الجمهورية الإسلامية الموريتانية

شرف - إخاء - عدل

وزارة التربية وإصلاح النظام التعليمي

المعهد التربوي الوطني

كتاب الرياضيات

للسنة السابعة آداب أصلية

تأليف:

محمد البشير سيداتي مفتش تعليم ثانوي.

طارق أحمد سالم مفتش تعليم ثانوي.

مراجعة:

محمد حو مفتش تعليم ثانوي.

أحمد محمود محمد يعقوب أستاذ تعليم ثانوي.

تدقيق:

محمد المختار اندكسعد أستاذ بالمعهد التربوي الوطني.

تصميم:

شيخ أمي سيد أحمد الجيد مصممة بالمعهد التربوي الوطني.

2026

IPN

تقديم

في إطار تنفيذ التوجهات الوطنية الرامية إلى تحسين جودة التعليم ومواءمة التعلمات مع متطلبات التنمية، يسر المعهد التربوي الوطني أن يضع بين أيدي المدرسين والتلاميذ هذه السلسلة الجديدة من الكتب المدرسية العلمية المخصصة للسلك الثانوي.

تغطي هذه المؤلفات جميع شعب التعليم الثانوي ،سواء العلمية منها أو الأدبية ،في مواد الرياضيات وعلوم الطبيعة والفيزياء والكيمياء .وقد أعدّت هذه الكتب وفق البرامج الرسمية المعمول بها ،وتعكس إرادة السلطات التربوية في توفير موارد تعليمية ذات جودة لجميع المتعلمين ،بما يتلاءم مع أهداف التكوين وخصوصيات نظامنا التربوي.

ومنذ إعادة كتابة البرامج سنة 1999 إلى غاية اعتماد البرامج الحالية سنة ،2022 عرف نظامنا التربوي مراحل متعددة من الإصلاح والتحديث .غير أن هذه السلسلة تمثل نقلة نوعية وتاريخية ،إذ إنها المرة الأولى التي تستفيد فيها الشعب الأدبية ،وخاصة شُعب الآداب العصرية والآداب الأصلية ، من كتب مدرسية في المواد العلمية تشمل جميع مستويات التعليم الثانوي من السنة الخامسة إلى السنة السابعة .كما استفادت شعب الآداب الأصلية من كتب مؤلفة باللغة العربية ،مراعاة لخصوصياتها اللغوية والتربوية ،وضماناً لتيسير استيعاب المضامين العلمية من طرف المتعلمين المعنيين.

وقد تمثلت هذه المهمة ،من جهة ،في مراجعة اثني عشر(12) عنواناً تمثل الكتب الأساسية لمختلف مستويات التعليم الثانوي ،ومن جهة أخرى ،في إعداد اثنين و عشرين (22) عنواناً جديداً تغطي باقي المواد العلمية .ويجسد هذا العمل التربوي الكبير مدى التزام السلطات التربوية بتعزيز الموارد التعليمية الوطنية ومواكبة تنفيذ البرامج الجديدة بصورة فعالة.

وانطلاقاً من الأهمية الاستراتيجية للكتاب المدرسي في عملية التعليم والتعلم ،عمل المعهد التربوي الوطني على تعبئة أفضل الكفاءات الوطنية لإنجاز هذه المهمة ،حيث تم اختيار نخبة من المفتشين والمستشارين التربويين والأساتذة ذوي الخبرة والكفاءة العلمية والبيداغوجية ،قصد إعداد ومراجعة كتب تستجيب لمعايير الجودة العلمية والتربوية والديداكتيكية.

وقد حرصت فرق التأليف على إنتاج كتب واضحة ومنظمة وسهلة الاستعمال ،تسهم في تنمية المعارف والكفايات وترسيخ الفكر العلمي لدى المتعلمين .كما أولي اهتمام خاص بانسجام المضامين ،وتدرج التعلمات ،وإدماج الأنشطة التطبيقية ،واستعمال الرسوم التوضيحية والوضعيات التعليمية الملائمة للسياق الوطني.

ويتقدم المعهد التربوي الوطني بخالص الشكر والتقدير إلى البنك الإسلامي للتنمية على دعمه القيّم لهذا المشروع .فبفضل تمويله ،أمكن إنجاز جميع مراحل هذا العمل التربوي المهم ،ابتداءً من التأليف والمراجعة، مروراً بالتحرير والتصحيح ،وصولاً إلى طباعة هذه الكتب المدرسية .ويشكل هذا الدعم مساهمة كبيرة في تطوير التعليم وتعزيز جودة التعلمات في بلادنا.

كما يتوجه المعهد التربوي الوطني بجزيل الشكر إلى جميع الذين ساهموا في إنجاز هذا العمل ،من مؤلفين ومراجعين ومفتشين وفرق تقنية وشركاء رافقوا مختلف مراحل التأليف والإنتاج.

وإننا لنعرب عن أملنا في أن تشكل هذه الكتب أدوات تربوية فعالة في خدمة المدرسين والتلاميذ ،وأن تسهم في تعزيز تدريس العلوم ،وتحسين المردودية الدراسية ،وتكوين جيل قادر على الإسهام الفاعل في تنمية الوطن.

المدير العام للمعهد التربوي الوطني
د. الشيخ معاذ سيدى عبد الله

IPN

IPN

بسم الله الرحمن الرحيم

السـادة الأساتـــذة، أبنـــاءنا التـلاميذ، مختـــلف الشركـاء في العمليـــة التربويـــة

يأتي إصدار هذا الكتاب ولأول مرة استجابة لملء الفراغ الذي تعانيه شعبة الآداب الأصلية في مجال الدعامات التربوية المتعلقة بالرياضيات.

لقد تم إعداد الكتاب وفق البرنامج المعمول به ووفق مسطرة راعت احترامه نصا وروحا، إضافة إلى حاجة التلاميذ قيد التحضير للباكالوريا لما ينضاف إلى جهود السادة الأساتذة في إكساب التلاميذ المعارف والمهارات الضرورية للتمكن من المفاهيم والمعلومات التي يتلقونها داخل الفصول.

وسعيا إلى تحقيق ما سبق ذكره، جاءت مضامين الكتاب، مراعية لتوجيهات البرنامج من جهة و إلى الأخذ في الحسبان نماذج الأسئلة والتمارين التي يتم تناولها في مواضيع الرياضيات الخاصة بهذه الشعبة.

وفيما يلي نستعرض وإياكم، محتويات الكتاب، مبرزين البنية التي شكلت الخط الناظم لجميع المضامين والمتمثلة في بنية الفصل باعتباره وحدة الخط التأليفي شكلا والإطار المرجعي لتقديم المضامين والمحتويات الخاصة بكل فصل من فصول الكتاب.

الفصل	الوحدات : الأهداف، ما يجب الإلمام به، تطبيقات و تمارين			
1) المعادلات والمتراجحات	الكسور، النسبة والتناسب		المعادلات والمتراجحات	
2) عموميات على الدوال	النهايات	المقاربات والفروع اللانهائية	الاشتقاق	تمثيل الدوال
3) الدالة اللوغاريتمية والأسية	الدالة اللوغاريتمية		الدالة الأسية	
4) المتتاليات العددية	عموميات على المتتاليات	المتتالية الحسابية	المتتالية الهندسية	تقارب المتتاليات
5) تنظيم المعطيات	التركة	المقاييس الإسلامية	الاحتمالات	
ملحق	وضعيات خاصة بكل فصل لتمرير المقاربة الشمولية في التعاطي مع القدرة على توظيف المعارف والمهارات المكتسبة.			

أيها السادة والسيدات، إننا إذ نقدم لكم هذه الوثيقة، في طبعتها الأولى، راجين أن تكون أداة معينة لتحيق الأهداف التربوية والعلمية المتوخاة من ورائها، لنرجو موافاتنا بملاحظاتكم سعيا للتحسين والرفع من جودة الطبعات اللاحقة بحول الله.

والله من وراء القصد وهو الهادي إلى سواء السبيل.

المؤلفون:

IPN

الفـــــهرس

العنوان	الصفحة
المقدمة	02
الفهرس	03
1) المعادلات والمتراجحات	من 04 إلى 16
2) عموميات على الدوال	من 17 لى 46
3) الدالة اللوغارتمية والأسية	من 47 إلى 60
4) المتتاليات العددية	من61 إلى 80
5) تنظيم المعطيات	من 81 إلى 113
6) ملحق	من 114 إلى 122

IPN

IPN

الفصل الأول: المعادلات والمتراجحات

الوحدات:

- الكسور، النسبة و التناسب
- المعادلات والمتراجحات

IPN

الوحدة الأولى: الكسور والنسبة والتناسب

الأهداف:

✓ التذكير بالمكتسبات الأساسية المتعلقة بحساب الكسور

✓ النسبة المئوية والتناسب

✓ تطبيقات

✓ إنجاز تمارين

أولا المحتوى: ما يجب الإلمام به

• **العمليات على الكسور**: ليكن a وc من $\mathbb{R}$ و b و d من $\mathbb{R}^*$ نعرف العمليات التالية :

الجمع	الطرح
$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+cd}{bd}$ **مثال:** $\frac{1}{2}+\frac{5}{8}=\frac{1\times8+2\times5}{2\times8}=\frac{8+10}{16}=\frac{18}{16}=\frac{9}{8}$ **ملاحظة:** في حالة $b = d$ يكون لدينا : $\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$	$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-cd}{bd}$ **مثال:** $\frac{1}{2}-\frac{5}{8}=\frac{1\times8-2\times5}{2\times8}=\frac{8-10}{16}=\frac{-2}{16}=\frac{-1}{8}$ **ملاحظة:** في حالة $b = d$ يكون لدينا : $\frac{a}{b}-\frac{c}{b}=\frac{a-c}{b}$
الضرب أو الجداء	**القسمة**
$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$ **مثال:** $\frac{1}{2}\times\frac{5}{8}=\frac{1\times5}{2\times8}=\frac{5}{16}$	$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$ **مثال:** $\frac{1}{2}\div\frac{5}{8}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{8}}=\frac{1}{2}\times\frac{8}{5}=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$

• **النسبة المئوية:**

نعتبر E مجموعة عدد عناصرها n و A جزئية من E عدد عناصرها m ، نسمي النسبة المئوية ل m في n العدد الناتج من : $\frac{m}{n}\times100$ وليكن p، ونكتب عندئذ $p\%$.

مثال:

في أحد الفصول، عدد التلاميذ 60 من بينهم 15 بنتا. ما النسبة المئوية لعدد البنات في هذا الفصل؟

الجواب:

$\frac{15}{60}\times100=25$ ومنه تكون النسبة المئوية للبنات في الفصل 25%.

للحصول على النسبة المئوية يكفي أن نحول الكسر الأصلي إلى كسر مقامه 100 ، فيكون البسط هو النسبة المئوية المطلوبة: $\frac{15}{60}=\frac{1}{4}=\frac{25}{100}$.

- **زيادة أو تخفيض p%**

للحصول على القيمة الجديدة y بعد زيادة القيمة الأصلية x (أو تخفيضها) بنسبة p% نحصل على ما يلي:

زيادة p%	نقص p%
$y=x+\frac{p}{100}x=x\left(1+\frac{p}{100}\right)$	$y=x-\frac{p}{100}x=x\left(1-\frac{p}{100}\right)$
مثال: مصنع للألبان طاقته الإنتاجية يوميا 1200 علبة، إذا زادت هذه الطاقة الإنتاجية ب 20% فكم هي الطاقة الإنتاجية الجديدة؟	مثال: يبلغ ثمن بذلة رياضية 11000 قديمة، خفضت بنسبة 8%، احسب ثمنها الجديد.
الجواب: الطاقة الإنتاجية الجديدة: $1200\left(1+\frac{20}{100}\right)=1200\left(\frac{120}{100}\right)=1440$	الجواب: الثمن الجديد للبذلة: $11000\left(1-\frac{8}{100}\right)=11000\left(\frac{92}{100}\right)=10120$

- **التناسب :**

لتكن a و b و c و d أعدادا حقيقية غير منعدمة :

يكون a و b متناسبين مع c و d إذا كان : $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ وهو ما يعني أن: $ad=cb \Leftrightarrow \frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

مثال:

1) أملأ الجدول التالي:

وزن الأرز	1kg	2kg	3kg	4kg
ثمنه		1800		

2) هل هناك تناسب بين ثمن الشراء ووزن الأرز؟

3) حدد معامل التناسب.

الجواب:

1) ملء الجدول :

وزن الأرز	1kg	2kg	3kg	4kg
ثمن الشراء	900	1800	2700	3600

2) نعم يوجد تناسب بين ثمن الشراء ووزن الأرز

3) معامل التناسب هو إما ثمن الشراء قسمة على الوزن والذي يعبر عن ثمن شراء الكيلوغرام الواحد أي 900 أو العكس الوزن قسمة على ثمن الشراء أي مقلوب 900.

- **التناسب العكسي:**

يكون a و b متناسبين عكسيا مع c و d إذا كان: $\frac{a}{\frac{1}{c}}=\frac{b}{\frac{1}{d}}$ وهو ما يعني أن: $ac=bd$

IPN

معدل السرعة (km/h)	الزمن (h)
75	2
60	2,5
50	3
37,5	4

مثال: يمثل الجدول على اليسار العلاقة بين معدل السرعة والزمن اللازم لقطع المسافة ما بين نواكشوط وأبي تلميت والتي تساوي 150km.

بين أن معدل السرعة والزمن متناسبان عكسيا، ثم حدد معامل التناسب.

الجواب:

بما أن حاصل جداء السرعة في الزمن ثابت $75 \times 2 = 60 \times 2,5 = 50 \times 3 = 37,5 \times 4 = 150$ فإن السرعة والزمن متناسبان عكسيا ومعامل التناسب هو المسافة 150.

- **الرابع المتناسب**

الرابع المتناسب للأعداد a و b و c هو العدد x بحيث تكون الأعداد a و b و c وx في هذا الترتيب تناسبا أي $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$.

مثال:

قطعة قماش طولها 6,5 متر وثمنها 7150 أوقية قديمة. ما ثمن قطعة من نفس القماش طولها 3,4 متر؟

الجواب:

لدينا وضعية تناسبية بمعنى : $\frac{3,4}{x} = \frac{6,5}{7150}$ ومنه: $6,5 \times x = 3,4 \times 7150$ أي أن: $x = \frac{7150 \times 3,4}{6,5}$

وعليه : $x = 3740$ وهو ثمن القطعة الأخيرة.

- **الواسط المتناسب (الوسط الهندسي)**

الواسط المتناسب لعددين a و b هو العدد x بحيث تكون الأعداد a و x و x وb تشكل تناسبا في الترتيب، وهو ما يعني أن : $\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$ بمعنى أن $x^2 = ab$.

مثال:

بين أن الوسط الهندسي للعددين 4 و 9 هو 6.

الجواب:

لدينا $6^2 = 36 = 9 \times 4$ ومنه 6 هو الوسط الهندسي للعددين 4 و 9.

IPN

ثانيا: تطبيـــقات:

تطبيق 1:

تستقبل ثانوية 2400 تلميذ، منهم الداخليون، النصف داخليون و الخارجيون. يوجد 384 داخلي و684 نصف داخلي. 40% من التلاميذ ذكور، من ضمنهم 20% داخليون.

1) ما نسبة الإناث في الثانوية؟

2) أعط النسبة المئوية للذكور الداخليين في الثانوية.

3) ما نسبة التلاميذ الداخليين في الثانوية ؟

الحل:

1) نسبة الإناث في الثانوية تساوي:

$$1 - 40\% = 1 - \frac{40}{100} = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5} = 60\%$$

2) النسبة المئوية للذكور الداخليين في الثانوية تساوي:

$$20\% \times 40\% = \frac{20}{100} \times \frac{40}{100} = \frac{800}{10000} = \frac{8}{100} = 8\%$$

3) نسبة التلاميذ الداخليين في الثانوية تساوي :

$$\frac{384}{2400} \times 100 = 16\%.$$

تطبيق 2:

في أحد الفنادق يتم حجز الغرفة الواحدة ب: 16000 أوقية قديمة. وخلال افتتاح موسم السياحة السنوي تشهد زيادة بنسبة 20% خلال الأسبوع الأول.

1) كم ستكلف الغرفة، إذن خلال هذا الأسبوع؟

2) في الأسبوع الثاني، زيدت الغرفة بنسبة 30%، كم سيدفع المستأجر إذن خلال الزيادة الثانية؟

3) أحد الزبناء، قال "إن الغرفة الواحدة شهدت خلال الأسبوعين زيادة 50%" ؟ هل ما قاله صحيح؟

الحل:

1) كلفة الغرفة خلال الأسبوع الأول تساوي:

$$16000 \times (1 + 20\%) = 16000 \times \left(1 + \frac{20}{100}\right) = 16000 \times 1,2 = 19200$$

2) كلفة الغرفة خلال الأسبوع الثاني تساوي:

$$19200 \times (1 + 30\%) = 19200 \times \left(1 + \frac{30}{100}\right) = 19200 \times 1,3 = 24960$$

3) كلفة الغرفة خلال الأسبوعين تساوي:

$$\frac{24960 - 16000}{16000} \times 100\% = 56\%.$$

إذن ما قاله أحد الزبناء ليس صحيحا؛ لأن النسب النهائية في الحالة العامة لا تساوي مجموع النسب المتتالية.

IPN

ثالثا: تمـــــــــــــــــارين

تمرين 1:

الجدول التالي يعطي نتائج امتحان الباكالوريا في إحدى الدول للعام 2002 و في دورتها الأولى.

	إناث	ذكور	المجموع
المسجلون		261657	449023
الحاضرون	162414		
الناجحون	45727	73581	
نسبة النجاح%		29,72	

انقل الجدول مبينا طريقة الحساب.

تمرين 2:

حدد العدد الحقيقي x إذا علمت أن الأعداد :1 +x و 3 متناسبة مع x و2 على التوالي.

تمرين 3:

تستهلك سيارة 4,5 لترمن البنزين عند قطع مسافة 75 كيلومتر.x باستخدام جدول التناسبية ، حدد كمية البنزين المستهلك بعد قطع مسافة 100 كيلومتر. إذا علمت أن الأعداد :1 +x و 3 متناسبة مع x و2 على التوالي.

تمرين 4:

ليكن x سعر منتج سنة 2023 ، خضع هذا السعر لزيادة قدرها 10% في سنة 2204 ثم إلى زيادة أخرى قدرها 15% سنة 2025.

1) إذا كان x_1 و x_2 سعري المنتج في سنتي 2024 و 2025 على الترتيب:

a) عبر عن x_1 بدلالة x.

b) عبر عن x_2 بدلالة x_1.

c) استنتج عبارة عن x_2 بدلالة x.

2) ما النسبة المئوية الإجمالية لهذا المنتج؟

تمرين 5:

خضع منتج لثلاث زيادات متعاقبة قدرها: 15% ، 8% و 10% .

ما النسبة المئوية للزيادة الإجمالية لهذا المنتج؟

تمرين 6:

يقترح بائع على زبائنه عدة طرق لتخفيض سعر بضاعة، كما يلي:

- تخفيض 8% متبوعة ب 6%
- تخفيض 10% متبوع ب 4%
- تخفيض 14%

ما الطريقة الأنسب للزبون ؟

IPN

الوحدة الثانية: معادلات الدرجة الأولى والثانية

الأهداف:

- ✓ القدرة على حل معادلات الدرجة الأولى ذات المجهول الواحد.
- ✓ القدرة على حل معادلات الدرجة الثانية بمجهول واحد.
- ✓ القدرة على حل مسائل تؤول إلى معادلات من الدرجة الثانية.
- ✓ القيام بتطبيقات
- ✓ القيام بتمارين

أولا: المحتوى: ما يجب الإلمام به

- **معادلات الدرجة الأولى بمجهول واحد**

تعريف:

معادلة الدرجة الأولى بمجهول واحد في كل عبارة جبرية من الشكل : $ax+b=0$ حيث x هو المجهول و a و b عددان حقيقيان معلومان، علما أن الأول منهما غير منعدم.

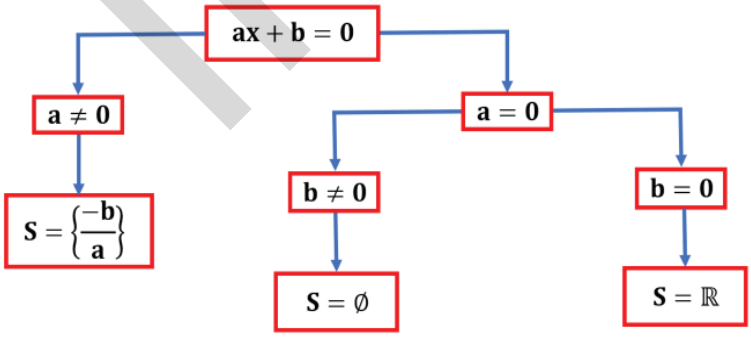
مثال:

$2x+3=0$ ، $2x-3=0$

ملاحظة:

قد تعطى المعادلة في صيغة مثل : $ax+b=c$ وهذا الشكل يؤول إلى معادلة من الشكل الأصلي $ax+b=0$، وذلك بتحويل العنصر الثابت في الطرف الأيمن إلى الطرف الأيسر لتصبح المعادلة: $ax+b-c=0$ بمعنى $ax+b'=0$ حيث $b'=b-c$.

- **حل معادلة الدرجة الأولى :**



أمثلة:

- **حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية :**

1) $-2x+22=0$ ، 2) $5x+3=-2$ ، 3) $3(2x+5)=6x-1$ ، 4) $x^3-x=0$ ،

5) $\frac{2x+2}{3}-\frac{1}{2}=\frac{5x-2}{2}+\frac{1}{3}$

الجواب:

1) $-2x+22=0 \Leftrightarrow x=\frac{-22}{-2}=11 \Leftrightarrow S=\{11\}$

IPN

2) $5x+3=-2 \Leftrightarrow 5x+3+2=0 \Leftrightarrow 5x+5=0 \Leftrightarrow x=\frac{-5}{5}=-1$
$\Leftrightarrow S=\{-1\}$

3) $3(2x+5)=6x-1 \Leftrightarrow 6x+15-6x+1=0 \Leftrightarrow 0x+16=0 \Leftrightarrow S=\emptyset$

4) $x^3-x=0 \Leftrightarrow x(x^2-1)=0 \Leftrightarrow x(x-1)(x+1)=0$
$x=0$ أو $x-1=0$ أو $x+1=0 \Leftrightarrow x=0$ أو $x=1$ أو $x=-1 \Leftrightarrow S=\{-1;0;1\}$

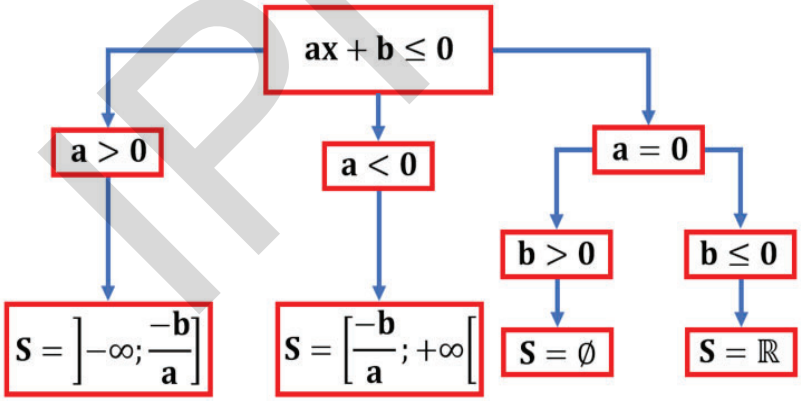
5) $\frac{2x+2}{3}-\frac{1}{2}=\frac{5x-2}{2}+\frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{2(2x+2)-3}{6}=\frac{3(5x-2)+2}{6}$
$2(2x+2)-3=3(5x-2)+2 \Leftrightarrow 4x+4-3=15x-6+2 \Leftrightarrow 4x+1=15x-4$
$4x-15x+1+4=0 \Leftrightarrow -11x+5=0 \Leftrightarrow x=\frac{-5}{-11}=\frac{5}{11} \Leftrightarrow S=\left\{\frac{5}{11}\right\}$

- **متراجحات الدرجة الأولى بمجهول واحد**

تعريف:

المتراجحة بمجهول واحد في $\mathbb{R}$ هي كل عبارة جبرية من الشكل : $ax+b \geq 0$ أو $ax+b > 0$ أو $ax+b \leq 0$ أو $ax+b < 0$ حيث a وb عددان حقيقيان معلومان.

- **حل متراجحات الدرجة الأولى:**



أمثلة:

حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية:

1) $-2x+12>0$ ، 2) $5x-15 \leq -5$

الجواب:

1) $-2x+12>0 \Leftrightarrow x<\frac{-12}{-2} \Leftrightarrow x<6 \Leftrightarrow S=]-\infty;6[$

2) $5x-15 \leq -5 \Leftrightarrow 5x-15+5 \leq 0 \Leftrightarrow 5x-10 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{10}{5} \Leftrightarrow x \leq 2 \Leftrightarrow S=]-\infty;2]$

- **إشارة ثنائي الحد : $ax+b$**

نعتبر ثنائي الحد $ax+b$ حيث $a \neq 0$: $ax+b$ ينعدم عند $x=\frac{-b}{a}$. الجدول التالي يعطي إشارته على $\mathbb{R}$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax+b$	موافق لإشارة a	0	مخالف لإشارة a

أمثلة:

حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية:

1) $4x^2-9\geq 0$ ، 2) $(1-x)(2x+4)<0$ ،

الجواب:

1) $4x^2-9\geq 0 \Leftrightarrow (2x)^2-3^2\geq 0 \Leftrightarrow (2x-3)(2x+3)\geq 0$

لنحدد إشارة كل من $2x+3$ و $2x-3$

$2x-3=0 \Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$ و $2x+3=0 \Leftrightarrow x=\frac{-3}{2}$

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$		$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$2x-3$	$-$		$-$	0	$+$
$2x+3$	$-$	0	$+$		$+$
$4x^2-9$	$+$	0	$-$	0	$+$

$S=\left]-\infty;\frac{-3}{2}\right]\cup\left[\frac{3}{2};+\infty\right[$

2) $(1-x)(2x+4)<0$، **لنحدد إشارة كل من $2x+4$ و $1-x$**

$2x+4=0 \Leftrightarrow x=\frac{-4}{2}=-2$ و $1-x=0 \Leftrightarrow x=1$

x	$-\infty$	-2		1	$+\infty$
$1-x$	$+$		$+$	0	$-$
$2x+4$	$-$	0	$+$		$+$
$(1-x)(2x+4)$	$-$	0	$+$	0	$-$

$S=]-\infty;-2[\cup]1;+\infty[$

- **معادلات الدرجة الثانية بمجهول واحد**

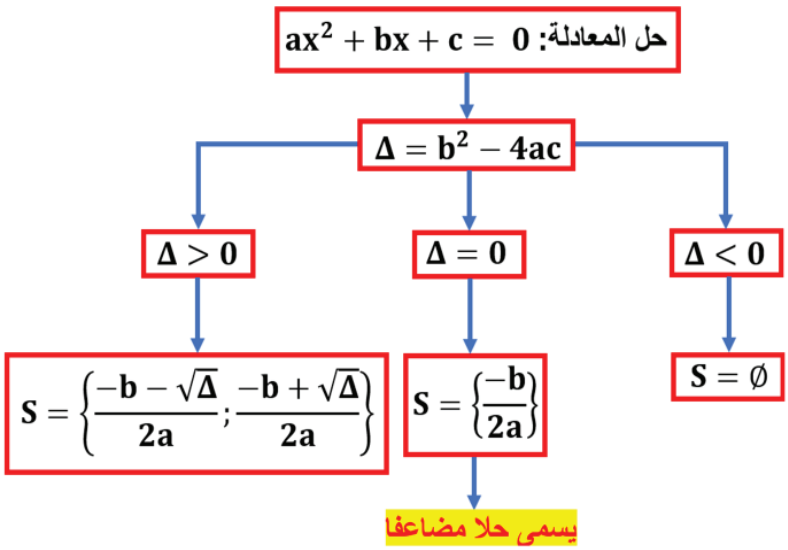
تعريف:

✓ **كل معادلة من الشكل $ax^2+bx+c=0$ حيث a وb وc من $\mathbb{R}$ مع $a\neq 0$ ، تسمى معادلة من الدرجة الثانية في $\mathbb{R}$ وذات المجهول x.**

✓ **يسمى العدد: b^2-4ac والذي يرمز له ب: Δ مميز المعادلة أو ثلاثي الحدود $ax^2+bx+c=0$**

- **حل معادلة الدرجة الثانية بمجهول واحد**

لتكن $ax^2+bx+c=0$ حيث $a\neq 0$ وb وc من $\mathbb{R}$. لتكن S مجموعة حلول هذه المعادلة ذات المميز Δ .



نتائـــــج:

ليكن $ax^2 + bx + c = 0$ ثلاثي حدود وليكن Δ مميزه، نميز الحالات التالية:

✓ $\Delta > 0$، ثلاثي الحدود يملك جذرين مختلفين، x_1 و x_2 وبالتالي تمكن كتابته على الشكل:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

✓ $\Delta = 0$، ثلاثي الحدود $ax^2 + bx + c$ تمكن كتابته على الشكل: $ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$

✓ $\Delta < 0$، ثلاثي الحدود لا يمكن تفكيكه إلى جداء ثنائيي حدين من الدرجة الأولى.

• إشارة ثلاثي الحدود $ax^2 + bx + c$

نعتبر ثلاثي الحدود $ax^2 + bx + c$، $(a \neq 0)$ لدينا ثلاث حالات حسب قيمة المميز Δ

الحالة الأولى $\Delta > 0$: (يوجد حلان x_1 و x_2 نفرض $x_1 < x_2$)

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	موافق لإشارة a		0	مخالف لإشارة a	0	موافق لإشارة a	

الحالة الثانية $\Delta = 0$: (يوجد حل وحيد x_0)

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	موافق لإشارة a		0	موافق لإشارة a	

الحالة الثالثة $\Delta < 0$: (لا يوجد حل)

x	$-\infty$		$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	موافق لإشارة a		

مثال 1:

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية:

1) $x^2 - 3x + 2 = 0$ ، 2) $2x^2 - 2x + 1 = 0$ ، 3) $x^2 - 2x + 1 = 0$

IPN

الجواب:

1) $x^2 - 3x + 2 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 2 = 9 - 8 = 1 > 0$

يوجد حلان:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{3-1}{2} = 1 \\ x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{3+1}{2} = 2 \end{cases} \quad ; \quad S = \{1; 2\}$$

2) $2x^2 - 2x + 1 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 2 \times 1 = 4 - 8 = -4 < 0$، لايوجد حل : $S = \emptyset$

3) $x^2 - 2x + 1 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 4 - 4 = 0$، **يوجد حل وحيد:**

$x_0 = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{2}{2} = 1$ ، $S = \{1\}$

مثال 2:

1) ادرس إشارة ثلاثي الحدود $P(x) = 2x^2 - 3x + 1$

2) استنتج حل المتراجحة $2x^2 - 3x + 1 \geq 0$ في $\mathbb{R}$

الجواب:

1) $P(x) = 2x^2 - 3x + 1$ نقوم بحل المعادلة $P(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x + 1 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 2 \times 1 = 9 - 8 = 1 > 0$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{3-1}{4} = \dfrac{1}{2} \\ x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{3+1}{4} = 1 \end{cases}$$

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$2x^2 - 3x + 1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

2) حل المتراجحة $2x^2 - 3x + 1 \geq 0$ هو $S = \left]-\infty; \frac{1}{2}\right] \cup [1; +\infty[$

IPN

ثانيا) تطبيقـــــــــــــــــات:

تطبيق 1: أكمل الجدول التالي:

المعادلة : $ax^2+bx+c=0$	a	b	c	المميز $\Delta = b^2-4ac$	عدد الحلول
$3x^2+7x+2=0$					
$x^2+5x+9=0$					
$9x^2+12x+4=0$					
$3x^2-5x+2=0$					
$16x^2-8x+1=0$					
$3x^2+x-3=0$					

الحل:

المعادلة: $ax^2+bx+c=0$	a	b	c	المميز $\Delta = b^2-4ac$	عدد الحلول
$3x^2+7x+2=0$	3	7	2	25	2
$x^2+5x+9=0$	1	5	9	-11	0
$9x^2+12x+4=0$	9	12	4	0	1
$3x^2-5x+2=0$	3	-5	2	1	2
$16x^2-8x+1=0$	16	-8	1	0	1
$3x^2+x-3=0$	3	1	-3	37	2

تطبيق 2:

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية:

$$1)\ 2x^2-4x+6=0 \quad 2)\ x^2-4x+2=0 \quad 3)\ 3x^2-6x+3=0 \quad 4)\ 2x^2-2\sqrt{2}x+1=0$$

الحل:

$$1)\quad 2x^2-4x+6=0$$

$\Delta = b^2-4ac=(-4)^2-4\times 2\times 6=16-48=-32<0$ لا يوجد حل : $S=\emptyset$

$$2)\quad x^2-4x+2=0$$

$$\Delta = b^2-4ac=(-4)^2-4\times 1\times 2=16-8=8>0$$

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{4-\sqrt{8}}{2}=2-\sqrt{2} \\ x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{4+\sqrt{8}}{2}=2+\sqrt{2} \end{cases} ; S=\{2-\sqrt{2}\,;2+\sqrt{2}\}$$

$$3)\quad 3x^2-6x+3=0$$

$$\Delta = b^2-4ac=(-6)^2-4\times 3\times 3=36-36=0$$

يوجد حل وحيد:

$$x_0=\frac{-b}{2a}=\frac{6}{6}=1 \quad ; \quad S=\{1\}$$

IPN

ثالثا): تمـــــــــــــــــارين

تمرين 1:

1) حل المعادلة : $(2x - 3)(4-3x) = 0$ ، 2) حل المتراجحة : $(2x - 3)(4-3x) > 0$

تمرين 2:

نعتبر في $\mathbb{R}$ المعادلة : $(E)\ 6x^2 - 11x + 4 = 0$

1) تحقق من أن مميز المعادلة (E) هو 25، 2) أعط حلي المعادلة (E)

3) أكمل الجدول التالي:

x	$-\infty$	...	...	$-\infty$
$6x^2 - 11x + 4$		...	...	

2) استنتج مجموعة حلول المتراجحة $6x^2 - 11x + 4 \leq 0$

تمرين 3:

1) حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية:

a) $\dfrac{3x+5}{x-1} = 0$ b) $\dfrac{(2x+1)(x-3)}{x-4} = 0$ c) $1 - \dfrac{x+3}{x-3} = \dfrac{-2}{x-2}$

2) حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية :

a) $2x + 3 < 4 - 5x$ b) $2(x-4) \geq 4x - 5$ c) $(3 - 6x)(x + 2) < 0$

تمرين 4 :

1) حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية:

a) $5x^2 - 2x - 3 = 0$ b) $x^2 - x - 30 = 0$ c) $x^2 + x - 12 = 0$

2) استنتج حلول المتراجحات التالية في $\mathbb{R}$

a) $5x^2 - 2x - 3 \leq 0$ b) $x^2 - x - 30 > 0$ c) $x^2 + x - 12 \leq 0$

تمرين 5:

حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية:

a) $\dfrac{x+1}{x-1} > 0$ b) $\dfrac{x^2-1}{x-3} \leq 0$ c) $(x^2 + x - 2)(x^2 - x - 2) \geq 0$

IPN

الفصل الثاني :عموميات على الدوال الوحـــــــــــدات:

- ❖النهايـــــــــات
- ❖المقاربات والفروع اللانهائية
- ❖الاشتقـــــــــاق
- ❖تمثيـــل الـــدوال

IPN

الوحدة الأولى: النهايات

الأهداف:

- ✓ التذكير بالمكتسبات السابقة.
- ✓ التمكن من النهايات المرجعية.
- ✓ اجراء العمليات على النهايات.
- ✓ القيام بتطبيقات.
- ✓ إنجاز تمارين.

أولا: المحتوى: ما يجب الإلمام به

- **تصنيـــــــــــف**

✓ $f : x \longmapsto ax$ هي دالة خطية تمثيلها البياني يمر بنقطة الأصل (كثيرة حدود من الدرجة الأولى).

✓ $g : x \longmapsto ax + b$ هي دالة ارتباطية (كثيرة حدود من الدرجة الأولى) لا تمر بنقطة الأصل في حالة $b \neq 0$.

✓ $h : x \longmapsto ax^2 + bx + c$ هي دالة كثيرة حدود من الدرجة الثانية.

✓ $k : x \longmapsto a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots\ldots + a_0$ هي دالة كثيرة حدود من الدرجة n

✓ $u : x \mapsto \dfrac{x^2 + x - 5}{x + 2}; x \neq -2$ هي دالة نسبية.

