2$ et V_3

b) Montrer que (U_n) n'est ni arithmétique ni géométrique

c) Que semble être la nature de (V_n) ?

2)a) Montrer que (V_n) est une suite arithmétique.

b) Exprimer V_n et U_n en fonction de n .

3) a) Calculer la somme : $S_n = V_0 + V_1 + V_2 + \dots + V_n$

b) Calculer les limites de (V_n) ; (U_n) et (S_n) .

Exercice 7 :

Soit la suite : $U_{n+1} = \frac{2}{1+U_n}$ et $U_1 = 3$; On pose $V_n = \frac{U_n - 1}{U_n + 2}$

1)a) Calculer $U_1 ; U_2 ; U_3 ; V_0 ; V_1 ; V_2$ et V_3

b) Montrer que (U_n) n'est ni arithmétique ni géométrique

c) Que semble être la nature de (V_n) ?

2)a) Montrer que V_n est une suite géométrique.

b) Exprimer V_n et U_n en fonction de n .

4) a) Calculer la somme : $S_n = V_0 + V_1 + V_2 + \dots + V_n$

b) Calculer les limites de (V_n) ; (U_n) et (S_n) .

Exercice 8 :

Soit la suite $U_{n+1} = -1 - \frac{1}{4U_n}$ et $U_0 = \frac{1}{2}$; on pose $V_n = \frac{2}{2U_n + 1}$

1) Calculer U_1 , U_2 , V_0 , V_1 et V_2 .

2) Calculer $V_{n+1} - V_n$ puis conclure sur la nature de (V_n) .

3) Exprimer U_n et V_n en fonction de n puis calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.

Exercice 9

Déterminer les limites suivantes :

1- $\lim_{n \rightarrow +\infty} (2n^4 + n^2 - 3n - 1)$

2- $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2 - 4n^3 - 6)(2n^2 - n + 2)$

3- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^3 - 5n^5 + 3n + 1}{3n^3 - n - 9}$

4- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{3}{\sqrt{n+1}} - \frac{5}{n^2}\right) \left(-5 + \frac{3}{\sqrt{n}} - \frac{7}{n^2}\right)$

5) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[(2 \times (5)^n - 3 \left(\frac{-1}{3}\right)^n + 5(0,45)^n) \right]$

Exercice 10

En 2025, la population d'une ville est de 15000 personnes et augmente régulièrement de 500 individus chaque année (en tenant compte des décès et des naissances)

1) Quel sera le nombre d'habitants en 2026 ? en 2027 ?

2) Soit U_n le nombre d'habitants l'année : $2025 + n$ ($U_0 = 15000$)

a) Exprimer U_{n+1} en fonction de U_n en déduire la nature de U_n .

b) Exprimer U_n en fonction de n , en déduire le nombre d'habitants en 2030.

3) En quelle année la population atteindra-t-elle 20000 habitants ?

Exercice 11

On considère la suite (U_n) définie par $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = 3U_n - 4 \end{cases}$

a) Calculer U_0 ; U_1 ; U_2 ; U_3 et U_4 ..

b) Soit $V_n = U_n - 2$

Montrer que V_n est une suite géométrique

c) Exprimer V_n et U_n en fonction de n .

d) Déterminer les limites de V_n et U_n .

I. Langage des ensembles : (Rappels)

1. Cardinal d'un ensemble fini :

a. Définitions :

Le cardinal d'un ensemble fini E noté $\text{card}(E)$ est le nombre des éléments de cet ensemble.

□ Le cardinal de l'ensemble vide est 0 : $\text{card}(\Phi) = 0$

□ Le cardinal d'un singleton est 1.

□ Le cardinal d'un ensemble contenant exactement deux éléments est 2.

b. Vocabulaire et Propriétés :

Si A est une partie d'un ensemble Ω (un sous-ensemble de Ω), on écrit $A \subseteq \Omega$:

alors $0 \leq \text{card}(A) \leq \text{card}(\Omega)$

Soient A et B deux ensembles finis :

$$1. \text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$$

Et si $A \cap B = \emptyset$, alors, $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B)$

$$2. \text{card}(A - B) = \text{card}(A) - \text{card}(A \cap B)$$

Si $B \subset A$, alors, $\text{card}(A - B) = \text{card}(A) - \text{card}(B)$

3. Si $A \subset \Omega$, $\bar{A} = \Omega - A$, on a alors ;

$$\text{card}(\bar{A}) = \text{card}(\Omega) - \text{card}(A) ;$$

$$\bar{A} \cap \bar{B} = \overline{A \cup B} \text{ et } \bar{A} \cup \bar{B} = \overline{A \cap B}$$