- **ميدان تعريف دالة**

ميدان تعريف دالة f هو مجموعة الأعداد الحقيقية التي لها صور ب f (لكل عنصر صورة وحيدة) ونرمز له ب D_f، بمعنى $D_f = \{x \in \mathbb{R} / f(x)$ موجـــــود $\}$

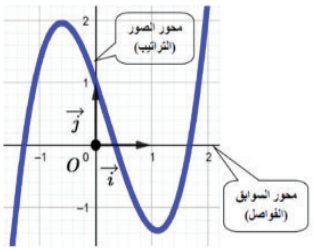
مثال:

1) $f(x) = x^2 - 4x + 3$ بما أن f كثيرة حدود فإن: $D_f = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$

2) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$، f معرفة إذا كان $x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$ إذن $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\} =]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$

- **منحنى دالة:**

المنحى البياني أو المنحى الممثل للدالة f في المعلم $(O; \vec{i}; \vec{j})$ هو مجموعة النقاط $M(x; y)$ بحيث $y = f(x)$ و $x \in D_f$



مثال:

نعتبر الدالة $f(x) = x^2 - 2x + 3$ أي من النقاط التالية تنتمي لمنحنى الدالة f ؟ $A(0;3)$، $B(-1;6)$، $C(2;4)$، $D(1;2)$

الجواب :

✓ $f(0) = 0^2 - 2\times0 + 3 = 3$ $\Leftarrow$ A هي نقطة من منحنى الدالة f

✓ $f(-1) = (-1)^2 - 2\times(-1) + 3 = 6$ $\Leftarrow$ B هي نقطة من منحنى الدالة f

✓ $f(2) = 2^2 - 2\times2 + 3 = 3 \neq 4$ $\Leftarrow$ C ليست نقطة من منحنى الدالة f

✓ $f(1) = 1^2 - 2\times1 + 3 = 2$ $\Leftarrow$ D هي نقطة من منحنى الدالة f

- **النهايات المرجعية**

$$\lim_{x\to+\infty} x = +\infty ; \lim_{x\to-\infty} x = -\infty ; \lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty ; \lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty ; \lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty ; \lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty ; \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty ;$$

IPN

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty \;;\; \lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty \;;\; \lim_{x\to +\infty}\frac{1}{x}=0 \;;\; \lim_{x\to -\infty}\frac{1}{x}=0$$

قاعـــــدة:

✓ نهاية كثيرة حدود عند المالانهاية هي نهاية الحد ذي الدرجة العليا.

✓ نهاية دالة نسبية عند الما لانهاية هي نهاية حاصل قسمة الحدين ذوي الدرجة العليا بسطا ومقاما.

- **العمليات على النهايات**

إذا كانت f و g دالتين و a عددا حقيقيا، فإن :

✓ الجدول التالي يعطي نهاية مجموع الدالتين f و g عند a

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$\ell \in \mathbb{R}$	$\ell \in \mathbb{R}$	$\ell \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$\ell' \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a}\big(f(x)+g(x)\big)$	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	عدم تعيين	$-\infty$

✓ الجدول التالي يعطي نهاية جداء الدالتين f و g عند a:

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$\ell \in \mathbb{R}$	$\ell > 0$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$\ell < 0$	$\ell = 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$\ell' \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a}\big(f(x)\times g(x)\big)$	$\ell\times\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	عدم تعيين	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$

✓ الجدول التالي يعطي نهاية حاصل قسمة الدالتين f و g عند a:

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	ℓ	ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$	$\ell' > 0$	$\ell' < 0$	$\ell' > 0$	$\ell' < 0$	0	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	عدم تعيين	عدم تعيين

حالات عدم التعيين: $\dfrac{0}{0}\;;\;\dfrac{\infty}{\infty}\;;\;0\times\infty\;;\;\infty-\infty$

ملاحظة :

مثال:

احسب النهايات التالية:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x^2+\sqrt{x}\right]$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[x^3+\dfrac{1}{x}\right]$ c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right]$

d) $\lim\limits_{x\to3^+}\left[\dfrac{x-1}{x-3}\right]$ e) $\lim\limits_{x\to3^-}\left[\dfrac{x-1}{x-3}\right]$ f) $\lim\limits_{x\to2}\left[\dfrac{x^2-4}{x-2}\right]$

الجواب:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x^2+\sqrt{x}\right]=+\infty+\infty=+\infty$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[x^3+\dfrac{1}{x}\right]=-\infty+\dfrac{1}{-\infty}=-\infty+0=-\infty$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right]=+\infty-\dfrac{1}{+\infty}+\dfrac{1}{+\infty}=+\infty-0+0=+\infty$

d) $\lim\limits_{x\to3^+}\left[\dfrac{x-1}{x-3}\right]=\dfrac{3-1}{3^+-3}=\dfrac{2}{0^+}=+\infty$ e) $\lim\limits_{x\to3^-}\left[\dfrac{x-1}{x-3}\right]=\dfrac{3-1}{3^--3}=\dfrac{2}{0^-}=-\infty$

f) $\lim\limits_{x\to2}\left[\dfrac{x^2-4}{x-2}\right]=\dfrac{4-4}{2-2}=\dfrac{0}{0}$ عدم تعيين

IPN

$$\lim_{x\to 2}\left[\frac{x^2-4}{x-2}\right]=\lim_{x\to 2}\left[\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}\right]=\lim_{x\to 2}[x+2]=2+2=4$$

ثانيا: تطبيـــــــــــــقات

تطبيـــق 1:

أوجد النهايات التالية: 1) $\lim_{x\to +\infty}(5x^2+2x-5)$ 2) $\lim_{x\to +\infty}(3x^2+4x+7)$

الحل:

1) $\lim_{x\to +\infty}(5x^2+2x-5)=\lim_{x\to +\infty}5x^2=5(+\infty)=+\infty$

2) $\lim_{x\to +\infty}(3x^2+4x+7)=\lim_{x\to +\infty}3x^2=3(+\infty)=+\infty$

تطبيـــق 2:

أوجد النهايات التالية: 1) $\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2+x+1}{x-1}$ 2) $\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2+x+1}{x-1}$ 3) $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x+1}{3x+2}$

الحل:

1) $\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2+x+1}{x-1}=\frac{1+1+1}{0^-}=-\infty$

2) $\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2+x+1}{x-1}=\frac{1+1+1}{0^+}=+\infty$

3) $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x+1}{3x+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x}=+\infty$

تطبيـــق 3:

أوجد النهايات التالية:

a) $\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{2x+3}{x^2+x+1}\right]$ b) $\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{2x+3}{x^2+x+1}\right]$ c) $\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2+3x-2}{x+1}\right]$

d) $\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x^2+3x-2}{x+1}\right]$ e) $\lim_{x\to 1}\left[\frac{x^2-x}{x-1}\right]$ f) $\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2+1}-x\right]$

الحل:

a) $\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{2x+3}{x^2+x+1}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{2x}{x^2}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{2}{x}\right]=\frac{2}{+\infty}=0$

b) $\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{2x+3}{x^2+x+1}\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{2x}{x^2}\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{2}{x}\right]=\frac{2}{-\infty}=0$

c) $\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2+3x-2}{x+1}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2}{x}\right]=\lim_{x\to+\infty}[x]=+\infty$

d) $\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x^2+3x-2}{x+1}\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x^2}{x}\right]=\lim_{x\to-\infty}[x]=-\infty$

e) عدم تعيين $\lim_{x\to 1}\left[\frac{x^2-x}{x-1}\right]=\frac{1-1}{1-1}=\frac{0}{0}$ ومنه $\lim_{x\to 1}\left[\frac{x^2-x}{x-1}\right]=\lim_{x\to 1}\left[\frac{x(x-1)}{x-1}\right]=\lim_{x\to 1}[x]=1$

f) عدم تعيين $\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2+1}-x\right]=+\infty-\infty$

نضرب في المرافق $\sqrt{x^2+1}+x$ **:**

$$\sqrt{x^2+1}-x=\frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x}=\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

IPN

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2+1}-x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}\right]=\frac{1}{+\infty+\infty}=\frac{1}{+\infty}=0$$

ثالثا: تمـــــــــــــــارين

تمرين 1:

أوجد النهايات التالية :

1) $\lim_{x\to+\infty}-7x^3+x^2-4x+3$ ، 2) $\lim_{x\to+\infty}2x^3-6x^2+x-2$

تمرين 2:

أوجد النهايات التالية:

1) $\lim_{x\to2^+}\frac{x+1}{x^2-4}$ 2) $\lim_{x\to2^+}\frac{x+1}{x^2-4}$

تمرين 3:

حدد ميدان تعريف الدالة f، ثم احسب نهاياتها عند أطراف ميدان التعريف:

1) $f(x)=-2x^2+7x-2$ ، 2) $f(x)=\frac{3x-2}{x-1}$

تمرين 4:

أوجد النهايات التالية:

a) $\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2+x+1}{2x+2}\right]$ b) $\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x^2+x+1}{2x+2}\right]$ c) $\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2+3x+2}{x^2+5x-2}\right]$

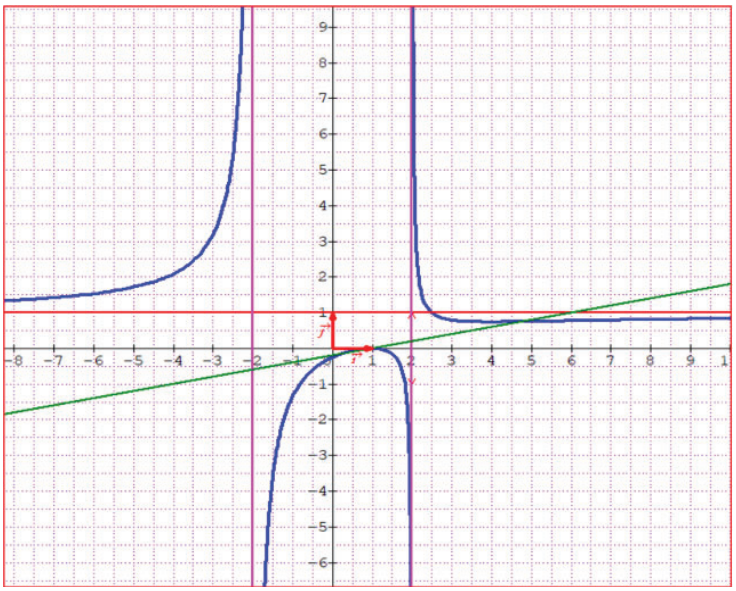
d) $\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x^2+3x+2}{x^2+5x-2}\right]$ e) $\lim_{x\to2}\left[\frac{x^2-4}{x-2}\right]$ f) $\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2+x}-x\right]$

تمرين 5:

الشكل المقابل يمثل المنحنى البياني لدالة ما f.

1) حدد ميدان تعريف الدالة f

2) حدد النهايات عند أطراف ميدان التعريف.



IPN

الوحدة الثانية: المقاربات والفروع اللانهائية

الأهداف :

✓ القدرة على تحديد المقاربات في مختلف الحالات وتفسيرها بيانيا.

✓ القدرة على تحديد الفروع اللانهائية في مختلف الحالات وتفسيرها بيانيا.

أولا : المحتوى: ما يجب الإلمام به

- **المقـــاربات:**

طبيعة المقارب	التعريف	التفسير البياني
الرأسي	هو المستقيم $(\mathcal{D})$ ذو المعادلة $x= a$ حيث: $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$ أو $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$	
الأفقي	هو المستقيم $(\mathcal{D})$ ذو المعادلة $y= a$ حيث: $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = a$ أو $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = a$	

مثال:

1) لتكن $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-3}$ بين أن منحنى f البياني يقبل المستقيمين ، $x= 3$ و$y= 2$ على التوالي مقاربا رأسيا وآخر أفقيا.

2) لتكن $g(x)=\dfrac{2x^2+1}{x-3}$ بين أن منحنى g البياني يقبل المستقيمين ، $x= 3$ و$y= 2x+6$ على التوالي مقاربا رأسيا وآخر مائلا.

الجواب:

1) $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-3}$

f دالة نسبية ميدان تعريفها: $D_f = \mathbb{R}-\{3\} =]-\infty;3[\cup]3;+\infty[$

$\lim\limits_{x\to\mp\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\mp\infty}\left[\dfrac{2x+1}{x-3}\right] = \lim\limits_{x\to\mp\infty}\left[\dfrac{2x}{x}\right] = 2$

إذن المستقيم ذو المعادلة $y = 2$ هو مقارب أفقي لمنحنى الدالة f عند $\pm\infty$.

$\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^-}\left[\dfrac{2x+1}{x-3}\right] = \dfrac{7}{3^- -3} = \dfrac{7}{0^-} = -\infty$

IPN

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+}\left[\frac{2x+1}{x-3}\right] = \frac{7}{3^+-3} = \frac{7}{0^+} = +\infty$$

إذن المستقيم ذو المعادلة $x = 3$ هو مقارب رأسي لمنحنى f.

(2 $g(x) = \dfrac{2x^2+1}{x-3}$، g دالة نسبية ميدان تعريفها: $D_g = \mathbb{R} - \{3\} =]-\infty;3[\cup]3;+\infty[$

$$\lim_{x\to 3^-} g(x) = \lim_{x\to 3^-}\left[\frac{2x^2+1}{x-3}\right] = \frac{19}{3^--3} = \frac{19}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 3^+} g(x) = \lim_{x\to 3^+}\left[\frac{2x^2+1}{x-3}\right] = \frac{19}{3^+-3} = \frac{19}{0^+} = +\infty$$

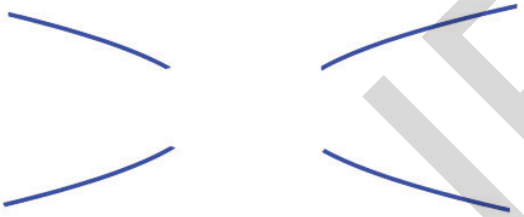
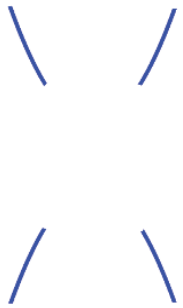
إذن المستقيم ذو المعادلة $x = 3$ هو مقارب رأسي لمنحنى g

$$\lim_{x\to\mp\infty}[f(x)-(2x+6)] = \lim_{x\to\mp\infty}\left[\frac{2x^2+1}{x-3} - 2x - 6\right]$$

$$= \lim_{x\to\mp\infty}\left[\frac{2x^2+1-2x^2+6x-6x+18}{x-3}\right] = \lim_{x\to\mp\infty}\left[\frac{19}{x-3}\right] = 0$$

إذن المستقيم ذو المعادلة $y = 2x + 6$ هو مقارب مائل لمنحنى g عند $\pm\infty$.

الفروع اللانهائية:

طبيعة الفرع	الشرط	التفسير البياني
فرع لا نهائي باتجاه محور الفواصل (OX)	$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \pm\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ أو $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \pm\infty$ و $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$	
فرع لا نهائي باتجاه محور التراتيب (OY)	$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \pm\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$ أو $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \pm\infty$ و $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$	

VPN

مثال:

1) $f(x) = x^2 + 5x - 1$، بين أن منحنى الدالة f يقبل فرعا لا نهائيا باتجاه (Oy) عند $+\infty$ و $-\infty$

2) $f(x) = \sqrt{2x+1}$ ، بين أن منحنى الدالة g يقبل فرعا لا نهائيا باتجاه (Ox) عند $+\infty$

الجواب:

1) $f(x) = x^2 + 5x - 1$ ، f هي دالة كثيرة حدود فهي معرفة على $\mathbb{R} =]-\infty;+\infty[$

$$\lim_{x\to\mp\infty} f(x) = \lim_{x\to\mp\infty} [x^2 + 5x - 1] = \lim_{x\to\mp\infty} [x^2] = +\infty$$

$$\lim_{x\to\mp\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\mp\infty} \left[\frac{x^2 + 5x - 1}{x}\right] = \lim_{x\to\mp\infty} \left[\frac{x^2}{x}\right] = \lim_{x\to\mp\infty} [x] = \mp\infty$$

إذن منحنى الدالة f يقبل فرعا لا نهائيا باتجاه (Oy) عند $\mp\infty$

2) $f(x) = \sqrt{2x+1}$

$$x \in D_f \Leftrightarrow 2x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow 2x \geq -1 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow D_f = \left[-\frac{1}{2};+\infty\right[$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left[\sqrt{2x+1}\right] = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{\sqrt{2x+1}}{x}\right] = \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{2x+1}{x} \times \frac{1}{\sqrt{2x+1}}\right] = 2 \times 0 = 0$$

إذن منحنى الدالة f يقبل فرعا لا نهائيا باتجاه (Ox) عند $+\infty$.

IPN

ثانيا: تطبيقـــــــــــــــــات

تطبيق1 :

في كل من الحالات التالية احسب نهايات الدالة f عند أطراف ميدان التعريف مستخرجا المقاربات أو الفروع المحتملة:

1) $f(x) = x^2 + 3x + 1$

2) $f(x) = \dfrac{3x+1}{x-2}$

3) $f(x) = \sqrt{x+2}$

الحل:

1) $f(x) = x^2 + 3x + 1$ ، f هي دالة كثيرة حدود ، فهي معرفة على $\mathbb{R} =]-\infty;+\infty[$ ، ثم إن

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^2}{x} = \lim\limits_{x\to -\infty} x = -\infty \\ \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} x = +\infty \end{cases} \quad \text{و} \quad \lim_{x\to \mp\infty} f(x) = \lim_{x\to \mp\infty}(x^2+3x+1) = \lim_{x\to -\infty} x^2 = +\infty$$

ومنه فإن المنحني يقبل فرعا لانهائيا في اتجاه (Oy) في كلا الحالتين.

2) $f(x) = \dfrac{3x+1}{x-2}$ ، f دالة نسبية ، ميدان تعريفها: $D_f = \mathbb{R}\setminus\{2\} =]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$

النهايات عند أطراف ميدان التعريف: $\lim\limits_{x\to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to \pm\infty} \dfrac{3x+1}{x-2} = \lim\limits_{x\to \pm\infty} \dfrac{3x}{x} = 3$ إذن $y = 3$ مقارب أفقي

لمنحني الدالة f . ولدينا: $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{3x+1}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{3\times(2)+1}{\underbrace{2^- - 2}_{0^-}} = \dfrac{7}{0^-} = -\infty$ كما أن :

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{3x+1}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{3\times(2)+1}{\underbrace{2^+ - 2}_{0^+}} = \dfrac{7}{0^+} = +\infty$ ، إذن المستقيم ذا المعادلة $x = 2$ هو مقارب رأسي لمنحنى الدالة f.

3) $f(x) = \sqrt{x+2}$ ، f معرفة إذا كان: $x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -2$ $D_f = [-2 ; +\infty[$.

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x+2} = +\infty$ و $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{\sqrt{x+2}}{x} = \dfrac{x+2}{x\sqrt{x+2}}$ إذن

$\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{x+2}{x} \times \dfrac{1}{\sqrt{x+2}}\right) = 1\times(0) = 0$ ومنه منحنى الدالة f يقبل فرعا لانهائيا باتجاه (Ox) عند $+\infty$.

تطبيق2 :

بين أن المستقيم ذي المعادلة $y = 2x+1$ هو مقارب مائل لمنحنى الدالة $f(x) = \dfrac{2x^2 - x + 3}{x-1}$

الحل:

لنبين أن المستقيم ذا المعادلة $y= 2x+1$ هو مقارب مائل لمنحنى الدالة $f(x)=\frac{2x^2-x+3}{x-1}$.

$$f(x)-(2x+1)=\frac{2x^2-x+3}{x-1}-(2x+1)=\frac{2x^2-x+3-(2x+1)(x-1)}{(x-1)}=\frac{2x^2-x+4-2x^2+x}{(x-1)};$$

$$f(x)-(2x+1)=\frac{2x^2-x+4-2x^2+x}{(x-1)}=\frac{4}{(x-1)}\Rightarrow \lim_{x\to \mp\infty}(f(x)-(2x+1))=\lim_{x\to \mp\infty}\frac{4}{x-1}=0 \Rightarrow$$

المستقيم ذا المعادلة $y=2x+1$ هو مقارب مائل لمنحنى الدالة f.

IPN

ثالثا: تمـــــــــــــــارين:

تمرين 1:

في كل من الحالات التالية احسب نهايات الدالة f عند أطراف ميدان التعريف مستخرجا المقاربات أو الفروع المحتملة:

1) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 4$

2) $f(x) = \dfrac{3x+2}{x^2+1}$

3) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$

4) $f(x) = \dfrac{x^3+1}{x^2+x+1}$

تمرين 2 :

لتكن الدالة f المعرفة ب : $f(x) = \dfrac{3x^2+4x+3}{x+2}$

1) حدد ميدان تعريف الدالة f .

2) احسب النهايات عند أطراف ميدان التعريف.

3) بين أن منحنى الدالة f يقبل مقاربا رأسيا يطلب تحديده.

4) أوجد الأعداد الحقيقية a ، و b و c بحيث لكل $x \in D_f$: $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x+2}$

5) استنتج أن منحنى الدالة f يقبل مقاربا مائلا يطلب تحديد معادلته .

تمرين 3:

لتكن الدالة f المعرفة ب : لتكن الدالة f المعرفة ب : $f(x) = \dfrac{x^2-x-1}{x-2}$

1) حدد ميدان تعريف الدالة f .

2) احسب النهايات عند أطراف ميدان التعريف.

3) بين أن منحنى الدالة f يقبل مقاربا رأسيا يطلب تحديده.

4) بين أن المستقيم ذا المعادلة $y = x + 1$ هو مقارب مائل لمنحنى الدالة f.

IPN

الوحدة الثالثة: الاشتقـــــــــــــاق:

الأهداف:

- ✓ التمكن من مشتقات الدوال الاعتيادية.
- ✓ القدرة على إجراء العمليات على المشتقات.
- ✓ تحديد تغير دالة وتعيين نقاطها الحدية إن وجدت.
- ✓ تحديد معادلة المماس في نقطة لمنحنى دالة.

أولا : المحتوى: ما يجب الإلمام به

- **مشتـــــــقات الدوال الاعتيـــــــــادية:**

الدالة	ميدان التعريف	المشتقة	ميدان الاشتقاق
a (ثابت)	$\mathbb{R} =]-\infty;+\infty[$	0	$\mathbb{R} =]-\infty;+\infty[$
x	$\mathbb{R} =]-\infty;+\infty[$	1	$\mathbb{R} =]-\infty;+\infty[$
x^2	$\mathbb{R} =]-\infty;+\infty[$	$2x$	$\mathbb{R} =]-\infty;+\infty[$
x^3	$\mathbb{R} =]-\infty;+\infty[$	$3x^2$	$\mathbb{R} =]-\infty;+\infty[$
$x^n\ (n \in \mathbb{N}^*)$	$\mathbb{R} =]-\infty;+\infty[$	nx^{n-1}	$\mathbb{R} =]-\infty;+\infty[$
$f(x) = \sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+ = [0;\ +\infty[$	$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+^* =]0;\ +\infty[$
$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^* =]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$	$\frac{-1}{x^2}$	$\mathbb{R}^* =]-\infty;0[\cup]0;\ +\infty[$

- **العمـــــــليات على المشتـــــقات:**

الدالة	المشتقة
af حيث (a ثابت)	af'
$f+g$	$f'+g'$
$f \times g$	$f' \times g + f \times g'$
$f^n\ (n \in \mathbb{N}^*)$	$nf' \times f^{n-1}$
$\sqrt{f}$ حيث $(f > 0)$	$\frac{f'}{2\sqrt{f}}$
$\frac{1}{f}$ حيث $(f \neq 0)$	$\frac{-f'}{f^2}$
$\frac{f}{g}$ حيث $(g \neq 0)$	$\frac{f' \times g - f \times g'}{g^2}$

مثال:

أكمل الجدول التالي:

IPN

الدالة	المشتقة	الدالة	المشتقة
$f(x)= -5x + 1$		$u(x)=\frac{x^2-x+2}{x-2}$	
$g(x) = x^3 -3x^2 + x + 3$		$v(x)=\sqrt{2x+3}$	
$h(x)=\frac{2x+5}{x+3}$			

الجواب :

الدالة	المشتقة	الدالة	المشتقة
$f(x)= -5x + 1$	$f'(x) = -5$	$u(x)=\frac{x^2-x+2}{x-2}$	$u'(x)=\frac{x^2-4x}{(x-2)^2}$
$g(x) = x^3 -3x^2 + x + 3$	$g'(x) = 3x^2 -6x + 1$	$v(x)=\sqrt{2x+3}$	$v'(x)=\frac{1}{\sqrt{2x+3}}$
$h(x)=\frac{2x+5}{x+3}$	$h'(x)=\frac{1}{(x+3)^2}$		

- **تغيرات دالة :**

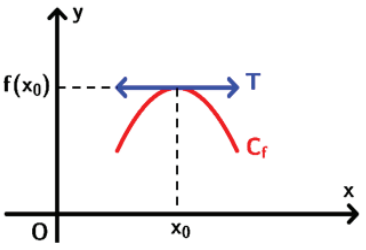
لتكن f دالة و I جزء من D_f $(I \subset D_f)$

- ✓ f متزايدة على I إذا كانت $f'(x)$ موجبة لكل x من I $(\forall x \in I, f'(x) \geq 0)$
- ✓ f متناقصة على I إذا كانت $f'(x)$ سالبة لكل x من I $(\forall x \in I, f'(x) \leq 0)$
- ✓ f متزايدة تماما على I إذا كانت $f'(x)$ موجبة تماما لكل x من I $(\forall x \in I, f'(x) > 0)$
- ✓ f متناقصة تماما على I إذا كانت $f'(x)$ سالبة تماما لكل x من I ت $(\forall x \in I, f'(x) < 0)$
- ✓ f تقبل قيمة حدية عند x_0 من I إذا كانت $f'(x)$ تنعدم وتغير إشارتها عند x_0

القـــــــــــيم الحـــــــــــدية

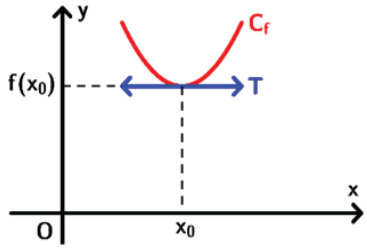
قيمة حدية عظمى

x		x_0	
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	↗	$f(x_0)$	↘



قيمة حدية دنيا

x		x_0	
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	↘	$f(x_0)$	↗



- **معادلة المماس:**

إذا كانت f قابلة للاشتقاق عند x_0 فإن منحنى الدالة يقبل مماسا T في النقطة $(x_0 ; f(x_0))$ معادلته:

$$T: y = f'(x)(x - x_0) + f(x_0)$$

مثال: $f(x)= x^2 -2x + 3$

أوجد معادلة المماس عند النقطة $x_0 = 2$ لمنحنى الدالة $f(x)= x^2 -2x + 3$

الجواب: $f(x)= x^2 -2x + 3$ هي دالة كثيرة حدود فهي قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ، نحسب الدالة المشتقة :

$f'(x)= 2x -2$ ومنه $f'(2)= 2$ معادلة المماس: $T: y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

ومنه $T: y = f'(2)(x-2)+f(2)$ $T: y = 2(x-2)+3$ وبذلك تكون معادلة المماس : $T: y = 2x-1$.

ثانيا: تطبيقـــــــــــــــــات

تطبيق1:

لتكن $f(x)=x^2-6x+7$

1) حدد ميدان تعريف الدالة f واحسب النهايات عند أطرافه، 2) احسب المشتقة f'.

3) أعط جدول تغيرات f

الحل:

1) ميدان تعريف الدالة f : f هي دالة كثيرة حدود ، فهي معرفة على $\mathbb{R}=]-\infty;+\infty[$

النهايات عند اطرافه النهايات: $\lim\limits_{x\to\mp\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\mp\infty}(x^2-6x+7)=\lim\limits_{x\to\mp\infty}x^2=+\infty$

2) المشتقة: $f'(x)=2x-6$

$f'(x)=0\Leftrightarrow 2x-6=0\Leftrightarrow x=3$ نحسب القيمة الحدية $f(3)$: $f(3)=-2$

3) جدول تغيرات f :

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-2	↗	$+\infty$

تطبيق2:

$$f(x)=\frac{2x-1}{x+2}$$

1) حدد ميدان تعريف الدالة f واحسب النهايات عند أطرافه ، 2) احسب المشتقة f'

3) أعط جدول تغيرات f

الحل:

1) ميدان تعريف الدالة f و النهايات عند أطرافه

✓ f هي دالة نسبية ، فميدان تعريفها كل القيم التي لا تعدم المقام: $\mathbb{R}\setminus\{2\}=]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$

✓ النهايات:

$$\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x-1}{x+2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x}{x}=2\ ،$$

$$\lim_{x\to -2^-}f(x)=\lim_{x\to -2^-}\frac{2x-1}{x+2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{3\times(-2)-1}{\underbrace{-2^-+2}_{0^-}}=\frac{-6}{0^-}=+\infty$$

$$\lim_{x\to -2^+}f(x)=\lim_{x\to -2^+}\frac{2x-1}{x+2}=\lim_{x\to -2^+}\frac{3\times(-2)-1}{\underbrace{-2^++2}_{0^+}}=\frac{-6}{0^+}=-\infty$$

2) المشتقة:

$$f'(x)=\left(\frac{2x-1}{x+2}\right)'=\frac{(2x-1)'(x+2)-(x+2)'(2x-1)}{(x+2)^2}=\frac{2(x+2)-(2x-1)}{(x+2)^2}=\frac{5}{(x+2)^2}>0$$

3) جدول تغيرات f:

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f'(x)$	$+$		‖	$+$	
$f(x)$	2	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	2

IPN

ثالثا: تمـــــــــــــــــارين:

تمرين 1:

لتكن $f(x)= x^2 -4x +3$

1) حدد ميدان تعريف الدالة f واحسب النهايات عند أطرافه.

2) احسب المشتقة f'.

3) أعط جدول تغيرات f.

تمرين 2 :

$f(x)= x^3 -6x^2 +9x -1$

1) حدد ميدان تعريف الدالة f واحسب النهايات عند أطرافه.

2) احسب المشتقة f'.

3) أعط جدول تغيرات f.

تمرين 3 :

$$f(x)=\frac{5x+7}{x+2}$$

1) حدد ميدان تعريف الدالة f واحسب النهايات عند أطرافه.

2) احسب المشتقة f'.

3) أعط جدول تغيرات f.

تمرين 4 :

$$f(x)=\frac{x^2+1}{x}$$

1) حدد ميدان تعريف الدالة f واحسب النهايات عند أطرافه.

2) احسب المشتقة f'.

3) أعط جدول تغيرات f.

IPN

الوحدة الرابعة: دراسة الدوال وتمثيلها

الأهداف:

✓ التمكن من المعطيات الأساسية لدراسة الدوال وتمثيلها بيانيا.

✓ القدرة على دراسة مختلف الدوال المدرسة وتمثيلها بيانيا .

أولا: المحتوى: ما يجب الإلمام به.

- **مخـــطط دراســـة دالـــــــــــة :**

لدراسة دالة ما نتبع الخطوات التالية:

1) تحديد ميدان التعريف.

2) دراسة الشفعية (لتقليص ميدان الدراسة).

3) حساب النهايات عند أطراف ميدان التعريف (لاستنتاج المقاربات الرأسية أو الأفقية).

4) البحث عن المقاربات المائلة أو الفروع اللانهائية.

5) حساب المشتقة.

6) دراسة إشارة المشتقة.

7) تحديد القيم الحدية.

8) بناء جدول تغيرات الدالة.

9) تحديد معادلة المماس (ات) (عند الحاجة).

10) رسم المقاربات والمماس ومنحنى الدالة (موضوع الدراسة).

مثال:

لتكن الدالة f المعرفة ب $f(x)=\frac{x+3}{x-2}$ ،قم بدراسة هذه الدالة مستخدما المخطط السابق.

الجواب :

✓ ميدان التعريف:

f ، $f(x)=\frac{x+3}{x-2}$ معرفة إذا كان: $x-2\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 2$ ومنه $x\in \mathbb{R}\setminus\{2\}$ ، $D_f=]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$

✓ النهايات:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x+3}{x-2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x}=1$$

إذن المستقيم ذو المعادلة $y=1$ هو مقارب أفقي لمنحنى الدالة f عند $-\infty$ و $+\infty$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}\frac{x+3}{x-2}=\frac{5}{0^+}=+\infty \quad \lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}\frac{x+3}{x-2}=\frac{5}{0^-}=-\infty$$

إذن المستقيم ذو المعادلة $x=2$ هو مقارب رأسي لمنحنى للدالة f

✓ المشتقة:

IPN

$$f'(x)=\left(\frac{x+3}{x-2}\right)'=\frac{(x+3)'(x-2)-(x-2)'(x+3)}{(x-2)^2}=\frac{(x-2)-(x+3)}{(x-2)^2}=\frac{-5}{(x-2)^2}\Rightarrow$$

$f'(x)<0$ لكل x من D_f

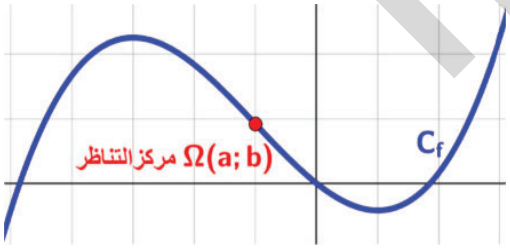
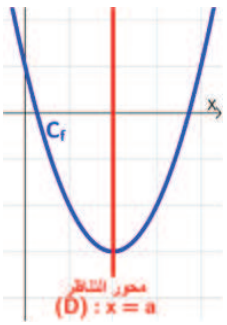
✓ جدول التغيرات

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		-	‖	-	
$f(x)$	1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1

✓ التمثيل البياني:

ملاحظة:

عند تمثيل الدوال يمكن أن نتعرض أحيانا لدراسة عناصر التناظر، ويتعلق الأمر ب:

عنصر التناظر	التعريف	التفسير البياني
مركز التناظر	النقطة $\Omega(a;b)$ هي مركز تناظر لمنحنى الدالة f إذا كان: D_f متناظر بالنسبة لـ a: و $f(2a-x)+f(x)=2b$	
محور التناظر	المستقيم $(\mathcal{D})$ ذو المعادلة $x=a$ هو محور تناظر لمنحنى الدالة f إذا كان: D_f متناظر بالنسبة لـ a: و $f(2a-x)=f(x)$	

IPN

مثال:

1) بين أن المستقيم $(\mathcal{D})$ ذا المعادلة $x=-1$ هو محور تناظر لمنحنى الدالة $f(x)=x^2+2x+1$

a.2) بين أن الدالة g يمكن أن تكتب على الشكل: $g(x)=\frac{2x+3}{x-1}=2+\frac{5}{x-1}$

b) استنتج أن النقطة $\Omega(1;2)$ هي مركز تناظر لمنحنى الدالة $g(x)=\frac{2x+3}{x-1}$

الجواب :

1) إثبات أن المستقيم $(\mathcal{D})$ ذا المعادلة $x=-1$ هو محور تناظر لمنحنى الدالة f

✓ $f(x)=x^2+2x+1$ هي كثيرة حدود ومنه، $D_f=]-\infty;+\infty[$ ، D_f متناظر بالنسبة ل -1 :.

✓ $f(-2-x)=(-2-x)^2+2(-2-x)+1=4+4x+x^2-4-2x+1=x^2+2x+1=f(x)$

إذن هو محور تناظر لمنحنى الدالة f

a.2) كتابة الدالة g على الشكل المطلوب:

$$g(x)=\frac{2x+3}{x-1}=\frac{2(x-1)+5}{x-1}=\frac{2\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}}+\frac{5}{x-1}=2+\frac{5}{x-1}$$

b) استنتاج مركز التناظر:

$$g(2-x)+g(x)=2+\frac{5}{-x+1}+2+\frac{5}{x-1}=4-\frac{5}{x-1}+\frac{5}{x-1}=4$$

إذن $\Omega(1;2)$ هي مركز تناظر لمنحنى الدالة g.

ثانيا: تطبيقـــــــــــــــــات

تطبيق 1:

لتكن f الدالة العددية المعرفة ب: $f(x)=\frac{x^2-3x+3}{x-1}$ و ليكن (C_f) منحنيها البياني في مرجع قائم ومنتظم $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

1) حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f ، واكتبها على شكل اتحاد مجالات

a.2) احسب النهايات التالية : $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$

b) استنتج أن (C_f) يقبل مقاربا رأسيا (Δ) يطلب تحديد معادلة له.

IPN

a.3) حدد الأعداد الحقيقية a ; b و c بحيث لكل x من D_f ، تكون : $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x-1}$

b) استنتج أن المستقيم (D) ذا المعادلة $y = x - 2$ هو مقارب مائل ل (C_f) .

a.4) احسب f' مشتقة الدالة

b) بين أن المعادلة $f'(x) = 0$ تقبل حلين هما 0 و 2 .

c) ادرس إشارة $f'(x)$ ثم ارسم جدول تغيرات f

a.5) حدد إحداثيات نقطة تقاطع المنحني (C_f) مع محورالتراتيب

b) أعط معادلة المماس (T) ل (C_f) في النقطة ذات الفاصلة $x_0 = 1$

c) ارسم المنحنى (C_f) ومقاربيه (D) و (Δ) في المرجع $\left(O; \vec{i}; \vec{j}\right)$.

باكـــلوريا أداب أصلية 2024

الحل :

1) تحديد ميدان التعريف: نضع : $x - 1 \neq 0$ أي أن $x \neq 1 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$ إذن $D_f =]-\infty ; 1[\cup]1 ; +\infty[$

2.a) حساب النهايات عند أطراف D_f :

- $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^2 - 3x + 3}{x-1} = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^2}{x} = \lim\limits_{x\to -\infty} x = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2 - 3x + 3}{x-1} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} x = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x^2 - 3x + 3}{x-1} = \dfrac{(-1)^2 - 3(-1) + 3}{\underbrace{1^- - 1}_{0^-}} = \dfrac{7}{0^+} = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x^2 - 3x + 3}{x-1} = \dfrac{(-1)^2 - 3(-1) + 3}{\underbrace{1^+ - 1}_{0^+}} = \dfrac{7}{0^-} = -\infty$

b) استنتاج المقارب الرأسي :

بما أن $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = -\infty$ فإن المستقيم ذا المعادلة $x = 1$ هو مقارب رأسي ل: (C_f)

3.a) تعيين الأعداد a ; b و c بحيث لكل x من D_f ، تكون : $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x-1}$

لدينا : $\dfrac{x^2 - 3x + 3}{x-1} = \dfrac{x(x-1) - 2(x-1) + 1}{x-1} = \dfrac{\cancel{(x-1)}(x-2) + 1}{\cancel{(x-1)}} = x - 2 + \dfrac{1}{x-1}$ ومنه

أي أن : $a = 1$ و $b = -2$ و $c = 1$: $f(x) = x - 2 + \dfrac{1}{x-1}$

b) نستنتج من الكتابة السابقة أن المستقيم (D) ذا المعادلة : $y = x - 2$ هو مقارب مائل للمنحنى (C_f).

4.a) حساب $f'(x)$:

$$f'(x)=\left(\frac{x^2-3x+3}{x-1}\right)'=\frac{(2x-3)(x-1)-(x^2-3x+3)}{(x-1)^2}=\frac{2x^2-5x+3-x^2+3x-3}{x^2-2x+1};$$

$$f'(x)=\frac{x^2-2x}{x^2-2x+1}=\frac{x(x-2)}{x^2-2x+1}$$

b) $f'(x)=0 \Leftrightarrow x(x-2)=0 \Leftrightarrow x=0$ أو $x=2$.

b) إن إشارة $f'(x)$ هي من إشارة ثلاثي الحدود: $x(x-2)$ الذي ينعدم عند 0 و2 وإشارته ، مبينة فيما يلي:

x	$-\infty$		0		2		$-\infty$
$x(x-2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

ومنه جدول تغيرات f :

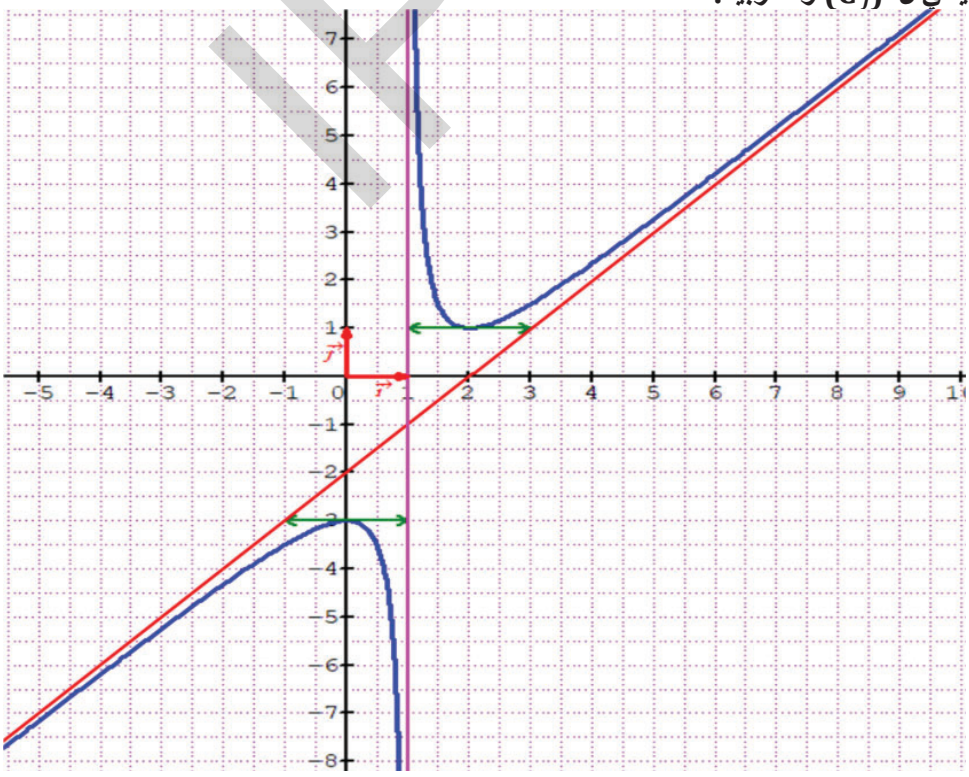
x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-3	↘	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

لدينا : $f(0)=\frac{0^2-3\times0+3}{0-1}=\frac{0^2-3\times0+3}{0-1}=-3$ و $f(2)=\frac{2^2-3\times2+3}{2-1}=\frac{4-6+3}{1}=1$

5.a) نقطة تقاطع (C_f) مع محور التراتيب: بوضع $x=0$ ، نجد : $f(0)=\frac{0^2-3\times0+3}{x-1}=\frac{3}{-1}=-3$ ومنه

النقطة المطلوبه هي ذات الإحداثيات $(0\ ;-3)$

b) الخط البياني ل (C_f) ومقاربيه.



IPN

تطبيق 2:

لتكن f الدالة العددية المعرفة ب: $f(x)=\dfrac{x^2-x-5}{x-3}$ ، و ليكن (C_f) منحنيها البياني في مرجع قائم ومنتظم $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

1) حدد D_f ميدان تعريف الدالة f واكتبه على شكل اتحاد مجالين

a.2) احسب النهايات التالية: $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$

b) استنتج أن (C_f) يقبل مقاربا رأسيا (Δ) يطلب تحديد معادلته

a.3) عين الأعداد الحقيقية a ; b و c بحيث لكل x من D_f ، تكون : $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x-3}$

b) استنتج أن المستقيم ذا المعادلة $y=x+2$ هو مقارب مائل للمنحني (C_f) .

a.4) احسب f' مشتقة الدالة f، ثم تبين أن إشارتها $f'(x)$ هي إشارة الجداء $(x-4)(x-2)$

b) أعط جدول تغيرات f

c) أعط معادلة المماس (T) ل (C_f) في النقطة A ذات الفاصلة $x_0=1$، ثم ارسم المنحني البياني (C_f) في المرجع $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

باكـــلوريا أداب أصلية 2016

الحل:

1) تحديد ميدان التعريف: نضع $x\in\mathbb{R}\setminus\{3\} \Leftrightarrow x\neq 3 \Leftrightarrow x-3\neq 0$ إذن $D_f=]-\infty;3[\cup]3;+\infty[$

a.2) حساب النهايات عند أطراف D_f :

- $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{3x^2-x-5}{x-3}=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to -\infty} x=-\infty$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2-x-5}{x-3}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to +\infty} x=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{x^2-x-5}{x-3}=\dfrac{0^2-0-5}{\underbrace{3^--3}_{0^-}}=\dfrac{0-0-5}{0^-}=\dfrac{-5}{0^-}=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{x^2-x-5}{x-3}=\dfrac{0^2-0-5}{\underbrace{3^+-3}_{0^+}}=\dfrac{0-0-5}{0^+}=\dfrac{-5}{0^+}=-\infty$

b) بما أن $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=-\infty$ إذن (Δ) ذا المعادلة $x=3$ هو مستقيم مقارب رأسي ل (C_f) .

a.3) لدينا

$$f(x)=\frac{x^2-x-5}{x-3}=\frac{x^2-3x+2x-6+1}{x-3}=\frac{x(x-3)+2(x-3)+1}{x-3}=\frac{x(x-3)}{x-3}+\frac{2(x-3)}{x-3}+\frac{1}{x-3}$$

ومنه $f(x)=x+2+\dfrac{1}{x-3}$ لكل x من D_f أي أن: $a=1$; $b=2$ و $c=1$

b) بما أن f على صيغة مجموع دالتين إحداهما من الدرجة الأولى و الثانية تحقق $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{x-3}=0$ نستنتج إذن أن

المستقيم ذا المعادلة $y=x+2$ مقارب مائل بالنسبة ل (C_f)

a.4) حساب $f'(x)$:

$$f'(x)=\left(x+2+\frac{1}{x-3}\right)'=1+0+\frac{0(x-3)-1(1)}{(x-3)^2}=1-\frac{1}{(x-3)^2}\Rightarrow$$

$$f'(x)=\frac{(x-3)^2-1}{(x-3)^2}=\frac{x^2-6x+9-1}{(x-3)^2}=\frac{x^2-6x+8}{(x-3)^2}=\frac{(x-4)(x-2)}{(x-3)^2}.$$

- إشارة $f'(x)$ هي من إشارة الجداء $(x-2)(x-4)$ لأن المقام موجب تماما.

b) جدول تغيرات f :

إشارة $(x-2)(x-4)$ تنتج من قواعد إشارة ثلاثي الحدود ذي الدرجة الثانية، وعليه:

x	$-\infty$		2		4		$-\infty$
$(x-4)(x-2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

نستنتج إذن جدول تغيرات f

x	$-\infty$		2		3		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$1,5$	↘	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↘	7	↗	$+\infty$

c) معادلة المماس (T) ل (C_f) في النقطة ذات الفاصلة $x_0=1$:

لدينا: $f(1)=\frac{1^2-1-5}{1-3}=\frac{-5}{1-3}=\frac{-5}{-2}=2,5$ و $f'(1)=1-\frac{1}{(1-3)^2}=1-\frac{1}{2^2}=\frac{3}{4}=0,75$

إذن نستطيع أن نكتب : $(T): y=(0,75)(x-1)+2,5$ أي أن $(T): y=(0,75)x+1,75$

ملاحظة:

يمكن أن نستعين بنقاط تقاطع (C_f) مع محاور الإحداثيات لذلك نحددها كما يلي:

- مع محور التراتيب، بوضع $x=0$، نجد $f(0)=\frac{0^2-0-5}{0-3}=\frac{-5}{-3}\simeq 1,6$

- مع محور الفواصل ، يكفي أن نحل المعادلة: $f(x)=\frac{x^2-x-5}{x-3}=0\Leftrightarrow x^2-x-5=0$

نستخدم حساب المميز Δ لثلاثي الحدود x^2-x-5 لحل المعادلة السابقة: $\Delta=(-1)^2-4(1)(-5)$

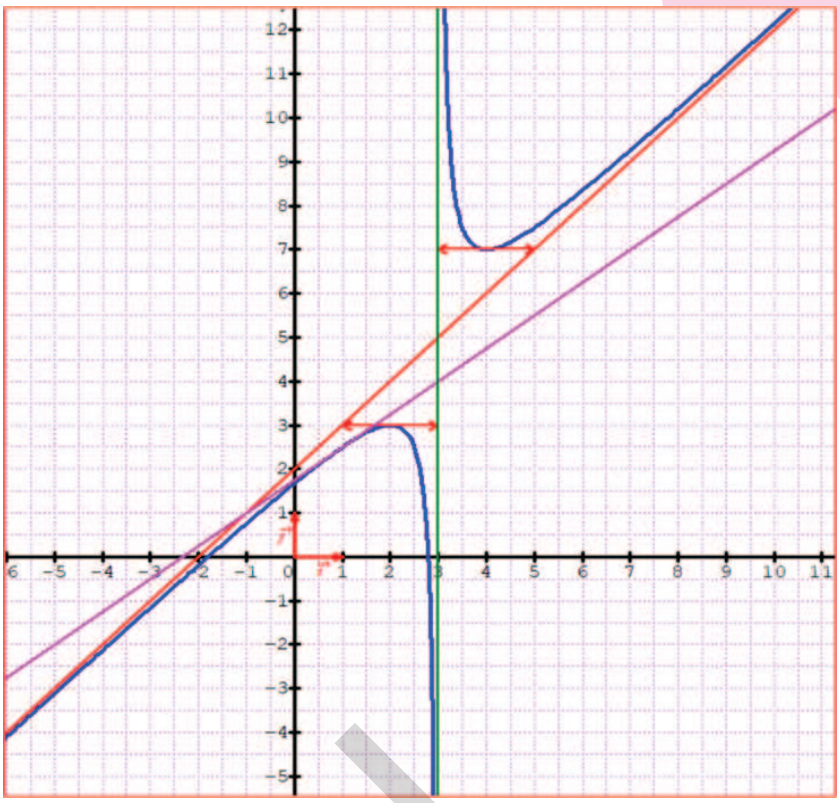
$\Delta=1+4\times 5=1+20=21>0$ ومنه المعادلة تقبل جذرين مخالفين هما :

$x_1=\frac{-(-1)+\sqrt{21}}{2\times 1}=\frac{1+\sqrt{21}}{2}$ و $x_2=\frac{-(-1)-\sqrt{21}}{2\times 1}=\frac{1-\sqrt{21}}{2}$، باستخدام الحاسبة ، نأخذ 4,5 قيمة تقريبية ل: $\sqrt{21}$ فنجد :

$x_1\simeq\frac{1+4,5}{2}=\frac{5,5}{2}=2,75$ و $x_2\simeq\frac{1-4,5}{2}=\frac{-3,5}{2}=-1,75$

✓ التمثيل البياني ل (C_f) ومقارباته ومماسيه (T) في المرجع $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

IPN



تطبيق 3:

لتكن f الدالة العددية المعرفة ب: $f(x)=\dfrac{3x^2-2x-5}{x-2}$ و ليكن (C_f) منحنيها البياني في مرجع قائم ومنتظم $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

1) حَدِّد D_f مجموعة تعريف الدالة f واكتبها على شكل اتحاد مجالين

a.2) احسب النهايات التالية : $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$

b) استنتج أن (C_f) يقبل مقاربا رأسيا (Δ) يطلب تحديده

a.3) حدد الأعداد الحقيقية a ; b و c بحيث لكل x من D_f ، تكون : $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x-2}$

b) استنتج أن المستقيم ذا المعادلة $y=3x+4$ هو مقارب مائل ل (C_f) .

a.4) احسب f' مشتقة الدالة f ثم تحقق من أن إشارة $f'(x)$ هي من إشارة الجداء $(x-1)(x-3)$

b) أعط جدول تغيرات f

a.5) حدد نقاط تقاطع (C_f) مع محاور الإحداثيات

b) أعط معادلة المماس (T) ل (C_f) في النقطة ذات الفاصلة $x_0=1$

c) مثل الخط البياني (C_f) ومقارباته ومماسه (T) في المرجع $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

باكـــلوريا أداب عصرية (مترجم) 2016

الحل:

1) f دالة نسبية، إذن ميدان تعريفها هو كل القيم التي لا تعدم المقام. نضع: $x-2\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 2 \Leftrightarrow$

$D_f=]-\infty;2[\cup]2;+\infty[\Leftrightarrow x\in \mathbb{R}\setminus\{2\}$

a.2) حساب النهايات عند أطراف D_f :

- $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{3x^2-2x-5}{x-2} = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{3x^2}{x} = \lim\limits_{x\to -\infty} 3x = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{3x^2-2x-5}{x-2} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{3x^2}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} 3x = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{3x^2-2x-5}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{3\times 0^2-2\times 0-5}{\underbrace{2^- - 2}_{0^-}} = \dfrac{0-0-5}{0^-} = \dfrac{-5}{0^-} = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{3x^2-2x-5}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{3\times 0^2-2\times 0-5}{\underbrace{2^+ - 2}_{0^+}} = \dfrac{0-0-5}{0^+} = \dfrac{-5}{0^+} = -\infty$

b) بما أن $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = -\infty$ إذن $x = 1$ هو مستقيم مقارب رأسي ل (C_f) وليكن (Δ)

a.3) لدينا $f(x) = \dfrac{3x^2-2x-5}{x-2} = \dfrac{3x^2-6x+4x-5}{x-2} = \dfrac{3x(x-2)+4x-8+3}{x-2} = \dfrac{3(x-2)+4(x-2)+3}{x-2}$

ومنه $f(x) = \dfrac{3x(x-2)+4(x-2)+3}{x-2} = \dfrac{3x(x-2)}{x-2} + \dfrac{4(x-2)}{x-2} + \dfrac{3}{x-2}$ أي أن

إذن $f(x) = 3x + 4 + \dfrac{3}{x-2}$; $a = 3$; $b = 4$ و $c = 3$

b) بما أن f على صيغة مجموع دالتين إحداهما من الدرجة الأولى و الثانية تحقق $\lim\limits_{x\to \pm\infty} \dfrac{3}{x-2} = 0$ ، نستنتج إذن أن

المستقيم ذا المعادلة $y = 3x + 4$ مقارب مائل بالنسبة ل (C_f)

a.4) حساب $f'(x)$: $f'(x) = \left(3x + 4 + \dfrac{3}{x-2}\right)' = 3 + 0 + \dfrac{0(x-2)-1(3)}{(x-2)^2} = 3 - \dfrac{3}{(x-2)^2} \Rightarrow$

$$f'(x) = \frac{3(x-2)^2-3}{(x-2)^2} = \frac{3x^2-12x+12-3}{(x-2)^2} = \frac{3x^2-12x+9}{(x-2)^2} = \frac{3(x^2-4x+3)}{(x-2)^2} = \frac{3(x-3)(x-1)}{(x-2)^2}$$

- إشارة $f'(x)$ هي من إشارة الجداء $(x-1)(x-3)$ ؛ لأن العوامل الأخرى موجبة بسطا ومقاما.

b) جدول تغيرات f :

إشارة $(x-1)(x-3)$ تنتج من قواعد إشارة ثلاثي الحدود ذي الدرجة الثانية، وعليه:

x	$-\infty$		1		3		$-\infty$
$(x-3)(x-1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

نستنتج إذن جدول تغيرات f

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	4	↘	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↘	16	↗	$+\infty$

a.5) نقاط تقاطع (C_f) مع محاور الإحداثيات:

- مع محور التراتيب، بوضع $x = 0$، نجد $f(0) = \dfrac{3\times 0^2-2\times 0-5}{0-2} = \dfrac{-5}{-2} = 2{,}5$

- مع محور الفواصل ، يكفي أن نحل المعادلة: $f(x)=\dfrac{3x^2-2x-5}{x-2}=0 \Leftrightarrow 3x^2-2x-5=0$

نستخدم حساب المميز Δ لثلاثي الحدود $3x^2-2x-5$ لحل المعادلة السابقة: $\Delta=(-2)^2-4(3)(-5)$

$\Delta=4+12\times 5=4+60=64=8^2>0$ ومنه المعادلة تقبل جذرين مخالفين هما :

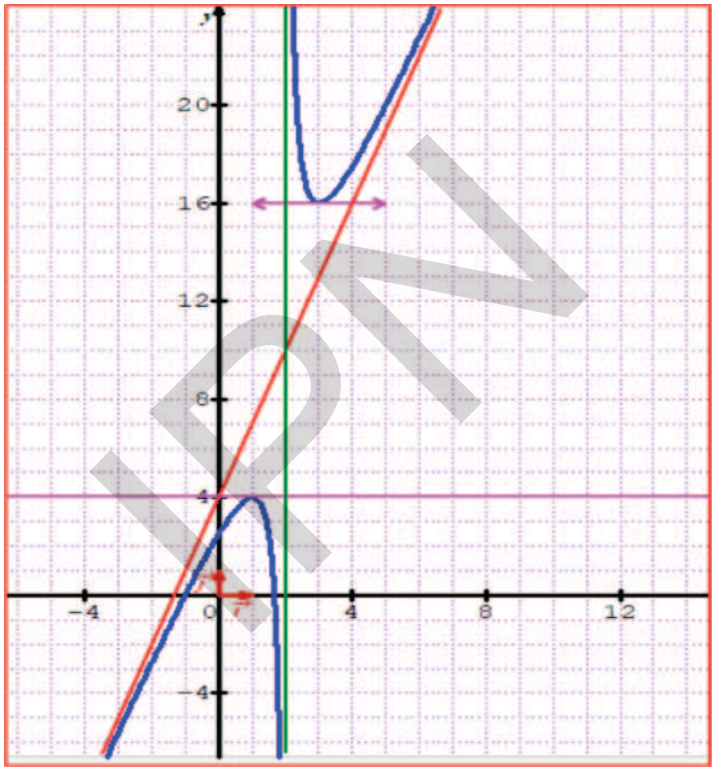
$x_1=\dfrac{-(-2)+\sqrt{8^2}}{2\times 3}=\dfrac{2+8}{6}=\dfrac{10}{6}=\dfrac{5}{3}\simeq 1,6$ و $x_2=\dfrac{-(-2)-\sqrt{8^2}}{2\times 3}=\dfrac{2-8}{6}=\dfrac{-6}{6}=-1$

b) معادلة المماس (T) ل (C_f) في النقطة ذات الفاصلة $x_0=1$:

لدينا: $f(1)=\dfrac{3\times 1^2-2\times 1-5}{1-2}=\dfrac{3-2-5}{1-2}=\dfrac{3-7}{1-2}=\dfrac{-4}{-1}=4$ و $f'(1)=3-\dfrac{3}{(1-2)^2}=3-3=0$

إذن نستطيع أن نكتب : $(T): y=0(x-1)+4$ أي أن $(T): y=4$

c) التمثيل البياني ل (C_f) ومقارباته ومماسه (T) في المرجع $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$



تطبيق 4:

نعتبر الدالة العددية f المعرفة ب: $f(x)=\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-4}$ و ليكن (C_f) منحنيها البياني في مرجع قائم ومنتظم $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$، وحدة قياسه 1 سنتيمتر.

1) حدد D_f ميدان تعريف الدالة f واكتبه على شكل اتحاد مجالات

2) احسب النهايات عند أطراف ميدان التعريف D_f

3) أعط مقاربات (C_f)

a.4) احسب $f'(x)$

b) أعط جدول تغيرات f

5) حدد احداثيات A وB نقطتي تقاطع (C_f) مع المحاورالإحداثية (Ox) و(Oy)على التوالي .

6) أعط معادلة كل من المماس (T_A) و(T_B) ل (C_f) في النقطة A وفي B

7) ارسم المقاربات والمماسات (T_A) و (T_B) ل (C_f) ثم ارسمها.

الحل:

1) تحديد ميدان التعريف: نضع: $x^2-4\neq 0 \Leftrightarrow x\neq -2$ و $x\neq 2 \Leftrightarrow x\in \mathbb{R}\setminus\{-2;2\}$ ومنه

$D_f=]-\infty;-2[\cup]-2;2[\cup]2;+\infty[$

2) حساب النهايات عند أطراف D_f :

- $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^2}{x^2}=1$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2}{x^2}=1$
- $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^-}\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-4}=\dfrac{4^2+4+1}{\underbrace{4^+-4}_{0^+}}=\dfrac{21}{0^+}=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^+}\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-4}=\dfrac{4^2+4+1}{\underbrace{4^--4}_{0^-}}=\dfrac{21}{0^-}=-\infty$
- $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-4}=\dfrac{4^2+4+1}{\underbrace{4^--4}_{0^-}}=\dfrac{21}{0^-}=-\infty$
- $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-4}=\dfrac{4^2+4+1}{\underbrace{4^+-4}_{0^+}}=\dfrac{21}{0^+}=+\infty$

3) تحديد المقاربات استنتاجا مما سبق:

- بما أن $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=1$ و $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=1$ إذن المستقيم ذا المعادلة $y=1$ هو مستقيم مقارب أفقي ل (C_f) .
- بما أن : $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=-\infty$ إذن المستقيم ذا المعادلة $x=-2$ هو مستقيم مقارب رأسي ل (C_f) .
- بما أن : $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=+\infty$ إذن المستقيم ذا المعادلة $x=2$ هو مستقيم مقارب رأسي ل (C_f) .

a.4) حساب $f'(x)$:

$$f'(x)=\left(\frac{x^2-2x+1}{x^2-4}\right)'=\frac{(2x-2)(x^2-4)-2x(x^2-2x+1)}{(x^2-4)^2}$$

$$f'(x)=\frac{2x^3-2x^2-8x+8-2x^3+2x^2-2x}{(x^2-4)^2}=\frac{-10x+8}{(x^2-4)^2}$$

IPN

b) إن إشارة $f'(x)$ هي من إشارة البسط: $-10x+8$ الذي ينعدم عند $0,8$ وإشارته من إشارة ثنائي الحد $10x+8$.

وعليه، نعطي جدول تغيرات $f(x)$ بناء على ما سبق كما يلي:

x	$-\infty$		-2		$0,8$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\|$	$+$	0	$-$	$\|$	$-$	
$F(x)$	1	↗	$+\infty$ $\|$ $-\infty$	↗	$-0,01$	↘	$+\infty$ $\|$ $-\infty$	↘	1

5) تحديد إحداثيات A وB نقطتي تقاطع (C_f) مع المحاورالإحداثية (Ox) و (Oy):

- مع (Oy) بوضع $x = 0$ نجد: $f(0) = \frac{1}{-4} = -0,25 \Leftarrow A(0\ ;\ -0,25)$
- مع (Ox) بوضع $y = 0$ نجد: $x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Leftarrow B(1\ ;0)$

6) إعطاء معادلة كل من المماس (T_A) و(T_B) ل (C_f) في النقطة A وفي B:

✓ المماس في A: $T_A : y = f'(0)(x-0) + f(0)$، $T_A : y = 0,5(x-0) - 0,25$،

$T_A : y = 0,5x - 0,25$.

✓ المماس في B: لدينا $f(1) = 0$ و $f'(1) = \frac{-2}{(-3)^2} = \frac{-2}{9} \simeq 0,2 \Leftarrow (T_B) : y = 0,2(x-1)$

أي أن: $(T_B) : y = 0,2x - 0,2$.

7) رسم المقاربات والمماسات (T_A) و (T_B) ل (C_f) ثم رسمها.

ثالثا: تمـــــــــــــــــارين

تمرين1:

لتكن f الدالة العددية المعرفة ب: $f(x)=\dfrac{x^2-3x+3}{x-2}$ و ليكن (C_f) منحنيها البياني في مرجع قائم ومنتظم $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

1) حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f واكتبها على شكل اتحاد مجالات

a.2) احسب النهايات التالية : $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$

b) استنتج أن (C_f) يقبل مقاربا رأسيا (Δ) يطلب تحديد معادلة له.

a.3) حدد الأعداد الحقيقية a ; b و c بحيث لكل x من D_f ، تكون : $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x-2}$

b) أثبت أن المستقيم (D) ذا المعادلة $y=x-1$ هو مقارب مائل ل (C_f) .

a.4) احسب f' مشتقة الدالة f

b) بين أن المعادلة $f'(x)=0$ تقبل حلين هما 1 و 3 .

c) ادرس إشارة $f'(x)$ ثم ارسم جدول تغيرات f

a.5) حدد إحداثيات نقطة تقاطع المنحني (C_f) مع محاور التراتيب

b) ارسم المنحني (C_f) ومقاربيه (D) و (Δ) في المرجع $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

باكـــلوريا أداب أصلية 2025

تمرين2:

لتكن f الدالة العددية المعرفة ب: $f(x)=\dfrac{x^2-6x+10}{x-3}$ و ليكن (C_f) منحنيها البياني في مرجع قائم ومنتظم $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

1) حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f واكتبها على شكل اتحاد مجالات

a.2) احسب النهايات التالية : $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$

b) استنتج أن (C_f) يقبل مقاربا رأسيا (Δ) يطلب تحديد معادلة له.

a.3) حدد الأعداد الحقيقية a ; b و c بحيث لكل x من D_f ، تكون : $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x-3}$

b) أثبت أن المستقيم (D) ذا المعادلة $y=x-3$ هو مقارب مائل ل (C_f) .

a.4) احسب f' مشتقة الدالة f

b) بين أن المعادلة $f'(x)=0$ تقبل حلين هما 2 و 4 .

c) ادرس إشارة $f'(x)$ ثم ارسم جدول تغيرات f

a.5) حدد إحداثيات نقطة تقاطع المنحني (C_f) مع محاور التراتيب

b) ارسم المنحني (C_f) ومقاربيه (D) و (Δ) في المرجع $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

باكـــلوريا أداب أصلية 2023

IPN

تمرين3:

لتكن f الدالة العددية المعرفة ب: $f(x)=\dfrac{x^2-4x+5}{x-2}$ و ليكن (C_f) منحنيها البياني في مرجع قائم ومنتظم $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

1) حدد D_f ميدان تعريف الدالة f واكتبه على شكل اتحاد مجالات

a.2) احسب النهايات التالية : $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$

b) استنتج أن (C_f) يقبل مقاربا رأسيا (Δ) يطلب تحديد معادلة له.

a.3) حدد الأعداد الحقيقية a ; b و c بحيث لكل x من D_f ، تكون : $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x-2}$

b) أثبت أن المستقيم (D) ذا المعادلة $y=x-2$ هو مقارب مائل ل (C_f) .

a.4) أثبت أنه لكل x من D_f ، فإن: $f'(x)=\dfrac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}$

b) ارسم جدول تغيرات f

5) ارسم المنحني (C_f) ومقارباته (D) و (Δ) في المرجع $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

باكـــلوريا أداب أصلية 2022

تمرين4:

لتكن f الدالة العددية المعرفة ب $f(x)=\dfrac{x^2-7x+13}{x-3}$ و ليكن (C_f) منحنيها البياني في مرجع قائم ومنتظم $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

1) حدد D_f ميدان تعريف الدالة f واكتبه على شكل اتحاد مجالات

a.2) احسب النهايات التالية : $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$

b) استنتج أن (C_f) يقبل مقاربا رأسيا (Δ) يطلب تحديد معادلة له.

a.3) حدد الأعداد الحقيقية a ; b و c بحيث لكل x من D_f ، تكون : $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x-3}$

b) أثبت أن المستقيم (D) ذا المعادلة $y=x-4$ هو مقارب مائل ل (C_f) .

a.4) احسب $f'(x)$ حيث f' هي مشتقة الدالة f

b) بين أن إشارتها هي من إشارة : $(x-2)(x-4)$

c) ارسم جدول تغيرات f

a.5) حدد إحداثيات نقطة تقاطع المنحني (C_f) مع محورالتراتيب

b) أوجد معادلة للمماس (T) للمنحني (C_f) في النقطة A ذات الفاصلة $x_0=0$

c) ارسم المنحني (C_f) ومقارباته في المرجع $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

باكـــلوريا أداب أصلية 2019

IPN

الفصل الثالث : الدالة اللوغارتمية والأسية

الوحـــــــــــدات:

- الدالة اللوغاريتميـــــة
- الدالة الأسيـــــة

IPN

IPN

الوحدة الأولى: الدالة اللوغارتمية

الأهداف:

- ✓ التذكير بالمكتسبات الأساسية المتعلقة بالدوال.
- ✓ التمكن من تعريف الدالة اللوغارتمية ونهاياتها المرجعية.
- ✓ دراسة الدالة اللوغارتمية وتمثيلها بيانيا.
- ✓ الخصائص الجبرية للدالة اللوغاريتمية.
- ✓ تطبيقات الدالة اللوغاريتمية لحل المعادلات والمتراجحات.
- ✓ دراسة دالة على شكل تركيب دالة ارتباطية مع دالة اللوغارتم النيبيري وتمثيلها بيانيا.
- ✓ القيام بتطبيقات.
- ✓ إنجاز تمارين.

أولا: المحتوى: ما يجب الإلمام به.

- **الدالة اللوغاريتمية**

تعريف:

تسمي دالة اللوغاريتم النيبيري ونرمز لها ب: ln ، الدالة التي تنعدم عند 1 و مشتقتها على المجال $]0 ; +\infty[$ هي الدالة $x \mapsto \frac{1}{x}$.

نتائـــــج :

✓ $D_{\ln} =]0;+\infty[$ ✓ $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$ ✓ $\ln(1) = 0$

- **النهايات المرتبطة بالدالة ln**

✓ $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$ ✓ $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$ ✓ $\lim\limits_{x \to +\infty} x\ln(x) = +\infty$ ✓ $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\ln(x)}{x} = -\infty$

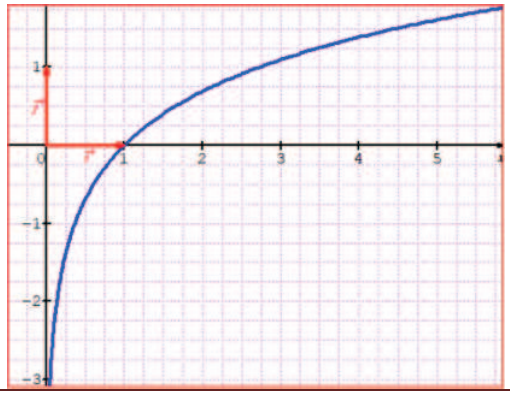
- **تغيرات الدالة ln :**

مما سبق وجدنا أن $(\ln(x))' = \frac{1}{x} > 0, \forall x \in]0;+\infty[\Leftarrow$ ln متزايدة تماما على مجموعة تعريفها.

- **جدول تغيرات الدالة ln :**

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	+	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

- **التمثيل البياني الدالة ln في مستو منسوب لمرجع قائم ومنتظم:**



IPN

ملاحظة:

من الخط البياني للدالة ln، النقطة ذات الترتيب 1 (على محور التراتيب) فاصلتها تسمى العدد النيبيري، ويرمز له ب: e وتعطى قيمته التقريبية ب: 2,718.

- **خصائص جبرية :**

$\forall a>0$ و $b>0$ فإن :

$$\ln(ab)=\ln a+\ln b \quad ; \quad \ln(a^p)=p\ln a \quad ; \quad \ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln(a)-\ln(b)$$

$\forall\ a>1 \Rightarrow\ 0<\ln(a)$	$\forall\ 0<a<1 \Rightarrow\ \ln(a)<0$
$\forall\ a>0$ و $b>0$ فإن :	
$\ln ab=\ln a+\ln b$ ✓	$\ln a^r=r\ln a,\ r\in\mathbb{Q}$ ✓	$\ln\frac{a}{b}=\ln(a)-\ln(b)$ ✓
$\ln\frac{1}{a}=-\ln(a)$ ✓	$\ln\left(\sqrt{a}\right)=\frac{1}{2}\ln(a)$ ✓	إذا كان : $0<a<b$ فإن : $\ln a<\ln b$

مثال:

إذا علمت أن : $\ln 2\simeq 0,7$ و $\ln 3\simeq 1,1$ فاحسب ما يلي:

$$\ln 16\ ،\ \ln\left(\frac{8}{12}\right)\ ،\ \ln\left(\frac{8}{12}\right)\ ،\ \ln\left(\sqrt{6}\right)\ ،\ \ln\left(\frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}\right)$$

الجواب :

$$\ln(16)=\ln(2)^4=4\ln(2)\approx 4(0,7)\Rightarrow \ln(16)\approx 2,8 \quad ✓$$

$$\ln\left(\frac{8}{12}\right)=\ln\left(\frac{2}{3}\right)=\ln(2)-\ln(3)\approx 1,1-0,7\Rightarrow \ln\left(\frac{8}{12}\right)\approx 0,4 \quad ✓$$

$$\ln\left(\sqrt{6}\right)=\ln\left(6^{\frac{1}{2}}\right)=\frac{1}{2}\ln(6)=\frac{1}{2}\ln(2\times 3)=\frac{1}{2}\left(\ln(2)+\ln(3)\right)\Rightarrow \quad ✓$$

$$\ln\left(\sqrt{6}\right)\simeq\frac{1}{2}(0,7+1,1)\simeq \ln\left(\sqrt{6}\right)\simeq 0,9$$

$$\frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}=\frac{3}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\Rightarrow \ln\left(\frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}\right)=\ln\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}\ln(3)-\frac{1}{2}\ln(2)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}\right)\simeq\frac{1}{2}(1,1-0,7)\Rightarrow \ln\left(\frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}\right)\simeq 0,2$$

- **تطبيقات الدالة اللوغاريتمية لحل المعادلات:**

مثال:

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية :

a) $\ln x=0$ b) $\ln x=1$ c) $\ln x=3$ d) $\ln(x-1)=\ln(2)$ e) $\ln(3x-2)=\ln(2x-5)$

IPN

f) $\ln(x-5)+\ln(x-3)=\ln 3$ g) $(\ln(x))^2+5\ln(x)+6=0$

الجواب :

a) $\ln(x)=0$ ما بداخل ln يجب أن يكون موجبا تماما، بمعني أن مجموعة تعريف المعادلة هي : $]0\ ;+\infty[$.

$\ln(x)=0 \Leftrightarrow \ln(x)=\ln(1) \Leftrightarrow x=1$ وعليه مجموعة حلول المعادلة هي: $S=\{1\}$.

b) $\ln x=1 \Leftrightarrow \ln x=\ln(e)\ \ln x=1 \Leftrightarrow x=e \Leftrightarrow S=\{e\}$.

c) $\ln(x)=3 \Leftrightarrow x=e^3 \Leftrightarrow \ln(x)=\ln(e^3) \Leftrightarrow S=\{e^3\}$

d) $\ln(x-1)=\ln(2)$، شرط المعادلة : $x-1>0 \Leftrightarrow x>1$. $\ln(x-1)=\ln(2) \Leftrightarrow x-1=2 \Leftrightarrow x=3$

$\Leftrightarrow S=\{3\}$

e) $\ln(3x-2)=\ln(2x-5)$، هذه المساواة تحدد شرطي المعادلة: $3x-2>0 \Leftrightarrow x>\frac{3}{2}$ و $2x-5>0$

$\Leftrightarrow x>\frac{5}{2}$ (تحقق الشرط الأخير يضمن تحقق الأول) .

$\ln(3x-2)=\ln(2x-5) \Leftrightarrow 3x-2=2x-5 \Leftrightarrow x=-3$ (مرفوض لعدم تحقق الشرط المذكور)، ومنه $S=\phi$.

f) $\ln(x-5)+\ln(x-3)=\ln 3$، هذه المساواة تحدد شرطي المعادلة: $x-5>0 \Leftrightarrow x>5$ و$x-3>0$

$\Leftrightarrow x>3$ (تحقق الشرط الأول يضمن تحقق الشرط الأخير).

$\ln(x-5)+\ln(x-3)=\ln 3 \Leftrightarrow \ln((x-5)(x-3))=\ln 3 \Leftrightarrow \ln(x^2-8x+15)=\ln 3$

$x^2-8x+15=3 \Leftrightarrow x^2-8x+12=0$، تؤول المعادلة الأصلية إذن إلى معادلة من الدرجة الثانية في x .

وبما أن $x^2-8x+12=(x-6)(x-2)$ فإن للمعادلة حلين هما : $x=6$ (مقبول) و $x=2$ (مرفوض).