(Formules de Morgan)

Exemple :

Soit E l'ensemble des chiffres :

$$E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\},$$

$$F = \{0, 2, 3, 5, 7\}, G = \{0, 1, 2, 3, 6\},$$

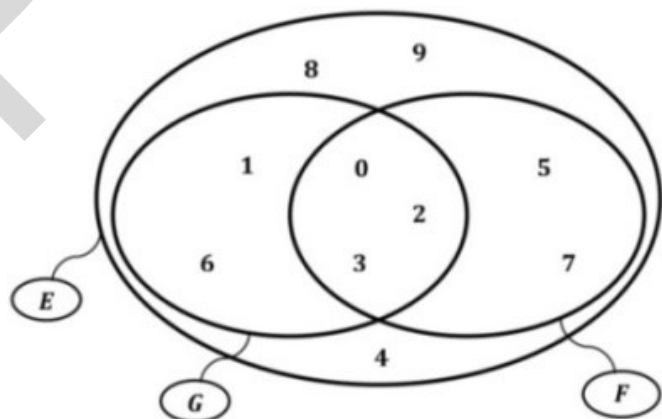


Diagramme de Venn

$$F \cap G = \{0, 2, 3\} ; F \cup G = \{0, 1, 2, 3, 5, 6, 7\} ; \bar{F} = \{1, 4, 6, 8, 9\},$$

$$\bar{G} = \{4, 5, 7, 8, 9\} ; \overline{F \cup G} = \{4, 8, 9\} ; \overline{F \cap G} = \{1, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

$$\bar{F} \cap \bar{G} = \{4, 8, 9\} ; \bar{F} \cup \bar{G} = \{1, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} ; \text{card}(E) = 10 ; \text{card}(F) = 5$$

$$\text{card}(G) = 5 ; \text{card}(F \cap G) = 3 ; \text{card}(F \cup G) = 7$$

$$\text{card}(\bar{F}) = 5 ; \text{card}(\bar{G}) = 5 ; \text{card}(\bar{F} \cap \bar{G}) = 3 ; \text{card}(\bar{F} \cup \bar{G}) = 7.$$

c. Produits cartésiens d'ensembles :

Soit A et B deux ensembles ; les ensembles $A \times B$ et $B \times A$ désignent les produits cartésiens de A et B :

$$A \times B = \{(a; b) : a \in A \text{ et } b \in B\} ; B \times A = \{(b; a) / b \in B \text{ et } a \in A\}.$$

De plus $\text{card}(A \times B) = \text{card}(A) \times \text{card}(B)$

Exemple 1

Un code est composé d'une lettre des 26 lettres de l'alphabet français suivie d'un chiffre de l'ensemble $E = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$,

Quel est le nombre de codes possibles

Solution

On choisit une lettre parmi 26 lettres donc on a 26 choix et pour chaque lettre choisie, on a dix choix pour le chiffre ; donc on a le produit cartésien des cardinaux de ces deux ensembles : $26 \times 10 = 260$

2. Outil de dénombrement :

a. Diagramme de Venn

Exemple :

Dans un groupe de 45 élèves, 25 parlent français, 17 parlent anglais et 8 parlent les deux langues

Déterminer le nombre d'élèves :

- a) ne parlant aucune des deux langues
- b) qui parlent une seule de ces deux langues.

Solution :

Sur le diagramme suivant E représente l'ensemble des 45 élèves.

A et F les sous-ensembles des élèves qui parlent respectivement le français et l'anglais.

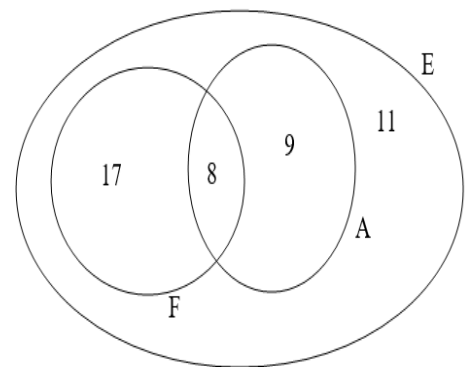
On peut illustrer cette situation à l'aide du diagramme suivant appelé diagramme de Venn.

On peut voir clairement sur le diagramme qu'il y a

11 élèves ne parlant ni le français ni l'anglais et

qu'on a : $9 + 17 = 26$ élèves qui parlent une seule langue

On remplit ce diagramme en commençant par l'intersection puis on complète chaque ensemble.



b. Diagramme de Carrol

Exemple :

Le tableau suivant donne la répartition de 1000 personnes selon la vaccination contre une maladie M

	Vacciné	Non vacciné	Total
Malade		100	
Non malade		200	750
Total			

1. Recopier puis compléter le tableau ci-dessus.
2. En utilisant le tableau répondre aux questions suivantes :
 - a. Quel est le nombre de personnes vaccinés ?

b. Quel est le nombre de personnes vaccinés et malades ?

Solution :

1. Compléter le tableau

	Vacciné	Non vacciné	Total
Malade	150	100	250
Non malade	550	200	750
Total	700	300	1000

2) a) Le nombre de personnes vaccinés est de 700 ?

b) Le nombre de personnes vaccinés et malades est de 150

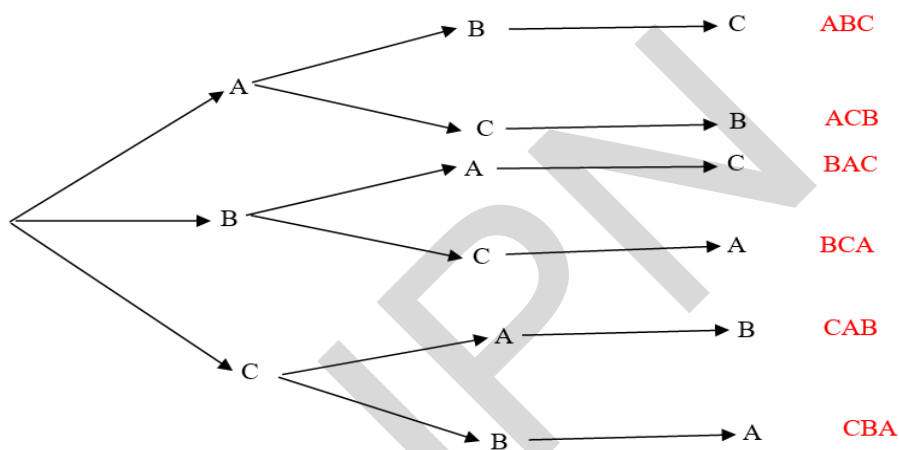
c. Arbres de possibilités

Exemple :

Combien peut-on former de mots de trois lettres différentes avec les lettres du mot BAC

Solution

Pour donner la liste des résultats possibles on utilise l'arbre de possibilités suivant



On a ainsi six résultats possibles : ABC ; ACB ; BAC ; BCA ; CAB et CBA

d. Tableau à double entrée :

Le tableau à double entrée permet de traiter deux grandeurs de manières simultanées ; une indiquée en ligne et l'autre en colonne.

Exemple : On jette 2 tétraèdres équilibrés distincts à quatre faces, numérotées de 1 à 4, l'une après l'autre. On note le résultat obtenu de la face cachée

Quel est le nombre de possibilités ?

Dé 2 \ Dé 1	1	2	3	4
1	(1 ; 1)	(1 ; 2)	(1 ; 3)	(1 ; 4)
2	(2 ; 1)	(2 ; 2)	(2 ; 3)	(2 ; 4)
3	(3 ; 1)	(3 ; 2)	(3 ; 3)	(3 ; 4)
4	(4 ; 1)	(4 ; 2)	(4 ; 3)	(4 ; 4)

Le nombre de possibilité est 16 soit $4 \times 4 = 16$.

Exemples

Exemple 1

Les numéros du réseau téléphonique national comportent 8 chiffres commençant par 2 ; 3 ou 4. Quelle est la capacité théorique de ce réseau ?

Solution

Un numéro de téléphone est un nombre de 8 chiffres d'éléments de :

$$\{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 \}$$

Pour chaque numéro, on choisit le premier chiffre à gauche parmi 3 et tous les 7 chiffres restant parmi 10 donc la capacité du réseau est de $3 \times 10^7 = 30\,000\,000$

Exemple 2

Une assemblée de 30 personnes doit élire un bureau composé de quatre membres (un président ; un vice-président ; un secrétaire et un trésorier).

Combien y a-t-il de bureaux possibles, sachant que chacune des 30 personnes est éligible et à n'importe quel poste ?