ومنه : $S=\{6\}$.

g) $(\ln(x))^2+5\ln(x)+6=0$ بوضع $\ln(x)=t$ تؤول المعادلة إلى الصيغة التالية:

$t^2+5t+6=0$ وهي معادلة من الدرجة الثانية في t، يمكن أن نكتبها على الشكل التالي:

$(t-3)(t-2)=0$ وهي ذات حلين: $t=3 \Rightarrow \ln(x)=3 \Rightarrow x=e^3$ أو $t=2 \Rightarrow \ln(x)=2 \Rightarrow x=e^2$

وبالتالي تكون مجموعة حلول المعادلة: $S=\{e^2\ ;e^3\}$.

IPN

- **دراسة دالة من الشكل $f : x \mapsto \ln(ax+b)$**

نعتبر الدالة : $f : x \mapsto \ln(2x-1)$

✓ $D_f = \left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ ، $\lim\limits_{x \to \left(\frac{1}{2}\right)^+} (\ln(2x-1) = -\infty$ ، $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \ln(2x-1) = +\infty$

✓ $f'(x) = \frac{2}{2x-1}$ $\Leftarrow f'(x) > 0, \forall x \in D_f \Leftarrow$ f متزايدة تماما

✓ جدول التغيرات

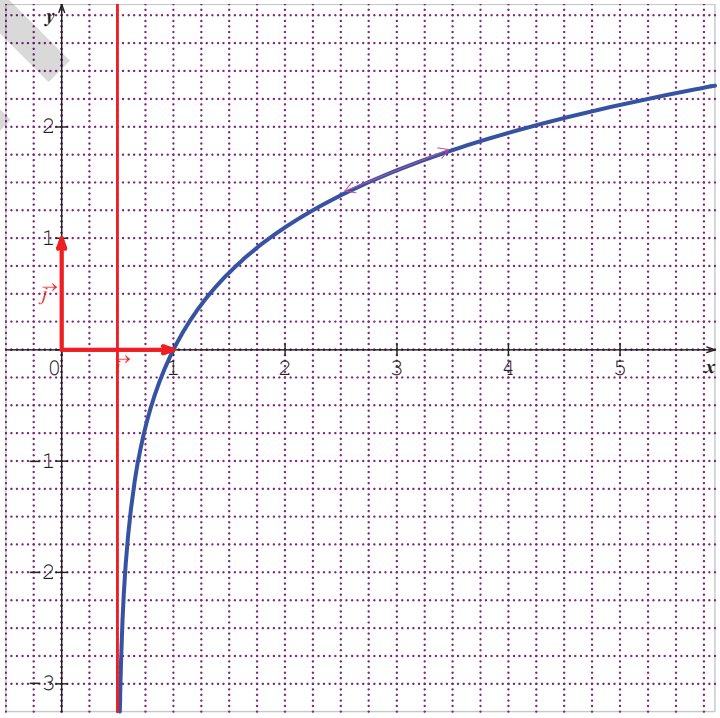
x	$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	
$f(x)$	$-\infty$ ‖	↗	$+\infty$

✓ نحدد النهاية التالية: $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(2x-1)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x(2-\frac{1}{x})}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{\ln x}{x} + \frac{\ln x(2-\frac{1}{x})}{x}\right) = 0 \Leftarrow$ الخط البياني للدالة يقبل

منحى مقاربا في اتجاه (Ox).

✓ التمثيل البياني للدالة $f : x \mapsto \ln(2x-1)$



IPN

ثانيا: تطبيقـــــــــــــــــات

تطبيق 1:

أعط مجموعة تعريف كل من الدوال التالية:

$f(x)= \ln(x+4)$ (a ، $f(x)= \ln(-x+5)$ (b ، $f(x)= \ln(x^2-4)$ (c

الحل:

a) $f(x)= \ln(x+4)$ ، f معرفة إذا وفقط إذا كان $x+4>0 \Leftrightarrow x>-4$ إذن $D_f=]-4;+\infty[$

b) $f(x)= \ln(-x+5)$ ، f معرفة إذا وفقط إذا كان $-x+5>0 \Leftrightarrow x<5$ إذن $D_f=]-\infty;5[$

c) $f(x)= \ln(x^2-4)$ ، f معرفة إذا وفقط إذا كان $x^2-4>0$ ، لنحدد إشارة x^2-4 :

$x^2-4=0 \Leftrightarrow (x-2)(x+2)=0 \Leftrightarrow x-2=0$ أو $x+2=0 \Leftrightarrow x=2$ أو $x=-2$

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
x^2-4		$+$	0	$-$	0	$+$	

إذن $D_f=]-\infty;-2[\cup]2;+\infty[$

تطبيق 2:

اكتب بدلالة $\ln(2)$ كلا من العبارات العددية التالية :

$G=5\ln 128-3\ln 1024$ (c ، $F=\ln\sqrt{2}+\ln\frac{1}{2}$ (b ، $E=\ln 2-\ln 32$ (a

الحل:

a) $E=\ln 2-\ln 32=\ln 2-\ln 2^5=\ln 2-5\ln 2=-4\ln 2$

b) $F=\ln\sqrt{2}+\ln\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\ln 2+\ln 2=\left(\frac{1}{2}+1\right)\ln 2=\frac{3}{2}\ln 2$

c) $G=5\ln 2^7-3\ln 2^{10}=5\times 7\ln 2-3\times 10\ln 2=35\ln 2-30\ln 2=5\ln 2$

تطبيق 3:

1) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة التالية : $x^2-7x+12=0$ 2) استنتج حلول كل من المعادلتين التاليتين في $\mathbb{R}$:

a) $(\ln(x))^2-7\ln(x)+12=0$ ، b) $\ln(x-2)+\ln(x+5)=\ln(2)+\ln(5x-11)$

الحل:

1) $x^2-7x+12=0$ نحسب المميز $\Delta=(-7)^2-4\times 1\times 12=1>0$

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{7-1}{2}=3 \\ x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{7+1}{2}=4 \end{cases} \quad ; \quad S=\{3;4\}$$

2) a) $(\ln x)^2-7\ln x+12=0$ المعادلة معرفة إذا وفقط إذا كان: $x>0$

نضع $y=\ln x$ تصبح المعادلة $y^2-7y+12=0$ ومنه:

$y=4$ أو $y=3$ ومنه $\ln x=4$ أو $\ln x=3$ ومنه $x=e^4$ أو $x=e^3$ إذن $S=\{e^3;e^4\}$

b) $\ln(x-2)+\ln(x+5)=\ln(2)+\ln(5x-11)$

المعادلة معرفة إذا وفقط إذا كان:

$$\begin{cases} x-2>0 \\ x+5>0 \\ 5x-11>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>2 \\ x>-5 \\ x>\dfrac{11}{5} \end{cases} \Leftrightarrow x>\frac{11}{5}$$

$\ln[(x-2)(x+5)]=\ln[2(5x-11)] \Leftrightarrow \ln(x^2+3x-10)=\ln(10x-22)$

$$\Leftrightarrow x^2+3x-10=10x-22 \Leftrightarrow x^2-7x+12=0 \Leftrightarrow x=3 \text{ أو } x=4$$

$$S=\{3;4\} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=3 \text{ مقبول لأن } 3>\dfrac{11}{5} \\ x_2=4 \text{ مقبول لأن } 4>\dfrac{11}{5} \end{cases}$$

تطبيق 4:

لتكن الدالة المعرفة على $]0;+\infty[$ ب: $f(x)=x\ln(x)-x+1$

1) احسب $f(1)$ و $f(e)$ و $f(4)$ و $f\left(\frac{1}{3}\right)$ علما أن $\ln(2)\approx 0{,}69$ و $\ln(3)\approx 1{,}1$ و $e\approx 2{,}71$

2) احسب $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ 3) احسب $f'(x)$ لكل x من $]0;+\infty[$ وادرس إشارتها

4) اعط جدول تغيرات $f(x)$ 5) اعط معادلة المماس في النقطة ذات الفاصلة 4.

الحل:

1) $f(1)=1\times\ln(1)-1+1=1\times 0-1+1=0$

$f(e)=e\times\ln(e)-e+1=e\times 1-e+1=1$

$f(4)=4\times\ln(4)-4+1=8\ln(2)-3\approx 2{,}52$

$$f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}\times\ln\left(\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{3}+1=-\frac{1}{3}\ln(3)+\frac{2}{3}\approx -0{,}33\times 1{,}1+0{,}66\approx 0{,}297$$

2) النهايات عند أطراف ميدان التعريف:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(\underbrace{x\ln x}_{0}-x+1)=0-0+1=1$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)=\lim_{x\to +\infty}(\underbrace{x\ln x}_{+\infty}-x+1)=+\infty-\infty \text{ (ع ت)}$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)=\lim_{x\to +\infty}\left[\underbrace{x}_{+\infty}\left(\underbrace{\ln x}_{+\infty}-1+\underbrace{\frac{1}{x}}_{0}\right)\right]=(+\infty)(+\infty)=+\infty$$

3) المشتقة وإشارتها :

$$f'(x)=1\times\ln x+x\times\frac{1}{x}-1=\ln x+1-1=\ln x$$

إشارة المشتقة من إشارة $\ln x$ ومنه $f'(x)=0 \Leftrightarrow \ln x=0 \Leftrightarrow x=1$

4) جدول تغيرات f

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ 1	↘	0	↗	$+\infty$

5) معادلة المماس عند النقطة $x_0=4$:

$$T: y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0) \Leftrightarrow y=f'(4)(x-4)+f(4)$$

$$\Leftrightarrow y=x\ln 4-4\ln(4)+4\ln(4)-3 \Leftrightarrow y=\ln 4\,(x-4)+4\ln(4)-3$$

$T: y=x\ln 4-3$.

IBN

ثالثا: تمـــــــــــــــــارين:

تمرين1:

أعط مجموعة تعريف كل من الدوال التالية:

a) $f(x)= \ln(2x-5)$

b) $f(x)= \ln(x^2 + 5x +4)$

c) $\ln\left(\frac{x-3}{x+5}\right)$

تمرين2:

قَارِنْ x وy في كل من الحالتين:

1) $x =3\ln2$ و $y =2\ln3$

2) $x =\ln5- \ln2$ و $y =\ln12- \ln5$

تمرين3:

بَيِّنْ مجموعة التعريف في كل حالة ثم حل المعادلات التالية:

a) $\ln(2+5x)= \ln(x+6)$

b) $\ln(x+2)- \ln(x-2)= 1$

c) $(\ln(x))^2+ \ln(x) -6= 0$

تمرين4:

نعتبر الدالة f المعرفة ب: $f(x) = 2x - 1 - \ln x$.

a) حَدِّدْ ميدان تعريف الدالة f، ثم احسب نهايات f عند أطرافه.

b) حدد f' واعط جدول تغيرات f.

c) ارسم منحنى الدالة f.

IPN

الوحدة الثانية : الدالة الأسية

الأهداف:

- ✓ التذكير بتعريف الدالة اللوغاريتم النيبيري.
- ✓ التمكن من تعريف الدالة الأسية ونهاياتها المرجعية.
- ✓ دراسة الدالة الأسية و تمثيلها بيانيا.
- ✓ الإلمام بالخصائص الجبرية للدالة الأسية.
- ✓ تطبيقات الدالة الأسية لحل المعادلات والمتراجحات.
- ✓ دراسة دالة على شكل تركيب دالة ارتباطية مع الدالة الأسية وتمثيلها بيانيا.
- ✓ القيام بتطبيقات.
- ✓ إنجاز تمارين.

• الدالة الأسية ذات الأساس النيبيري

تعريف:

تسمي دالة أسية ذات الأساس e الدالة التي يرمز لها ب: exp والمعرفة من $]-\infty\,;+\infty[$ إلى $]0\,;+\infty[$ والتي ترفق بكل x، $\exp(x)$. هذه الدالة هي التقابل العكسي لدالة اللوغاريتم النيبيري lnx.

كتابة:

اختصارا نكتب : $\exp(x)=e^x$ (وتقرأ e أس x)

ترميز:

$$f:\mathbb{R}\to\,]0;+\infty[\,;x\mapsto\exp(x)=e^x$$

• خواص:

✓ $e^0=1$ لأن $\ln(1)=0$ ، $e^1=e$ لأن $\ln(e)=1$ ، $e^{-1}=\frac{1}{e}$ لأن $\ln\left(\frac{1}{e}\right)=-1$

لكل عدد حقيقي a وكل b و p من $\mathbb{Z}$ ، لدينا :

✓ $e^a\times e^b=e^{a+b}$ ، $\frac{e^a}{e^b}=e^{a-b}$ ، $(e^a)^p=e^{ap}$ ، $\frac{e^a}{e^b}=e^{a-b}$ ، $e^{-b}=\frac{1}{e^b}$

نتيجة:

لكل x من $\mathbb{R}$ ، لدينا: $\ln(e^x)=x \Leftarrow$ لكل x من $\mathbb{R}$ ، e^x موجود و $e^x>0$.

لكل x من $\mathbb{R}$ ، و $y>0$ لدينا التكافؤات التالية:

$e^x=y\Leftrightarrow x=\ln(y)$ و $e^y=x\Leftrightarrow y=\ln(x)$

مثال :

$e^x=5\Leftrightarrow x=\ln(5)$ و $e^7=x\Leftrightarrow 7=\ln(x)$ ، $e^5=2x+3\Leftrightarrow 5=\ln(2x+3)$

$e^{x+1}=3\Leftrightarrow x+1=\ln(3)$

• النهايات

نعطي النهايات التالية: $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$. ، $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$

• مشتقة الدالة $x\mapsto e^x$

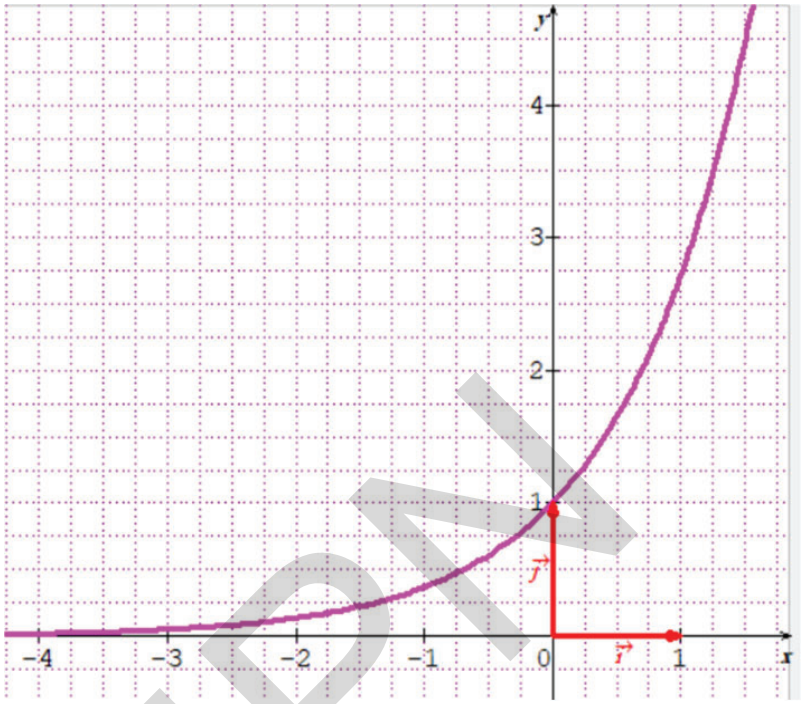
IPN

نقبل أن : $(\forall x \in \mathbb{R}),\ \left(e^x\right)' = e^x$

- جدول تغيرات $x \mapsto e^x$

x	$-\infty$		$+\infty$
$(e^x)' = e^x$		$+$	
e^x	0	↗	$+\infty$

- التمثيل البياني للدالة $x \mapsto e^x$



- تطبيقات الدالة الأسية النيبيرية لحل المعادلات والمتراجحات:

لكل عددين حقيقيين a و b من $\mathbb{R}$ فإن : ،

$e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$ ، $e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$ ، $e^a > e^b \Leftrightarrow a > b$

مثال:

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات والمتراجحات التالية:

a) $e^{2x} = e^{x-3}$ b) $e^{2x+1} > e^{x+4}$ c) $e^{x^2-5} < e^{4x}$ d) $e^{2x+5} > 3$

الجواب :

a) $e^{2x} = e^{x-3} \Leftrightarrow 2x = x - 3 \Leftrightarrow 2x - x = -3 \Leftrightarrow x = -3$ إذن : $S = \{-3\}$

b) $e^{2x+1} > e^{x+4} \Leftrightarrow 2x + 1 > x + 4 \Leftrightarrow 2x - x > 4 - 1 \Leftrightarrow x > 3$ إذن : $S =]3 ; +\infty[$

c) $e^{x^2-5} < e^{4x} \Leftrightarrow x^2 - 5 < 4x \Leftrightarrow x^2 - 4x - 5 < 0$ نلاحظ أن $x^2 - 4x - 5 = (x - 5)(x + 1)$

ومنه إشارة ثلاثي الحدود $x^2 - 4x - 5$ هي كما هو موضح في الجدول التالي:

x	$-\infty$		-1		5		$+\infty$
$x^2 - 4x - 5$		$+$	0	$-$	0	$+$	

إذن : $S =]-1 ; 5[$.

d) $e^{2x+5} > 3 \Leftrightarrow \ln(e^{2x+5}) > \ln(3) \Leftrightarrow 2x + 5 > \ln(3) \Leftrightarrow x > \dfrac{\ln(3) - 5}{2}$

IPN

إذن : $S = \left]\frac{\ln(3)-5}{2};+\infty\right[$.

- **دراسة دالة من الشكل $x \mapsto e^{ax+b}$**

نعتبر الدالة : $f : x \mapsto e^{2x+3}$

✓ $D_f = \mathbb{R}$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x+3} = +\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x+3} = 0$

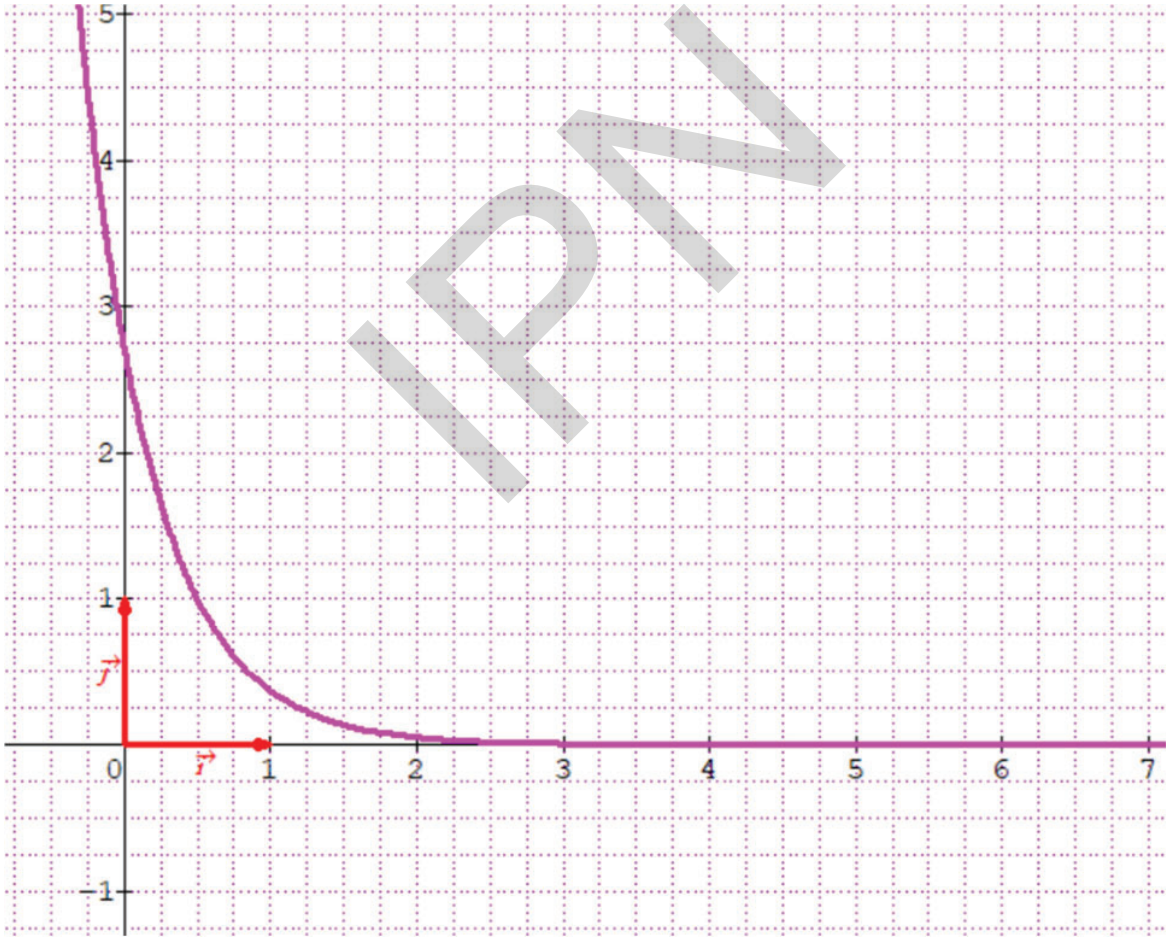
✓ $f'(x) = 2e^{2x+3}$ ⇐ $f'(x) > 0$

✓ جدول التغيرات

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)= 2e^{2x+3}$		$+$	
$f(x)$	0	↗	$+\infty$

✓ نحدد النهاية التالية: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{2x+3}}{x} = +\infty$ ⇐ الخط البياني للدالة يقبل منحى مقاربا في اتجاه (Oy).

✓ التمثيل البياني للدالة $f : x \mapsto e^{2x+3}$



IPN

ثانيا) تطبيقـــــــــــــــــات

تطبيق 1:

حل في $\mathbb{R}$ كلا من المعادلات التالية:

a) $e^x = 4$ **b)** $e^x = -8$ **c)** $e^x = -5$ **d)** $e^{2x} - e^x + 2 = 0$ **e)** $2e^{2x} + e^x - 3 = 0$ **f)** $e^{x^2-3x+2} = e^{-5x+1}$

الحل:

a) $e^x = 4 \Leftrightarrow x = \ln 4 \Leftrightarrow S = \{3; 4\}$

b) $e^x = -8$ مستحيل ومنه $S = \emptyset$

c) $e^x - 5 = 0 \Leftrightarrow e^x = 5 \Leftrightarrow x = \ln 5 \Leftrightarrow S = \{\ln 5\}$

d) $(e^x)^2 - e^x + 2 = 0 \Leftrightarrow e^{2x} - e^x + 2 = 0$ نضع $y = e^x$ تصبح المعادلة $y^2 - y + 2 = 0$

$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times 2 = -7 < 0 \Leftrightarrow S = \emptyset$

e) $2(e^x)^2 + e^x - 3 = 0 \Leftrightarrow 2e^{2x} + e^x - 3 = 0$ نضع $y = e^x$

تصبح المعادلة $2y^2 + y - 3 = 0$ نحسب المميز $\Delta = (1)^2 - 4 \times 2 \times (-3) = 25 > 0$

$$S = \{0\}: \text{ومنه} \begin{cases} y_1 = \dfrac{-1-5}{4} = \dfrac{-3}{2} \Leftrightarrow e^x = \dfrac{-3}{2} \text{ مستحيل} \\ y_2 = \dfrac{-1+5}{4} = 1 \Leftrightarrow e^x = 1 \text{(مقبول)} \Leftrightarrow x = 0 \end{cases}$$

f) $e^{x^2-3x+2} = e^{-5x+1} \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = -5x + 1 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 0$

نحسب المميز:

نحسب المميز: $\Delta = (2)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 0$ ، $x = \dfrac{-2}{2} = -1$ ومنه: $S = \{-1\}$.

تطبيق2:

1) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة التالية: $x^2 - 7x + 12 = 0$

2) استنتج حلول المعادلة التالية في $\mathbb{R}$: $e^x(e^x - 1) = 2(3e^x - 6)$

الحل:

1) $x^2 - 7x + 12 = 0$ نحسب المميز $\Delta = (-7)^2 - 4 \times 1 \times 12 = 1$

$$S = \{3; 4\} \; ; \begin{cases} x_1 = \dfrac{7-1}{2} = 3 \\ x_2 = \dfrac{7+1}{2} = 4 \end{cases}$$

2) $e^x(e^x - 1) = 2(3e^x - 6)$

$e^x(e^x - 1) = 2(3e^x - 6) \Leftrightarrow e^{2x} - e^x = 6e^x - 12 = 0 \Leftrightarrow e^{2x} - 7e^x + 12 = 0$

نضع: $e^x = y$ تصبح المعادلة: $y^2 - 7y + 12 = 0$ إذن $y = 3$ أو $y = 4$

$$S = \{\ln 3 \, ; \ln 4\} \; ; \begin{cases} e^x = 3 \Leftrightarrow x = \ln 3 \\ e^x = 4 \Leftrightarrow x = \ln 4 \end{cases}$$

تطبيق2:

حل في $\mathbb{R}$ كلا من المتراجحات التالية:

IPN

a) $e^x > 3$ b) $e^x \leq -8$ c) $e^x - 2 \geq 0$

الحل:

a) $e^x > 3 \Leftrightarrow x > \ln 3 \Leftrightarrow S =]\ln 3 ; +\infty[$

b) بما أن e^x (موجبة تماما) فإن المتراجحة لا تملك حلا إذن $S = \emptyset$

c) $e^x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq 2 \Leftrightarrow x \geq \ln 2 \Leftrightarrow S = [\ln 2 ; +\infty[$

تطبيق3:

لتكن الدالة المعرفة ب: $f(x) = x - 1 - e^x$

a) حدد ميدان تعريف f واحسب النهايات عند أطرافه.

b) حدد f ' واعط جدول تغيرات f

c) بين أن المستقيم ذا المعادلة: $y = x - 1$ مقارب مائل للخط البياني ل f.

الحل:

a) تحديد ميدان تعريف f وحساب النهايات عند أطرافه.

$$D_f = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} [x - 1 - e^x] = -\infty - 1 - 0 = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left[x\left(1 - \frac{1}{x} - \frac{e^x}{x}\right)\right] = +\infty(1 - 0 - \infty) = -\infty$$

b) تحديد f' وإعطاء جدول تغيرات f

$$f'(x) = 1 - e^x$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - e^x = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$$

$$f(0) = 0 - 1 - e^0 = -1 - 1 = -2$$

جدول التغيرات:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'(x)	+	0	−
f(x)	$-\infty$ ↗	-2	↘ $-\infty$

c) إثبات أن المستقيم ذا المعادلة: $y = x - 1$ مقارب مائل للخط البياني ل f

$$\lim_{x \to -\infty} [f(x) - (x - 1)] = \lim_{x \to -\infty} [x - 1 - e^x - x + 1] = \lim_{x \to -\infty} [-e^x] = 0$$

إذن المستقيم ذو المعادلة $y = x - 1$ هو مقارب مائل للخط البياني ل f عند $-\infty$.

IPN

ثالثا: تمـــــــــــــــــــارين:

تمرين1:

حل في $\mathbb{R}$ كلا من المعادلات التالية:

a) $e^x = -8$

b) $e^{2x} - e^x + 2 = 0$

c) $2e^{3x} + 3e^{2x} - 2e^x - 3 = 0$

تمرين2:

حل في $\mathbb{R}$ كلا من المتراجحات التالية:

a) $3e^x + 2 > 0$

b) $2e^x - 4 \leq 0$

c) $e^{2x} + 3e^x + 2 > 0$

تمرين3:

حدد ميدان تعريف الدالة f :في كل من الحالات التالية:

a) $f(x) = x + \ln(1 + e^x)$

b) $f(x) = x + e^{\frac{1}{x}}$

c) $f(x) = \dfrac{1}{e^{x^2 - x}}$

تمرين4:

نعتبر الدالة f المعرفة ب: $f(x) = x - 3 + 2e^x$.

a) حدد ميدان تعريف الدالة f ، ثم احسب نهايات f عند أطرافه.

b) حدد f' وأعط جدول تغيرات f.

c) ارسم منحنى الدالة f.

IPN

IPN

الفصل الرابع :المتتاليـــــات العـــدديـــة الوحـــــــــــــــدات:

- عموميات على المتتاليات
- المتتالية الحسابيـــــة
- المتتالية الهندسيـــــة
- تقارب المتتاليات

IPN

IPN

الوحدة الأولى: عموميات على المتتاليات

الأهداف:

- ✓ التعرف على بعض المفاهيم: الحد العام، العلاقة التراجعية، رتبة الحد ودليله
- ✓ التمكن من حساب حدود متتالية معرفة عن طريق الحد العام أو العلاقة التراجعية
- ✓ التمكن من تحديد اتجاه تغير متتالية
- ✓ القيام بتطبيقات
- ✓ إنجاز تمارين

أولا :المحتوى: ما يجب الإلمام به

تعريف:

نسمي متتالية كل دالة معرفة من $\mathbb{N}$ نحو $\mathbb{R}$ بحيث ترفق بكل عدد طبيعي n العدد U_n

ونرمز لها ب: (U_n) أو (V_n) .....

مثال:

نعتبر المتتالية $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ذات الحد العام $U_n = n^2 + 1$ ،

الحد	U_0	U_1	U_2	.....	.....	U_n
رتبته	1	2	3			n+1
دليله	0	1	2			n
قيمته	$U_0 = 0^2 + 1 = 1$	$U_1 = 1^2 + 1 = 2$	$U_2 = 2^2 + 1 = 5$			$n^2 + 1$

- **طرق تعريف متتالية**

يتم تعريف متتالية إما عن طريق الحد العام وإما عن طريق علاقة تراجعية:

1) عن طريق الحد العام: إذا كان الحد العام معطى بدلالة n فإنه يمكن حساب الحد U_{n_0} من الحدود بتعويض n بالقيمة n_0.

مثال1:

المتتالية $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ذات الحد العام $U_n = -3n^2 + 5$ يمكن حساب أي حد من حدودها بالتعويض بقيمة n:

$U_0 = -3\times0^2 + 5 = 5$; $U_1 = -3\times1^2 + 5 = 2$; $U_2 = -3\times2^2 + 5 = -7$ و $U_{10} = -3\times10^2 + 5 = -295$

2) عن طريق علاقة تراجعية: يتم تعريف المتتالية بعلاقة تراجعية تربط حدين متتابعين $(U_n$ و $U_{n+1})$ مع إعطاء الحد الأول U_0 .

مثال2:

نعتبر المتتالية (U_n) المعرفة ب $U_0 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $U_{n+1} = 3U_n - 2$

تسمح هذه العلاقة بحساب قيمة الحد U_{n+1} إذا كان لدينا الحد الذي يسبقه U_n ومنه، نكتب:

$$\begin{cases} n=0 ; U_{0+1} = 3U_0 - 2 = 3\times2 - 2 = 4 \\ n=1 ; U_{1+1} = 3U_1 - 2 = 3\times4 - 2 = 10 \\ n=2 ; U_{2+1} = 3U_2 - 2 = 3\times10 - 2 = 28 \\ n=3 ; U_{3+1} = 3U_3 - 2 = 3\times28 - 2 = 82 \end{cases}$$

IPN

- **رتابة متتالية (اتجاه تغيرها)**

لتكن $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ، متتالية، نقول إنها :

✓ متناقصة إذا وفقط إذا كان $U_{n+1} - U_n \leq 0$ (أي أن : $U_{n+1} \leq U_n$) من أجل كل عدد طبيعي n .

✓ متناقصة تماما إذا وفقط إذا كان : $U_{n+1} - U_n < 0$ (أي أن : $U_{n+1} < U_n$) من أجل كل عدد طبيعي n .

✓ متزايدة إذا وفقط إذا كان $U_{n+1} - U_n \geq 0$ (أي أن : $U_{n+1} \geq U_n$) من أجل كل عدد طبيعي n.

✓ متزايدة تماما إذا وفقط إذا كان $U_{n+1} - U_n > 0$ (أي أن : $U_{n+1} > U_n$) من أجل كل عدد طبيعي n .

✓ ثابتة إذا وفقط إذا كان: $U_{n+1} - U_n = 0$ (أي أن : $U_{n+1} = U_n$) من أجل كل عدد طبيعي n.

قاعـــــدة:

لدراسة رتابة متتالية يمكن أن:

✓ ندرس إشارة $U_{n+1} - U_n$.

✓ نقارن بين $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ و 1 (شرط أن تكون الحدود موجبة تماما).

✓ ندرس تغيرات الدالة f التي تحقق من أجل كل عدد طبيعي n : $U_n = f(n)$، في حال وجودها.

مثال:

أدرس اتجاه تغير كل من المتتاليتين (U_n) و(V_n) المعرفتين على $\mathbb{N}$ كما يلي: $U_n = 3n - 5$ و $V_n = 2\times\left(\frac{1}{3}\right)^n$

الجواب:

- تغيرات(U_n) :

$U_{n+1} - U_n = 3(n+1) - 5 - (3n - 5) = 3n + 3 - 5 - 3n + 5 = 3 > 0$ بما أن $U_{n+1} - U_n > 0$ فإن المتتالية (U_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$

- تغيرات (V_n) :

طريقة 1:

$$V_{n+1} - V_n = 2\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} - 2\times\left(\frac{1}{3}\right)^n = 2\left(\frac{1}{3}\right)^n \times\left[\frac{1}{3} - 1\right] = 2\left(\frac{1}{3}\right)^n \times\left[\frac{-2}{3}\right] < 0$$

ومنه، فإن المتتالية (v_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$

طريقة 2:

بما أن كل حدود المتتالية (V_n) موجبة تماما فإنه يمكن أن نقارن النسبة $\frac{V_{n+1}}{V_n}$ و 1

$$\frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{2\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{2\times\left(\frac{1}{3}\right)^n} = \frac{\cancel{2}\times\cancel{\left(\frac{1}{3}\right)^n}\times\frac{1}{3}}{\cancel{2}\times\cancel{\left(\frac{1}{3}\right)^n}} = \frac{1}{3} < 1$$

إذن المتتالية(V_n) متناقصة تماما.

IPN

تطبيقـــــــــــــــــات :

تطبيق1:

لتكن المتتالية (U_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $U_n = -3n^2 + 1$ ،

1) احسب U_0 ، U_1 ، U_2 ، U_{12} و U_{25}

2) اكتب بدلالة n الحدود U_{n+1} ، U_{n+2} و U_{2n}

الحل:

1) حساب الحدود المطلوبة:

$U_0 = -3\times0^2 + 1 = 1$ ، $U_1 = -3\times1^2 + 1 = -2$ ، $U_2 = -3\times2^2 + 1 = -11$ ، $U_{12} = -3\times12^2 + 1 = -431$

$U_{25} = -3\times25^2 + 1 = -1874$

2) كتابة U_{n+1} ، U_{n+2} و U_{2n} بدلالة n

$U_{n+1} = -3(n+1)^2 + 1 = -3n^2 - 6n - 2$ ، $U_{n+2} = -3(n+2)^2 + 1 = -3n^2 - 12n - 11$ و

$U_{2n} = -3(2n)^2 + 1 = -12n^2 + 1$

تطبيق2:

لتكن المتتالية (U_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n ب $\begin{cases} U_{n+1} = \dfrac{3}{2+U_n} \\ U_0 = 2 \end{cases}$

1) احسب الحدين U_1 و U_2 ، 2) بيّن طريقة حساب الحد U_5

الحل:

1) حساب الحدين U_1 و U_2

$$U_1 = \frac{3}{2+U_0} = \frac{3}{2+2} = \frac{3}{4} \quad \text{و} \quad U_2 = \frac{3}{2+U_1} = \frac{3}{2+\frac{3}{4}} = \frac{3}{\frac{11}{4}} = \frac{12}{11}$$

2) لأجل حساب الحد U_5 يجب أن نحسب الحدين U_3 ثم U_4 :

$$U_3 = \frac{3}{2+\frac{12}{11}} = \frac{3}{\frac{34}{11}} = \frac{33}{34} \quad ، \quad U_4 = \frac{3}{2+\frac{33}{34}} = \frac{3}{\frac{101}{34}} = \frac{102}{101} \quad \text{و} \quad U_5 = \frac{3}{2+\frac{102}{101}} = \frac{3}{\frac{304}{101}} = \frac{303}{304}$$

تطبيق3:

ادرس اتجاه تغير كل من المتتاليتين (U_n) و (V_n) المعرفتين على $\mathbb{N}$ كما يلي: $U_n = \dfrac{n+1}{3^n}$ و $V_n = \dfrac{2n-1}{n+3}$

الحل:

✓ تغيرات (U_n) :

$U_{n+1} - U_n = \dfrac{n+2}{3^{n+1}} - \dfrac{n+1}{3^n} = \dfrac{n+2}{3^{n+1}} - \dfrac{3(n+1)}{3^{n+1}} = \dfrac{-2n-1}{3^{n+1}} = \dfrac{\overbrace{-(2n+1)}^{<0}}{3^{n+1}} < 0$ ومنه فإن المتتالية (U_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$

✓ تغيرات (V_n) :

$$V_{n+1} - V_n = \frac{2(n+1)-1}{n+1+3} - \frac{2n-1}{n+3} = \frac{2n+1}{n+4} - \frac{2n-1}{n+3} = \frac{(2n+1)(n+3)-(2n-1)(n+4)}{(n+4)(n+3)} \Rightarrow$$

$$V_{n+1} - V_n = \frac{(2n+1)(n+3)-(2n-1)(n+4)}{(n+4)(n+3)} = \frac{2n^2+7n+3-(2n^2+7n-4)}{(n+4)(n+3)} = \frac{7}{(n+4)(n+3)} > 0$$

ومنه فإن المتتالية (V_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$.

IPN

تمـــــــــــــــــــــارين:

تمرين 1:

لتكن المتتالية (U_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $U_n = \dfrac{2n+1}{3n+2}$

احسب الحدود الخمسة الأوائل للمتتالية (U_n)

تمرين 2:

لتكن المتتالية (U_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n ب $\begin{cases} U_{n+1} = 2U_n + 1 \\ U_0 = 1 \end{cases}$

احسب الحدود من U_1 وحتى U_7

تمرين 3:

ادرس اتجاه تغير المتتالية (U_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها العام في كل من الحالات التالية:

1) $U_n = 4 - 3n$ 2) $U_n = 4 \times 3^n$ 3) $U_n = \dfrac{n}{3} - 5$

تمرين 4:

ادرس اتجاه تغير المتتالية (U_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها العام في كل من الحالات التالية:

1) $U_n = -5 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ 2) $U_n = \dfrac{2^n}{3}$ 3) $U_n = \dfrac{2^{n+1}}{3^n}$

تمرين 5:

ادرس اتجاه تغير المتتالية (U_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها العام في كل من الحالات التالية:

1) $U_n = n^2 - n + 3$ 2) $U_n = n^2 - 5n + 8$ 3) $U_n = \dfrac{n^2}{n+1}$.

IPN

الوحدة الثانية: المتتاليات الحسابية

الأهداف:

- ✓ التعرف على متتالية حسابية.
- ✓ التعرف على الحد العام لمتتالية حسابية.
- ✓ التمكن من حساب مجموع حدود متتابعة لمتتالية حسابية.
- ✓ القيام بتطبيقات.
- ✓ إنجاز تمارين.

أولا: المحتوى: ما يجب الإلمام به

تعريف:

نقول إن المتتالية (U_n) متتالية حسابية إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي r بحيث أن من أجل كل عدد طبيعي n يكون : $U_{n+1} - U_n = r$، يسمى r أساس المتتالية (U_n)

مثال:

المتتالية (U_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ ب: $U_n = 3n - 1$ ،

نحسب الحد U_{n+1} : $U_{n+1} = 3(n + 1) - 1 = 3n + 2$ ومنه : $U_{n+1} - U_n = 3n + 2 - 3n + 1 = 3$

إذن المتتالية (U_n) حسابية أساسها $r = 3$

- **الحد العام لمتتالية حسابية**

(U_n) متتالية حسابية حدها الأول U_0 وأساسها r ، الحد العام ل (U_n) من أجل كل عدد طبيعي n هو:

$$\begin{cases} U_n = U_0 + nr \\ U_n = U_1 + (n-1)r \\ U_n = U_p + (n-p)r \end{cases}.$$

إذا كان لدينا حدان من متتالية حسابية يمكن أن نحسب أساسها r عن طريق المعادلة: $r = \dfrac{U_n - U_p}{n - p}$

مثال:

(U_n) متتالية حسابية، بحيث $U_5 = 13$ و $r = 3$ إذن $U_n = U_5 + (n - 5) \times 3$ أي أن : $U_n = 3n - 2$

ملاحظة:

تتحدد متتالية حسابية (U_n) بإعطاء إما:

- ✓ حدها العام.
- ✓ أساسها r مع أحد الحدود.
- ✓ حدين من حدودها.

مثال 2:

(U_n) متتالية حسابية، أعط عبارة الحد العام ل (U_n) في كل من الحالات التالية:

1) $U_0 = 7$ و $r = -2$ 2) $U_{10} = 41$ و $r = 4$ ، 3) $U_7 = 25$ و $U_{15} = 49$

الجواب:

عبارة الحد العام ل (U_n) في كل من الحالات التالية:

1) $U_n = U_0 + nr$ أي أن : $U_n = 7 - 2n$ ، 2) $U_n = U_{10} + (n-10)4 = 41 + 4n - 40 = 4n + 1$

3) نحسب الأساس r أولا: $r = \dfrac{U_{15} - U_7}{15 - 7} = \dfrac{49 - 25}{15 - 7} = \dfrac{24}{8} = 3$

$r = \dfrac{U_{15} - U_7}{15 - 7} = \dfrac{49 - 25}{15 - 7} = \dfrac{24}{8} = 3$ أي أن :

$U_n = U_7 + 3(n - 7) = 25 + 3n - 21 = 3n + 4$

IPN

- **اتجاه تغير متتالية حسابية**

✓ إذا كان $r = 0$ فإن المتتالية (U_n) ثابتة وكل حدودها تساوي الحد الأول.

✓ إذا كان $r > 0$ فإن المتتالية (U_n) متزايدة تماما.

✓ إذا كان $r < 0$ فإن المتتالية (U_n) متناقصة تماما.

ملاحظة:

كل متتالية (U_n) حدها العام من الشكل $U_n = an + b$ هي متتالية حسابية أساسها $r = a$ وحدها الأول $U_0 = b$

- **مجموع حدود متتابعة لمتتالية حسابية**

لتكن (U_n) متتالية حسابية حدها الأول U_0، وليكن المجموع: $S_n = U_0 + U_1 + \cdots\cdots + U_n$

المجموع S_n يحسب بالصيغة: $S_n = (n+1)\dfrac{(U_0 + U_n)}{2}$ ويبرهن بسهولة.

ملاحظة 1:

U_0 : الحد الأول ، u_n الحد الأخير و $n + 1$ عدد الحدود المجموعة

ملاحظة 2:

عدد الحدود يساوي دليل الحد الأخير ناقص دليل الحد الأول زائد واحد.

مثال:

(U_n) متتالية حسابية:

$$U_0 + U_1 + \cdots\cdots + U_9 = (9 - 0 + 1)\frac{(U_0 + U_9)}{2} = 5(U_0 + U_9)$$

$$U_3 + U_4 + \cdots\cdots + U_{16} = (16 - 3 + 1)\frac{(U_3 + U_{16})}{2} = 7(U_3 + U_{16})$$

$$U_2 + U_3 + \cdots\cdots + U_n = (n - 2 + 1)\frac{(U_0 + U_9)}{2} = (n - 1)\frac{(U_2 + U_n)}{2}$$

- **الوسط الحسابي**

لتكن a، b و c ثلاث حدود متتابعة من متتالية حسابية أساسها r مأخوذة بهذا الترتيب:

$$\begin{cases} b = a + r \\ a = b - r \\ c = b + r \end{cases}$$ ومنه $a + c = 2b$

مثال:

a، b و c ثلاث حدود متتابعة من متتالية حسابية متزايدة تحقق:

$$\begin{cases} a + b + c = 15 \\ a \times b \times c = 105 \end{cases}$$ حدد كلا من a، b و c وكذلك الأساس r

الجواب:

بما أن a، b و c ثلاث حدود متتابعة من متتالية حسابية إذن: $a + c = 2b$

بالتعويض نجد $3b = 15$ ومنه : $b = 5$.

$a \times b \times c = 105$ ، لدينا $b(b + r)(b - r) = 105$ ومنه: $5(5 + r)(5 - r) = 105$ ن بمعنى أن:

$(5 + r)(5 - r) = 21$ أي أن: $25 - r^2 = 21$ إذن $r^2 = 4$ وبالتالي: $r = 2$ أو $r = -2$ (مرفوض لكون المتتالية متزايدة) .

ومنه تكون القيم المطلوبة كما يلي: $a = b - 2 = 5 - 2 = 3$ ، $c = b + 2 = 5 + 2 = 7$.

IPN

تطبيقـــــــــــــــــات :

تطبيق1:

بين أن المتتالية (U_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ب: $U_n = -5n + 2$ حسابية.

الحل:

$U_n = -5n + 2$ إذن $U_{n+1} = -5(n+1) + 2 = -5n - 3$ ومنه : $U_{n+1} - U_n = -5n - 3 + 5n - 2 = -5$

إذن المتتالية (U_n) حسابية أساسها $r = -5$.

تطبيق2:

(U_n) متتالية معرفة بحدها العام $U_n = 5n + 2$

1) بين أن (U_n) متتالية حسابية محددا أساسها وحدها الأول u_0

2) احسب الحدود U_5 و U_{18}

3) احسب المجاميع a) $S_1 = U_0 + U_1 + \cdots\cdots + U_{18}$ ، b) $S_2 = U_5 + U_6 + \cdots\cdots + U_{18}$

c) $S_n = U_0 + U_1 + \cdots\cdots + U_n$

الحل:

1) إثبات أن المتتالية (U_n) حسابية : $U_n = 5n + 2$ يعني أن : $U_{n+1} = 5(n+1) + 2 = 5n + 7$ ومنه:

$U_{n+1} - U_n = 5n + 7 - 5n - 2 = 5$

إذن المتتالية (U_n) حسابية أساسها $r = 5$ وحدها الأول $U_0 = 5\times0 + 2 = 2$

2) حساب U_5 و U_{18}

$U_5 = 5\times5 + 2 = 25 + 2 = 27$ ، $U_{18} = 5\times18 + 2 = 90 + 2 = 92$

3) حساب المجاميع:

a) $S_1 = U_0 + U_1 + \cdots\cdots + U_{18} = (18 - 0 + 1)\dfrac{(U_0 + U_{18})}{2} = 19\dfrac{(2 + 92)}{2} = 893$

b) $S_2 = U_5 + U_6 + \cdots\cdots + U_{18} = (18 - 5 + 1)\dfrac{(U_5 + U_{18})}{2} = 7(27 + 92) = 833$

c) $S_n = U_0 + U_1 + \cdots\cdots + U_n = (n - 0 + 1)\dfrac{(U_0 + U_n)}{2} = \dfrac{(n+1)(5n+4)}{2}$

IPN

تمـــــــــــــــــارين

تمرين 1 :

(U_n) متتالية حسابية أساسها $r=5$ وحدها الأول $U_0=1$

1) احسب U_1 و U_2 2) اكتب U_n بدلالة n 3) احسب U_{2025} و U_{2026}

4) احسب المجموع $S = U_0 + U_1 + \cdots\cdots + U_{2025}$

تمرين 2 :

(U_n) متتالية حسابية معرفة ب $U_7 = 43$ و $U_{20} = 121$

1) احسب r أساس المتتالية 2) جد عبارة U_n بدلالة n

3) حدد قيمة العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون المجموع: $U_0 + \cdots\cdots + U_n = 341$

تمرين 3 :

لتكن (U_n) و (V_n) متتاليتين معرفتين ب: $\begin{cases} U_0 = -2 \\ U_{n+1} = U_n - 3n + 1 \end{cases}$: (U_n) و (V_n) ب: $V_n = U_{n+1} - U_n$

1) احسب U_1 و U_2

2) أثبت أن (V_n) متتالية حسابية محددا أساسها r وحدها الأول V_0

تمرين 4 :

(U_n) متتالية معرفة ب $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \sqrt{U_n^2 + 2} \end{cases}$

1) احسب U_1 و U_2

2) نضع $V_n = U_n^2$ بين أن (V_n) متتالية حسابية محددا أساسها r وحدها الأول V_0

3) استنتج عبارة V_n بدلالة n ثم U_n بدلالة n

4) احسب المجموع $S = V_0 + V_1 + \cdots\cdots + V_{2025}$

تمرين 5 :

(U_n) و (V_n) متتاليتين معرفتين ب :

$(U_n): \begin{cases} U_0 = -1 \\ U_{n+1} = \dfrac{4}{4 - U_n} \end{cases}$ و $(V_n): U_{n+1} = \dfrac{1}{U_n - 2}$

1) احسب U_1 و U_2

2) بين أن (V_n) متتالية حسابية محددا أساسها r وحدها الأول V_0

3) أوجدْ عبارة V_n بدلالة n

4) استنتج عبارة U_n بدلالة n .

IPN

الوحدة الثالثة: المتتاليات الهندسية

الأهداف:

- ✓ التعرف على متتالية هندسية.
- ✓ التعرف على الحد العام لمتتالية هندسية.
- ✓ التمكن من حساب مجموع حدود متتابعة لمتتالية هندسية.
- ✓ القيام بتطبيقات.
- ✓ إنجاز تمارين.

أولا: المحتوى: ما يجب الإلمام به.

تعريف:

نقول إن المتتالية (U_n) متتالية هندسية إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي غير معدوم q بحيث أنه من أجل كل عدد طبيعي n : يكون: $U_{n+1} = qU_n$ يسمى q أساس المتتالية (U_n)

مثال :

المتتالية (U_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ ب: $U_n = 3^n$ ، نحسب الحد U_{n+1} ، إذن $U_{n+1} = 3^{n+1} = 3\times3^n$

ومنه : $U_{n+1} = 3U_n$ أي أن : المتتالية (U_n) هندسية أساسها $q = 3$.

- **الحد العام لمتتالية هندسية**

لتكن (U_n) متتالية هندسية حدها الأول U_0 وأساسها q ، الحد العام ل (U_n) من أجل كل عدد طبيعي n هو:

إذا كان لدينا حدان من متتالية هندسية ، يمكن حساب أساسها q بالصيغة : $q^{n-p} = \frac{U_n}{U_p}$

$$\begin{cases} U_n = U_0q^n \\ U_n = U_1q^{n-1} \\ U_n = U_pq^{n-p} \end{cases}$$

مثال:

(U_n) متتالية هندسة بحيث $U_1 = 21$ و $q = 7$

إذن : $U_n = U_1 \times q^{n-1}$ أي أن : $U_n = 21\times7^{n-1} \Leftrightarrow U_n = 21\times\frac{7^n}{7}$ ومنه $U_n = 3\times7^n$ لكل n من $\mathbb{N}$

ملاحظة:

تتحدد متتالية هندسية (u_n) بإعطاء إما:

- ✓ حدها العام
- ✓ أساسها q مع أحد الحدود
- ✓ حدين من الحدود دليل أحدهما زوجي والآخر فردي

مثال:

(U_n) متتالية هندسية، اعط عبارة الحد العام ل (U_n) في كل من الحالات التالية:

1) $U_0 = 8$ و $q = -3$ 2) $U_7 = 640$ و $q = 2$ ، 3) $U_8 = 6561$ و $U_3 = 27$

الجواب:

1) $U_0 = 8$ و $q = -3$ بما أن : $U_n = U_0 \times q^n$ إذن : $U_n = 8(-3)^n$

2) $U_n = U_7 \times 2^{n-7}$، $U_n = 640\times 2^{n-7}$، أي أن : $U_n = 640\times\frac{2^n}{128}$ ومنه : $U_n = 5\times2^n$

3) نحسب الأساس q : $q^{8-3} = \frac{U_8}{U_3} = \frac{6561}{27}$ أي أن : $q^5 = 243$ ومنه $q = \sqrt[5]{243} = 3$ بمعنى أن:

أي أن : $U_n = U_3\times3^{n-3} = 27\times\frac{3^n}{3^3}$ ومنه : $U_n = 27\times\frac{3^n}{27}$ ومنه : $U_n = 3^n$

IPN

- **اتجاه تغير متتالية هندسية**

✓ إذا كان $q>1$ و $U_n>0$ فإن المتتالية (U_n) متزايدة تماما
✓ إذا كان $0<q<1$ و $U_n<0$ فإن المتتالية (U_n) متزايدة تماما
✓ إذا كان $0<q<1$ و $U_n>0$ فإن المتتالية (U_n) متناقصة تماما
✓ إذا كان $q>1$ و $U_n<0$ فإن المتتالية (U_n) متناقصة تماما
✓ إذا كان $q<0$ فإن المتتالية (u_n) ليست رتيبة.

ملاحظة: كل متتالية (U_n) حدها العام من الشكل $U_n = a\times b^n$ هي متتالية هندسية أساسها $q=b$ وحدها الأول $U_0 = a$

- **مجموع حدود متتابعة لمتتالية هندسية**

(U_n) متتالية حسابية حدها الأول U_0 وأساسها q. ليكن المجموع: $S_n = U_0 + U_1 + \cdots\cdots + U_n$ يحسب المجموع S_n بالصيغة $S_n = U_0\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$ حيث U_0 الحد الأول وq الأساس و $n+1$ عدد الحدود المجموعة.

ملاحظة: عدد الحدود يساوي دليل الحد الأخير ناقص دليل الحد الأول زائد واحد.

(U_n) متتالية هندسية، لدينا المجاميع التالية، تطبيقا لصيغة الجمع السابقة :

$$U_0 + U_1 + \cdots\cdots + U_9 = U_0\frac{1-q^{9-0+1}}{1-q} = U_0\frac{1-q^{10}}{1-q} \quad ; \quad U_3 + U_4 + \cdots\cdots + U_{16} = U_3\frac{1-q^{16-3+1}}{1-q} = U_3\frac{1-q^{14}}{1-q}$$

$$U_2 + U_3 + \cdots\cdots + U_n = U_2\frac{1-q^{n-2+1}}{1-q} = U_2\frac{1-q^{n-1}}{1-q}$$

مثال: (U_n) متتالية معرفة بحدها العام $U_n = 2\times 3^n$

1) بين أن (U_n) متتالية هندسية محددا أساسها وحدها الأول U_0 ، 2) احسب الحد U_2

3) احسب المجموع : $S = U_2 + U_1 + \cdots\cdots + U_7$

الجواب:

1) إثبات أن المتتالية هندسية : $U_n = 2\times 3^n$ يعني أن $U_{n+1} = 2\times 3^{n+1} = 2\times3\times 3^n = 3\times2\times 3^n = 3\times U_n$
إذن المتتالية (U_n) هندسية أساسها $q=3$ وحدها الأول $U_0 = 2\times 3^0 = 2$

2) حساب الحد U_2: $U_2 = 2\times 3^2 = 18$

3) حساب المجموع: $S = U_2 + U_3 + \cdots\cdots + U_7 = U_2\dfrac{1-q^{7-2+1}}{1-q} = 18\dfrac{1-3^6}{1-3} = 18\dfrac{1-729}{-2} = 6552$

- **الوسط الهندسي**

لتكن a، b وc ثلاث حدود متتابعة من متتالية هندسية أساسها q مأخوذة بهذا الترتيب: إذن: $ac = b^2$ $\begin{cases} b = a\times q \\ a = \dfrac{b}{q} \\ c = b\times q \end{cases}$

مثال: a ، b وc ثلاث حدود متتابعة من متتالية هندسية متزايدة تحقق: $\begin{cases} a+b+c = 26 \\ a\times b\times c = 216 \end{cases}$ حدد كلا من a، b وc وكذلك الأساس q.

الجواب:

بما أن a، b وc ثلاث حدود متتابعة من متتالية هندسية إذن: $ac = b^2$ بالتعويض نجد: $b^3 = 216$ ومنه $b = 6$

يوجد حلان: $\begin{cases} a+c = 20 \\ a\times c = 36 \end{cases}$ ($a=2$ و $c=18$) أو ($a=18$ و $c=2$) مرفوض لأن a أقل من c ومنه

$a = 2$ ، $b = 6$ ، $c = 18$ و $q = 3$.

طبيقـــــــــــــــــات :

تطبيق1:

بين أن المتتالية (U_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ ب $U_n=2\times5^n$ هندسية.

الحل:

$U_n=2\times5^n$ إذن $U_{n+1}=2\times5^{n+1}=2\times5\times5^n=5\times2\times5^n=5U_n$ ، إذن المتتالية (U_n) هندسية أساسها $q=5$.

تطبيق2:

(U_n) متتالية معرفة بحدها العام $U_n=3\times2^n$

1) بين أن (U_n) متتالية هندسية محددا أساسها وحدها الأول U_0

2) احسب الحدود U_1 و U_8

3) احسب المجاميع: a) $S_1=U_0+U_1+\cdots\cdots\cdots+U_8$ ، b) $S_2=U_1+U_2+\cdots\cdots\cdots+U_8$

c) $S_n=U_0+U_1+\cdots\cdots\cdots+U_n$

الحل:

1) إثبات أن المتتالية هندسية : $U_n=3\times2^n$ يعني أن $U_{n+1}=3\times2^{n+1}=3\times2\times2^n=2\times3\times2^n=2\times U_n$

إذن المتتالية (U_n) هندسية أساسها $q=2$ وحدها الأول $U_0=3\times2^0=3$

2) حساب الحدود U_1 و U_8: $U_1=3\times2^1=6$ ، $U_8=3\times2^8=768$

3) حساب المجاميع:

$$S_1=U_0+U_1+\cdots\cdots\cdots+U_8=U_0\frac{1-q^{8-0+1}}{1-q}=3\frac{1-2^9}{1-2}=3\frac{1-512}{-1}=1533$$

a)

$$S_1=U_0+U_1+\cdots\cdots\cdots+U_8=U_0\frac{1-q^{8-0+1}}{1-q}=3\frac{1-2^9}{1-2}=3\frac{1-512}{-1}=1533$$

$$S_2=U_1+U_2+\cdots\cdots\cdots+U_8=U_1\frac{1-q^{8-1+1}}{1-q}=6\frac{1-2^8}{1-2}=6\frac{1-256}{-1}=1530$$

b)

$$S_2=U_1+U_2+\cdots\cdots\cdots+U_8=U_1\frac{1-q^{8-1+1}}{1-q}=6\frac{1-2^8}{1-2}=6\frac{1-256}{-1}=1530$$

$$S_n=U_0+U_1+\cdots\cdots\cdots+U_n=U_0\frac{1-q^{n-0+1}}{1-q}=3\frac{1-2^{n+1}}{1-2}=3\left(2^{n+1}-1\right)$$

c)

$$S_n=U_0+U_1+\cdots\cdots\cdots+U_n=U_0\frac{1-q^{n-0+1}}{1-q}=3\frac{1-2^{n+1}}{1-2}=3\left(2^{n+1}-1\right).$$

IPN

ثالثا: تمـــــــــــــــــــارين:

تمرين1:

(U_n) متتالية هندسية أساسها $q = 3$ وحدها الأول $U_0 = 1$

1) احسب U_1 و U_2: 2) اكتب U_n بدلالة n 3) احسب U_7 و U_8 .

4) احسب المجموع $S = U_0 + U_1 + \cdots\cdots\cdots + U_7$

تمرين 2:

(U_n) متتالية هندسية معرفة ب $U_3 = 54$ و $U_8 = 13122$

1) احسب الأساس q ، 2) جد عبارة U_n بدلالة n،

3) حدد قيمة العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون المجموع: $U_0 + U_1 + \cdots\cdots\cdots + U_n = 6560$.

تمرين 3:

(U_n) و (V_n) متتاليتين معرفتين ب : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = 3U_n + 4 \end{cases}$ و $V_n = U_n + 2$

1) احسب U_1 و U_2 2) احسب V_0 ، V_1 و V_2 ، 3) بين أن (V_n) متتالية هندسية محددا أساسها q

4) جد عبارة V_n بدلالة n، 5) استنتج عبارة U_n بدلالة n.

تمرين 4:

(U_n) و (V_n) متتاليتين معرفتين ب: $\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = 2U_n - 1 \end{cases}$ و $V_n = U_n - 1$

1) احسب U_1 و U_2

2) بين أن (V_n) متتالية هندسية محددا أساسها q وحدها الأول V_0

3) جد عبارة V_n بدلالة n، 4) استنتج عبارة U_n بدلالة n

$S = V_0 + V_1 + \cdots\cdots\cdots + V_{10}$.

تمرين 5:

(U_n) و (V_n) متتاليتين معرفتين ب : $U_n = 3^n - 2$ و $V_n = U_n + 2$

1) احسب U_0 و U_1 و U_2 ، 2) احسب V_0 و V_1 و V_2

3) بين أن (V_n) متتالية هندسية محددا أساسها

4) احسب المجموع : $S = V_0 + V_1 + \cdots\cdots\cdots + V_{10}$

5) استنتج المجموع : $S' = U_0 + U_1 + \cdots\cdots\cdots + U_{10}$

تمرين 6:

(U_n) و (V_n) متتاليتين معرفتين ب : $\begin{cases} U_0 = 11 \\ U_{n+1} = \frac{4}{5}U_n + 2 \end{cases}$ و $V_n = U_n - 10$

1) احسب U_1 و U_2 ،2) بين أن (V_n) متتالية هندسية محددا أساسها q وحدها الأول V_0

3) جد عبارة V_n بدلالة n ، 4) استنتج عبارة U_n بدلالة n

5) احسب المجموع $S_n = V_0 + V_1 + \cdots\cdots\cdots + V_n$

6) استنتج المجموع $S'_n = U_0 + U_1 + \cdots\cdots\cdots + U_n$

IPN

الوحدة الرابعة: نهاية متتالية

الأهداف:

- ✓ إجراء العمليات على النهايات.
- ✓ التعرف على تقارب وتباعد متتالية.
- ✓ التعرف على نظرية الرتابة والتقارب.
- ✓ القيام بتطبيقات.
- ✓ إنجاز تمارين.

أولا) المحتوى: ما يجب الإلمام به

- **النهايات المرجعية**

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0;\quad \lim_{n\to+\infty}\sqrt{n}=+\infty;\quad \lim_{n\to+\infty}n^3=+\infty;\quad \lim_{n\to+\infty}n^2=+\infty;\quad \lim_{n\to+\infty}n=+\infty$$

$$\bullet\ \text{si } 0<a<1,\ \lim_{n\to+\infty}a^n=0 \qquad \bullet\ \text{si } a>1,\ \lim_{n\to+\infty}a^n=+\infty$$

قاعـــــدة

- ✓ نهاية كثيرة حدود هي نهاية الحد ذي الدرجة العليا.
- ✓ نهاية متتالية نسبية هي نهاية حاصل قسمة الحدين ذوي الدرجة العليا بسطا ومقاما.

- **العمليات على النهايات**

إذا كانت (U_n) و(V_n) متتاليتين.

- ✓ نهاية مجموع متتاليتين

$\lim\limits_{n\to+\infty}U_n$	$l\in\mathbb{R}$	$l\in\mathbb{R}$	$l\in\mathbb{R}$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty}V_n$	$l'\in\mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty}(U_n+V_n)$	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	عدم تعيين	$-\infty$

- ✓ نهاية جداء متتاليتين

$\lim\limits_{n\to+\infty}U_n$	$\ell\in\mathbb{R}$	$\ell>0$	$\ell>0$	$\ell<0$	$\ell<0$	$\ell=0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty}V_n$	$\ell'\in\mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty}(U_n\times V_n)$	$\ell\times\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	عدم تعيين	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$

- ✓ نهاية حاصل قسمة متتاليتين

$\lim\limits_{n\to+\infty}U_n$	$l\in\mathbb{R}$	$l\in\mathbb{R}$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$	0
$\lim\limits_{n\to+\infty}V_n$	$l'\neq 0$	$\pm\infty$	$l'>0$	$l'<0$	$l'>0$	$l'<0$	$\pm\infty$	0
$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{U_n}{V_n}$	$\frac{l}{l'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	عدم تعيين	عدم تعيين

ملاحظة:

حالات عدم التعيين هي: $\frac{\infty}{\infty};\ \frac{0}{0};\ \infty-\infty;\ 0\times\infty$

مثال:

احسب نهايات المتتاليات التالية:

1) $U_n = 3 - 5n$ 2) $V_n = 3\times\left(\frac{-1}{2}\right)^n + 2$ 3) $W_n = \frac{3n+5}{2n+1}$ 4) $x_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n + 2n + 1$

5) $y_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n + (n+1)(3^n - 1)$

الجواب:

حساب النهايات المطلوبة:

1) $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty}(3-5n) = \lim\limits_{n\to+\infty}(-5n) = -5(+\infty) = -\infty$

2) $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left[3\times\left(\frac{-1}{2}\right)^n + 2\right] = 3\times 0 + 2 = 2$

3) $\lim\limits_{n\to+\infty} W_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3n+5}{2n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3n}{2n} = \frac{3}{2}$

4) $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^n + 2n + 1\right] = 0 + 2(+\infty) + 1 = +\infty$

5) $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = \lim\limits_{n\to+\infty}(n+1)(3^n - 1) = (+\infty)(+\infty) = +\infty$

- **تقارب متتالية**

نقول إن المتتالية (U_n) متقاربة إذا وفقط إذا كانت نهايتها عدد حقيقي أي: $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \ell$

نقول إن المتتالية (U_n) متباعدة إذا وفقط إذا كان: $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \pm\infty$ أونهايتها غير موجودة.

ملاحظـــة:

كل متتالية هي إما متقاربة أو متباعدة

مثال:

ادرس تقارب المتتاليات التالية: 1) $U_n = \frac{2n+5}{n^2+1}$ 2) $V_n = (1 - 4^n)(2^n - 1)$ 3) $W_n = (-3)^n$

الجواب:

دراسة التقارب:

1) $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2n+5}{n^2+1} = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2n}{n^2} = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2}{n} = 0$ إذن (U_n) متقاربة.

2) $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = \lim\limits_{n\to+\infty}(1 - 4^n)(2^n - 1) = (1 - \infty)(\infty + 1) = -\infty$ ، إذن (V_n) متباعدة.

3) $\lim\limits_{n\to+\infty} W_n = \lim\limits_{n\to+\infty}(-3)^n$ ، بما أن (W_n) هندسية و أساسها $q \leq -1$ ، فهي متباعدة.

ملاحظـــة:

- ✓ كل متتالية حسابية هي متباعدة.
- ✓ كل متتالية هندسية أساسها $q \in]-1\ ;\ 1[$ هي متقاربة.
- ✓ كل متتالية هندسية أساسها $q \in]-\infty\ ;\ -1] \cup]1\ ;\ +\infty[$ هي متباعدة.

IPN

- **نهاية متتالية باستخدام المقارنة**

1) لتكن (U_n) ، (V_n) و (W_n) ثلاث متتاليات عددية و ℓ عددا حقيقيا.

إذا كان: $\begin{cases} V_n \leq U_n \leq W_n \\ \text{و} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} V_n = \lim\limits_{n\to+\infty} W_n = \ell \end{cases}$ فإن: $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \ell$

2) لتكن (U_n) و (V_n) متتاليتين عدديتين. إذا كان $\begin{cases} V_n \leq U_n \\ \text{و} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} V_n = +\infty \end{cases}$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$

3) لتكن (U_n) و (V_n) متتاليتين عدديتين .إذا كان $\begin{cases} U_n \leq V_n \\ \text{و} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} V_n = -\infty \end{cases}$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = -\infty$

مثال:

باستخدام نظرية المقارنة جد نهاية المتتالية (U_n) المعرفة ب: $U_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$

الجواب:

دراسة النهاية المطلوبة: نميز حالتين: n زوجي، إذن $(-1)^n = 1$، وعندما يكون n فرديا ، فإن : $(-1)^n = -1$

ومنه $-1 \leq (-1)^n \leq 1$، مما سبق نجد أن: $-1 \leq (-1)^n \leq 1$ ومنه $\dfrac{-1}{n} \leq \dfrac{(-1)^n}{n} \leq \dfrac{1}{n}$ أي أن: $\dfrac{-1}{n} \leq U_n \leq \dfrac{1}{n}$

وبما أن : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-1}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ فإن : $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$.

- **نظرية التقارب والرتابة**

قواعـــــــــد

✓ تكون المتتالية (U_n) مكبورة بالعدد الحقيقي M إذا وفقط إذا كانت $U_n \leq M$

✓ تكون المتتالية (U_n) مصغورة بالعدد الحقيقي m إذا وفقط إذا كان $m \leq U_n$

✓ كل متتالية (U_n) متزايدة ومكبورة هي متقاربة

✓ كل متتالية (U_n) متناقصة ومصغورة هي متقاربة

✓ تكون المتتالية (U_n) محدودة إذا وفقط إذا وجد عددان حقيقيان، m وM بحيث: $m \leq U_n \leq M$

✓ كل متتالية (U_n) رتيبة ومحدودة هي متقاربة.

IPN

تطبيقـــــــــــــــــــات :

تطبيق1:

في كل من الحالات التالية احسب نهاية المتتالية (U_n) :

a) $U_n = n^2 + \sqrt{n}$ b) $U_n = \frac{1}{n} - n^3$ c) $U_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + n$

d) $U_n = -6n^2 + \frac{1}{n}$ e) $U_n = (3n+1)\left(\frac{1}{n} - 2\right)$ f) $U_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{3}{n^2}\right)$

الحل:

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left[n^2 + \sqrt{n}\right] = +\infty + \infty = +\infty$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{n} - n^3\right] = 0 - \infty = -\infty$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + n\right] = 0 + 0 + \infty = +\infty$

d) $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left[-6n^2 + \frac{1}{n}\right] = -6(+\infty) + 0 = -\infty + 0 = -\infty$

e) $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left[(3n+1)\left(\frac{1}{n} - 2\right)\right] = (+\infty + 1)(0 - 2) = -\infty$

f) $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left[\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{3}{n^2}\right)\right] = (1 - 0)(2 + 0) = 2$

تطبيق2:

في كل من الحالات التالية احسب نهاية المتتالية (U_n) :

a) $U_n = \sqrt{n^2+1} - n$ b) $U_n = \sqrt{n+3} - \sqrt{n+8}$ c) $U_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n+2}}$

الحل:

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left[\sqrt{n^2+1} - n\right] = +\infty - \infty$ عدم تعيين

نضرب في المرافق $\sqrt{n^2+1} + n$:

$$U_n = \frac{(\sqrt{n^2+1} - n)(\sqrt{n^2+1} + n)}{\sqrt{n^2+1} + n} = \frac{n^2 + 1 - n^2}{\sqrt{n^2+1} + n} = \frac{1}{\sqrt{n^2+1} + n}$$

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{n^2+1} + n}\right] = \frac{1}{+\infty + \infty} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left[\sqrt{n+3} - \sqrt{n+8}\right] = +\infty - \infty$ عدم تعيين

نضرب في المرافق $\sqrt{n+3} + \sqrt{n+8}$:

$$U_n = \frac{\left(\sqrt{n+3} - \sqrt{n+8}\right)\left(\sqrt{n+3} + \sqrt{n+8}\right)}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n+8}} = \frac{n + 3 - n - 8}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n+8}}$$

$$U_n = \frac{-5}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n+8}}$$

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{-5}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n+8}}\right] = \frac{-5}{+\infty + \infty} = \frac{-5}{+\infty} = 0$$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n+2}}\right] = \frac{1}{+\infty - \infty}$ عدم تعيين

IPN

نضرب في المرافق $\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}$:

$$U_n=\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}}{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n+2})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2})}=\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}}{n+1-n-2}$$

$$U_n=\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}}{-1}=-\sqrt{n+1}-\sqrt{n+2}$$

$$\lim_{n\to+\infty}U_n=\lim_{n\to+\infty}\left[-\sqrt{n+1}-\sqrt{n+2}\right]=-\infty-\infty=-\infty$$

تطبيق3:

في كل من الحالات التالية ادرس تقارب المتتالية (U_n) :

a) $U_n=\frac{n+3}{n^2+1}$ b) $U_n=n^2-n+1$ c) $U_n=(-3)^n$ d) $U_n=\frac{(-1)^n}{n^2+1}$

الحل:

a) $\lim_{n\to+\infty}U_n=\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{n+3}{n^2+1}\right]=\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{n}{n^2}\right]=\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{n}\right]=\frac{1}{+\infty}=0$

إذن المتتالية (U_n) متقاربة

b) $\lim_{n\to+\infty}U_n=\lim_{n\to+\infty}[n^2-n+1]=\lim_{n\to+\infty}[n^2]=+\infty$

إذن المتتالية (U_n) متباعدة

c) غير موجودة $\lim_{n\to+\infty}U_n=\lim_{n\to+\infty}[(-3)^n]$ لأن $-3\leq-1$

إذن المتتالية (U_n) متباعدة

d) $U_n=\frac{(-1)^n}{n^2+1}$

$$-1<(-1)^n\leq1\Leftrightarrow\frac{-1}{n^2+1}\leq\frac{(-1)^n}{n^2+1}\leq\frac{1}{n^2+1}\Leftrightarrow\frac{-1}{n^2+1}\leq U_n\leq\frac{1}{n^2+1}$$

$\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{n^2+1}\right]=\frac{1}{+\infty}=0$ و $\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{-1}{n^2+1}\right]=\frac{-1}{+\infty}=0$

حسب نظرية المقارنة نجد $\lim_{n\to+\infty}U_n=0$ ومنه (U_n) متقاربة.

IPN

ثالثا: تمـــــــــــــــــارين:

تمرين 1:

نعتبر المتتاليتين (U_n) و (V_n) بحيث لكل عدد طبيعي n : $V_n = U_{n+1} - U_n$ و $\begin{cases} U_0 = 5 \\ U_{n+1} = 2U_n - 2 \end{cases}$

من ضمن الأجوبة المقترحة لكل سؤال في ما يلي، توجد إجابة صحيحة وحيدة.

الرقم	الأسئلة	الجواب A	الجواب B	الجواب C
1	الحد U_3 يساوي	8	14	26
2	الحد V_2 يساوي	6	12	24
3	المتتالية (V_n) هي	هندسية	حسابية	ثابتة
4	الحد العام للمتتالية (V_n) هو	$V_n = 2n + 3$	$V_n = 2\times2^n$	$V_n = 3\times2^n$
5	الحد العام للمتتالية (U_n) هو	$U_n = 2n + 5$	$U_n = 3\times2^n + 2$	$U_n = 3\times2^n + 5$

أعد إنتاج الجدول أسفله، مبينا الإجابة الصحيحة لكل سؤال، مبررا إياها.

رقم السؤال	الإجابة الصحيحة	التبرير
1		
2		
3		
4		
5		

باكـــلوريا آداب عصرية بتصرف 2025

تمرين 2:

نعتبر المتتاليات (U_n)، (V_n) و (W_n) بحيث لكل عدد طبيعي n: $V_n = U_n - 1$ et $W_n = 2n - 3$;

$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = 2U_n - 1 \end{cases}$

الرقم	الأسئلة	الجواب A	الجواب B	الجواب C
1	الحد U_1 يساوي	3	5	6
2	المتتالية (W_n)	متزايدة	متناقصة	غير رتيبة
3	نهاية المتتالية (W_n) هي	$-\infty$	0	$+\infty$
4	للمتتالية(V_n)هي	حسابية	هندسية	ليست حسابية ولا هندسية
5	الحد العام للمتتالية (V_n) هو	$V_n = 2^{n-1}$	$V_n = 2^n$	$V_n = 2^{n+1}$
6	نهاية المتتالية (V_n) هي	$-\infty$	0	$+\infty$

أعد إنتاج الجدول أسفله، مبينا الإجابة الصحيحة لكل سؤال، مبررا إياها.