Solution

Elire un bureau revient à choisir un président parmi 30, le vice-président parmi 29, le trésorier parmi 28 et le secrétaire parmi 27 d'où le nombre de bureaux possibles :

$$30 \times 29 \times 28 \times 27 = 657720$$

II. Probabilités

1. Définition -Vocabulaire :

a. Expérience aléatoire :

C'est une expérience qu'on ne peut pas prévoir le résultat (dépend seulement du hasard)

b. L'univers :

C'est l'ensemble Ω des possibilités d'une expérience aléatoire -

c. Langage des événements

Soit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ l'ensemble des éventualités (résultats possibles) d'une expérience aléatoire

- ☐ On appelle événement, toute partie de Ω
- ☐ Ω est l'événement certain ; $\emptyset$ est l'événement impossible
- ☐ $\{\omega_i\}$ est un événement élémentaire ;
- ☐ L'événement $A \cup B$ (A ou B), la réunion de deux événements A et B qui est réalisé si l'un au moins est réalisé
- ☐ L'événement $A \cap B$ (A et B), l'intersection de deux événements A et B qui est réalisé si les deux événements sont réalisés simultanément

Lorsque $A \cap B = \emptyset$ on dit que ces deux événements sont disjoints ou incompatibles.

- ☐ On appelle événements contraires d'un événement A et on note $\bar{A}$ l'événement qui est réalisé lorsque A n'est pas réalisé

Exemple

On lance un dé équilibré à 6 faces et on regarde le numéro sur la face supérieure.

Préciser la nature de chacun des événements suivants (élémentaire, impossible, certain, classique)

A "on obtient 2"

B "on obtient un nombre négatif"

C "on obtient un chiffre strictement supérieur à 5"

D "on obtient un entier"

E "on obtient un nombre pair"

Solution

- ☐ L'événement A est composé d'un seul élément donc c'est un événement élémentaire
- ☐ L'événement B ne peut pas être réalisé donc B est l'événement impossible
- ☐ L'événement C est composé d'un seul élément donc c'est un événement élémentaire
- ☐ L'événement D est composé de toutes les éventualités donc D est l'événement certain
- ☐ L'événement E est composé de 2, 4 et 6 donc E est un événement classique

2. Calcul de probabilité

On considère $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$

On définit la probabilité p sur Ω en associant à chaque éventualité ω_i un nombre réel appartenant à l'intervalle $[0; 1]$ on pose: $p(\omega_i) = p_i$

☐ Pour tout $0 \leq i \leq n$ $0 \leq p_i \leq 1$

☐ $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$

☐ Soit $A = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k\}$ on appelle probabilité de A la somme des probabilités des éventualités de A : $p(A) = p(\omega_1) + p(\omega_2) + \dots + p(\omega_k)$ et on a : $p(\Omega) = 1$; $p(\Phi) = 0$

Cas particulier

Soit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$

Lorsque les éventualités ont toute la même probabilité, on dit qu'elles sont équiprobables.

La probabilité de chaque éventualité est $p = \frac{1}{\text{card}(\Omega)} = \frac{1}{n}$

Dans ce cas, la probabilité d'un événement A est $p(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$

Propriétés

☐ Pour tout événement A on a ; $0 \leq p(A) \leq 1$

☐ $\bar{A}$ étant le contraire de A on a ; $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$

□ Si A et B sont deux événements quelconques, on a ; $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

Remarque

Si A et B sont deux événements incompatibles, on a $A \cap B = \emptyset$, $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

Exemple

On lance un dé non truqué à six faces numérotées de 1 à 6 , .

Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

A : « avoir un nombre pair » ; B : « avoir un multiple de 3 » ;

C : « avoir un nombre supérieur à 2 »

Solution

L'univers de cette épreuve est $\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$.

$$\square A = \{2 ; 4 ; 6\} ; \quad p(A) = \frac{\text{card}A}{\text{card}\Omega} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\square B = \{3 ; 6\} ; \quad p(B) = \frac{\text{card}B}{\text{card}\Omega} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\square C = \{3 ; 4 ; 5 ; 6\} ; \quad p(C) = \frac{\text{card}C}{\text{card}\Omega} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

III. Exercices

1. Exercices corrigés :

Exercice 1

Combien de menus différents peut-on composer si on a le choix entre 3 entrées, 2 plats et 4 desserts ?

Solution

Notons E l'ensemble des trois entrées disponibles $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ ainsi $\text{card}(E) = 3$

Notons P l'ensemble des deux plats disponibles $P = \{p_1, p_2\}$ ainsi $\text{card}(P) = 2$

Notons D l'ensemble des quatre desserts disponibles $D = \{d_1, d_2, d_3, d_4\}$ ainsi $\text{card}(D) = 4$.