رقم السؤال	الإجابة الصحيحة	التبرير
1		
2		
3		
4		
5		
6		

تمرين 3:

نعتبر المتتاليتين (U_n) و (V_n) بحيث لكل عدد طبيعي n : $V_n = 3U_n + 3$ و $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = 2U_n + 1 \end{cases}$

من ضمن الأجوبة المقترحة لكل سؤال في ما يلي، توجد إجابة صحيحة وحيدة.

الرقم	الأسئلة	الجواب A	الجواب B	الجواب C
1	الحد U_1 يساوي	1	3	5
2	للمتتالية (V_n) هي	هندسية	حسابية	ليست حسابية ولا هندسية
3	الحد العام للمتتالية (V_n) هو	$V_n = 2n+6$	$V_n = 6 + 3^n$	$V_n = 6\times 2^n$
4	المتتالية (V_n)	متناقصة	متزايدة	ليست رتيبة
5	نهاية المتتالية (V_n) هي	$-\infty$	0	$+\infty$

أعد إنتاج الجدول أسفله، مبينا الإجابة الصحيحة لكل سؤال، مبررا إياها.

رقم السؤال	الإجابة الصحيحة	التبرير
1		
2		
3		
4		
5		
6		

باكـــلوريا آداب عصرية بتصرف 2019

IPN

IPN

الفصل الخامس: تنظيم المعطيات

- ❖الوحـــــــــــــدات:
- ❖التركـــــــــــــة
- ❖المقاييس الإسلامية
- ❖الاحتمـــالات

IPN

IPN

الأهداف:

- ✓ توظيف الكسوروالعمليات المرتبطة بها لحساب مسائل التركة.
- ✓ القيام بأمثلة وتطبيقيات.
- ✓ القيام بتمارين متنوعة.

مدخـــــل :

قال اللّه تعالى : ﴿ يُوصِيكُمُ اللَّهُ فِي أَوْلَادِكُمْ لِلذَّكَرِ مِثْلُ حَظِّ الْأُنثَيَيْنِ فَإِن كُنَّ نِسَاءً فَوْقَ اثْنَتَيْنِ فَلَهُنَّ ثُلُثَا مَا تَرَكَ وَإِن كَانَتْ وَاحِدَةً فَلَهَا النِّصْفُ وَلِأَبَوَيْهِ لِكُلِّ وَاحِدٍ مِّنْهُمَا السُّدُسُ مِمَّا تَرَكَ إِن كَانَ لَهُ وَلَدٌ فَإِن لَّمْ يَكُن لَّهُ وَلَدٌ وَوَرِثَهُ أَبَوَاهُ فَلِأُمِّهِ الثُّلُثُ فَإِن كَانَ لَهُ إِخْوَةٌ فَلِأُمِّهِ السُّدُسُ مِن بَعْدِ وَصِيَّةٍ يُوصِي بِهَا أَوْ دَيْنٍ آبَاؤُكُمْ وَأَبْنَاؤُكُمْ لَا تَدْرُونَ أَيُّهُمْ أَقْرَبُ لَكُمْ نَفْعًا فَرِيضَةً مِّنَ اللَّهِ إِنَّ اللَّهَ كَانَ عَلِيمًا حَكِيمًا ﴿١١﴾ وَلَكُمْ نِصْفُ مَا تَرَكَ أَزْوَاجُكُمْ إِن لَّمْ يَكُن لَّهُنَّ وَلَدٌ فَإِن كَانَ لَهُنَّ وَلَدٌ فَلَكُمُ الرُّبُعُ مِمَّا تَرَكْنَ مِن بَعْدِ وَصِيَّةٍ يُوصِينَ بِهَا أَوْ دَيْنٍ وَلَهُنَّ الرُّبُعُ مِمَّا تَرَكْتُمْ إِن لَّمْ يَكُن لَّكُمْ وَلَدٌ فَإِن كَانَ لَكُمْ وَلَدٌ فَلَهُنَّ الثُّمُنُ مِمَّا تَرَكْتُم مِّن بَعْدِ وَصِيَّةٍ تُوصُونَ بِهَا أَوْ دَيْنٍ وَإِن كَانَ رَجُلٌ يُورَثُ كَلَالَةً أَوِ امْرَأَةٌ وَلَهُ أَخٌ أَوْ أُخْتٌ فَلِكُلِّ وَاحِدٍ مِّنْهُمَا السُّدُسُ فَإِن كَانُوا أَكْثَرَ مِن ذَٰلِكَ فَهُمْ شُرَكَاءُ فِي الثُّلُثِ مِن بَعْدِ وَصِيَّةٍ يُوصَىٰ بِهَا أَوْ دَيْنٍ غَيْرَ مُضَارٍّ وَصِيَّةً مِّنَ اللَّهِ وَاللَّهُ عَلِيمٌ حَلِيمٌ ﴿١٢﴾ تِلْكَ حُدُودُ اللَّهِ وَمَن يُطِعِ اللَّهَ وَرَسُولَهُ يُدْخِلْهُ جَنَّاتٍ تَجْرِي مِن تَحْتِهَا الْأَنْهَارُ خَالِدِينَ فِيهَا وَذَٰلِكَ الْفَوْزُ الْعَظِيمُ ﴿١٣﴾ وَمَن يَعْصِ اللَّهَ وَرَسُولَهُ وَيَتَعَدَّ حُدُودَهُ يُدْخِلْهُ نَارًا خَالِدًا فِيهَا وَلَهُ عَذَابٌ مُّهِينٌ ﴿١٤﴾ ﴾

[النساء الآيات : ١١، ١٢، ١٣، ١٤]

صدق الله العظيم.

مسائل الميراث والفروض المقدرة فيها يعتمد على حساب الكسور، انطلاقا من كون الأنصبة تمثل كسورا من وحدة قد تأخذ القيمة 2 أو 3 أو 4 أو 6 أو 8، كما نصت الآيات على ذلك.

وفي هذه الدعامة سنقتصر على الجانب التطبيقي لحساب المواريث في سياق حسابي، تسهيلا للحصول على مختلف الأنصبة المحددة سلفا في آيات المواريث وفقهها.

أولا : المحتوى: ما يجب الإلمام به

- **الحالات الممكنة في علم المواريث:**

خلو المسألة من الفروض واقتصارها على التعصيب	وجود صاحب فرض واحد وعصبة	أن يكون في المسألة أكثر من فرض (كسورا بمقامات مختلفة)
مثال ذلك	مثال ذلك	مثال ذلك
توفي عن سبعة أشقاء 4 من الذكور و3 من الإناث فيكون نصيب البنت منهن 1/11 ونصيب الابن الواحد 2/11	توفيت عن زوج وخمسة أبناء فيكون نصيب الزوج الربع لوجود الفرع الوارث والباقي للأبناء تعصيبا وهو3/4 أي أن نصيب الواحد منهم 3/20	توفي عن زوجة وأختين شقيقتين وأخ لأب .للزوجة الربع لعدم وجود فرع وارث، وللأختين الشقيقتين 2/3 والباقي تعصيبا للأخ لجهة الأب وهو 1- (1/4 + 2/3)=1-(11/12) 1- (1/4 + 2/3)=1 /12

مثال1:

توفي عن بنت وبنت ابن وأخت شقيقة وأخ لأب: فروض المسألة فقهيا: 1/2 للبنت و1/6 لأبنة الابن والباقي تعصيبا للأخت الشقيقة حاجبة للأخ لجهة الأب. بتوحيد مقامات الكسرين المعبرين عن الفرضين المذكورين، نجد: 3/6 و 1/6 والباقي 1/3 = 2/6 وهو نصيب الأخت الشقيقة.

مثال2 :

توفي عن زوجة وبنتين وأب. فروض المسألة: ثمن للزوجة لوجود الفرع الوارث و2/3 للبنتين و1/6 للأب مع الباقي تعصيبا. المضاعف المشترك الأدنى للمقامات هو 24 وعليه يكون نصيب الزوجة 3/24 ونصيب البنتين: 16/24 ونصيب الأب 4/24 + الباقي من الكسر الإجمالي وهو : 1/24.

مثال3:

توفي عن أم وأخ شقيق وأخ لأب. فروض المسألة: سدس للأم لوجود عدد من الإخوة و5/6 للأخ الشقيق تعصيبا ولا شيء للأخ لأب؛ لأنه محجوب بالشقيق.

- **تصنيف حسب مقارنة مجموع السهام مع الأصول :**

تساوي مجموع السهام مع الأصول المسائل العادلة	مجموع السهام أقل من الأصول المسائل الناقصة	مجموع السهام أكثر من الأصول المسائل العائلة
مثال ذلك	مثال ذلك	مثال ذلك
توفيت عن زوج وأخت لأب. الفروض: نصيب الزوج نصف لعدم وجود فرع وارث والنصف الآخر للأخت لجهة الأب لانفرادها.	توفي عن أم وبنتين وأخ شقيق، من حيث الفروض : نصيب الأم 1/6 وللبنتين 2/3 والباقي بالتعصيب للأخ الشقيق. بأخذ المضاعف المشترك الأدنى (هنا 6) نجد 1/6 و 4/6 فيكون الباقي 1/6.	توفيت عن زوج وأختين شقيقتين. من حيث الفروض : 1/2 للزوج لعدم وجود الفرع الوارث و2/3 للشقيقتين.

2		
1/2	الزوج	1
1/2	الأخت لأب	1

أصل المسألة 2 ومجموع سهامها 2 ومنه التسمية العادلة.

6		
1/6	الأم	1 ×1
2/3	البنتان	2 ×2
الباقي تعصيبا	الأخ الشقيق	1

أصل المسألة هنا 6 ومجموع سهام الفروض الأصلية 5 أقل من 6 ومنه التسمية بالناقصة.

7/6		
1/2	الزوج	1 ×3
2/3	الشقيقتان	2 ×2

بأخذ المضاعف المشترك الأدنى (هنا 6) نجد نصيب الزوج 3/6 وللشقيقتين 4/6 نلاحظ أن مجموع الأسهم 7 وهو أكبر من أصل المسألة الذي هو 6 ومنه التسمية بالعائلة.

IPN

- **أمثلة شهيرة في التركة:**

المنبرية	الدينارية الكبرى
توفي عن زوجة وبنتين وأب وأم. الفروض: ثمن للزوجة وللبنتين الثلثان وللأب السدس وكذلك للأم .بأخذ المضاعف المشترك الأدنى للأعداد 8، 3، 6 و الذي هو24 تكتب المسألة كما ما يلي: $\frac{3}{24}$ ، $\frac{16}{24}$ ، $\frac{4}{24}$ ، $\frac{4}{24}$ وهنا مجموع السهام 27 = 3 + 16 + 4 + 4 أكبر من أصل المسالة 24 فتؤول المسالة إلى هذه الصيغة $\frac{3}{27}$، $\frac{16}{27}$، $\frac{4}{27}$، $\frac{4}{27}$ وسميت بالمنبرية؛ لأن الإمام عليا كرم الله وجهه سئل عنها وهو على المنبر بالكوفة فقال صار ثُمنها تُسْعًا.	توفي عن زوجة وأم وبنتين وأثني عشرأخا شقيقا وشقيقة واحدة ومبلغا قدره 600 دينار وبعد تقسيم التركة حصلت الأخت على دينار واحد. وللعلم فروض المسألة هي: ثمن للزوجة، سدس للأم وثلثان للبنتين. اشتكت الأخت إلى الإمام علي فأقر بصحة التقسيم. التفسير الحسابي: $\frac{1}{8}+\frac{1}{6}+\frac{2}{3}=\frac{3}{24}+\frac{4}{24}+\frac{16}{24}=\frac{23}{24}$، لبقية الورثة إذن: $\frac{1}{24}$ وباعتبار نصيب الذكر ضعف نصيب الأنثى يكون نصيب الشقيقة: $\frac{\frac{1}{24}}{25}=\frac{1}{600}$.

- **أمثلة على مسائل الانكسار:**

إذا كان الانكسار على فريق	المعالجة الحسابية عن طريق الكسور
هلك هالك عن زوجة وأربعة أبناء، ثمن للزوجة الباقي تعصيبا للأبناء الأربعة. نصيب الأبناء الأربعة $\frac{7}{8}$ وهنا عدد السهام 7 لا يقبل القسمة على عدد الرؤوس 4 بدون باق ومنه التسمية الانكسار. لذا يضرب عدد الرؤوس في أصل المسألة وهو8 كما كما يلي: وحينئذ تسمى العملية تصحيحا.	نصيب كل واحد من الأبناء هو $\frac{\frac{7}{8}}{4}=\frac{7}{32}$ ومنه نصيب الأربعة $\frac{28}{32}$.

	4 ×8		
1/8	للزوجة	1 ×4	4 للزوجة
7/8	تعصيبا للأبناء الأربعة	7 ×4	7 لكل عاصب من الأربعة

إذا كان الانكسار على فريقين	المعالجة الحسابية عن طريق الكسور
هلك هالك عن زوجتين وثلاثة أخوات أشقاء وعمّ. الفروض: ربع للزوجتين وثلثان للشقيقات الثلاث والباقي تعصيبا للعم. هنا يظهر أن سهم الزوجتين لا يقبل القسمة على رؤوسهن وكذلك سهم الأخوات لا يقبل القسمة على رؤوسهن، ومنه وقع الانكسار. لتصحيحه يضرب أصل المسالة وهو12(المضاعف المشترك الأدنى للأصول 3 و4) في المضاعف المشترك الأدنى لعدد رؤوس المسالة (6 = 3 ×2) فنحصل على الآتي:	• نصيب العم تعصيبا هو: $1-\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{3}\right)=1-\frac{3+8}{12}=1-\frac{11}{12}=\frac{1}{12}$ • نصيب الأخت الواحدة هو $\frac{16}{72}$ • نصيب الزوجة الواحدة هو $\frac{9}{72}$

	6 ×12 = 72		
1/4	للزوجة	6 ×3=18	9 لكل زوجة
2/3	للأخوات	6 ×8=48	15 لكل أخت
الباقي	للعم تعصيبا	6 ×1=6	6 للعاصب

IPN

- **النسبة المئوية والتركة :**

في بعض المسائل قد يحتاج للتعبير عن نصيب الوارث كنسبة مئوية، لذا نستخدم الصيغة التناسبية التالية والتي

تحيب على ذلك : $\frac{\text{فرض الوارث}}{\text{أصل التركة}} \times 100 =$ النسبة المئوية لنصيب الوارث .

مثال:

توفيت عن أم وزوج وشقيقتين وعدد من الإخوة لأم، في هذه المسألة نعلم أن نصيب الزوج هو النصف لعدم وجود فرع وارث وللأم السدس لتعدد الإخوة ونصيب الشقيقتين الثلثان أما الإخوة لأم فيتقاسمون الثلث بالتساوي. وبما أن

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=\frac{10}{6}$$

فإن المسألة تعول من 6 إلى 10. إذا علمت أن المبلغ المقسم في هذه التركة هو 460000 ، فما النسبة المئوية لنصيب الورثة السابقين وما قيمتها الفعلية من المبلغ المقسم.

الجواب:

انطلاقا من المعطيات التي بينت أن المسألة عالت من 6 على 10، يمكن أن نكتب:

نصيب الورثة	$\frac{\text{فرض الوارث}}{\text{أصل التركة}} \times 100$	أصل التركة بعد العول 10	المضاعف المشترك الأدنى 6
$\frac{30\times 460\,000}{100}=138\,000$	$\frac{300}{10}=30\%$	3	$\frac{1}{2}$ للزوج
$\frac{10\times 460\,000}{100}=46\,000$	$\frac{100}{10}=10\%$	1	$\frac{1}{6}$ للأم
$\frac{40\times 460\,000}{100}=184\,000$	$\frac{400}{10}=40\%$	4	$\frac{2}{3}$ للشقيقتين
$\frac{20\times 460\,000}{100}=92\,000$	$\frac{200}{10}=20\%$	2	$\frac{1}{3}$ الإخوة لأم

IPN

ثانيا) تطبيقـــــــــــــــــات:

تطبيق 1:

توفي عن زوجة و أخت شقيقة وأخ لأب وعن مبلغ قدره 120 000 أوقية جديدة.

مع العلم أن فروض المسألة هي : $\frac{1}{4}$ للزوجة و $\frac{1}{2}$ للأخت الشقيقة والباقي تعصيبا للأخ لجهة الأب.

أعط المبلغ الذي سيحصل عليه كل واحد من الورثة.

الحل:

- **الفرض الباقي تعصيبا للأخ لجهة الأب :** $1-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)=1-\left(\frac{2}{4}+\frac{1}{4}\right)=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$
- **المبلغ الذي سيحصل عليه كل واحد من الورثة :**

	الأسئلة	الجواب A
1	نصيب الزوجة	$\frac{1}{4}\times 120\,000=30\,000$
2	نصيب الأخت الشقيقة	$\frac{1}{2}\times 120\,000=60\,000$
3	نصيب الأخ لجهة الأب تعصيبا	$\frac{1}{4}\times 120\,000=30\,000$

تطبيق 2:

توفي رجل وترك أبوين وزوجتين وعددا x من البنات. مع العلم أن الزوجتين تشتركان في الثمن والبنات تشتركن في الثلثين وأن أبويه لكل منهما السدس.

وبما أن : $\frac{1}{8}+\frac{2}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{27}{24}$ فإن المسالة تعول من 24 عول من 24 إلى 27 ويصير ثمنها تسعا.

1) اختر الجواب الصحيح لكل سؤال علما بأن جوابا واحدا فقط من بين الأجوبة المقترحة صحيح.

	الأسئلة	الجواب A	الجواب B	الجواب C
1	نصيب الزوجتين معا من هذه التركة يعادل	11,1111%	12,5%	0,8%
2	نصيب جميع البنات من هذه التركة يعادل	22,3333%	59,2593%	66,6667%
3	نصيب الأبوين معا من هذه التركة يعادل	29,6296%	33,3333%	12 %

2) أكمل الجدول التالي: علما بأن المبلغ المقسم في هذه التركة يساوي مائة واثنين وستين ألف أوقية (162 000) وأن نصيب البنت الواحدة ستة عشرألف (16 000) أوقية فإن:

نصيب الزوجة الواحدة بالأوقية هو:	
نصيب الأم بالأوقية هو:	
عدد البنات x هو:	

باكـــلوريا 2014

IPN

الحل:

1) الجواب الصحيح لكل سؤال

	الأسئلة	الجواب الصحيح
1	نصيب الزوجتين معا من هذه التركة يعادل	A
2	نصيب جميع البنات من هذه التركة يعادل	B
3	نصيب الأبوين معا من هذه التركة يعادل	A´

2) اكمال الجدول :

نصيب الزوجة الواحدة بالأوقية هو:	$\frac{1}{18} \times 162\,000 = 9000$
نصيب الأم بالأوقية هو:	$\frac{4}{27} \times 162\,000 = 24\,000$
عدد البنات x هو:	$\frac{16}{27 \times 16\cancel{000}} \times 162\cancel{000} = 6$

تطبيق 3:

توفي رجل عن أم وزوجة وأخ لأم وعدد x من الأخوات الشقيقات يزيد على الواحدة، في هذه المسألة نعلم أن نصيب الأم هو السدس لتعدد الإخوة وأن نصيب الزوجة هو الربع لعدم الفرع الوارث وأن نصيب الأخ لأم هو السدس لانفراده وعدم من يحجبه وأن الأخوات الشقيقات يشتركن في الثلثين لتعددهن وعدم من يحجبهن أو يعصبهن. وبما أن: $\frac{1}{6}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{2}{3}=\frac{15}{12}$ فإن المسالة تعول من 12 إلى 15.

1) اختر الجواب الصحيح لكل سؤال علما بأن جوابا واحدا فقط من بين الأجوبة المقترحة صحيح.

	الأسئلة	الجواب A	الجواب B	الجواب C
1	نصيب الزوجة من هذه التركة يعادل	20%	8%	0,8%
2	نصيب جميع الأخوات من هذه التركة يعادل	4,16%	13%	53,33%
3	نصيب الأم من هذه التركة يعادل	8,34%	13,33%	16 %
4	نصيب الأخ لأم من هذه التركة يعادل	20,53%	28%	13,33%

2) اكمل الجدول التالي: علما بأن المبلغ المقسم في هذه التركة يساوي (6 000 000) ستة ملايين أوقية وأن نصيب الأخت الواحدة (640 000) ستمائة وأربعون ألف أوقية، فإن:

نصيب الزوجة بالأوقية هو:	
نصيب الأم بالأوقية هو:	
عدد الأخوات x هو:	

باكـــلوريا 2017 بتصرف

IPN

الحل:

1) من المعطيات، نستنتج ما يلي:

الأصول / أنصبة الورثة		12 عالت إلى 15	النسبة المئوية للنصيب	الأسئلة	الجواب الصحيح
الزوجة	1/4	3	$\frac{3\times100}{15}=20\%$	1	A
الأخوات الشقيقات	2/3	8	$\frac{8\times100}{15}\simeq53,33\%$	2	C
الأم	1/6	2	$\frac{2\times100}{15}\simeq13,33\%$	3	B
الأخ لأم	1/6	2	$\frac{2\times100}{15}\simeq13,33\%$	4	C

2) تقسيم المبلغ الموروث:

نصيب السهم الواحد من المبلغ المقسم هو : 6 000 000 /15= 400 000 ومنه:

نصيب الزوجة بالأوقية هو:	3×400000 =1 200 000
نصيب الأم بالأوقية هو:	2×400 000 = 800 000
نصيب الأخ لأم بالأوقية هو:	2×400 000 = 800 000
عدد الأخوات x هو:	5= 640 000/(8 ×400 000)

تطبيق 4:

توفيت عن أم وزوج وشقيقتين وعدد x من الإخوة لأم، في هذه المسألة نعلم أن نصيب الزوج هو النصف لعدم وجود فرع وارث، وللأم السدس لتعدد الإخوة ونصيب الشقيقتين الثلثان أما الإخوة لأم فيتقاسمون الثلث بالتساوي. وبما أن $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=\frac{10}{6}$ فإن المسألة تعول من 6 إلى 10.

1) اختر الجواب الصحيح لكل سؤال علما بأن جوابا واحدا فقط من بين الأجوبة المقترحة صحيح.

	الأسئلة	الجواب A	الجواب B	الجواب C
1	نصيب الأم من هذه التركة يعادل	11,1111%	12%	10%
2	نصيب الأختين الشقيقتين من هذه التركة يعادل	40%	49,2593%	66,6667%
3	نصيب الأخوة لأم من هذه التركة يعادل	33,333%	20%	25 %
4	نصيب الزوج من هذه التركة يعادل	30%	20,78%	52,30 %

2) أكمل الجدول التالي، علما أن المبلغ المقسم في هذه التركة هو(460000) أربعمائة وستون ألف أوقية وأن نصيب أحد الإخوة للأم يساوي ثلاثة وعشرين ألف أوقية (23 000) :

نصيب الأم بالأوقية هو:	
نصيب الزوج بالأوقية هو:	
عدد الأخوة x للأم هو:	

الحل:

1) من المعطيات، نستنتج ما يلي:

الأصول / أنصبة الورثة	6 عالت إلى 10	النسبة المئوية للنصيب	الأسئلة	الجواب الصحيح
الأم 1/6	1	$\frac{1\times100}{10}=10\%$	3	C
الأختان الشقيقتان 2/3	4	$\frac{4\times100}{10}=40\%$	2	A
الأخوة لأم 1/3	2	$\frac{2\times100}{10}=20\%$	4	B
الزوج 1/2	3	$\frac{3\times100}{10}=30\%$	1	A

2) تقسيم المبلغ الموروث:

نصيب السهم الواحد من المبلغ المقسم هو : 460 000/10= 46 000 ومنه:

نصيب الزوج بالأوقية هو:	3×46 000 =138 000
نصيب الأم بالأوقية هو:	1×46 000 = 46 000
عدد الأخوة لأم هو:	(2 ×46 000)/23000 = 4

ثالثا): تمـــــــــــــــارين:

تمرين1:

توفي رجل عن زوجة وأختين شقيقتين وأربعة إخوة لأم وترك ما مبلغه 540 000 أوقية. في هذه المسالة نعلم أن نصيب الزوجة هو الربع لعدم الفرع الوارث وأن الأختين الشقيقتين تشتركان في الثلثين لتعددهن وعدم وجود من يحجبهن أو يعصبهن وللأخوة لأم الثلث لتعددهم وعدم وجود من يحجبهم. وبما أن: $\frac{1}{4}+\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=\frac{15}{12}$ فإن المسالة تعول من 12إلى 15.

أ) اختر الجواب الصحيح لكل سؤال علما بأن جوابا واحدا فقط من بين الأجوبة المقترحة صحيح.

	الأسئلة	الجواب A	الجواب B	الجواب C
1	الكسر الذي يمثل نصيب الزوجة من هذه التركة هو:	$\frac{2}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{4}{15}$
2	الكسر الذي يمثل نصيبي الأختين الشقيقتين من هذه التركة هو:	$\frac{8}{15}$	$\frac{9}{15}$	$\frac{10}{15}$
3	الكسر الذي يمثل نصيب الإخوة لأم من هذه التركة هو:	$\frac{3}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{5}{15}$
4	نصيب الزوجة بالأوقية هو:	108 000	144 000	180 000
5	نصيب إحدى الأختين الشقيقتين بالأوقية هو:	60 000	120 000	144 000
6	نصيب أحد الإخوة لأم بالأوقية هو:	18 000	36 000	75 000

تمرين2:

توفيت امرأة وتركت أبوين و زوجا وعددا x من البنات يزيد على الواحدة. نعلم أن نصيب الزوج الربع ولأبويها لكل منهما السدس وأن البنات يشتركن في الثلثين. وبما أن : $\frac{1}{6}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{2}{3}=\frac{15}{12}$ فإن المسالة تعول من 12 إلى 15.

1) اختر الجواب الصحيح لكل سؤال علما بأن جوابا واحدا فقط من بين الأجوبة المقترحة صحيح.

	الأسئلة	الجواب A	الجواب B	الجواب C
1	نصيب الأبوين مع من هذه التركة يعادل:	26,6667 %	25 %	39,9999 %
2	نصيب الزوج من هذه التركة يعادل:	20 %	30 %	25 %
3	نصيب جميع البنات من هذه التركة يعادل:	33,3333 %	59,2593 %	53,3333 %

2) اكمل الجدول التالي: علما بأن المبلغ المقسم في هذه التركة يساوي مليونا وثمانمائة ألف أوقية (1 800 000) وأن نصيب البنت الواحدة يساوي 240 000 .

نصيب الزوجة بالأوقية هو:	
نصيب الأم بالأوقية هو:	
عدد الأخوات x هو:	

باكـــلوريا 2022

تمرين3:

توفي عن زوجة و عدد x من الأولاد الذكور وثلاث بنات، فإذا علمت أن نصيب الزوجة هو الثمن وأن للذكر مثل حظ الأنثيين بالنسبة للأولاد وأن نصيب البنات الثلاث في هذه التركة تعادل مع نصيب الزوجة.

1) اختر الجواب الصحيح لكل سؤال علما بأن جوابا واحدا فقط من بين الأجوبة المقترحة صحيح.

	الأسئلة	الجواب A	الجواب B	الجواب C
1	نصيب الزوجة من هذه التركة يعادل:	12,5 %	8 %	0,8 %
2	نصيب البنت من هذه التركة يعادل:	3,12 %	3 %	4,16 %
3	نصيب الولد الذكر من هذه التركة يعادل:	8,33 %	6 %	16 %
4	عدد الأولاد الذكور x هو:	9	6	3

2) أكمل الجدول التالي إذا علمت أن المبلغ المقسم في هذه التركة يساوي مائتين وأربعين ألف أوقية (240 000).

نصيب الزوجة بالأوقية هو:	
نصيب البنت الواحدة بالأوقية هو:	
نصيب الولد الذكر الواحد بالأوقية هو:	

باكـــلوريا 2012

تمرين 4 :

توفي عن زوجة وولدين من الذكور وعدد x من البنات، نعلم أن نصيب الزوجة هو الثمن، وأن للذكر مثل حظ الأنثيين بالنسبة للأولاد مع البنات وأنه في هذه التركة إذا جمعنا نصيب البنات مع نصيب الزوجة تعادل الجميع مع نصيب الولدين.

1) اختر الجواب الصحيح لكل سؤال علما بأن جوابا واحدا فقط من بين الأجوبة المقترحة صحيح.

	الأسئلة	الجواب A	الجواب B	الجواب C
1	نصيب الزوجة من هذه التركة يعادل:	12,5 %	8 %	0,8 %
2	نصيب البنت من هذه التركة يعادل:	4,16 %	3 %	12,5 %
3	نصيب الولد الذكر من هذه التركة يعادل:	8,34 %	25 %	16 %
	عدد البنات x هو:	1	2	3

2) أكمل الجدول التالي، إذا علمت أن المبلغ المقسم في هذه التركة يساوي مائتين وأربعين ألف أوقية (800 000 أوقية) ثمانمائة ألف أوقية.

نصيب الزوجة بالأوقية هو:	
نصيب البنت الواحدة بالأوقية هو:	
نصيب الولد الذكر الواحد بالأوقية هو:	

باكـــلوريا 2015

IPN

الوحدة الثانية : المقاييس الإسلامية

الأهداف:

- ✓ التعرف على المقاييس الإسلامية.
- ✓ تحويل المقاييس الإسلامية إلى المقاييس الدولية والعكس.
- ✓ القيام بتطبيقيات.
- ✓ تمارين.

مدخـــــــــل :

عرفت المكاييل والمقاييس منذ القدم عند مختلف الحضارات والأمم لتقدير الأطوال والأوزان والحجوم. والذي يهمنا في هذا المقام تلك التي استخدمت منذ ظهور الإسلام وجرى العمل والتعامل بها. في القرآن الكريم ورد ذكر الكيل والوزن وبعض وحدات الوزن والكيل والقياس وما يرتبط بها. من الأمثلة الدالة على ذلك:

في سورة آل عمران ،الآية 75" ﴿ ...وَمِنْهُم مَّنِ إِن تَأْمَنْهُ بِدِينَارٍ لَّا يُؤَدِّهِ إِلَيْكَ ﴾ .

في سورة النساء، الآية 49 ﴿ وَلَا يُظْلَمُونَ فَتِيلًا ﴾

في سورة النساء: الآية 20 ﴿ وَإِنْ أَرَدتُّمُ اسْتِبْدَالَ زَوْجٍ مَّكَانَ زَوْجٍ وَآتَيْتُمْ إِحْدَاهُنَّ قِنطَارًا ﴾ .

في سورة النساء: الآية 124 ﴿ وَلَا يُظْلَمُونَ نَقِيرًا ﴾.

في سورة الأعراف الآية 8 ﴿ وَالْوَزْنُ يَوْمَئِذٍ الْحَقُّ ﴾ .

في سورة هود الآيات 84 و85 ﴿ وَلَا تَنقُصُوا الْمِكْيَالَ وَالْمِيزَانَ إِنِّي أَرَاكُم بِخَيْرٍ وَإِنِّي أَخَافُ عَلَيْكُمْ عَذَابَ يَوْمٍ مُّحِيطٍ ﴿84﴾ وَيَا قَوْمِ أَوْفُوا الْمِكْيَالَ وَالْمِيزَانَ بِالْقِسْطِ وَلَا تَبْخَسُوا النَّاسَ أَشْيَاءَهُمْ وَلَا تَعْثَوْا فِي الْأَرْضِ مُفْسِدِينَ ﴿85﴾ ﴾.

في سورة يوسف الآيات: 20 و 65 و 72 يوسف ﴿ وَشَرَوْهُ بِثَمَنٍ بَخْسٍ دَرَاهِمَ مَعْدُودَةٍ وَكَانُوا فِيهِ مِنَ الزَّاهِدِينَ ﴾

الآية. "..﴿ ذَٰلِكَ كَيْلٌ يَسِيرٌ ﴿65﴾ ﴾

"الآية. ﴿ قَالُوا نَفْقِدُ صُوَاعَ الْمَلِكِ وَلِمَن جَاءَ بِهِ حِمْلُ بَعِيرٍ وَأَنَا بِهِ زَعِيمٌ ﴿72﴾ ﴾ الآية.

في سورة الأنبياء، الآية 47 ﴿ فَلَا تُظْلَمُ نَفْسٌ شَيْئًا وَإِن كَانَ مِثْقَالَ حَبَّةٍ مِّنْ خَرْدَلٍ... ﴾.

في سورة فاطر، الآية 13، ﴿ وَالَّذِينَ تَدْعُونَ مِن دُونِهِ مَا يَمْلِكُونَ مِن قِطْمِيرٍ ﴿13﴾ ﴾

في سورة الحاقة، الآية 32 ﴿ ثُمَّ فِي سِلْسِلَةٍ ذَرْعُهَا سَبْعُونَ ذِرَاعًا فَاسْلُكُوهُ ﴿32﴾ ﴾.

في سورة الزلزلة الآيات: 7 و 8 ﴿ فَمَن يَعْمَلْ مِثْقَالَ ذَرَّةٍ خَيْرًا يَرَهُ ﴿7﴾ وَمَن يَعْمَلْ مِثْقَالَ ذَرَّةٍ شَرًّا يَرَهُ ﴿8﴾ ﴾ .

- وفي الحديث، قال صلى الله عليه وسلم : الوزن وزن أهل مكة والمكيال مكيال أهل المدينة.

مقاييس الكيل :

تعرف هذه المقاييس بالمكاييل، وتعني لغة ما يكال به من حديد أو خشب أو نحوهما.
وفي الاصطلاح تعني تقدير الأشياء بحجومها، وقد تم التعامل بها قبل الإسلام ومع قيام الدولة الإسلامية تم إقرارها لارتباطها بأحكام العبادات، وتم حصرها في عدة أصناف تختلف حسب الأجزاء والمضاعفات.
وفيما يلي، نبين علاقة المكاييل القديمة بالمقاييس الحديثة من خلال الجداول التالية:

الجدول 1: الوحدة المرجعية الصاع وهو 4 أمداد ويساوي تقريبا 2,5kg وفي ما يلي بعض أجزائه ومضاعفاته وما يقابلهما من القياسات الحديثة:

من أجزاء الصاع		ب : g
المد	1/4 الصاع = رطلان	625 g
القسط	نصف الصاع	1250 g
القدح	3/5 الصاع	1500 g

من مضاعفات الصاع		ب : kg
المكوك	1,5 صاع	3,75 kg
الفرق	3 صاع	7,5 kg
الويبة	4 صاع	10kg
الكيلة	8 أقداح	12 kg
المختوم	5 صاعا	12,5kg
القفيز	12 صاعا	30kg
المكتل	15 صاعا	37,5 kg
المدى	15 مكوك	56,25 kg
الإردب	24 صاعا	60 kg
القلة	38 صاعا	95kg
الجيرب	48 صاعا	120 kg
الوسق	60 صاعا	150 kg
الكُرّ	720 صاعا	1875 kg

ملاحظة: مقاييس الكيل والوزن والأطوال تختلف تبعا لعاملي الزمان والمكان وكذلك حسب المذاهب والمدارس الفقهية.

نماذج من صور لبعض أدوات الكيل المستخدمة قديما وأيام الدولة الإسلامية

الصاع	المد	الكر	الإردب	المكوك	القلبة	الكيلة	القلة

الجدول 2:

الوحدة	بالكيلوغرام	باللتر(من الماء)
المد	0 ,544 kg	0,688 l
القسط	1,0875 kg	1,375 l
الكليجة	1,088 kg	1,375 l
الويبة	10kg	11 l
القدح	1,4 kg	2.06 l
الصاع	2,5 kg	2, 75 l
المكوك	3,264 kg	2,024 l
الفَرَق	7,5 kg	8, 25 l
الكيلة	12 kg	16.5 l
القفيز	26,112 kg	33,035 l
العرق	37,5 kg	41,25 l
المدى	32,640kg	42,389 l
المكتل	37,5 kg	41,25 l

الإردب	52,2 kg	66 l
القلة	95,625 kg	307 l
الجريب للمساحة	120 kg	132 l
الوسق	130,5 kg	165,060 l
*الكُرّ	1800 kg	1980 l

- **مقاييس الكيل من منظور السعة (الحجم)**

ملاحظة:

القياسات الواردة في الجدول مقاسة بمكاييل معيارية ثابتة الحجم وتختلف مقادير أوزانها باختلاف طبيعة المادة الموزونة.

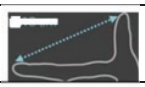
الجدول 3:

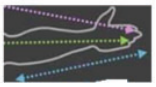
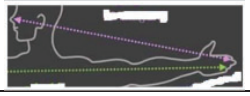
- **مقاييس الوزن:**

الوحدة المرجعية الدرهم وزنه 2,975 g				
أجزاؤه		ب : g	مضاعفاته	ب : g
الفلس	1/72 من حبة الشعير	0,07g	الدينار= المثقال = درهما وثلاثة أسباع الدرهم = 72 حبة شعير	4,15 g
حبة شعير	1/38 من الدرهم	0.09g	النواة= 5 دراهم	14,875 g
الطموج	2 حبة شعير= ربع دانق	0,122g	النش = 20 درهما	59,5 g
القيراط	نصف دانق = 1/12 درهم	0,245g	الأوقية = 40 درهما	119g
الدانق	1/6 الدرهم = 2 قيراط	0,49g	الرطل= 144 درهما	428,4g
			المن= 2 رطل	856,8g
			القنطار = 100 رطل	42,84kg

نماذج من صور لبعض مقاييس الوزن المستخدمة				
الدرهم	أوقية الذهب	الدينار الذهبي	حبة الشعير	مثقال الذهب

- **مقاييس الأطوال الإسلامية :**

القديمة		ما يقابلها حديثا
الأنملة = نصف الأصبع		• 0,9 سم.
الأصبع (عرض)		• 1,9 سم.
القبضة = 4 أصابع		• 7,6 سم
الفِتْر		• 15 إلى 18 سم
الشبر		• 20 إلى 20 سم
القدم		• 32 cm

الذراع		• 46 سم
الوار		• 90 سم تقريباً
الباع = 4 أذرع		• 184 سم
القامة		• 1,92 m
القصبة		• 3,84 m
الغلوة = 300 إلى 400 ذراع		• 161 m
الميل = 3500 ذراع		• 1609 m
الفرسخ = 3 أميال		• 4827 مترا
البريد العربي = 4 فراسخ		• 19, 308 km
المرحلة = 2 بريد = 24 ميل		• 38,616 km

- **مسافة القصر:**

لا يجوز القصر في أقل من مسافة أربعة بُرُدٍ والبرد = 4 فراسخ والفرسخ 3 أميال، وعليه تكون المسافة الدنيا للقصر 48 ميلا وهو ما يعادل 84 كيلومتر (عند المالكية).

- **ثانيا: مقاييس المساحة:**

في الحضارة الإسلامية، كانت هناك وحدات قياس مختلفة للمساحة، منها ما هو شائع الاستخدام مثل الذراع، والفرسخ، والميل، والبريد، والمرحلة، بالإضافة إلى وحدات أخرى فرعية .

كما استخدمت وحدات قياس خاصة بالزراعة وتقدير الأراضي، مثل الجريب والوسق .

IPN

ثانيا) تطبيقـــــــــــــــــات

تطبيق 1:

أكمل الجدول التالي:

صاع	100								
مد			50						
القفيز				10					
المكتل									200
الإردب					6				
المكوك				72					
الفرق		40							
القسط							432		
الوسق								6	

الحل:

صاع	100	120	12,5	120	144	108	216	360	3000
مد	400	480	50	480	576	432	864	1440	12000
القفيز	8,33	10	1,04	10	12	9	18	30	250
المكتل	6,66	8	0,83	8	9,6	7,2	14,4	24	200
الإردب	4,16	5	0,52	5	6	4,5	9	15	125
المكوك	66,66	80	8,33	80	96	72	144	240	2000
الفرق	33 ,33	40	4,16	40	48	36	72	120	1000
القسط	200	240	25	240	288	216	432	720	6000
الوسق	1,66	2	0,20	2	2,4	1,8	3,6	6	50

تطبيق 2 :

اقرأ النص التالي من مقدمة "ابن خلدون "للمؤلف عبد الرحمن محمد بن خلدون المولود في تونس سنة 140م.

"...فاعلم أن الإجماع منعقد منذ صدر الإسلام وعهد الصحابة والتابعين أن الدرهم الشرعي هو الذي تزن العشرة منه سبعة مثاقيل من الذهب والأوقية منه أربعين درهما وهو على هذا سبعة أعشار الدينار ووزن المثقال من الذهب اثنتان وسبعون حبة من الشعير فالدرهم الذي هو سبعة أعشاره خمسون حبة وخمسا حبة وهذه المقادير كلها ثابتة بالإجماع..."

اعتمادا على المعلومات الواردة في النص السابق، اختر لكل سؤال الجواب الصحيح من بين الأجوبة الثلاثة المقترحة A ، B و C ، علما بأن جوابا واحدا منها صحيح.

السؤال	المقدار	الجواب A	الجواب B	الجواب C
1	14 مثقالا من الذهب تساوي	درهمين	7 دراهم	20 درهما
2	أوقية الذهب تساوي	7 دنانير	14 دينارا	28 دينارا
3	أوقية الذهب تزن	2016 حبة شعير	2017 حبة شعير	2018 حبة شعير
4	5 دراهم تزن	155 حبة شعير	160 حبة شعير	252 حبة شعير
5	360 حبة شعير تزن	5 دنانير	7 دنانير	10 دنانير
6	70 دينارا تساوي	أوقية من الذهب و40 درهما	أوقية من الذهب و60 درهما	أوقية من الذهب و80 د

باكـــلوريا 2019

الحل:

السؤال	1	2	3	4	5	6
الجواب	C	C	A	C	A	B

تطبيق 3 :

اقرأ النص التالي من كتاب القاموس المحيط لمؤلفه مجد الدين أبي طاهر محمد بن يعقوب الفيروزبادي المتوفي 817 هـ .

... والكيلجة منا وسبعة أثمان المن، والمن رطلان، والرطل أثنا عشرة أوقية والأوقية إستار وثلثا إستار، والإستار أربعة مثاقيل ونصف، والمثقال درهم وثلاثة أسباع درهم، والدرهم ستة دوانق، والدانق قيراطان، والقيراط طسوجان، والطسوج حبتان، والحبة سدس ثمن درهم، وهو جزء من ثمانية وأربعين جزءا من درهم.

اعتمادا على المعلومات الواردة في النص السابق، اختر لكل سؤال الجواب الصحيح من بين الأجوبة الثلاثة المقترحة A، B و C ، علما بأن جوابا واحدا منها صحيح.

السؤال	المقدار	الجواب A	الجواب B	الجواب C
1	80 كيلجة تساوي	80 منا	100 منا	150 منا
2	الرطل يساوي	20 إستارا	18 إستارا	12 إستارا
3	21 مثقالا يساوي	70 درهما	30 درهما	24 درهما
4	60 طسوجا يساوي	درهمين	درهمين ونصف درهم	ثلاثة دراهم
5	الحبة تساوي	ثمن الدانق	سدس الدانق	ربع الدانق
6	120 قيراطا تساوي	12 مثقالا	10 مثاقيل	7 مثاقيل

باكـــلوريا 2018

الحل

السؤال	1	2	3	4	5	6
الجواب	C	A	B	B	A	C

تطبيق 4:

اقرأ النص التالي: قال النووي في شرح المهذب: الصحيح الذي يتعين اعتماده واعتقاده أن الدراهم المطلقة في زمن رسول الله صلى الله عليه وسلم كانت معلومة الوزن معروفة المقدار ـ وهي السابقة إلى الأفهام عند الإطلاق وبها تتعلق الزكاة وغيرها من الحقوق والمقادير الشرعية ـ ولا يمنع من هذا كونه كان هناك دراهم أخرى أقل أو أكثر من هذا القدر ـ فإطلاق النبي صلى الله عليه وسلم الدراهم ـ محمول على المفهوم عند الإطلاق: وهو كل درهم ستة دوانيق، كل عشرة سبعة مثاقيل ...

أما مقدار الدرهم والدينار فقال الحافظ أبو محمد عبد الحق في كتاب الأحكام: قال ابن حزم: بحثت غاية البحث عن كل من وثقت بتمييزه، فكل اتفق على أن دينار الذهب بمكة وزنه ثنتان وثمانون حبة وثلاثة اعشار من حب الشعير المطلق، والدرهم سبعة أعشار المثقال فوزن الدرهم المكي سبع وخمسون وستة أعشار حبة وعشرعشر حبة، والرطل مائة درهم وثمانية وعشرون درهما بالدرهم المذكور....

اعتمادا على المعلومات الواردة في النص السابق، اختر لكل سؤال الجواب الصحيح من بين الأجوبة الثلاثة المقترحة A، B و C ، علما بأن جوابا واحدا منها صحيح.

السؤال	المقدار	الجواب A	الجواب B	الجواب C
1	30 دانقا تساوي	5 دراهم	3 مثاقيل	300 رطل
2	الرطل يساوي	10028 درهما	760 دانقا	128 درهما
3	دينار الذهب بمكة يساوي	82,310 حبة	82,103 حبة	82,3 حبة
4	الدرهم المكي يساوي	157,16 حبة	57,61 حبة	57,16 حبة

IPN

5	الدرهم يساوي	0,7 مثقال	7 مثقال	60 دانقا
6	الدانق يساوي	16,66%تقريبا من الدرهم	6% تقريبا من الدرهم	60% تقريبا من الدرهم
7	الدانق يساوي	50% تقريبا من المثقال	11,66% تقريبا من المثقال	1% تقريبا من المثقال
8	المثقال يساوي	درهما وثلاثة أعشار الدرهم	درهما وثلاثة أسباع الدرهم	سبعة أعشار الدرهم

باكـــلوريا 2013

الحل، نموذج مفصل:

السؤال	الج. الصحيح	التبرير
1	A	5 دراهم = (6)×5= 30 دانقا
2	C	الرطل يساوي = 128 درهما
3	C	دينار الذهب بمكة يساوي = 82,3 حبة شعير
4	B	الدرهم المكي يساوي = 57 و 6/10 و(1/10) × (1/10) = 57,61
5	A	7/10= 0,7 = مثقال
6	A	1 درهم = 6 دوانق و 10 درهم = 7 مثقال ، من المساواة الأولى نجد : 10 درهم = 60 دانق = 7 مثقال ومنه: 1 دانق = $\frac{7}{60}$ مثقال = $\frac{\frac{70}{6}}{100}$ ≃ $\frac{11,66}{100}$ من المثقال.
7	B	1/6 درهم = 1 دانق و $\frac{\frac{100}{6}}{100}$ ≃ $\frac{11,66}{100}$ = 11,66% من الدرهم
8	B	1 مثقال= $\frac{10}{7}$من الدرهم = $\left(\frac{3}{7}+\frac{7}{7}\right)$ من الدرهم = درهم + 3 أسباع من الدرهم.

IPN

ثالثا): تمـــــــــــــــــــارين:

تمرين1:

اقرأ النص التالي من كتاب معالم القربة في طلب الحسبة لمؤلفه محمد بن محمد بن أحمد بن أبي زيد بن الأخوة القرشي ضياء الدين (ت 729هـ) :"...وأما القنطار الذي ذكره الله تعالى في كتابه الكريم فقد قال معاذ بن جبل: هو ألف ومائتا أوقية، ...وعن أبي صالح مائة رطل، وهو المتعارف بين الناس، والرطل اثنا عشر أوقية، والأوقية اثنا عشر درهما... اعتمادا على المعلومات الواردة في النص السابق، اختر لكل سؤال الجواب الصحيح من بين الأجوبة الثلاثة المقترحة A، B و C ، علما بأن جوابا واحدا منها فقط صحيح.

السؤال	المقدار	الجواب A	الجواب B	الجواب C
1	القنطار يساوي	400 14 درهما	000 14 درهما	000 12 درهما
2	60 أوقية تساوي	4 أرطال ونصف	5 أرطال	6 أرطال
3	1200 رطلا تساوي	60 قنطارا	50 قنطارا	12 قنطارا
4	رطل و5 أواق يساوي	144 درهما	204 دراهم	260 درهما
5	60 درهما و13 أوقية تساوي	رطلا واحدا	رطلا ونصفا	رطلين

باكـــلوريا 2025

تمرين 2:

يقول الإمام الشيخ شهاب الدين أبي عبد الله ياقوت ابن عبد الله في المجلد الأول من كتابه " معجم البلدان": "...الفرسخ ثلاثة أميال، والميل أربعة آلاف ذراع. فالفرسخ اثنا عشر ألف ذراع، والذراع أربع وعشرون إصبعا، والإصبع ست حبات شعير مصفوفة بطون بعضها إلى بعض...". اعتمادا على المعلومات الواردة في النص السابق، اختر لكل سؤال الجواب الصحيح من بين الأجوبة الثلاثة المقترحة A، B وC،علما بأن جوابا واحدا منها فقط صحيح.

السؤال	المقدار	الجواب A	الجواب B	الجواب C
1	الفرسخ يساوي مسافة	248 000 إصبعا	264 000 إصبعا	288 000 إصبعا
2	3 فراسخ تساوي مسافة	8 أميال و 12 000 ذراع	6 أميال و12000 ذراع	9أميال و12000ذراع
3	ميلان وثلثا فرسخ يساوي مسافة	18 000 ذراع	16 000 ذراع	14 000 ذراع
4	مسافة 400 38 إصبع تساوي	ثلث ميل	خمسي ميل	3 أخماس الميل
5	5 أسداس ذراع تساوي مسافة	20 إصبعا	18 إصبعا	16 إصبعا
6	مسافة 022 2 حبة شعير مصفوفة بطون بعضها إلى بعض تساوي مسافة	12 ذراعا و47 إصبعا	12 ذراعا و48 إصبعا	12 ذراعا و49 إصبعا

باكـــلوريا 2023

تمرين 3:

اقرأ النص التالي من كتاب الشرح الكبير للمؤلف أبي البركات أحمد بن محمد العدوي، المشهور بالدردير (المتوفى سنة : 1201 هـ). "...(أربعة برد) معمول مسافر بيان لمسافة القصر، كل بريد أربعة فراسخ وكل فرسخ ثلاثة أميال فهي ثمانية وأربعون ميلا والمشهور أن الميل ألفا ذراع والصحيح أنه ثلاثة آلاف وخمسمائة...".اعتمادا على المعلومات الواردة في النص السابق، اختر لكل سؤال الجواب الصحيح من بين الأجوبة الثلاثة المقترحة A ، B و C ، علما بأن جوابا واحدا منها فقط صحيح.

السؤال	المقدار	الجواب A	الجواب B	الجواب C
1	البريد يساوي	3 أميال	12 ميلا	16 ميلا
2	مسافة القصر تساوي	168 000 ذراع	48 000 ذراع	120 000 ذراع
3	مائة فرسخ وستون ميلا تساوي	25 بريدا	30 بريدا	48 بريدا
4	70 ألف ذراع تساوي	6 فراسخ	6 فراسخ وثلث	6 فراسخ وثلثين
5	مائة فرسخ تساوي	25 بريدا	33 بريدا وثلثين	37 بريدا ونصف
6	60 ميلا تساوي	4 برد	5 برد	4 برد ونصف

باكـــلوريا 2021

الأهداف القدرة على :

- ✓ عد معطيات باستخدام أدوات التعداد: شجرة، جداول، مخططات ...
- ✓ اكتساب المعجم المتعلق بالاحتمالات: الأحداث، العمليات المرتبطة بها،
- ✓ حساب احتمال حدث ما، التعبير عنه كنسبة مئوية عند الحاجة.
- ✓ القيام بتطبيقات.
- ✓ القيام بتمارين.

مدخـــــــل : تتناول هذه الوحدة التعداد من خلال أدوات بسيطة من قبيل: مخطط فن (Diagramme de Venn)، شجرات، الجدوال وفي جانب الاحتمالات يتم التمهيد لها بأمثلة متعددة، كل ذلك وفق مقاربة تستبعد استخدام صيغ الحساب التوافقي في التعداد.

أولا) المحتوى: ما يجب الإلمام به

I-التعـــــــــداد

- **مفاهيم أولية:**

مفهوم المجموعة:

المجموعة في الرياضيات تعني تجمع أشياء محددة تحديدا لا لبس فيه.

فالأشياء المكونة لها تسمى عناصروكل واحد يسمى عنصرا.. ويرمز لها عادة بأحرف كبيرة مثل : A و B وC ...

مثال1: كلمة Mathematiques، مكونة من أحرف هي: i ; h ;s ; u ;q ; e ;t ;a ;M ، توضع داخل قوسين من الشكل {} ونكتب عندئذ : A={ m ;a ; t ;e ; q ;u ; s ;h ;i}

مثال2: القواسم الطبيعية للعدد 12 : تشكل مجموعة نرمز لها بأي رمز وليكن B ، عندئذ نكتب:

B={ 1; 12 ; 6; 4 ; 3; 2 }. نقول إن 1 ينتمي لهذه المجموعة ونرمز لذلك ب: $1\in B$ ، $6\in B$ ، ....، بينما 5 لا تنتمي لهذه المجموعة ، ونكتب $5\notin B$.

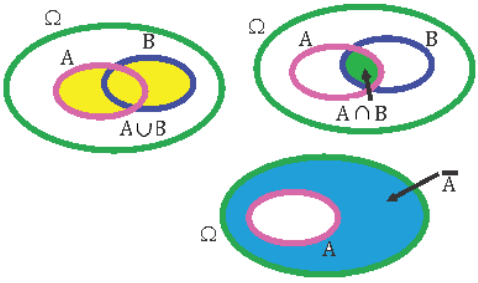
ملاحظة 1: قد لا تحتوي المجموعة على أي عنصر، وحينها تسمى مجموعة خالية ويرمز لها ب: ϕ أو { } .

مثال: مجموعة قواسم 12 الأكبر تماما من 12، لا يوجد بها أي عنصر وبالتالي هي مجموعة خالية.

ملاحظة 2:{ 12; 6 ; 4; 3 ; 2; 1 }= { 1; 12 ; 6; 4 ; 3; 2 } = B بمعنى أن الترتيب غير مهم.

✓ يسمى عدد عناصر المجموعة رئيسيها ونرمز لذلك ب card (E)، ففي المثال السابق card (B) = 6

- **تعاريف وتسميات:**

التعريف	تفسيره بيانيا
• A جزئية من Ω أو محتواة فيها، إذا كانت جميع عناصر Aهي أيضا عناصر من Ω $\forall x\in A\Rightarrow x\in\Omega \Leftrightarrow$ • تقاطع المجموعتينA و B (رمزه $\cap$) يعطي مجموعة كل العناصر المشتركة بينهما، ويرمز له ب : $A\cap B$. • اتحاد المجموعتين A و B (رمزه $\cup$) يعطي مجموعة كل العناصر المشتركة بينهما و غير المشتركة. ونرمز له ب: $A\cup B$. • مكملةَ A بالنسبة ل Ω هي كل العناصر المنتمية ل Ω ولا تنتمي ل A و يرمز لها ب: $\overline{A}$ وتحقق : $A\cup\overline{A}=\Omega$ • إذا كانَ $A\cap B=\phi$ ، نقول إن المجموعتين منفصلتان . • Ω تسمى المجموعة الشاملة بالنسبة ل : A و B.	

- **التعـــــــــــداد:**

1) مفهوم التعداد:

يتعلق الأمر هنا بعد الأشياء. لتكن E مجموعة ما، يمكن تمييز حالتين، إذا كانت E قابلة للعد مثال عدد أفراد أسرة، عدد الكتب في مكتبة،... عندئذ نقول إنها منتهية، وفي الحالة الأخرى، إذا لم تكن قابلة للعد نقول إنها غير منتهية، مثال مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N} = \{0;1;2;3;...\}$

2) تعريف:

لتكن E مجموعة منتهية، وعدد عناصرها يساوي n. نسمي هذا العدد رئيسي المجموعة ونرمز لذلك ب:

$card(E) = n$.

مثال 1:

لتكن A، B، C و D المجموعات التالية: $A = \{1;2\}$; $B = \{a;b;c;d\}$; $C = \{\}$; $D =]0;+\infty[$

إذن: $card(A) = 2$ ، $card(B) = 4$ ، $card(C) = 0$ و $card(D)$ غير موجود؛ لأن D غير منتهية.

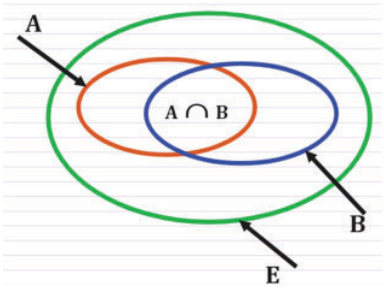
ملاحظة:

المجموعة التي لا تحتوي على أي عنصر تسمى المجموعة الخالية ويرمز لها ب: ϕ أو $\{\}$.

3) نظرية:

لتكن A و B مجموعتين جزئيتين من مجموعة شاملة E، نرمز لذلك ب: $A \subset E$ و $B \subset E$، إذن :

- $card(A \cup B) = card(A) + card(B) - card(A \cap B)$
- $card\left(C_E^A\right) = card(\overline{A}) = card(E) - card(A)$



ملاحظة:

الرمز C_E^A يقرأ مكملةَ A في E وتعني: $C_E^A = \{x / x \in E \text{ et } x \notin A\}$

مثال 2:

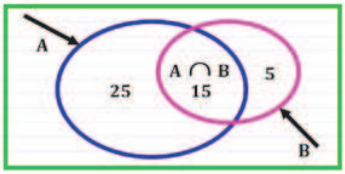
في أحد فصول السوابع، كل التلاميذ يمارسون على الأقل رياضة كرة القدم أو السلة.40 يمارسون كرة السلة و 20 كرة القدم و15 الكرتين معا. ما عدد تلاميذ القسم؟

الجواب :

نعتبر E مجموعة تلاميذ القسم، و A مجموعة ممارسي كرة السلة و B لمجموعة كرة القدم.

لدينا إذن: $card(A) = 40$ ، $card(B) = 20$ و $card(A \cap B) = 15$ إذن $E = A \cup B$ و

$Card(E) = card(A \cup B) = card(A) + card(B) - card(A \cap B) = 40 + 20 - 15 = 45$



IPN

- **من أدوات التعداد**

الجداء الكارتيزي:

تعريف :

لتكن A و B مجموعتين منتهيتين، نسمي الجداء الكارتيزي A×B (A جداء B) مجموعة كل الثنائيات المرتبة (a ;b) حيث a∈A و B∈B .

خاصية:

إذا كانت A و B مجموعتين منتهيتين فإن: $card(A\times B) = card(A) \times card(B)$

نتيجة :

أذا كانت A = B فإن : $card(A\times A) = card(A) \times card(A)= (card(A))^2$

مثال:

نعتبر المجموعتين : { 1; 2 ; 3} = B ; { a ; b } = A ، يمكن أن نحدد A×B بعدة طرق :

جدول ذو مدخلين :

A \ B	1	2	3
a	(a ;1)	(a ;2)	(a ;3)
b	(b ;1)	(b ;2)	(b ;3)

A×B= {(a ;1), (a ;2), (a ;3), (b ;1), (b ;2), b ;3)}

ومنه

Card(A×B) = card(A)×card(B)= 2× 3 = 6

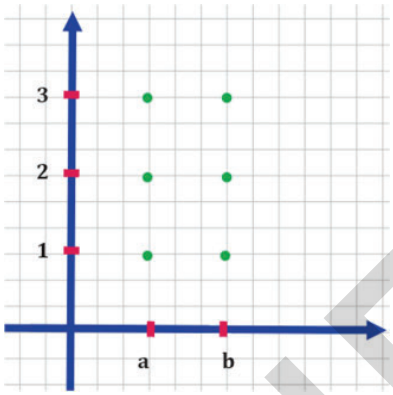
وبجدول مماثل، نحصل على :

B×A= {(1 ;a), (1 ;b), (2 ;a), (2 ;b), (3 ;a), 3 ;b)}

ومنه

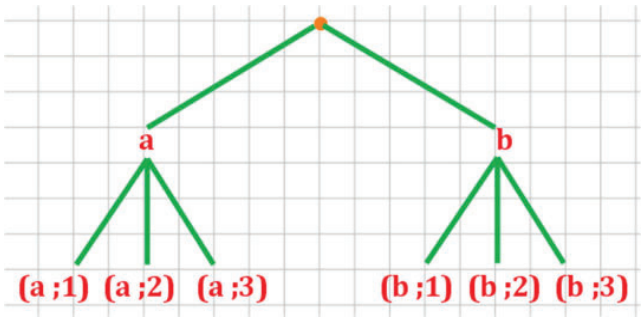
Card(B×A) = card(B)×card(A)= 3× 2 = 6

مَعْلَمَة في مستو ذي مرجع محدد:



- المجموعة A محمولة على محور الفواصل
- المجموعة B محمولة على محور التراتيب
- كل نقطة تمثل زوجا مرتبا، فاصلتة من A و ترتيبة من B

- **التمثيل بشجرة خيارات :**



IPN

مثال:

رمي قطعتي نرد أوجههما مرقمة من 1 إلى 6 وغير مغشوشين.

حدد جميع عناصر المجموعة الناتجة عن هذه العملية.

الجواب:

باستخدام جدول ذي مدخلين:

A / A	1	2	3	4	5	6
1	(1 ; 1)	(1 ; 2)	(1 ; 3)	(1 ; 4)	(1 ; 5)	(1 ; 6)
2	(2 ; 1)	(2 ; 2)	(2 ; 3)	(2 ; 4)	(2 ; 5)	(2 ; 6)
3	(3 ; 1)	(3 ; 2)	(3 ; 3)	(3 ; 4)	(3 ; 5)	(3 ; 6)
4	(4 ; 1)	(4 ; 2)	(4 ; 3)	(4 ; 4)	(4 ; 5)	(4 ; 6)
5	(5 ; 1)	(5 ; 2)	(5 ; 3)	(5 ; 4)	(5 ; 5)	(5 ; 6)
6	(6 ; 1)	(6 ; 2)	(6 ; 3)	(6 ; 4)	(6 ; 5)	(6 ; 6)

$(card(A))^2 = 36$.

- **P-قـــائمـــــــــــــــة**

نظرية:

لتكن E مجموعة منتهية وغير خاليه، مع $card(E) = n$ و p عدد طبيعي بحيث $p \geq 1$. نسمي p ـ قائمة لعناصر E كل متتالية مرتبة من p عنصر مختلف أو غير مختلف من E. عدد هذه القوائم هو n^p.

مثال 2:

لتكن $E = \{a ; b ; c\}$ ، لدينا: $card(E) = 3$ ومنه :

$(a ; a), (a ; b), (a ; c), (b ; b), (b ; a), (b ; c), (c ; c), (c ; a), (c ; b)$ هي 2 ـ قائمة لعناصر E وعددها $3^2 = 9$.

التفسير:

نلاحظ أن عناصر 2 ـ قائمة في E هي نفسها عناصر الجداء الكارتيزي $E \times E = E^2$ وعددها هو $(card(E))^2 = 3^2$. وكذلك يمكن أن نعطي عناصر 3 ـ قائمة في E :

$(a ; a ; a)$ ، $(a ; a ; b)$ ، $(a ; a ; c)$ ، $(a ; b ; a)$ ، $(a ; b ; b)$ ، $(a ; b ; c)$ ، $(a ; c ; a)$

$(a ; c ; b)$ ، $(a ; c ; c)$ هذه العناصر التسعة تبدأ ب a: ونفس العدد من العناصر بالنسبة ل B و C ومنه يصبح العدد الكلي 27 وهو ما يوافق الصيغة 3^3

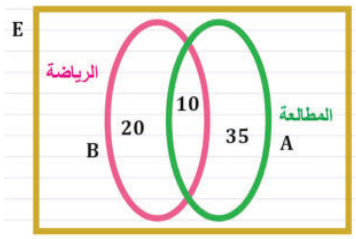
$(a ; b ; c ; a)$ ، هي عنصر من 4 ـ قائمة في E والتي عدد عناصرها يساوي: $3^4 = 81$.

تطبيق 1:

في مجموعة أفراد، 45 تهوى المطالعة، 30 تهوى الرياضة و 10 تهوى النشاطين معا.

حدد عدد أفراد هذه المجموعة.

الحل:



1) باستخدام مخططات " فن":

نرمز ب E لهذه المجموعة وA مجموعة هواة المطالعة وB الرياضة، إذن لدينا:

$$Card(E) = card(A \cup B) = card(A) + card(B) - card(A \cap B)$$

$$= 45 + 30 - 10 = 65.$$

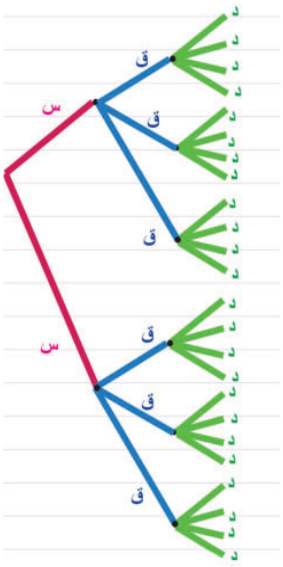
تطبيق 2:

يمتلك أحمد في حقيبة ثيابه، سروالين، وثلاثة أقمصة وأربعة دراريع.

يختار أحمد وبشكل عشوائي سروالا، قميصا ودراعة.

حدد باستخدام شجرة تعداد عدد الطرق المختلفة لارتداء أحمد لزي كامل.

الحل:



يمكن لأحمد أن يرتدي زيا كاملا، باختياره سرواله بطريقتين،

و لكل طريقة منهما يختار قميصه بثلاث طرق، ولكل منهم يختار دراعته بأربع طرق، ومنه

ومنه يكون عدد جميع الطرق لارتدائه لزي كامل يساوي: $24 = 4 \times 3 \times 2$ ،

وهو ما تجسده شجرة الخيارات المقابلة، ممثلا في عدد أفرعها النهائية.

تطبيق 3:

لتكن $E = \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9\}$

احسب عدد الرموز السرية المشكلة من أربعة أرقام والتي يمكن تشكيلها من E،علما أن الرقم الأول يختلف عن 0.

الحل:

نعلم الرمز السري الذي يراد تشكيله هو من النوع: abcd حيث a يختلف عن الصفر.

يمكن أن نختار الرقم الأول بتسعة طرق، والثاني بعشرة، والثالث بعشرة و كذلك الرابع، ومنه يكون العدد الكلي هو:

حاصل الجداء: $9 \times 10 \times 10 \times 10 = 9000$.

IPN

تطبيق 4:

لتكن {1; 0} = E، احسب 2 ـ قائمة لعناصرE، احسب 5 ـ قائمة لعناصر E ، احسب 8 ـ قائمة لعناصر E ،

الحل:

حساب عدد القوائم:

- **2 ـ قائمة لعناصرE ، عددها: $2^2 = 4$**
- **5 ـ قائمة لعناصرE ، عددها : $2^5= 32$**
- **8 ـ قائمة لعناصرE ، عددها: $2^8 =256$.**

تطبيق5 :

صندوق يحتوي كرتين(2) خضراوين، (3) صفراء و (5) حمراء . نسحب 3 كرات واحدة تلو الأخرى مع الإرجاع إلى الصندوق في كل مرة.

a) حدد العدد الكلي لمختلف السحوبات الممكنة.

b) حدد عدد السحوبات التي تعطي (3) كرات حمراء.

c) حدد عدد السحوبات التي تعطي (3) كرات من نفس اللون.

d) حدد عدد السحوبات التي تعطي (2) كرتين حمراوين و كرة (1) خضراء في هذا الترتيب.

e) حدد عدد السحوبات التي تعطي (2) كرتين حمراوين و كرة (1) خضراء.

f) حدد عدد السحوبات التي تعطي على الأكثر (1) كرة حمراء.

g) حدد عدد السحوبات التي تعطي على الأقل (1) كرة حمراء.

الحل:

a) العدد الكلي لمختلف السحوبات الممكنة هو : 10^3

b) عدد السحوبات التي تعطي (3) كرات حمراء هو : 5^3

c) عدد السحوبات التي تعطي (3) كرات من نفس اللون هو : $2^3+3^3+5^3= 160$

d) عدد السحوبات التي تعطي (2) كرتين حمراوين و (1) كرة خضراء في هذا الترتيب هو: $2 \times 5 \times 5$

e) عدد السحوبات التي تعطي (2) كرتين حمراوين و (1) كرة خضراء هو: $3\times(5\times5\times2)=150$

f) عدد السحوبات التي تعطي على الأكثر (1) كرة حمراء هو: إما 0 كرة حمراء، وعندئذ : عدد السحوبات يساوي: $5^3=125$ أو(1) حمراء و (2) من الخمسة المتبقية أي أن عدد السحوبات يساوي

$$3\times(5\times5^2) +125= 375+125=500$$

g) عدد السحوبات التي تعطي على الأقل (3) كرة حمراء يساوي: $10^3- 125=875$.

IPN

ثالثا): تمـــــــــــــــــارين :

تمرين 1:

حقيبة تحتوي 9 قطع تحمل على التوالي الأرقام : 1 ، 2، 3، 4، 5، 6، 7، 8، 9.

1) نسحب عشوائيا على التوالي ودون إرجاع ثلاث قطع من الحقيبة وهو ما يعطي عددا من ثلاثة أرقام.

القطعة الأولى تعطي رقم الآحاد، والثانية رقم العشرات والثالث رقم المئات.

a) حدد عدد النتائج الكلية الممكنة.

b) احسب card كل من المجموعات التالية:

A: " رقم آحاد العدد المتحصل عليه هو 9 " . B : " العدد 9 يظهر في العدد المتحصل عليه".

2) نسحب قطعة من الحقيبة، ونسجل الرقم الظاهر عليها، ثم نعيدها في الحقيبة. نعيد هذه العملية ثلاث مرات مما ينتج عنه عدد من ثلاثة أرقام بنفس الطريقة الواردة في السؤال 1.

a) حدد عدد النتائج الكلية الممكنة من جديد.

b) حدد card كلا من المجموعات التالية : C: "رقم آحاد العدد المتحصل عليه هو 9 " . D : " العدد 9 يظهر بالضبط مرة واحدة في العدد المتحصل عليه".

تمرين 2:

كيس يحتوي على 3 كرات بيضاء و 5 حمراء. نسحب على التوالي وبدون إرجاع 2 كرة من هذا الكيس.

1) كم عدد السحوبات الممكنة؟ 2) كم عدد السحوبات التي تحتوي على كرتين من نفس اللون؟

تمرين 3:

1) كم كلمة مختلفة يمكن الحصول عليها (ذات معنى أو بدونه)من 4 أحرف من الحروف الهجائية؟

2) ما عدد هذه الكلمات إن بدأت بحرف غير حرف مد؟

3) ما عدد الكلمات التي يمكن الحصول عليها بحيث تشمل حرفي مد وآخرين ليسا من أحرف المد؟

تمرين 4:

جمعية ثقافية تضم 120 منتسبا، تتوزع اهتماماتهم كما يلي: 45 المطالعة الحرة، 42 كرة القدم و 40 الكرة الطائرة. 27 تتجه نحو المطالعة الحرة والكرة الطائرة معا ، في حين أن 15 تجمع ما بين كرة القدم والكرة الطائرة و 14 لمطالعة و كرة القدم و8 تنخرط في الرياضات الثلاث.

1) مثِّل هذه الوضعية بمخطط من مخططات "فن"

2) ما عدد المنتسبين غير الممارسين إلا للمطالعة حصرا؟

3) ما عدد المنتسبين الممارسين لنشاطين فقط من الأنشطة الثلاثة الواردة في التمرين ؟.

IPN

II- الإحتمـــــــــــــالات:

- **التجربة العشوائية وفضاء الإمكانات:**

✓ نقول إن تجربة عشوائية إذا لم نستطع التنبؤ بنتائجها بصفة مؤكدة، وإنما يمكن وصف أوإعطاء جميع نتائجها.

✓ نسمي نتائج التجربة العشوائية فضاء الإمكانات و يرمز له غالبا ب: Ω.

مثال:

عند رمي قطعة نرد، وهي ذات أوجه مرقمة من 1 حتى 6،
وتسجيل الرقم الظاهر على الوجه العلوي، نحصل على تجربة
ذات فضاء احتمالي :$\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$

- **إمكانية تجربة:**

في تجربة عشوائية ، نسمي إمكانية ، كل نتيجة ممكنة من خلال التجربة. ففي المثال السابق 1، 2، 5، ...كلها إمكانات.

- **أحداث التجربة:**

في تجربة عشوائية ذات فضاء Ω ، نسمي حدثا، كل مجموعة جزئية من Ω ، بمعنى أي مجموعة إمكانات من المجموعة الكلية.

في المثال السابق لدينا $\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$. نقول إن: $A = \{2; 4 ; 6\}$ و $B = \{1; 3 ; 5\}$ و $\phi = \{\}$ و ... تمثل أحداثا.

نتائج:

✓ المجموعة الخالية تسمى حدثا مستحيلا.

✓ الفضاء Ω يمثل حدثا يسمى المؤكد.

✓ الحدث الذي يحتوي عنصرا أحاديا، يسمى الحدث الابتدائي، مثل: {1}، {3}،{4}، .....

✓ يتحقق الحدث إذا حصل على نتيجة تمثل إحدى إمكانياته.

- **لغة الاحتمالات و المجموعات**

ليكن A و B حدثين في تجربة ذات فضاء Ω		
نسمي بلغـــــة		
الرموز	المجموعات	الاحتمالات
$A \cap B$	تقاطع المجموعتين A و B	تحقق الحدثين A و B معا
$A \cup B$	اتحاد المجموعتين A و B	تحقق الحدث A أو الحدث B
$\overline{A}$	$\overline{A}$ مكملة A بالنسبة ل: Ω	الحدث المنافي ل A و نرمز له ب: $\overline{A}$
$A \cap B = \phi$	المجموعتين A و B منفصلتين	الحدثين A و B متنافيين (تحققهما معا حدث مستحيل)

مثال:

لتكن $\Omega = \{0 ; 1 ; 5 ; 10\}$، الحدث المنافي ل: $A = \{1; 5\}$ هو $\overline{A} = \{0;10\}$

IPN

- **مفهوم الاحتمال:**

لتكن $\Omega = \{e_1 ; e_2 ; e_3 \ldots ; e_n\}$ فضاء تجربة عشوائية. إذا كانت كل الأحداث الابتدائية لها نفس إمكانية التحقق عند القيام بهذه التجربة، يعبرعن ذلك بعبارات مثل: قطعة نرد غير مغشوشة، كرات لا يمكن تمايزها باللمس، قطعة متوازنة، أوراق لها نفس إمكانية السحب العشوائي ...

تعريف:

في تجربة ذات فضاء احتمالي Ω ، إذا كانت كل الأحداث الابتدائية متساوية الاحتمال، فإن احتمال الحدث A هو العدد الحقيقي ، الذي يرمزله ب $P(A)$ والمعرف ب: $P(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)}$

نتائج:

- $0 \leq P(A) \leq 1$
- $P(\Omega) = 1$
- $P(\phi) = 0$
- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

إذا كان A و B كيفيين فإن:
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

إذا كان A و B متنافيين فإن:
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

مثال1:

نرمي حجر نرد غير مغشوش، أوجهه مرقمة من 1 إلى 6. أحسب احتمال الأحداث التالية:

- A : " الحصول على الوجه 3 "
- B : " الحصول على الوجه 2 أو 3 أو 4"
- C : " الحصول على وجه يحمل عددا فرديا"
- D : " الحصول على وجه يحمل عددا زوجيا".