Un menu est constitué d'un triplé de trois éléments choisis respectivement dans E , P et D .

On effectue donc le produit cartésien de ces trois ensembles.

Le nombre de menus que l'on peut composer est donc égal

$$\text{card}(E) \times \text{card}(P) \times \text{card}(D) = 3 \times 2 \times 4 = 24 \text{ .}$$

On peut donc composer 24 menus différents

Exercice 2

Deux équipes de 12 et 15 joueurs échangent une poignée de mains à la fin d'un match : chaque joueur d'une équipe serre la main de chaque joueur de l'autre équipe.

Combien de poignées de main ont été échangées ?

Solution

Une poignée de mains est un couple constitué d'un premier élément choisi dans l'ensemble constitué des 12 joueurs de la première équipe, et d'un deuxième élément choisi dans l'ensemble constitué des 15 joueurs de la deuxième équipe.

Il y a donc $12 \times 15 = 180$ poignées de mains

Exercice 3

Un questionnaire à choix multiple autorisant une seule réponse par question comprend 6 questions. Pour chaque question, on propose 4 réponses possibles.

De combien de façons peut-on répondre à ce questionnaire ?

Solution

Une réponse à ce QCM peut être désignée par un mot de 6 lettres ordonnées dont le rang de chaque lettre désigne la réponse à la question du même rang. (on peut choisir la même lettre plusieurs fois).

Ces lettres sont choisies dans l'ensemble $\Omega = \{A; B; C; D\}$ avec la possibilité de répéter la même lettre.

Dans chaque étape on a: 4 choix donc on a $4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 4^6 = 4096$ réponses possibles à ce QCM

Exercice 4

A l'occasion d'une compétition sportive groupant 18 athlètes, on attribue une médaille d'or, une d'argent, une de bronze.

Combien y-a-t-il de distributions possibles (avant la compétition)

Solution

Un tel podium est un choix ordonné de 3 athlètes choisis parmi l'ensemble des 18 athlètes (L'ordre compte et il ne peut y avoir de répétition, un athlète ne pouvant remporter deux médailles simultanément).

Il existe donc $18 \times 17 \times 16 = 4896$ podiums différents.

Exercice 5

Un groupe d'élèves de terminale (LM) constitue le bureau d'une association, ce bureau est composé d'un président, d'un secrétaire et d'un trésorier.

Combien y-a-t-il de bureaux possibles ? (il y a 24 élèves dans la classe)

Solution

Le fait d'attribuer un rôle à chaque élève induit un ordre dans le choix des trois élèves.

Un bureau est donc de 3 élèves choisis parmi l'ensemble des 24 élèves.

Le premier parmi 24, le deuxième de 23 et le 3^{ème} de 22, Il existe donc : $24 \times 23 \times 22 = 12144$ bureaux différents.

Exercice 6

Six personnes choisissent chacune mentalement un nombre entier compris entre 1 et 6.

1) Combien de résultats peut-on obtenir ?

2) Combien de résultats ne comportant pas deux fois le même numéro peut-on obtenir ?

Solution

- 1) Un tel choix est donné par un nombre de 6 chiffres, chacun choisi entre 1 et 6.
Pour connaître le nombre de choix, on effectue le produit cartésien de l'ensemble $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ six fois par lui-même.
Il y a donc $6^6 = 46656$ choix possibles
- 2) Si les six chiffres doivent être distincts, un tel choix sera donné par le choix du premier de 6 le suivant de 5 et ainsi de suite, Il y aura donc $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$

Exercice 7

Les nombres : 5 ; -1 et 3 constituent la solution d'un système de 3 équations à trois inconnues, donner tous les triplets différents qui peuvent être la solution de ce système

Solution

Les triplets différents qui peuvent être la solution de ce système sont constitués de toutes les permutations de ces trois nombres

$$S = \{(5, -1, 3), (5, 3, -1), (-1, 5, 3), (-1, 3, 5), (3, -1, 5), (3, 5, -1)\}$$

Exercice 8

On tire une carte dans un jeu de 32 cartes.

Soit E l'évènement : on tire un as. Calculer la probabilité de E

Solution

Il a 32 issues possibles car il existe 32 façons différentes de tirer une carte

L'évènement E (on tire un as) possède 4 issues possibles.

La probabilité de E est donc $p(E) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$

Exercice 9

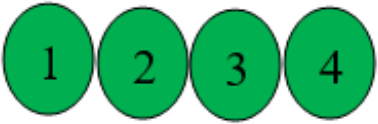
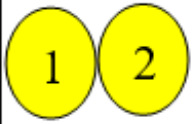
Une urne contient 9 boules dont quatre boules vertes numérotées de 1 à 4, trois boules rouges numérotées de 1 à 3 et deux boules jaunes numérotées 1 à 2. On tire une boule de cette urne.

1°/ Calculer le nombre de tirages possibles.

2°/ Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

- La boule tirée est jaune
- La boule tirée est rouge.
- La boule tirée porte un nombre pair
- La boule tirée porte un numéro supérieur strictement à 2

Solution

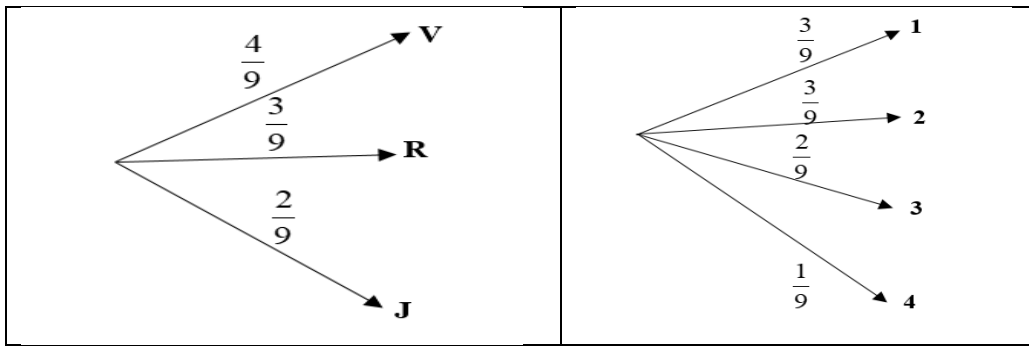
		
4 boules vertes	3 rouges	2 jaunes

- 1) Le nombre de tirages possibles :

L'ensemble des issues est $\Omega = \{R_1 ; R_2 ; R_3 ; V_1 ; V_2 ; V_3 ; V_4 ; J_1 ; J_2\}$

Le nombre de tirages possibles est donc : 9

- 2) On peut utiliser les arbres suivants



- a) La probabilité que la boule tirée est jaune est : $\frac{2}{9}$
- b) La probabilité que la boule tirée est rouge est : $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.
- c). La probabilité que la boule tirée porte un nombre pair est : $\frac{3}{9} + \frac{1}{9} = \frac{4}{9}$
- d) La boule tirée porte un numéro supérieur strictement à 2 est $\frac{2}{9} + \frac{1}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

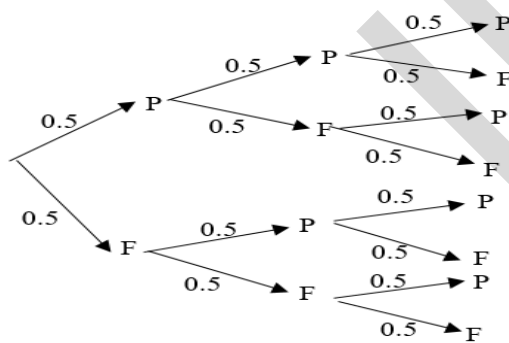
Exercice 10

On lance une pièce de monnaie trois fois de suite.

- 1) Trace un arbre permettant de visualiser toutes les issues possibles.
- 2) Déterminer la probabilité de :
 - a) "Trois fois pile" ; b) "Exactement deux fois pile" ; c) "Au moins une fois face"

Solution

- 1) Arbre des issues



- 2) D'après l'arbre, on a le nombre des issues est: 8 qui sont :

$$\Omega = \{PPP ; PPF ; PFF ; FPP ; FPF ; FFP ; FFF\}$$

- a) La probabilité de "trois fois pile" est $\frac{1}{8}$

- b) Dans l'ensemble Ω on a 3 possibilités donnant exactement deux fois pile parmi 8

Donc la probabilité est $\frac{3}{8}$

- b) La probabilité d'obtenir au moins une fois face est la probabilité de l'évènement contraire de n'obtenir aucune face donc sa probabilité est $\frac{7}{8}$

Exercice 11

Soit A l'ensemble des nombres de 4 chiffres, le premier étant non nul

- 1) Calculer le nombre d'éléments de A .
- 2) Dénombrer les éléments de A .
 - a) Composés de 4 chiffres distincts
 - b) Composés d'au moins deux chiffres identiques
 - c) Composés de quatre chiffres distincts autre que 5 et 7.