الجواب:

- A : " الحصول على الوجه 3 "، حدث ابتدائي ، ومنه $P(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)} = \frac{1}{6}$
- B : " الحصول على الوجه 2 أو3 أو 4"، $P(A) = \frac{card(B)}{card(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$
- C : " الحصول على وجه يحمل عددا فرديا"، $P(A) = \frac{card(C)}{card(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ ، حيث $C = \{1; 3 ; 5\}$
- بملاحظة أن، $D = \overline{C}$ نجد : $P(D) = P(\overline{C}) = 1 - P(C) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

مثال 2:

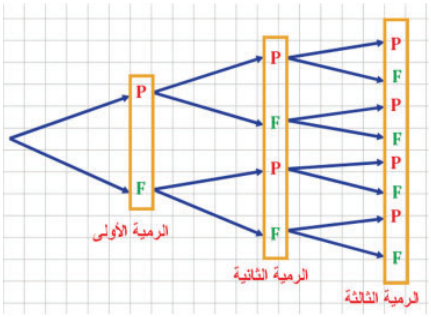
نرمي قطعة نقود متوازنة ثلاث مرات متتالية. نرمز ب: "A" لحدث الحصول على ظهرين ووجه أيا كان الترتيب.

نرمز ب: P للظهر وF للوجه.

1) أعط مخططا يبين مختلف الحالات.
2) استنتج احتمال الحدث A .

الجواب:

1) الشكل المقابل يعطي شجرة الإمكانات المترجمة للمعطيات



2) استنتاج الحدث A: لدينا $A = \{PPF; PFP ; FPP\}$ ومنه:

$P(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)} = \frac{3}{8}$.

IPN

تطبيقـــــــــــــــــات:

تطبيق 1 :

في اختبار شفهي لمادة الرياضيات، طرحت 5 أسئلة في الدوال، 4 في المتتاليات و3 في الاحتمالات.
يسحب التلميذ المُختبَر ثلاثة أسئلة واحدا بعد الآخر ويعالجها بالترتيب.
احسب احتمال الأحداث التالية:

- A"الأسئلة الثلاثة من الدوال ".
- B "كل سؤال يتعلق بأحد المحاور الثلاثة".
- C "على الأقل سؤال في الدوال".

الحل:

حساب احتمالات الأحداث:

- بالنسبة ل A، نعلم أن $card(A)=5\times4\times3= 60$ و $card(\Omega)=12\times11\times10= 1320$ ومنه :

$$P(A)=\frac{card(A)}{card(\Omega)}=\frac{6\not{0}}{132\not{0}}=\frac{6}{132}=\frac{1}{22}.$$

- بالنسبة ل B ، نعلم أن $card(B)=6(5\times4\times3)= 360$ ومنه : $P(B)=\frac{card(A)}{card(\Omega)}=\frac{36\not{0}}{132\not{0}}=\frac{3}{11}.$
- بالنسبة ل C، نعلم أن $card(C)=5\times4\times3 +3\times (5\times4\times4) +3\times (5\times4\times3) +6\times (5\times4\times3) = 240$

ومنه $P(A)=\frac{card(C)}{card(\Omega)}=\frac{840}{1320}=\frac{21}{33}$

تطبيق 2 :

نرمي قطعة نقود مرتين متتاليتين.
1) احسب احتمال الحصول على الوجه مرتين
2) ما احتمال حسب الحصول على الحدث A" ظهور الوجه على الأكثر مرة واحدة "

الحل:

1) عند رمي قطعة النقود مرتين متتاليتين، فإن فضاء الإمكانات Ω هو: $\Omega =\{(P ;P), (P ;F), (F;P), (F ;F)\}$
ومنه: $P((F ;F))= 1/4$.
2) الحدث A" ظهور الوجه على الأكثر مرة واحدة ": يعني ظهوره 1 مرة أو 0 مرة وهو نفسه الحدث المنافي للحدث السابق ومنه، $P(A) =1 - 1/4 = 3/4$.

تطبيق 3 :

نرمي قطعتي نرد أوجههما مرقمة من 1 إلى 6 وغير مغشوشين.
احسب احتمال الحصول على :
1) رقمين متساويين 2) رقمين مختلفين 3) رقمين مجموعهما زوجي.
4) رقمين مجموعهما أصغر أويساوي 6.

الحل:

نقوم ببناء الجدول الذي يترجم الوضعية، كما يلي:

IPN

القطعة 2 / القطعة 1	1	2	3	4	5	6
1	(1 ; 1)	(1 ; 2)	(1 ; 3)	(1 ; 4)	(1 ; 5)	(1 ; 6)
2	(2 ; 1)	(2 ; 2)	(2 ; 3)	(2 ; 4)	(2 ; 5)	(2 ; 6)
3	(3 ; 1)	(3 ; 2)	(3 ; 3)	(3 ; 4)	(3 ; 5)	(3 ; 6)
4	(4 ; 1)	(4 ; 2)	(4 ; 3)	(4 ; 4)	(4 ; 5)	(4 ; 6)
5	(5 ; 1)	(5 ; 2)	(5 ; 3)	(5 ; 4)	(5 ; 5)	(5 ; 6)
6	(6 ; 1)	(6 ; 2)	(6 ; 3)	(6 ; 4)	(6 ; 5)	(6 ; 6)

1) احتمال الحصول على رقمين متساويين (محمولين على القطر الرئيسي) هو : 6/36

2) احتمال الحصول على رقمين مختلفين هو الحدث المنافي للسابق، ومنه يكون احتماله : 1- 6/36 = 30/36

3) ليكن A حدث الحصول على رقمين مجموعهما زوجي. نلاحظ أن A هو الحدث الناتج عن عددين فرديين أو زوجيين ومنه، يكون: $card(A) = 3\times3 + 3\times3 = 18$ وعليه فإن : $P(A) = 18/36 = 1/2$.

4) ليكن B حدث الحصول على رقمين مجموعهما أصغر أويساوي 6، نلاحظ أن B عبارة عن كل الثنائيات الواقعة فوق القطر الرئيسي الثاني، وعددها 15 ومنه : $P(B) = 15/36 = 5/12$.

تطبيق4:

يمثل الجدول التالي نتائج المترشحين في امتحان الباكلوريا وفي إحدى الثانويات:

	إناث	ذكور
ناجح	78	104
راسب	20	38

1) نلتقي صدفة بأحد المترشحين، ما احتمال أن يكون هذا التلميذ a) ذكرا ناجحا b) أنثى c) راسبا

2) نلتقي صدفة بأحد المترشحين الذكور ما احتمال أن يكون هذا المترشح ناجحا؟ قارن هذه النتيجة مع نتيجة 1.a) السؤال

3) نلتقي صدفة بأحد الراسبين، ما احتمال أن يكون أنثى؟

الحل:

نكمل الجدول السابق، كما يلي:

	إناث	ذكور	المجموع
ناجح	78	104	182
راسب	20	38	58
المجموع	98	142	240

1) ليكن: A حدث أن يكون التلميذ ذكرا ناجحا، B حدث أن يكون التلميذ أنثى و C حدث أن يكون التلميذ راسبا.

من الجدول نجد أن: a) $P(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)} = \frac{104}{240} = \frac{13}{30}$ ، b) $P(B) = \frac{card(B)}{card(\Omega)} = \frac{98}{240} = \frac{49}{120}$

c) $P(C) = \frac{card(C)}{card(\Omega)} = \frac{58}{240} = \frac{29}{120}$

2) ليكن D حدث أن يكون التلميذ ناجحا علما أنه ذكر: $P(D) = \frac{card(D)}{card(\Omega)} = \frac{104}{142} = \frac{52}{71}$ نلاحظ أن:

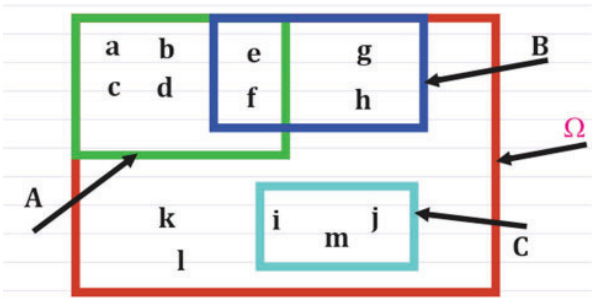
$P(D) > P(A)$.

3) ليكن E حدث أن يكون التلميذ أنثى علما أنها راسبة: $P(E)=\frac{card(E)}{card(\Omega)}=\frac{20}{58}=\frac{10}{29}$

تطبيق 5 :

المخطط بجانبه يبين توزيع تلاميذ أحد الأقسام حسب النشاط الرياضي الممارس.

- المجموعة A ممارسو كرة القدم،
- المجموعة B ممارسو كرة اليد،
- المجموعة C ممارسو كرة السلة.



نختار عشوائيا أحد التلاميذ من هذا القسم.

1) اكتب A و B و C و Ω و $\overline{A}$ و $\overline{C}$ و $A\cap B$ و $A\cup B$ و $A\cap C$ و $A\cup C$ بالتفصيل.

2) احسب P(A) و P(B) و P(C) و $P(A\cap B)$ و $P(A\cup B)$ و $P(A\cap C)$ و $P(A\cup C)$ و $P(\overline{A})$ و $P(\overline{C})$

3) قارن P(A) -1 و $P(\overline{A})$ ثم قارن P(C) -1 و $P(\overline{C})$.

الحل:

1) تحديد المجموعات المطلوبة:

• A= {a ;b ;c ; d ; e ; f }	• B= { e ; f; g ;h}	• C= { i ; m; j}
• Ω = {a ;b ;c ; d ; e ; f ;g ;h ;i ;m ;j ;k ; l}		• $\overline{A}$ = { i ; m; j ;k ; l ;g ;h}
• $\overline{C}$= {a ;b ;c ; d ; e ; f ; k ; l; g ;h}	• $A\cap B$= { e ; f}	• $A\cap C=\phi$
• $A\cup B$= {a ; b ;c ; d ; e ; f ;g ;h }		• $A\cup C$= {a ;b ;c ; d ; e ; f ;I; j; m}

2) حساب الاحتمالات المطلوبة:

نحسب أولا: $Card(A\cap B)=2$; $Card(C)=3$; $Card(B)=4$; $Card(A)=6$; $Card(\Omega)=13$ و $Card(\overline{C})=10$; $Card(A\cup B)=8$; $Card(A\cup C)=9$ ومنه: $Card(A\cap C)=0$

• $P(A)=\frac{card(A)}{card(\Omega)}=\frac{6}{13}$	• $P(B)=\frac{card(B)}{card(\Omega)}=\frac{4}{13}$	• $P(C)=\frac{card(C)}{card(\Omega)}=\frac{3}{13}$
• $P(A\cap B)=\frac{card(A\cap B)}{card(\Omega)}=\frac{2}{13}$		• $P(A\cup C)=\frac{card(A\cup C)}{card(\Omega)}=\frac{9}{13}$
• $P(A\cup B)=\frac{card(A\cup B)}{card(\Omega)}=\frac{8}{13}$		• $P(\overline{A})=\frac{card(\overline{A})}{card(\Omega)}=\frac{7}{13}$
		• $P(\overline{C})=\frac{card(\overline{C})}{card(\Omega)}=\frac{10}{13}$

3) المقارنة المطلوبة :

بالحساب نجد: $P(\overline{A})=\frac{7}{13}=1-\frac{6}{13}=1-P(A)$ و $P(\overline{C})=\frac{10}{13}=1-\frac{3}{13}=1-P(C)$.

IPN

ثالثا): تمـــــــــــــــــــارين:

تمرين 1:

الرمز السري PIN لهاتف محمول هو عدد مكون من أربعة أرقام مختارة من ضمن الأرقام

0 ;1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9.

1) ما عدد الرموز الممكنة

2) ما عدد الرموز المشكلة من أربعة أرقام مختلفة مثنى مثنى.

3) على افتراض أن الهاتف المحمول كان في وضعية الإغلاق، يريد صاحبه فتحه 2mn قبل المرور إلى المحاولة الثانية ، فترة الانتظار بين المحاولة الثانية والثالثة هي: 4mn، وبين الثالثة والرابعة هي 8mn. (فترة الانتظار تتضاعف بين محاولتين متتاليتين).

4) كم عدد الرموز التي يمكن إدخالها بأقصى حد خلال 24 ساعة.

تمرين2:

نرمي قطعة نرد غير متوازنة أوجهها مرقمة من 1 إلى 6 ،

بحيث أن الأوجه الحاملة للأرقام الزوجية لها نفس الاحتمال والأوجه الأخرى لها نفس الاحتمال. مع العلم أن احتمال الحصول على رقم زوجي هو ضعف احتمال الحصول على رقم فردي، احسب:

a) احتمال الحصول على رقم زوجي، b) احتمال الحصول على مضاعف ل 3 c)احتمال الحصول على رقم فردي

تمرين 3:

يمثل الجدول التالي توزيع 1000 شخص حسب الفصيلة الدموية والمعامل Rh (Rhéus)

الفصيلة الدموية / المعامل Rh	A	B	AB	O
Rh^+	328	81	42	360
Rh^-	72	19	8	90

نسأل أحد الأشخاص بصفة عشوائية :

1) ما احتمال أن يكون من الفئة O ؟ 2) ما احتمال أن يكون من المعامل Rh^- ؟

3) نعلم أن شخصا معينا من الفئة O ما احتمال أن يكون من الفئة Rh^- ؟

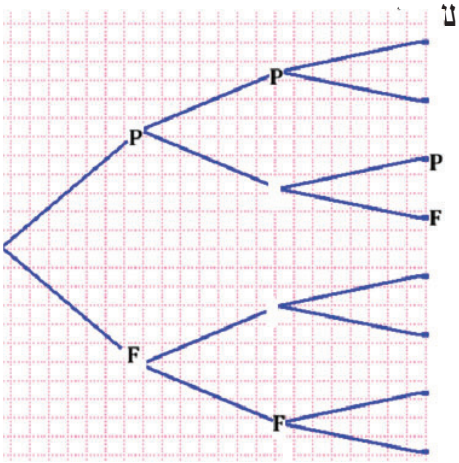
4) نعلم أن شخصا معينا من فئة المعامل Rh^- ما احتمال أن يكون من الفئة O ؟.

IPN

تمرين 4:

نرمي قطعة نرد 3 مرات على التوالي ونرمز بالحرف F لـ

وبالحرف P للظهر.



1) أكمل الشجرة الممثلة لمختلف الإمكانات.

2) احسب احتمال كل من الأحداث التالية :

- A" الحصول 3 مرات على الظهر"
- B " الحصول مرة واحدة على الأكثر الظهر"
- C " الحصول 3 على الأكثر الظهر".

تمرين 5:

في أحد مراكز امتحانات الباكلوريا كان عدد المسجلين 150 مترشحا من بينهم 40% من الإناث. بينت الإحصائيات في ما بعد أن 70% من الأبناء قد نجحوا وأن 95% من البنات نجحن.

1) أكمل الجدول التالي، مستخدما المعطيات السابقة بعد أن تعيد نقل الجدول، مكملا إياه في ورقة الإجابات:

	الناجحون	غير الناجحين	المجموع
الأبناء			
البنات			
المجموع			150

2) نختار عشوائيا مترشحا من هذا المركز (ذكرا أو أنثى). لكل من الأحداث المعطاة، تقترح ثلاثة أجوبة من ضمنها جواب واحد صحيح. اختر الجواب الصحيح معطيا التبرير.

N°	احتمال الحدث	A	B	C
1	المترشح المختار هو بنت	0,7	0,6	0,4
2	المترشح المختار هو ناجح	0,8	0,7	0,6
3	المترشح المختار هو ابن ناجح	0,42	0,7	0,05
4	المترشح المختار هو بنت لم تحصل على المعدل	0,05	0,02	0,2

باكـــلوريا الآداب العصرية بتصرف 2018

IPN

الوضعيـــات السياقيـــة لتمرير المقـــاربة الشمـــولية

الوحـــدات:

- وضعيات مصححة
- وضعيات للتمرن

IPN

❖ وضعيات مصححة

الفصل الأول: المعادلات و المتراجحات

الوضعية 1

يملك مزارع حقلا في هذه المزرعة، على شكل مستطيل محيطه 24 مترا وطوله ضعف عرضه. ساعد محمد على تحديد أبعاد حقله.

التصحيـــــح:

نغتبر عرض الحقل : x ، إذن طوله :2x ومنه، نصف محيط الحقل يساوي: 2x + x. من المعطيات، نستنتج أن: $x = 4 \Leftrightarrow 3x = 12 \Leftrightarrow 2x + x = 12$، ومنه عرض الحقل يساوي : 4 وطوله 8.

الوضعية 2:

شركتان للهواتف المحمولة تقدمان باقات مختلفة، حيث :

- تتقاضى الشركة A رسوم خدمة شهرية تبلغ 2000 أوقية جديدة، إضافة إلى 16 أوقية جديدة لكل دقيقة تحدث.
- تتقاضى الشركة B رسوم خدمة شهرية تبلغ 1 600 أوقية جديدة، إضافة إلى 20 أوقية جديدة لكل دقيقة تحدث.

1)في حال التحدث بمعدل 90 دقيقة، أي الباقتين أفضل؟

2)ما عدد الدقائق الذي تتساوى عنده تكلفة الباقتين؟

3)متى يكون شراء الباقة A أفضل؟ ومتى يكون B هو الأفضل؟

التصحيـــــح:

ليكن x عدد دقائق المكالمات و y التكلفة الإجمالية لكل باقة، عندئذ يمكن أن نترجم تكلفتي الباقتين المقترحتين كما يلي بانسبة ل A : $y = 16x + 2000$ ، بانسبة ل B : $y' = 20x + 1\,600$

1) في حال التحدث بمعدل 90 دقيقة:

- عرض A، يعطي: $16x + 2000 = 3440$
- عرض B، يعطي: $20x + 1\,600 = 3400$

$3400 < 3440$ أي أن الباقة B أفضل من الباقة A

2) تساوي الباقتين : $16x + 2000 = 20x + 1\,600 \Leftrightarrow 20x - 16x = 2000 - 1\,600$

$4x = 400 \Leftrightarrow x = 100$ (مائة دقيقة).

3) شرط اختيار الباقة: نفرض أن A أفضل $\Leftrightarrow 16x + 2000 > 20x + 1\,600 \Leftrightarrow 4x < 400$

$x < 100$، وهو ما يعني أن الباقة B تكون أفضل عندما $x > 100$

الفصل الثاني: عموميات على الدوال

الوضعية :

نافورة ترمي تيارا مائيا على ارتفاع h (بالمتر) وفق مسار تترجمه الصيغة التالية $h(t) = -t^2 + 4t$ حيث t الزمن (بالدقائق)

1) متى يأخذ الماء ارتفاعه الأقصى؟
2) حدد عندئذ هذا الارتفاع.
3) متى يعود الماء من جديد إلى الأرض؟
4) مثل بيانيا ارتفاع تيار الماء من بداية تشغيل النافورة وحتى الدقيقة الرابعة.

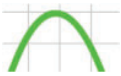
IPN

التصحيـــــح:

1) $h(t) = -t^2 + 4t$، هذه الدالة تأخذ قيمتها العليا في النقطة التي تنعدم فيها المشتقة الأولى وتغير إشارتها من الموجب إلى السالب. نحدد، إذن $h'(t)$، ومن ثَم ندرس إشارتها.

$h'(t) = -2t + 4$ بوضع: $h'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 2$.

الجدول التالي يعطي تغيرات $h(t)$

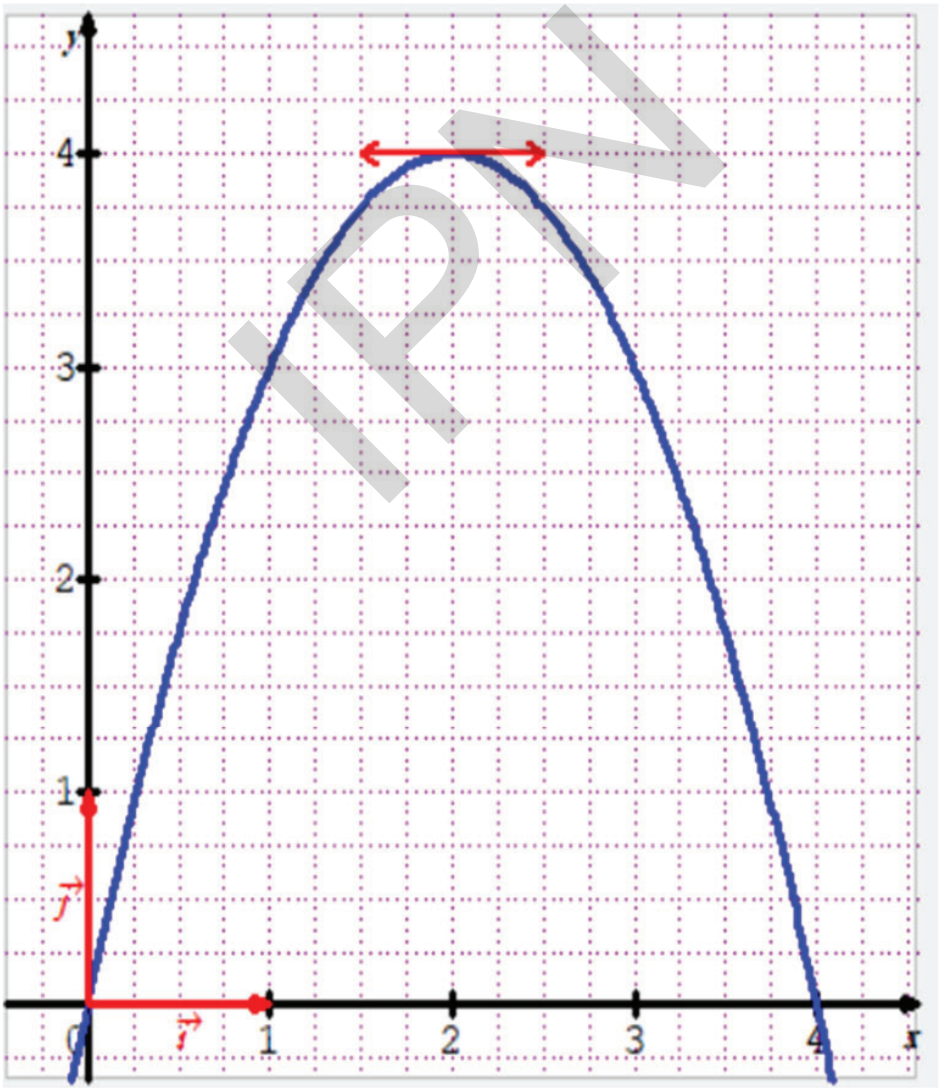
x	0		2		$+\infty$
$h'(t)$		+	0	-	
نهاية حدية عظمى					
$h(t)$			4 متر		

2) تحديد الارتفاع المطلوب: $h(2) = -2^2 + 4\times2 = 4$

3) يعود الماء إلى الأرض، عندما: $h(t) = 0 \Leftrightarrow -t^2 + 4t = 0 \Leftrightarrow -t(t-4)=0 \Leftrightarrow t=0$ أو $t=4$

- $t = 0$ تمثل وضعية الماء عند تشغيل النافورة
- $t = 4$ هي فترة الزمن التي يعود فيها تيار النافورة إلى الأرض .

4) تمثيل الوضعية بيانيا



IPN

الوضعية:

وحدتا تشغيل A وB تقترحان صيغتين تعاقديتين لاكتتاب عامل يدوي، يبحث عن العمل.

الوحدة A : تقترح راتبا قدره $U_1=10\ 000$ أوقية جديدة في الشهر الأول، على أن يشهد زيادة منتظمة تبلغ 160 ابتداء من الشهر الثاني. نعطي U_n الراتب في الشهر n .

1) احسب U_2

2) عبر عن U_{n+1} بدلالة U_n ، مستنتجا طبيعة المتتالية (U_n) ومعطيا إياها بدلالة n .

3) احسب الراتب السنوي وفق هذه الصيغة التعاقدية.

الوحدة B : تقترح راتبا قدره $V_1=7\ 000$ أوقية جديدة في الشهر الأول، على أن يشهد زيادة منتظمة تبلغ 10% ابتداء من الشهر الثاني. نعطي V_n الراتب في الشهر n.

1) احسب V_2

2) عبر عن V_{n+1} بدلالة V_n ، مستنتجا طبيعة المتتالية (V_n) ومعطيا إياها بدلالة n .

3) احسب الراتب السنوي وفق هذه الصيغة التعاقدية.

بناء على ما سبق، أي الصيغتين سيختار العامل؟ مبررا إجابتك.

التصحيـــــح:

الوحدة A:

1) $U_2 = U_1 + 160 = 10000 + 160 = 10160$

2) $U_{n+1} = U_n + 160$

ومنه (U_n) متتالية حسابية أساسها $r = 160$ وحدها الأول $U_1 = 160$ إذن حدها العام:

$$U_n = U_1 + 160(n-1) = 10000 + 160n - 160 = 160n + 9840$$

3) الراتب السنوي:

$$S = U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 + U_6 + U_7 + U_8 + U_9 + U_{10} + U_{11} + U_{12}$$

$$S = \frac{12}{2}(U_1 + U_{12}) = 6(10000 + 160 \times 12 + 9840) = 130560$$

الوحدة B:

1) $V_2 = V_1 + 10\%V_1 = 7000 + \frac{10}{100} \times 7000 = 7000 + 700 = 7700$

2) $V_{n+1} = V_n + 10\%V_n = V_n + \frac{10}{100} \times V_n = V_n + 0,1V_n = 1,1V_n$

ومنه (V_n) متتالية هندسية أساسها $q = 1,1$ وحدها الأول $V_1 = 7000$ إذن حدها العام:

$$V_n = V_1 \times 1,1^{n-1} = 7000 \times 1,1^{n-1}$$

3) الراتب السنوي:

$$S = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + V_5 + V_6 + V_7 + V_8 + V_9 + V_{10} + V_{11} + V_{12}$$

$$S = V_1 \times \frac{1 - 1,1^{12}}{1 - 1,1} = 7000 \times \frac{1 - 1,1^{12}}{1 - 1,1} \approx 149690$$

سيختار العامل التعاقد مع الوحدة B؛ لأنها الأكبر دخلا.

IPN

الفصل الخامس: تنظيم المعطيات

الوضعية:

إبان العطلة الصيفية الماضية سافر محمد ـ وهو تلميذ متجاوز إلى السنة السابعة خلال العام الدراسي المقبل ـ صحبة والده وبعض أفراد الأسرة إلى إحدى الدول المجاورة شمالا عبر الطريق البري، انطلاقا من انواكشوط.
قبل الخروج، ذكَّرَ الوالد أبناءه ببعض الأحكام المتعلقة بالسفر، ومنها حكم القصر، مبينا أن المسافة المجيزة للقصر لا تقل عن أربعة بُرُدٍ. وفي إحدى محطات السفر، وأثناء حديث مع بعض نزلاء إحدى الاستراحات، سمع الوالد أحد الأبناء يقسم على صحة معطيات تتعلق بتاريخ أحد الأندية الرياضية، نافيا ما قاله أحد محاوريه، فما كان منه إلا أن ذكره بأن سلسلة الدروس لا تزال مستمرة، وهذا من فوائد السفر. هل تعلم يا ولدي أن يمينك إن لم تكن صادقة، فعليك دفع كفارة اليمين، وقدرها إطعام عشرة مساكين من أغلب قوت أهل البلد أو صيام ثلاثة أيام. قال الولد، أعرف جبر اليمين بالصوم، لكن ما مقدار إطعام المساكين؟ أجاب الوالد مُدٌّ لكل مسكين من أغلب قوت أهل البلد كالأرز والقمح.
في ضوء ما دار بين الوالد وولده،

- ما مقدار مسافة القصر بالوحدات الدولية الكيلومتر والميل؟
- ما مقدار كفارة اليمين إن لزمت الابن وبالكيلوغرام؟
- ما ثمن مقدار الكفارة، إن وقع الاختيارعلى الأرز، علما أن ثمن خنشة 25 كيلو يبلغ 12 500 أوقية قديمة.

التصحيـــــح:

- مسافة القصر، 4 برد ويقابلها بالوحدات الدولية 84 كيلومترأو48 ميلا.
- مقدار كفارة اليمين يساوي وبالكيلوغرام: $\frac{10}{4}\times(2,5)=\frac{5}{2}\times(2,5)=(2,5)\times(2,5)=6,25$
- ثمن مقدار الكفارة، إن وقع الاختيار على الأرز يساوي: $\frac{12500}{25}\times(6,25)=500\times(6,25)=3125$.

ثمن مقدار الكفارة، إذن هو 3 125 أوقية قديمة.

IPN

الفصل الأول: المعادلات المتراجح

الوضعية 1:

بحوزة أحمد مبلغ 2400 أوقية ويريد أن يشتري ثلاثة كتب بنفس السعر على أن يبقى له مبلغ 150 أوقية.
فكم هو سعر الكتاب الواحد عندئذ؟

الوضعية 2:

يملك عمر250 رأسا من البقر، ويريد أن يبني منزلا في قريته.
تبلغ تكلفة بناء المنزل 2250000 أوقية جديدة، فكم يلزمه من بيع ثروته من البقر، علما أن سعر رأس البقرة هو30000 أوقية جديدة.

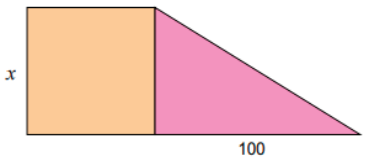
الوضعية 3:

يملك محمد حقلا مربعَ الشكل، يتراوح محيطه ما بين 24 مترا و32 مترا.
ساعد محمدا لمعرفة الطول الممكن لضلع حقله، علما أنه عدد طبيعي من الأمتار.

الوضعية 4:

يوفر أب مبلغا قدره 22500 أوقية قديمة، لتغطية تكاليف نقل ابنه إلى مؤسسته الدراسية، إذا علمت أن هذا النقل يكلف 900 اوقية يوميا، فكم يوما يؤمن الرصيد الذي خصصه الأب لهذا الغرض؟

الوضعية 5:



مزارعان يملكان حقلين لهما جانب مشترك يريدان معرفة طوله.
أحد الحقلين مربع الشكل، والآخر على شكل مثلث قائم الزاوية بقاعدة 100 متر كما في الشكل. إذا علمت أن الحقلين متساويان في المساحة،
فما طول الجانب المشترك؟

الوضعية 6:

نفرض أن إحدى المواد التي تنتجها الموريتانية للألبان يتراوح سعرها x ما بين 20 أوقية جديدة و50 أوقية جديدة. يتم الإنتاج وفق قواعد ومعطيات، من أهمها:

- العرض هو عدد السلع التي يقدمها المنتج إلى السوق بسعرx أوقية.
- الطلب هو العدد المحتمل للسلع التي يرغب المستهلكون في شرائها عند العرض

يتم حساب الطلب، معبرا عنه بمئات البضائع، ب : $d(x) = -750x + 45000$.

يتم حساب عرض السعر، المعبر عنه بمئات البضائع، بسعر $P(x) = \frac{-500000}{x} + 35000$.

الهدف من هذا التمرين هو معرفة الأسعار التي تجعل العرض أعلى من الطلب.

1) اكتب الصيغة الرياضية التي تترجم الوضعية سعيا لحلها.

1.أ) أثبت أن $P(x) > d(x)$ تعني أن : $-750x^2 + 10000x < -500000$.

ب. قم بنشر العبارة $(x + 20)(3x - 100)$.

ج. استنتج حلول: $P(x) > d(x)$ وما دلالتها المتعلقة بالعرض والطلب.

IPN

الفصل الثاني: عموميات على الدوال

الوضعية 1:

ضمن إنتاج الموريتانية للألبان، يتم إنتاج نموذج الحليب الذي يعرف بالحوض. على افتراض أن متوسط التكلفة (بالأوقية) للوحدة (العلبة الواحدة) هو: $g(x)=\frac{500}{x}+20$ ، حيث x العدد المنتج.

حدد متوسط التكلفة إذا أنتجت الشركة:

✓ 1000 علبة يوميا، ثم 5000 يوميا.

✓ حدد $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ وما تفسير ذلك اقتصاديا؟

الوضعية 2:

1) بضاعة ثمنها 1200 أوقية جديدة، عرفت ارتفاعا مفاجئا نسبته 25% ثم انخفاضا نسبته x% ، بعده أصبح ثمن البضاعة 1200 أوقية جديدة.

ضع المعطيات في صيغة معادلة مستنتجا قيمة x .

2) بشكل عام ، نرمز ب P: لثمن البضاعة بالأوقية الجديدة، شهد ارتفاعا نسبته x ثم انخفاضا نسبته y ليعود إلى ثمنه الأصلي P . بين أن $y=\frac{100x}{x+100}$

3) نعتبر الدالة المعرفة على [0 ; 100] ب: $f(x)=\frac{100x}{x+100}$ وليكن (C_f) منحنيها البياني في مرجع قائم ومنتظم $(O;\vec{i};\vec{j})$ وحدته 5 سنتيمتر.

a) بين أن $f(x)=100-\frac{100}{x+100}$

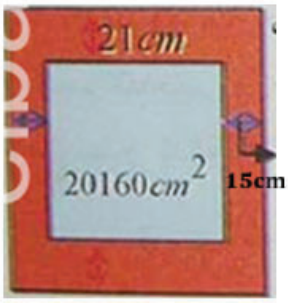
b) ادرس تغيرات الدالة f على [0 ; 100] ، معطيا جدول التغيرات.

c) حدد معادلة المماس T للمنحني (C_f) عند النقطة التي فاصلتها 0.

a.4) حل المعادلة $y=\frac{2}{3}x$

b) فسر حلول المعادلة السابقة بيانيا.

الوضعية 3:

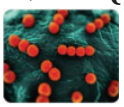


لمحل تجاري، باب مستطيل الشكل ووسطه زجاجة مساحتها $20\ 160\ cm^2$.
الزجاجة محاطة بالخشب يمينا ويسارا ومن الأعلى ومن الأسفل، حيث يقدر عرض الخشب على التوالي وفي مختلف الجهات ب: 15 cm لكل جهة أفقيا و ب: 21 cm لكل جهة عموديا. احسب بعدي الباب، حيث تكون مساحته الكلية أصغر ما يمكن.

IPN

الوضعية:

في دراسة مخبرية وجد أن فصيلة بكتيرية تتكاثر خلال t ساعة لتعطي: $P(t) = 500\ln(t+1)$ ، حيث $P(t)$ عدد البكتيريا و ln ترمز لدالة اللوغاريتم النيبيري.



ما عدد هذا التجمع البكتيري :

1) بعد 1 ساعة ؟

2) بعد 5 ساعة ؟

3) بعد مرور ما لا نهاية من الزمن، كم سيكون عدد التجمع البكتيري موضوع الدراسة؟

الفصل الرابع: المتتاليات العددية

الوضعية

توفي رجل و ترك تسعة أولاد و إحدى وثمانين نخلة، تعطي النخلة الأولى في كل سنة تمرا زنته رطلا واحدا والثانية رطلان، و الثالثة ثلاثة أرطال ... و هكذا إلى النخلة الحادية و الثمانين التي تعطي واحدا و ثمانين رطلا.

والمطلوب : تقسيم النخلات بحيث تكون الأنصبة متساوية، من حيث الانتفاع من التمر، بمعنى أن يكون لكل ولد تسع نخلات تعطي عددا من الأرطال يساوي العدد الذي يحصل عليه الثاني من نخلاته التسع و

الحل الذي قدمه ابن حمزة

أرقام النخيل	الولد الأول	الولد الثاني	الولد الثالث	الولد الرابع	الولد الخامس	الولد السادس	الولد السابع	الولد الثامن	الولد التاسع
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	~~18~~	10	11	12	13	14	15	16	17
	26	~~27~~	19	20	21	22	23	24	25
	34	35	~~36~~	27	29	30	31	32	33
	42	43	44	~~45~~	37	38	39	40	41
	50	51	52	53	~~54~~	46	47	48	49
	58	59	60	61	62	~~63~~	55	56	57
	66	67	68	69	70	71	~~72~~	64	65
	74	75	76	77	78	79	80	~~81~~	73
عدد الأرطال	369	369	369	369	369	369	369	369	369

فسر هذا الحل حسابيا، معطيا حلا آخر.

الوضعية (زكاة الذهب والفضة):

في إطار التنقيب الأهلي عن الذهب في الشمال، شكل فريق من ثلاثة شبان: آداما، امبارك وإبراهيم مجموعة للتنقيب ذات مشروع طموح، تتمثل خطوطه العريضة في تسيير أول كمية من الذهب يستخرجونها وذلك على النحو التالي:

- بيع 25% منها لتغطية مصاريف الحفر.
- 15% للادخار
- 12% يشترون بها سبائك فضية، ويتم إيداعها في صندوق الادخارعينا.
- الباقي يتقاسمونه بالتساوي لأغراضهم الشخصية.

عندما بلغ الحفر مداه الطبيعي، كانت المفاجأة، إذ حصل الفريق على كمية بلغت 3 كيلوغرامات من الذهب الخالص بعد التنقية.

علما أن سعر كيلوغرام الذهب يبلغ 31 مليون أوقية قديمة، و كيلوغرام الفضة، نصف مليون أوقية قديمة.

إذا علمت أن نصاب زكاة الذهب هو85 غراما وبالنسبة للفضة 595 غرام عند تمام الحول ، حينها يجب إخراج 2,5% من قيمة كل منهما.

المطلوب، حساب العائد الإجمالي من العملة لثلاثي التنقيب وما مقدار الزكاة الواجب عليهم صرفها.

IPN