Solution

- 1) Les éléments de A sont tous les entiers naturels 1000 à 9999.

Il y en a donc 9000. Ainsi $\text{card}(A) = 9000$

- 2) a) Un nombre de A est un élément du produit cartésien

- d'un élément de : $\Omega' = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ en guise de premier chiffre, il y a 9 possibilités

- Une fois cet élément choisi, il va falloir choisir les 3 chiffres restants parmi 9 seulement (aucun ne pouvant être égal au premier chiffre choisi) on doit donc choisir 3 éléments ordonnés pris dans un ensemble de 9 chiffres.

Il y a $9 \times 8 \times 7 = 504$.

Le nombre d'éléments de A composés de quatre chiffres distincts vaut

$$9 \times 504 = 4536$$

b) Le contraire de (au moins deux chiffres identiques) est (quatre chiffres distincts), le nombre de A possédants (au moins deux chiffres identiques) est égal au nombre total d'éléments de A diminué du nombre d'éléments possédants (au moins deux chiffres identiques) vaut

$$9000 - 4536 = 4464$$

c) Un nombre de A composé de quatre chiffres distincts autre que 5 et 7 est un élément du produit cartésien :

- d'un élément de $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9\}$ en guise de premier chiffre. il y a 7 possibilités

- Une fois cet élément choisi, il va falloir choisir les 3 chiffres restants parmi 7 seulement (aucun ne pouvant être égal au premier chiffre choisi, ni égal à 5 ou 7).

On doit donc choisir de 3 éléments ordonnés pris dans un ensemble de 7 chiffres.

Il y a $7 \times 6 \times 5 \times 4 = 840$

Exercice 12

Un sachet contient deux bonbons à la menthe, trois à l'orange et cinq au citron.

On tire, au hasard, un bonbon du sachet et on définit les événements suivants:

A " le bonbon est à la menthe "

B " le bonbon est à l'orange "

C " le bonbon est au citron "

- 1) Déterminer $p(A)$; $p(B)$ et $p(C)$
- 2) Représenter l'expérience par un arbre pondéré

Solution

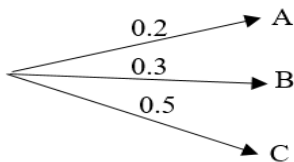
- 1) Comme le bonbon est tiré au hasard, alors chaque bonbon a la même chance d'être tiré
Le nombre des issues possibles est 10 ($2+3+5=10$)

L'évènement A est constitué de deux issues favorables, on a donc $p(A) = \frac{2}{10} = 0.2$

L'évènement B est constitué de trois issues favorables, on a donc $p(B) = \frac{3}{10} = 0.3$

L'évènement C est constitué de cinq issues favorables, on a donc $p(C) = \frac{5}{10} = 0.5$

2) Arbre de possibilités



Exercice 13

On lance un dé à six faces et on considère les événements suivants :

A : « obtenir un multiple de 2 » ; B « obtenir un nombre inférieur ou égal à 4 »

Calculer les probabilités des événements : A ; B ; $A \cap B$ et $A \cup B$.

Solution

L'évènement $A \cap B$: (Obtenir un multiple de 2 inférieur ou égal à 4)

On a $A = \{2 ; 4 ; 6\}$; $B = \{1 ; 2 ; 3 ; 4\}$ donc $A \cap B = \{2 ; 4\}$

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} ; p(B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} ; p(A \cap B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \text{ et}$$

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$$

2. Exercices non corrigés

Exercice 1 :

Combien y-a-t-il de manières de constituer la liste de passage d'une classe de 24 élèves ?

Exercice 2 :

Combien y-a-t-il d'anagrammes de chacun des mots :

CIBLE ; TRAVAIL ; ANAGRAMME et MATHEMATIQUES

Exercice 3 :

De combien de façons peut-on choisir 3 femmes et 2 hommes parmi 10 femmes et 5 hommes

Exercice 4 :

Une urne contient des boules blanches, noires et rouges. On note

A : « Tirer une boule blanche »

B : « Tirer une boule ni blanche ni rouge »

C : « Tirer une boule noire ou rouge »

- 1) A et B sont-ils incompatibles ?
- 2) B et C sont-ils incompatibles ?
- 3) Traduire par une phrase ne comportant pas de négation $\bar{A}$ et $\bar{B}$

Exercice 5 :

Lors du jet de deux dés cubiques portant les chiffres de 1 à 6, on s'intéresse aux événements suivants :

A (La somme obtenue est au moins ou égale à 5)

B (La somme obtenue est au plus égale à 5)

C (La somme obtenue est strictement inférieure à 3)

- 1) A et B sont-ils contraires ?
- 2) $\bar{B}$ et C sont-ils incompatibles ?
- 3) Calculer les probabilités des événements A ; B et C .

Exercice 6 :

On choisit une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes. On note :

A l'évènement : (La carte choisie est un pique)

B l'évènement : (La carte choisie est rouge)

C l'évènement : (La carte choisie est une figure)

- 1) Déterminer les probabilités des événements suivants :

A ; B ; C ; $A \cap B$; $B \cap C$; $A \cup B$ et $A \cup C$

- 2) Déterminer la probabilité de l'évènement

D (La carte choisie n'est ni pique ni figure)

Exercice 7 :

On jette une pièce de monnaie 3 fois de suite.

- 1) Donner la liste de tous les résultats possibles en notant P pour pile et F pour face
- 2) Donner la probabilité des événements suivants :
 - A (Le tirage ne comporte que des PILES)
 - B (Le tirage comporte au moins une fois FACE)

Exercice 8 :

Dans une assemblée de 250 personnes, il y a des hommes portant des cravates ou ayant des lunettes et il y a 120 hommes qui portent la cravate, 85 hommes ont des lunettes, dont 50 portent la cravate

On discute avec une personne choisie au hasard dans cette assemblée

- 1) Quelle est la probabilité que ce soit un homme portant la cravate ?
- 2) Quelle est la probabilité que ce soit un homme portant la cravate et qui a des lunettes ?
- 3) Quelle est la probabilité que ce soit un homme qui a des lunettes ou portant la cravate ?
- 4) Quelle est la probabilité de discuter avec une personne qui n'est ni un homme qui a des lunettes ni un homme portant la cravate ?

Exercice 9 :

Lors d'un référendum, deux questions étaient posées.

65% des personnes ont répondu (oui) à la première question, 51% ont répondu (oui) à la seconde question et 46% ont répondu (oui) aux deux questions :

- 1) Quelle est la probabilité qu'une personne ait répondu (oui) à l'une ou l'autre des questions ?
- 2) Quelle est la probabilité qu'une personne ait répondu (non) aux deux questions ?

Exercice 10 :

On lance un dé à 6 faces : on note p_i la probabilité de sortie de la face marquée i .

Ce dé est truqué de telle sorte que les probabilités de sorties des faces sont :

$$p_1 = 0,1 ; p_2 = 0,2 ; p_3 = 0,3 ; p_4 = 0,15 \text{ et } p_5 = 0,1$$

Quelle est la probabilité de sortie de la face marquée 6 ?

Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre pair ?

Exercice 11 :

Le tableau suivant donne la répartition de 150 stagiaires en fonction de la langue parlée et de l'activité pratiquée.

	Tennis	Football	Handball
Arabe	45	18	27
Français	33	9	18

On choisit un élève au hasard et on considère les événements :

A : « l'élève choisi pratique le foot » ; B « l'élève choisi parle français » ;

C : « l'élève choisi ne pratique aucun sport » ; D « l'élève choisi ne parle aucune langue »

- 1) Déterminer les probabilités des événements suivants : A ; B ; C ; D ; $A \cap B$ et $A \cup B$

Exercice 12 :

Un sac contient 5 jetons verts (numérotés de 1 à 5) et 4 jetons rouges (numérotés de 1 à 4)

On tire successivement et au hasard 3 jetons du sac, sans remettre le jeton tiré.

- 1) Calculer les probabilités
 - a) De ne tirer que 3 jetons verts
 - b) De ne tirer aucun jeton vert
 - c) De tirer au plus 2 jetons verts
 - d) De tirer exactement 1 jeton vert
- 2) On tire simultanément et au hasard 3 jetons.
Reprendre alors les questions a),b),c) et d)

IPN

Bibliographie

- Livre de Maths 1^{ère} S collection CIAM
- Livre de Maths terminale S programme français 2012 collection DECLIC
- Exercice de MATHS (Internet open-source)
- Livres de Maths IPN pour les séries scientifiques (6AS et 7AS)
- Livre ENNEVIS
- Urbanmathproject (<http://urbanmathproject.free.fr>)
- About.gitlab.com (<http://cedricvanrompay.gitlab.io>)
- Mathsguyon (<http://mathsguyon.fr>)aAnnales Mathématiques en français
- Free (<http://gsimeon1.free.fr>)
- Cours de science (<http://cours-de-science.fr>)

IPN